# JOURNAL

DE

# MATHÉMATIQUES

## PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE



DE SAINT-VENANT


**Intégration d'une équation différentielle qui se présente dans la théorie de la flexion des verges élastiques**


*Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série*, tome 9 (1844), p. 191-192.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1844_1_9__191_0>

*Intégration d'une équation différentielle qui se présente dans la théorie de la flexion des verges élastiques,*

### Par M. DE SAINT-VENANT.

Dans la théorie de la flexion des verges élastiques à double courbure sollicitées par des forces quelconques, on obtient trois équations [*] :

$$(1) \qquad \frac{\delta ds}{ds} = \mathrm{D}, \quad \frac{1}{ds}\delta\frac{ds}{\rho} = \mathrm{F}, \quad \frac{1}{ds}\delta\frac{ds}{\tau} = \mathrm{T},$$

dans lesquelles D, F, T représentent des fonctions connues des coordonnées primitives $x, y, z$ d'un point quelconque $m$ de l'*axe* courbe de la pièce, S la longueur de l'arc de cet axe jusqu'au point $m$, $\frac{ds}{\rho}$ et $\frac{ds}{\tau}$ l'angle de contingence et l'angle de deux plans osculateurs consécutifs de la même courbe à ce point; enfin $\delta$ la caractéristique des variations provenant des déplacements très-petits des points de l'axe, déterminés par l'action des forces données, dont les composantes et les moments entrent dans D, F, T.

Ce sont ces déplacements $\xi = \delta x$, $\eta = \delta y$, $\zeta = \delta z$, estimés parallèlement aux $x, y, z$, qu'il s'agit de trouver.

Pour cela, effectuons les différentiations par $\delta$ des premiers membres des équations précédentes; après avoir remplacé $ds$, $\frac{ds}{\rho}$, $\frac{ds}{\tau}$ par leurs expressions générales connues en $x, y, z$, nous aurons trois équations différentielles simultanées du premier, du deuxième et du troisième ordre en $\xi, \eta, \zeta$. Si nous éliminons deux de ces inconnues, par exemple $\eta$ et $\zeta$ (ce qui se fait facilement en différentiant la première équation et en en tirant les valeurs de $d^2\eta$, $d^2\zeta$, d'où, à l'aide de la seconde équation, celles de $d\eta$ et $d\zeta$ que l'on substitue dans la troisième), les intégrales disparaissent et nous obtenons une équation en $\xi$,

$$(2) \qquad \left\{\begin{aligned} &d\xi\, d^2y\, d^3z - d\xi\, d^2z\, d^3y + dy\, d^2z\, d^3\xi - dy\, d^2\xi\, d^3z \\ &\qquad + dz\, d^2\xi\, d^3y - dz\, d^2y\, d^3\xi = \mathrm{S}ds^6, \end{aligned}\right.$$

[*] *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* tome XVII, page 952.

dans laquelle S représente une certaine fonction connue (comme D, F, T) des coordonnées primitives du point $m$, ou de l'arc $s$ que l'on peut prendre pour variable indépendante.

Si l'on remplace, dans le premier membre, $y$ et $z$ par leurs valeurs en $s$, tirées des équations de la courbe primitive de l'axe, on n'a plus, dans l'équation précédente, que $\xi$ et $s$. Cette équation différentielle du troisième ordre est linéaire; mais les coefficients de $\frac{d\xi}{ds}$, $\frac{d^2\xi}{ds^2}$, $\frac{d^3\xi}{ds^3}$ n'y sont point constants, et il n'existe pas de méthode générale pour résoudre, par rapport à $\xi$, une équation de ce genre.

Aussi j'ai cherché à intégrer directement l'équation (2) sans particulariser son second membre. J'y ai réussi en posant

$$d\xi = u dz, \quad dy = v dz.$$

La substitution dans les six termes du premier membre en produit vingt-deux, mais il y en a vingt qui s'entre-détruisent, et ce premier membre se réduit à

$$dz^3 (du\, d^2v - dv\, d^2u) = -\, dz^3\, dv^2\, d\,.\frac{du}{dv}.$$

Donc on a

$$-\, dz^3 \left(d\,.\frac{dy}{dz}\right)^2 d\,.\frac{d\,.\frac{d\xi}{dz}}{d\,.\frac{dy}{dz}} = \mathrm{S} ds^6,$$

équation qui est intégrable; on en tire

$$\frac{d\xi}{dz} = -\int\left(d\,.\frac{dy}{dz}\right)\int\frac{\mathrm{S} ds^6}{dz^3\left(d\,.\frac{dy}{dz}\right)^2};$$

et l'on fait disparaître l'intégrale double en intégrant par parties, ce qui donne

$$d\xi = dz\int\frac{\mathrm{S} ds^6}{(dy\, d^2z - dz\, d^2y)^2}\, dy - dy\int\frac{\mathrm{S} ds^6}{(dy\, d^2z - dz\, d^2y)^2}\, dz.$$

On aurait des expressions analogues pour $d\eta$, $d\zeta$.

La recherche des petits déplacements des points de l'axe d'une pièce courbe à double courbure est ainsi ramenée aux quadratures, et l'on voit que le polynôme différentiel qui forme le premier membre de l'équation (2) est intégrable quand, après l'avoir multiplié par $dz$ ou $dy$, on le divise par $(dy\, d^2z - dz\, d^2y)^2$.