

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

---

CH. DELAUNAY

**Mémoire sur la théorie des marées**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 1<sup>re</sup> série*, tome 9 (1844), p. 29-72.

[http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1844\\_1\\_9\\_29\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1844_1_9_29_0)

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

---

MÉMOIRE  
SUR LA THÉORIE DES MARÉES,

PAR M. CH. DELAUNAY.

---

Le phénomène des marées a déjà été l'objet des recherches d'un grand nombre de savants, et, quoique depuis longtemps ce phénomène soit rattaché au grand principe de la gravitation universelle, on est loin d'en avoir déduit l'explication des diverses circonstances principales qu'il présente.

Newton, et ensuite Bernoulli, en considérant la Terre comme sphérique et entièrement recouverte par la mer, supposent que la surface du liquide prend à chaque instant la figure qui convient à son équilibre sous les actions de la Lune et du Soleil. Chacun de ces astres, s'il agissait seul, lui donnerait la forme d'un ellipsoïde de révolution allongé, dont l'axe serait dirigé vers le centre de cet astre; et comme ces deux ellipsoïdes diffèrent très-peu d'une sphère, on peut admettre qu'ils se superposent, c'est-à-dire que la hauteur de la surface de la mer au-dessus de la surface sphérique d'équilibre qu'elle prendrait si elle n'était soumise à aucune action extérieure, est égale à la somme des hauteurs des surfaces de chacun des ellipsoïdes au-dessus de cette surface sphérique au même point. Il est facile de voir quelles sont les conséquences de cette théorie; en effet, les deux ellipsoïdes lunaire et solaire ayant leurs axes constamment dirigés vers les astres qui les produisent, tourneront autour de la Terre avec des vitesses différentes, et chacun d'eux, en accomplissant une révolution entière, donnera lieu à deux pleines mers et deux basses mers, dans tous les points de la surface de la Terre, excepté aux deux pôles, où la hauteur de la mer ne variera qu'avec la déclinaison de l'astre. Si l'on suppose que le Soleil et la Lune se meuvent dans le plan de l'équateur, la pleine mer arrivera partout à midi.

et à minuit lors des syzygies, et la marée sera plus forte à cette époque qu'à aucune autre : aux quadratures, la pleine mer arrivera au moment du passage de la Lune au méridien, puisque l'action de cet astre est plus forte que celle du Soleil, et la marée sera à son minimum ; aux époques intermédiaires entre les syzygies et les quadratures, l'heure de la pleine mer avancera ou retardera plus ou moins sur le passage de la Lune au méridien. Ces conséquences ne sont évidemment pas d'accord avec ce qu'on observe dans nos ports, puisque, à l'époque des syzygies par exemple, la pleine mer, au lieu d'arriver à midi et à minuit, arrive à des heures très-différentes d'un port à l'autre, et que le maximum de la marée n'a lieu qu'environ un jour et demi après la syzygie. Newton attribue ces retards à l'inertie de la mer, qui conserverait encore son mouvement d'oscillation si l'action des astres cessait, et aussi en partie au frottement des eaux contre le fond.

Lorsque le Soleil et la Lune ne sont pas dans le plan de l'équateur, on reconnaît aisément que, d'après la théorie précédente, les choses doivent se passer à peu près de la même manière ; la seule différence essentielle qui se présente, c'est que, en chaque point de la Terre non situé sur l'équateur, les deux marées d'un même jour sont inégales, et que leur différence peut être considérable, ce qui est encore contraire aux observations, d'après lesquelles la différence des deux marées d'un même jour est généralement très-petite relativement à chacune d'elles. Newton attribue cette nouvelle discordance entre la théorie et les observations, à la même cause par laquelle il a expliqué le retard de l'instant de la pleine mer syzygie sur le passage des astres au méridien, et celui du maximum de la marée sur le moment de la syzygie. Sur tous ces points Bernoulli adopte entièrement les idées de Newton. Mais, qu'on admette ou non les explications de ce grand géomètre, il n'en est pas moins évident que la théorie de l'équilibre de la mer à chaque instant doit être rejetée, puisque les conséquences nécessaires de cette théorie ne sont pas d'accord avec les observations.

Laplace, qui s'est beaucoup occupé des marées, a considéré de suite la question sous le véritable point de vue, en cherchant à déterminer les oscillations des eaux de la mer, qui ont lieu sous l'influence des actions de la Lune et du Soleil. Il est parvenu à résoudre complètement ce problème, en supposant que la mer recouvre entièrement la Terre,

à laquelle il a attribué la figure d'un ellipsoïde de révolution peu aplati, et en tenant compte de son mouvement de rotation sur elle-même, circonstance qui complique beaucoup la question. Il a reconnu ainsi que les retards de la plus grande marée sur l'instant de la syzygie, et de l'heure de la pleine mer sur le passage de la Lune au méridien, ne pouvaient en aucune manière être attribués à l'inertie des eaux de la mer, puisque, d'après son analyse rigoureuse, la plus grande marée doit avoir lieu à l'instant de la syzygie et au moment même du passage des astres au méridien. Il a vu aussi que, dans l'hypothèse qu'il avait adoptée, la différence entre les deux marées d'un même jour devenait d'autant plus faible que la profondeur de la mer était plus près d'être constante sur toute la surface de la Terre.

La théorie de Laplace, tout en faisant voir que la presque égalité entre les deux marées d'un même jour n'était pas contraire au principe de la gravitation universelle, puisque ces deux marées seraient égales dans un cas mathématiquement possible, celui d'une mer libre de toutes parts et également profonde, ne rendait pas compte des retards de la pleine mer sur le passage de la Lune, et de la plus grande marée sur la syzygie. Laplace attribue le retard de la pleine mer sur le passage de la Lune au méridien, aux circonstances locales qui varient d'un port à un autre. Quant au retard de la plus grande marée sur l'instant de la syzygie, il semble avoir toujours gardé quelque incertitude sur sa cause. Dans son premier Mémoire sur les marées, il dit que ce retard lui semble être l'effet des obstacles que la mer éprouve dans ses oscillations; plus tard, dans son *Exposition du Système du Monde*, et aussi dans le t. V de la *Mécanique céleste*, il attribue ce retard à la réflexion des ondulations de la mer sur la côte orientale de l'Amérique, sans cependant donner cette explication comme bien certaine.

C'est le désir de connaître la véritable cause de ce retard du maximum de la marée sur l'instant de la syzygie, qui m'a fait entreprendre le travail dont je présente ici une première partie. Je me proposais pour cela de discuter les observations de marées faites à Brest, et publiées récemment par le Bureau des Longitudes; mais cette discussion ne pouvait être faite avec quelque avantage qu'autant que j'aurais eu des idées précises sur la manière dont se produisent les marées à Brest, et

en général dans la partie nord de l'océan Atlantique. Il est, en effet, d'une grande importance de savoir si ces marées sont produites directement par les actions de la Lune et du Soleil, ou bien si ce ne sont que des marées dérivées, et, dans ce cas, quelle est leur origine. La première idée m'avait toujours paru la plus naturelle et la plus probable. Cependant, en lisant les Mémoires que MM. Lubbock et Whewell ont présentés il y a quelques années à la Société royale de Londres, et qui ont pour objet la théorie des marées, j'ai vu, non sans quelque surprise, qu'ils adoptaient la seconde. Ils supposent que, dans la mer du Sud, les marées se produisent conformément à la théorie de Bernoulli, parce que cette mer, étant à peu près libre de continents tout autour de la Terre, se rapproche de l'hypothèse adoptée par ce géomètre; ils admettent en outre que ces marées de la mer du Sud produisent dans l'océan Atlantique des ondulations qui se propagent du sud au nord, et donnent lieu ainsi en grande partie aux marées qu'on observe sur les côtes de l'Europe. Les faits sur lesquels se fondent les deux savants anglais sont incontestables : mais en examinant attentivement ces faits, il m'a semblé qu'ils pouvaient très-bien s'accorder avec l'idée que les marées de la partie nord de l'océan Atlantique sont en grande partie des marées directes. L'objet principal de ce premier Mémoire est de faire connaître les divers motifs qui me portent à regarder cette idée comme exacte.

Pour arriver à des résultats concluants, j'ai dû chercher à comparer les marées produites dans une mer limitée, à celles qui auraient lieu si la mer était entièrement libre; mais l'extrême complication de la question m'a obligé à considérer un cas purement théorique qui ne peut pas se présenter dans la nature. Les notions que j'ai pu en déduire doivent néanmoins jeter quelque jour sur ce qui a lieu réellement. Comme je voulais m'occuper spécialement du mouvement des eaux en longitude, dans une mer limitée par deux méridiens, j'ai considéré la Terre comme ayant la figure d'un cylindre indéfini, dont l'axe serait la ligne des pôles, sur lequel serait répandu un liquide dont tous les mouvements, indépendants de l'état initial, s'effectueraient suivant des directions perpendiculaires aux génératrices. C'est ainsi que j'ai été conduit aux recherches analytiques contenues dans les trois premiers paragraphes de ce Mémoire; le quatrième renfermera les considérations

à l'aide desquelles je crois pouvoir démontrer que les marées se produisent directement dans la partie nord de l'océan Atlantique.

§ I.

*Formules pour les attractions de cylindres.*

1. Considérons un cylindre dont les génératrices soient parallèles à l'axe des  $x$ , dont la section normale soit très-peu différente d'un cercle ayant son centre sur cet axe, et dont la densité, variable en général d'un point à un autre, soit la même pour tous les points situés sur une parallèle aux génératrices. Nous allons nous proposer de déterminer l'attraction de ce cylindre sur un point dont les coordonnées sont  $a, b, c$ .

Soient  $x, y, z$  les coordonnées d'une molécule quelconque  $dM$  du cylindre : les composantes de l'attraction exercée par ce cylindre sur le point  $(a, b, c)$  seront, comme l'on sait, les dérivées partielles relatives à  $a, b, c$ , de la fonction

$$\iiint \frac{dM}{\sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2}},$$

l'intégrale s'étendant à toutes les molécules du cylindre qu'on suppose indéfini dans le sens des  $x$  positives et dans le sens des  $x$  négatives. La composante parallèle à l'axe des  $x$  étant évidemment nulle, on peut, dans la fonction précédente, faire  $a = 0$ , puisque cette fonction est indépendante de  $a$ , et elle deviendra

$$\iiint \frac{dM}{\sqrt{x^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2}}.$$

On peut regarder l'élément  $dM$  comme étant un prisme droit dont la base  $\omega$  est infiniment petite, et dont la hauteur, parallèle à l'axe des  $x$ , est égale à  $dx$ ; en sorte que, si l'on nomme  $\rho$  la densité de la molécule que l'on considère, densité qui ne sera fonction que de  $y$  et de  $z$ , on aura

$$dM = \rho \omega dx.$$

Remplaçant  $dM$  par sa valeur, on pourra effectuer l'intégration relative-

vement à  $x$ ; mais comme l'on devra étendre l'intégrale depuis  $-\infty$  jusqu'à  $+\infty$ , la fonction deviendra infinie. Pour éviter la difficulté qui en résulterait, nous retrancherons de cette fonction une quantité également infinie, indépendante de  $b$  et de  $c$ , et telle que la différence conserve une valeur finie. Cette différence jouira toujours de la propriété de donner les attractions parallèles aux axes des  $y$  et des  $z$ , par des différentiations partielles relatives à  $b$  et à  $c$ .

Pour cela, supposons d'abord que l'intégrale relative à  $x$  soit prise entre les limites  $-\alpha$  et  $+\alpha$ , et soit, pour un instant,

$$(b - y)^2 + (c - z)^2 = \zeta^2;$$

la fonction qu'on considère deviendra

$$\begin{aligned} \int \int \rho \omega \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{dx}{\sqrt{\zeta^2 + x^2}} &= \int \int \rho \omega l. \frac{\alpha + \sqrt{\zeta^2 + \alpha^2}}{-\alpha + \sqrt{\zeta^2 + \alpha^2}} \\ &= 2 \int \int \rho \omega l. \frac{\alpha + \sqrt{\zeta^2 + \alpha^2}}{\zeta} = 2 \int \int \rho \omega l. (\alpha + \sqrt{\zeta^2 + \alpha^2}) - 2 \int \int \rho \omega l. \zeta. \end{aligned}$$

Le premier terme devient infini pour  $\alpha = \infty$ ; mais si l'on retranche de la fonction la quantité

$$2 \int \int \rho \omega l. 2 \alpha,$$

la différence, que nous désignerons par  $V$ , deviendra

$$V = 2 \int \int \rho \omega l. \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{\zeta^2}{\alpha^2}} \right) - 2 \int \int \rho \omega l. \zeta;$$

et si l'on y fait  $\alpha = \infty$ , et qu'on remplace  $\zeta$  par sa valeur, on aura

$$(1) \quad V = - \int \int \rho \omega l. [(b - y)^2 + (c - z)^2].$$

Cette fonction  $V$  satisfait, comme on peut s'en assurer, à l'équation aux différences partielles

$$(2) \quad \frac{d^2 V}{db^2} + \frac{d^2 V}{dc^2} = 0,$$

en supposant toutefois que le point attiré ne fait pas partie de la masse du cylindre.

2. Transformons, pour plus de commodité, les coordonnées parallèles aux axes des  $y$  et des  $z$  en coordonnées polaires, et nommons  $r$  la distance du point attiré à l'axe des  $x$ , et  $\varpi$  l'angle que fait  $r$  avec le plan des  $xy$  : nous aurons évidemment

$$b = r \cos \varpi, \quad c = r \sin \varpi.$$

Nous aurons de même, en désignant par  $R$  et  $\varpi'$  les quantités analogues pour un point quelconque du cylindre,

$$y = R \cos \varpi', \quad z = R \sin \varpi',$$

et de plus

$$\omega = R dR d\varpi';$$

la fonction  $V$  deviendra donc

$$V = - \int \int \rho R dR d\varpi' l. [r^2 - 2Rr \cos(\varpi' - \varpi) + R^2],$$

et par suite l'équation (2) se changera dans la suivante

$$(3) \quad \frac{d^2V}{d\varpi^2} + r \frac{d}{dr} \left( r \frac{dV}{dr} \right) = 0.$$

3. Supposons d'abord que le cylindre soit de révolution autour de l'axe des  $x$ , et qu'il soit composé de couches de densité constante, également de révolution autour de cet axe, et nous pourrions déterminer complètement la valeur de  $V$ . En vertu de cette hypothèse,  $\rho$  ne dépend que de  $R$ , et  $V$  peut s'écrire ainsi, en indiquant les limites des intégrales :

$$V = - \int_0^a \rho R dR \int_0^{2\pi} d\varpi' l. [r^2 - 2Rr \cos(\varpi' - \varpi) + R^2].$$

$a$  étant le rayon du cylindre.

Si le point attiré est extérieur au cylindre,  $r$  est plus grand qu'une valeur quelconque de  $R$  : dans ce cas,  $V$  se décomposera dans les deux parties suivantes,

$$V = - 2 \int_0^a \rho R dR \int_0^{2\pi} d\varpi' l. r \\ - \int_0^a \rho R dR \int_0^{2\pi} d\varpi' l. \left[ 1 - 2 \frac{R}{r} \cos(\varpi' - \varpi) + \frac{R^2}{r^2} \right].$$

5..



Mais, d'après une formule connue, on a

$$\int_0^{2\pi} d\varpi' l. \left[ 1 - 2 \frac{R}{r} \cos(\varpi' - \varpi) + \frac{R^2}{r^2} \right] = 0,$$

tant que  $\frac{R}{r} < 1$ . On aura donc

$$V = -4\pi l. r \int_0^a \rho R dR;$$

et si l'on représente par  $M$  la masse d'une portion du cylindre comprise entre deux plans perpendiculaires à son axe, et distants l'un de l'autre de l'unité linéaire,

$$(4) \quad V = -2 M l r.$$

Si le point attiré est intérieur au cylindre, on devra considérer successivement les couches du cylindre par rapport auxquelles ce point est intérieur, et celles par rapport auxquelles il est extérieur. Pour les premières,  $r$  est plus petit que  $R$ , et l'on verra, comme précédemment, que la partie de  $V$  qui s'y rapporte se réduit à

$$-2 \int \rho R dR \int_0^{2\pi} d\varpi' l. R.$$

Cette partie étant indépendante de  $r$  et de  $\varpi$ , on voit que ces couches extérieures au point attiré n'exercent aucune action sur ce point; on peut donc ne pas tenir compte de cette partie de la valeur totale de  $V$ . Pour les couches par rapport auxquelles le point attiré est extérieur,  $r$  est plus grand que  $R$ : on pourra donc appliquer la formule (4), et l'on aura

$$(5) \quad V = -2 M_1 l. r,$$

$M_1$  étant ce que devient  $M$  lorsqu'on y supprime ce qui vient des couches extérieures au point attiré.  $M_1$  est fonction de  $r$ ; cependant, dans la différentiation de  $V$  par rapport à  $r$ , pour avoir l'attraction suivant cette ligne, on ne devra pas faire varier  $M_1$ . On trouvera ainsi pour cette attraction,

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{2M_1}{r};$$

ou bien, si l'on remplace  $M_1$  par sa valeur, dans l'hypothèse où  $\rho$  serait indépendant de  $R$ ,

$$\frac{dV}{dr} = - 2\pi\rho r.$$

4. Considérons maintenant le cas où les couches d'égale densité dont se compose le cylindre ne sont pas de révolution autour de l'axe des  $x$ , et cherchons à développer, dans ce cas, la fonction  $V$  en série convergente.

Si nous supposons d'abord que le point attiré soit extérieur au cylindre, nous pourrions développer  $V$  suivant les puissances inverses de  $r$ . Mais avant de faire ce développement, nous remarquerons que, pour  $r = \infty$ ,  $V$  devient infini : nous décomposerons donc cette fonction en deux parties, de la manière suivante

$$V = 2 \int \int \rho R dR d\varpi' l. \frac{1}{r} + 2 \int \int \rho R dR d\varpi' l. \frac{1}{\sqrt{1 - 2 \frac{R}{r} \cos(\varpi' - \varpi) + \frac{R^2}{r^2}}},$$

et la seconde partie pourra se développer suivant les puissances de  $\frac{1}{r}$ . Si l'on pose alors

$$V = U_0 l. \frac{1}{r} + \frac{U_1}{r} + \frac{U_2}{r^2} + \dots + \frac{U_n}{r^n} + \dots,$$

on aura

$$U_0 = 2 \int \int \rho R dR d\varpi',$$

et  $U_n$  sera déterminé par l'équation différentielle

$$\frac{d^2 U_n}{d\varpi^2} = - n^2 U_n,$$

obtenue en remplaçant  $V$  par sa valeur dans l'équation (3). En intégrant, on trouve

$$U_n = A \cos n\varpi + B \sin n\varpi.$$

Nous remarquerons d'abord que  $U_0$  représente le double de la masse d'une portion du cylindre, ayant pour hauteur l'unité linéaire. Quant à  $U_n$ , au lieu de chercher les valeurs des constantes  $A$  et  $B$  qu'il ren-

ferme, nous pouvons le déterminer directement de la manière suivante :

On a

$$1 - 2 \frac{R}{r} \cos(\varpi' - \varpi) + \frac{R^2}{r^2} = \left[ 1 - \frac{R}{r} e^{(\varpi' - \varpi) \sqrt{-1}} \right] \left[ 1 - \frac{R}{r} e^{-(\varpi' - \varpi) \sqrt{-1}} \right];$$

$$l. \left[ 1 - \frac{R}{r} e^{(\varpi' - \varpi) \sqrt{-1}} \right] = - \left[ \begin{array}{l} \frac{R}{r} e^{(\varpi' - \varpi) \sqrt{-1}} + \frac{R^2}{2r^2} e^{2(\varpi' - \varpi) \sqrt{-1}} + \dots \\ + \frac{R^n}{nr^n} e^{n(\varpi' - \varpi) \sqrt{-1}} + \dots \end{array} \right];$$

$$l. \left[ 1 - \frac{R}{r} e^{-(\varpi' - \varpi) \sqrt{-1}} \right] = - \left[ \begin{array}{l} \frac{R}{r} e^{-(\varpi' - \varpi) \sqrt{-1}} + \frac{R^2}{2r^2} e^{-2(\varpi' - \varpi) \sqrt{-1}} + \dots \\ + \frac{R^n}{nr^n} e^{-n(\varpi' - \varpi) \sqrt{-1}} + \dots \end{array} \right];$$

on en déduit

$$l. \frac{1}{\sqrt{1 - 2 \frac{R}{r} \cos(\varpi' - \varpi) + \frac{R^2}{r^2}}} = \frac{R}{r} \cos(\varpi' - \varpi) + \frac{R^2}{2r^2} \cos 2(\varpi' - \varpi) + \dots$$

$$+ \frac{R^n}{nr^n} \cos n(\varpi' - \varpi) + \dots,$$

et par suite, en substituant dans la valeur de V, on aura pour les coefficients  $U_0, U_1, U_2, \dots$  les valeurs

$$(6) \quad \begin{cases} U_0 = 2 \int \int \rho R dR d\varpi', \\ U_n = \frac{2}{n} \int \int \rho R^{n+1} dR d\varpi' \cos n(\varpi' - \varpi). \end{cases}$$

Lorsque le point attiré sera intérieur au cylindre, on décomposera V en deux parties : l'une, relative aux points situés plus près de l'axe des  $x$  que le point attiré, se déterminera comme dans le cas précédent; l'autre, relative aux points plus éloignés de l'axe des  $x$  que le point attiré, pourra se développer suivant les puissances de  $r$ . Pour cela, on mettra cette partie de V sous la forme

$$V = 2 \int \int \rho R dR d\varpi' l. \frac{1}{R}$$

$$+ 2 \int \int \rho R dR d\varpi' l. \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2r}{R} \cos(\varpi' - \varpi) + \frac{r^2}{R^2}}};$$

et si l'on pose

$$V = v_0 + r v_1 + r^2 v_2 + \dots + r^n v_n + \dots,$$

on trouvera, comme précédemment,

$$(7) \quad \begin{cases} v_0 = 2 \int \int \rho R dR d\varpi' l. \frac{1}{R}, \\ v_n = \frac{2}{n} \int \int \frac{\rho dR d\varpi' \cos n(\varpi' - \varpi)}{R^{n-1}}. \end{cases}$$

5. Appliquons les formules précédentes au cas où le cylindre est homogène, et supposons que sa surface diffère peu d'une surface cylindrique de révolution autour de l'axe des  $x$ , dont le rayon serait  $a$ , et dont la section droite serait équivalente à celle du cylindre proposé. Soit  $a(1 + \gamma')$  la distance d'un point quelconque de la surface du cylindre à l'axe,  $\gamma'$  étant une très-petite quantité, fonction de  $\varpi'$ , dont nous négligerons le carré. La valeur de  $U_n$  (6) se composera de deux parties, qui seront

$$U_n = \frac{2\rho}{n} \int_0^a R^{n+1} dR \int_0^{2\pi} d\varpi' \cos n(\varpi' - \varpi) \\ + \frac{2\rho}{n} \int_0^{2\pi} a^{n+2} \gamma' d\varpi' \cos n(\varpi' - \varpi).$$

La première partie, relative au cylindre de révolution, est nulle, comme il est facile de le voir; la seconde partie, relative à la différence entre le cylindre proposé et le cylindre de révolution, est donc la seule qui entre dans la valeur de  $U_n$ , et l'on aura

$$U_n = \frac{2\rho a^{n+2}}{n} \int_0^{2\pi} \gamma' \cos n(\varpi' - \varpi) d\varpi'.$$

$\gamma'$  étant une fonction périodique de  $\varpi'$ , nous pouvons supposer qu'elle soit développée en série de sinus et de cosinus des multiples de cet angle, et qu'on ait, par exemple,

$$\gamma' = A_1 \cos \varpi' + A_2 \cos 2\varpi' + \dots + A_n \cos n\varpi' + \dots \\ + B_1 \sin \varpi' + B_2 \sin 2\varpi' + \dots + B_n \sin n\varpi' + \dots$$

On n'a pas mis de terme indépendant de  $\varpi'$ , parce que la condition que le cylindre de rayon  $a$  ait une section droite équivalente à celle du cylindre proposé, exige qu'on ait

$$\int_0^{2\pi} y' d\varpi' = 0.$$

Si l'on met cette valeur de  $y'$  dans la valeur de  $U_n$ , on aura simplement

$$U_n = \frac{2\rho a^{n+2}}{n} \int_0^{2\pi} (A_n \cos n\varpi' + B_n \sin n\varpi') \cos n(\varpi' - \varpi) d\varpi';$$

ou bien, en effectuant l'intégration,

$$U_n = \frac{2\pi\rho a^{n+2}}{n} (A_n \cos n\varpi + B_n \sin n\varpi).$$

On aura donc pour  $V$  la valeur suivante :

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} V = & 2\pi a^2 \rho l \cdot \frac{1}{r} + \frac{2\pi\rho a^3}{r} (A_1 \cos \varpi + B_1 \sin \varpi) \\ & + \frac{2\pi\rho a^4}{2r^2} (A_2 \cos 2\varpi + B_2 \sin 2\varpi) + \dots \\ & + \frac{2\pi\rho a^{n+2}}{nr^n} (A_n \cos n\varpi + B_n \sin n\varpi) + \dots \end{aligned} \right.$$

## § II.

*Equations différentielles du mouvement d'un liquide, sur la surface d'un cylindre.*

6. Nous allons considérer un cylindre solide (A), formé de couches homogènes dont les surfaces sont cylindriques et ont leurs génératrices toutes parallèles entre elles; nous supposerons que ce cylindre, d'une longueur indéfinie, soit animé d'un mouvement uniforme de rotation autour d'une parallèle à ses génératrices passant par son centre de gravité, et que sa surface soit recouverte en tout ou en partie par un liquide qui participe à son mouvement. Si ce liquide n'est soumis à aucune force autre que l'attraction du cylindre, il est facile de voir qu'il prendra un état d'équilibre tel, que sa surface soit

cylindrique et ait ses génératrices parallèles à l'axe de rotation. Supposons de plus que les diverses couches qui composent le cylindre soient presque de révolution autour de cet axe; il en résultera que la surface d'équilibre du liquide sera aussi très-peu différente de celle d'un cylindre de révolution autour du même axe. Nous admettrons enfin que la profondeur du liquide sur le cylindre soit très-petite relativement à son rayon.

Cela posé, concevons que le liquide soit soumis à des forces qui le dérangent de sa position d'équilibre; que ces forces, très-petites par rapport à l'attraction du cylindre, soient dirigées dans des plans perpendiculaires à l'axe de rotation, et que toutes celles qui agissent sur les molécules situées sur une même parallèle à l'axe soient égales et parallèles entre elles. Si les circonstances initiales du mouvement ont disparu, il est évident que chaque molécule ne sortira pas du plan perpendiculaire à l'axe qui la contient, et que les mouvements s'effectueront de la même manière dans tous les plans perpendiculaires à cet axe; en sorte que la surface du liquide restera cylindrique.

La détermination des équations différentielles du mouvement du liquide, dans les hypothèses précédentes, pourrait s'effectuer comme dans le dernier chapitre du livre premier de la *Mécanique céleste*; mais on peut y arriver plus simplement de la manière suivante.

7. Soient, dans l'état d'équilibre,

$a$ , la valeur moyenne du rayon de la surface du liquide;

$ay$ , la profondeur du liquide en un point quelconque;

$\varpi$ , l'angle compris entre le plan qui passe par une molécule quelconque et par l'axe, et un plan passant aussi par cet axe, fixe par rapport au cylindre, et participant à son mouvement de rotation: en sorte que si  $t$  est le temps et  $n$  la vitesse angulaire du cylindre,  $\varpi - nt$  soit l'angle compris entre le plan qui passe par la molécule et l'axe, et un plan, fixe dans l'espace, passant aussi par cet axe.

Soient, de plus, dans l'état de mouvement,

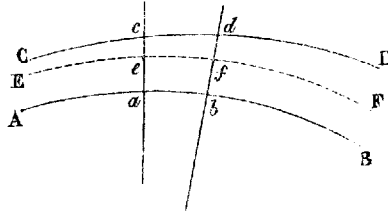
$\varpi + \nu$  ce que devient  $\varpi$ ,  $\nu$  étant une fonction de  $t$  et de  $\varpi$  que nous supposons indépendante de la distance de la molécule à l'axe;

et  $ay$  la hauteur d'un point quelconque de la surface du liquide, au-

dessus de la surface d'équilibre,  $\gamma$  étant aussi une fonction de  $t$  et de  $\varpi$ .

$\nu$  et  $\gamma$  seront de très-petites quantités dont nous négligerons les carrés et les produits, et nous verrons bientôt que  $\gamma$  est très-petit par rapport à  $\nu$  et à  $\gamma$ , et de l'ordre  $\gamma\nu$ .

Menons un plan perpendiculaire à l'axe du cylindre, et soit AB l'intersection de ce plan avec la surface de la partie solide; CD son inter-



section avec la surface du liquide, à un instant quelconque du mouvement; EF son intersection avec la surface d'équilibre de ce liquide; et  $ac$ ,  $bd$  les traces de deux plans passant par l'axe et faisant entre eux un angle infiniment petit  $d\varpi$ . Nous allons considérer la portion de liquide renfermée dans le prisme droit infiniment petit, ayant pour base  $abcd$ , et pour hauteur  $dx$ ; et en évaluant les forces qui lui sont appliquées, nous pourrons facilement trouver les équations de son mouvement, qui s'effectue à très-peu près perpendiculairement à  $ac$ .

Soit  $\rho$  la densité du liquide. Si nous remarquons que

$$ac = a(\gamma + \gamma'),$$

nous aurons

$$a^2(\gamma + \gamma') d\varpi dx$$

pour le volume du prisme, et

$$\rho a^2(\gamma + \gamma') d\varpi dx$$

pour la masse du liquide qu'il renferme. Si donc nous appelons  $V$  la fonction dont les dérivées partielles représentent les forces qui dérangent le liquide de sa position d'équilibre, nous aurons

$$\frac{dV'}{ad\varpi}$$

pour la somme des composantes de ces forces perpendiculairement à  $ac$ , c'est-à-dire dans le sens du mouvement du liquide, et la force motrice qui en résultera pour le prisme sera

$$\rho a (\gamma + \gamma) d\varpi dx \frac{dV'}{d\varpi}.$$

D'un autre côté, la face  $ac$  supporte, de plus que dans l'état d'équilibre, la pression provenant du liquide compris entre  $CD$  et  $EF$ , et, vu la petitesse de  $\gamma$  relativement à  $\gamma$ , on peut considérer cette pression comme s'exerçant uniformément sur toute cette face; d'après cela, il est facile de voir que cette pression, supportée par la face  $ac$ , a pour valeur

$$a(\gamma + \gamma) dx \times \rho g . ay = \rho g a^2 (\gamma + \gamma) \gamma dx,$$

$g$  étant la pesanteur à la surface du cylindre, produite par son attraction. La pression qu'on vient d'évaluer est dirigée dans le sens du mouvement; mais il existe sur la face  $bd$  une pression analogue et dirigée en sens contraire, qui, en se transmettant sur la face  $ac$ , devient égale à

$$\rho g a^2 (\gamma + \gamma) dx \left( \gamma + \frac{dy}{d\varpi} d\varpi \right);$$

il résultera donc de ces deux pressions, la force

$$\rho g a^2 (\gamma + \gamma) \frac{dy}{d\varpi} dx d\varpi,$$

dirigée en sens contraire du mouvement.

Remarquons enfin que la force accélératrice du liquide a pour expression  $a \frac{d^2v}{dt^2}$ , et nous en concluons de suite l'équation différentielle

$$\begin{aligned} \rho a^2 (\gamma + \gamma) d\varpi dx . a \frac{d^2v}{dt^2} &= \rho a (\gamma + \gamma) d\varpi dx \frac{dV'}{d\varpi} \\ &- \rho g a^2 (\gamma + \gamma) d\varpi dx \frac{dy}{d\varpi}, \end{aligned}$$

qui, en vertu des conventions précédentes, se réduit à

$$(9) \quad a^2 \frac{d^2v}{dt^2} = \frac{dV'}{d\varpi} - g a \frac{dy}{d\varpi}.$$



8. L'équation que nous venons d'obtenir renferme deux inconnues,  $\nu$  et  $\gamma$ ; il nous faut donc encore une équation entre ces deux quantités pour pouvoir les déterminer. C'est ce que nous obtiendrons facilement en exprimant la continuité du liquide.

Pour cela, considérons, dans l'état d'équilibre, un prisme infiniment petit, analogue à celui du numéro précédent; son volume sera

$$a^2 \gamma d\varpi dx.$$

En passant de l'état d'équilibre à l'état de mouvement, la profondeur du liquide devient  $a(\gamma + \gamma')$ , et  $\varpi$  augmente de  $\nu$ . On devra donc augmenter  $\gamma$  de  $\gamma' + \frac{d(\gamma + \gamma')}{d\varpi} \nu$ , et  $d\varpi$  de  $\frac{d\nu}{d\varpi} d\varpi$ , et l'on aura pour la nouvelle valeur du volume de ce prisme

$$a^2 \left( \gamma + \gamma' + \nu \frac{d\gamma}{d\varpi} + \nu \frac{d\gamma'}{d\varpi} \right) \left( d\varpi + \frac{d\nu}{d\varpi} d\varpi \right) dx.$$

En égalant ces deux valeurs, et supprimant les termes qui doivent être négligés, d'après les conventions du numéro précédent, on trouve

$$(10) \quad \gamma' = - \frac{d \cdot \gamma \nu}{d\varpi}.$$

Cette équation montre ce que nous avons avancé dans le numéro précédent, c'est-à-dire que  $\gamma'$  est de l'ordre  $\gamma\nu$ .

9. Nous supposerons que les forces qui dérangent le liquide de son état d'équilibre proviennent de l'action qu'exerce sur ce liquide un autre cylindre (B), de longueur indéfinie, parallèle au premier, et doué d'un mouvement uniforme de révolution autour de l'axe de ce premier cylindre, leur distance mutuelle restant d'ailleurs constante. L'attraction de ce nouveau cylindre sur les molécules liquides ne sera cependant pas la seule force dont  $V'$  doit fournir les composantes : en effet, la surface du liquide étant modifiée par la présence de ce cylindre extérieur, chaque molécule n'est plus attirée par le cylindre dont elle fait partie, de la même manière qu'auparavant. On peut concevoir l'attraction qu'elle éprouve comme se composant de l'attraction du cylindre solide et du liquide qui le recouvre dans l'état d'équilibre, et de l'attraction d'une couche de liquide dont l'épaisseur

variable est  $ay$ , et qui, positive en certains points, négative en d'autres, constitue la différence entre l'état actuel du liquide et son état d'équilibre. L'attraction de cette couche est une force qui n'existe pas dans l'état d'équilibre, et qui contribue à produire le mouvement que nous voulons déterminer.  $V'$  se composera donc de deux parties : 1° celle qui dépend de l'action de cette couche liquide, d'épaisseur  $ay$ , sur la molécule dont nous cherchons le mouvement; 2° celle qui provient de l'action directe du cylindre (B) sur cette molécule. Nous remarquerons enfin que, comme nous ne nous occupons que des mouvements relatifs du liquide par rapport à la partie solide du cylindre, nous devons appliquer à chaque molécule une force accélératrice égale, parallèle et contraire à celle à laquelle l'axe de ce cylindre est soumis par l'action de chacune des causes dont nous venons de parler.

10. Pour déterminer la première partie de la valeur de  $V'$ , celle qui dépend de l'action de la couche liquide, d'épaisseur  $ay$ , sur la molécule que nous considérons, nous devons évidemment négliger l'action de cette couche sur l'axe du cylindre, et nous aurons, d'après le n° 2,

$$V' = - \rho a^2 \int \gamma' d\varpi' l. [r^2 - 2ar \cos(\varpi' - \varpi) + a^2];$$

$\gamma'$  étant ce que devient  $\gamma$  lorsqu'on y remplace  $\varpi$  par  $\varpi'$ , et  $r$  étant la distance de la molécule attirée à l'axe du cylindre. Cette distance  $r$  devra être remplacée par  $a$  dans les valeurs des dérivées partielles de  $V'$ .

Si nous supposons que  $\gamma'$  puisse se développer en série de sinus et de cosinus des multiples de  $\varpi'$ , et qu'on ait

$$\begin{aligned} \gamma' &= A_1 \cos \varpi' + A_2 \cos 2\varpi' + \dots + A_n \cos n\varpi' + \dots \\ &+ B_1 \sin \varpi' + B_2 \sin 2\varpi' + \dots + B_n \sin n\varpi' + \dots, \end{aligned}$$

nous en déduisons, comme au n° 5,

$$(11) \left\{ \begin{aligned} V' &= \frac{2\pi\rho a^3}{r} (A_1 \cos \varpi + B_1 \sin \varpi) + \frac{2\pi\rho a^4}{2 \cdot r^2} (A_2 \cos 2\varpi + B_2 \sin 2\varpi) + \dots \\ &+ \frac{2\pi\rho a^{n+2}}{n \cdot r^n} (A_n \cos n\varpi + B_n \sin n\varpi) + \dots \end{aligned} \right.$$

11. Déterminons maintenant la seconde partie de  $V'$ , celle qui provient de l'action du cylindre (B). Les dimensions de la section droite de ce nouveau cylindre étant supposées très-petites relativement à sa distance au premier, nous regarderons toute sa masse comme étant concentrée sur son axe. Soient  $m$  la masse de l'unité de longueur de ce cylindre,  $q$  sa distance à l'axe du premier cylindre, et  $\varpi_1$  l'angle que fait le plan qui passe par les deux axes avec le plan mobile à partir duquel se compte l'angle  $\varpi$  (n° 7).  $r$  et  $\varpi$  étant toujours les coordonnées de la molécule dont on cherche le mouvement, on aura pour la partie de  $V'$  qui vient de l'action du cylindre (B) [n° 2],

$$V' = - ml.[r^2 - 2qr \cos(\varpi_1 - \varpi) + q^2].$$

La force accélératrice provenant de l'attraction de ce cylindre sur l'axe du cylindre (A) est égale à  $\frac{2m}{q}$ ; on doit donc appliquer à la molécule que l'on considère une force égale à  $-\frac{2m}{q}$ , dans la même direction. Pour obtenir la partie de  $V'$  qui vient de cette force, nous la décomposerons suivant deux directions rectangulaires, dont l'une soit parallèle au plan qui sert d'origine à  $\varpi_1$ , et nous trouverons les deux composantes

$$-\frac{2m}{q} \cos \varpi_1, \quad -\frac{2m}{q} \sin \varpi_1.$$

Multipliant ces deux forces par les éléments  $d\gamma$  et  $dz$  de leurs directions, ajoutant, et prenant l'intégrale, nous aurons

$$-\frac{2m}{q} (\gamma \cos \varpi_1 + z \sin \varpi_1) + \text{const.},$$

ou bien

$$-\frac{2mr}{q} \cos(\varpi_1 - \varpi) + \text{const.},$$

en remarquant que

$$\gamma = r \cos \varpi, \quad z = r \sin \varpi.$$

La valeur complète de  $V'$  provenant de l'action du cylindre (B) sera

donc

$$V' = -ml.[r^2 - 2qr \cos(\varpi_1 - \varpi) + q^2] - \frac{2mr}{q} \cos(\varpi_1 - \varpi) + \text{const.};$$

ou bien, en déterminant la constante de manière que  $V'$  soit nul, pour  $r = 0$ ,

$$V' = -ml. \left[ 1 - 2 \frac{r}{q} \cos(\varpi_1 - \varpi) + \frac{r^2}{q^2} \right] - \frac{2mr}{q} \cos(\varpi_1 - \varpi).$$

En développant suivant les puissances de  $r$ , comme au n° 4, on trouve

$$V' = \frac{2mr^2}{2q^2} \cos 2(\varpi_1 - \varpi) + \frac{2mr^3}{3q^3} \cos 3(\varpi_1 - \varpi) + \dots \\ + \frac{2mr^n}{nq^n} \cos n(\varpi_1 - \varpi) + \dots$$

$q$  étant très-grand par rapport à  $r$ , qui devra être remplacé par  $a$ , dans les dérivées partielles de  $V'$ , nous ne conserverons que le premier terme de cette valeur de  $V'$ ; d'un autre côté, on a

$$\varpi_1 = (n - n')t - \lambda,$$

$n'$  étant la vitesse angulaire du cylindre (B) autour du cylindre (A), et  $-\lambda$  étant la valeur de  $\varpi_1$  pour  $t = 0$ ; nous aurons donc

$$(12) \quad V' = \frac{mr^2}{q^2} \cos 2[(n - n')t - \lambda - \varpi].$$

12. La valeur que nous venons de trouver, pour la partie de  $V'$  qui vient de l'action directe du cylindre (B), peut se mettre sous la forme suivante

$$V' = \frac{ma^2}{q^2} \cos 2\varpi \cos 2[(n - n')t - \lambda] + \frac{ma^2}{q^2} \sin 2\varpi \sin 2[(n - n')t - \lambda],$$

en développant le cosinus, et remplaçant  $r$  par  $a$ , ce qu'on peut faire. puisqu'on n'a pas besoin de la dérivée  $\frac{dV'}{dr}$ . Comme nous supposons que le mouvement du liquide est uniquement dû à l'action du cylindre (B), et que les circonstances initiales du mouvement ont disparu, nous aurons évidemment

$$v = v_1 \cos 2[(n - n')t - \lambda] + v_2 \sin 2[(n - n')t - \lambda], \\ y = y_1 \cos 2[(n - n')t - \lambda] + y_2 \sin 2[(n - n')t - \lambda],$$

$\nu_1, \nu_2, \gamma_1, \gamma_2$  étant des fonctions de  $\varpi$ , indépendantes de  $t$ . La partie de  $V'$ , qui dépend de  $\gamma$ , et qui a été déterminée au n° 10, se mettra donc également sous la forme

$$V' = V'_1 \cos 2[(n - n')t - \lambda] + V'_2 \sin 2[(n - n')t - \lambda],$$

$V'_1$  et  $V'_2$  étant ce que devient  $V'$  lorsqu'on remplace  $\gamma$  par  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ .

Cela posé, les équations (9) et (10) donneront les quatre équations suivantes, pour déterminer  $\nu_1$  et  $\gamma_1, \nu_2$  et  $\gamma_2$ , quelle que soit la valeur de  $\gamma$  en fonction de  $\varpi$ ,

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{2ma^2}{q^2} \sin 2\varpi + \frac{dV'_1}{d\varpi} - ga \frac{d\gamma_1}{d\varpi} = -4a^2(n - n')^2 \nu_1, \\ \gamma_1 = -\frac{d \cdot \gamma \nu_1}{d\varpi}; \end{array} \right.$$

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{2ma^2}{q^2} \cos 2\varpi + \frac{dV'_2}{d\varpi} - ga \frac{d\gamma_2}{d\varpi} = -4a^2(n - n')^2 \nu_2, \\ \gamma_2 = -\frac{d \cdot \gamma \nu_2}{d\varpi}. \end{array} \right.$$

### § III.

*Intégration des équations différentielles du mouvement d'un liquide sur un cylindre, dans diverses hypothèses sur la loi de la profondeur de ce liquide.*

**13.** Nous avons déterminé, dans le paragraphe précédent, les équations différentielles du mouvement très-petit d'un liquide à la surface d'un cylindre (A), en supposant que les circonstances initiales du mouvement aient disparu, et que ce mouvement soit produit par l'action d'un autre cylindre (B), parallèle au premier, et doué d'un mouvement uniforme de révolution autour de ce premier cylindre. Nous allons maintenant nous occuper d'intégrer ces équations différentielles, dans diverses hypothèses sur la loi de la profondeur du liquide, à la surface du cylindre (A), dans l'état d'équilibre.

PREMIER CAS.  $\gamma$  constant, sur toute la surface du cylindre.

Dans ce cas les équations (13) et (14) donnent, par l'élimination

de  $y_1$  et  $y_2$ ,

$$g\gamma a \frac{d^2 v_1}{d\varpi^2} + 4a^2 (n - n')^2 v_1 + \frac{dV'_1}{d\varpi} - \frac{2ma^2}{q^2} \sin 2\varpi = 0,$$

$$g\gamma a \frac{d^2 v_2}{d\varpi^2} + 4a^2 (n - n')^2 v_2 + \frac{dV'_2}{d\varpi} + \frac{2ma^2}{q^2} \cos 2\varpi = 0.$$

Si l'on suppose

$$v_1 = A \sin 2\varpi, \quad v_2 = B \cos 2\varpi,$$

on aura

$$y_1 = -2\gamma A \cos 2\varpi, \quad y_2 = 2\gamma B \sin 2\varpi;$$

et par suite, d'après le n° 10,

$$V'_1 = -\frac{2\pi r \gamma A a^4}{r^2} \cos 2\varpi, \quad V'_2 = \frac{2\pi r \gamma B a^4}{r^2} \sin 2\varpi.$$

On déduit de là, en différentiant par rapport à  $\varpi$ , et remplaçant  $r$  par  $a$  (n° 10),

$$\frac{dV'_1}{d\varpi} = 4\pi \rho a^2 \gamma A \sin 2\varpi, \quad \frac{dV'_2}{d\varpi} = 4\pi \rho a^2 \gamma B \cos 2\varpi.$$

En substituant dans les équations différentielles en  $v_1$  et  $v_2$ , on trouvera les relations suivantes, pour déterminer A et B,

$$-4g\gamma a A + 4a^2 (n - n')^2 A + 4\pi \rho a^2 \gamma A - \frac{2ma^2}{q^2} = 0,$$

$$-4g\gamma a B + 4a^2 (n - n')^2 B + 4\pi \rho a^2 \gamma B + \frac{2ma^2}{q^2} = 0;$$

et si l'on pose

$$\frac{2ma}{g\gamma q^2} = L, \quad \frac{4a(n - n')^2}{g\gamma} = i^2, \quad \frac{2\pi \rho a}{g} = \alpha,$$

on aura, pour A et B, les valeurs suivantes :

$$A = -\frac{L}{4 - i^2 - 2\alpha}, \quad B = \frac{L}{4 - i^2 - 2\alpha}.$$

On aura donc

$$y_1 = \frac{2\gamma L}{4 - i^2 - 2\alpha} \cos 2\varpi, \quad y_2 = \frac{2\gamma L}{4 - i^2 - 2\alpha} \sin 2\varpi.$$

et enfin

$$\mathcal{Y} = \frac{2\gamma L}{4 - i^2 - 2\alpha} \cos 2[(n - n')t - \lambda - \varpi].$$

Cette valeur de  $\mathcal{Y}$  nous montre qu'en chaque point de la surface du cylindre (A), la hauteur du liquide variera périodiquement; que pendant que le cylindre (B) fera un tour entier autour du premier, cette hauteur atteindra deux fois son maximum, et deux fois son minimum; enfin que si

$$4 - i^2 - 2\alpha$$

est positif, le maximum aura lieu au moment même où le cylindre (B) passe dans le plan qui renferme l'axe du cylindre (A), et le point qu'on considère sur la surface de ce cylindre. (Nous nommerons désormais ce plan, *plan méridien*, ou simplement *méridien* de ce point de la surface.) Si cette quantité était négative, ce serait le minimum de  $\mathcal{Y}$  qui aurait lieu au moment du passage du cylindre (B) au méridien.

14. Avant d'aller plus loin, nous allons tâcher de fixer nos idées sur la signification des quantités  $i^2$  et  $\alpha$ . Nous avons d'abord

$$i^2 = \frac{4a(n - n')^2}{g\gamma}.$$

Or, si  $n'$  est petit relativement à  $n$ , comme nous le supposerons,  $a(n - n')^2$  est à peu près égal à la force centrifuge qui est développée sur la surface du cylindre (A) par son mouvement de rotation autour de son axe; et  $g$  est la pesanteur à la surface de ce cylindre:  $i^2$  est donc à peu près égal à quatre fois le rapport de la force centrifuge à la pesanteur, divisé par la quantité  $\gamma$ . Et l'on se rappelle que  $\gamma$  est le rapport de la profondeur du liquide au rayon du cylindre.

Nous avons ensuite

$$\alpha = \frac{2\pi\rho a}{g}.$$

Or nous pouvons facilement trouver la valeur de  $g$  en fonction du rayon  $a$  du cylindre (A), et de sa densité moyenne que nous représenterons par  $\rho$ ; en effet, les diverses couches du cylindre étant à peu près de révolution autour de son axe, on peut prendre pour  $V$  la va-

leur (4); et comme l'on a

$$g = - \frac{dV}{dr},$$

en ayant soin de remplacer  $r$  par  $a$  après la différentiation, on aura

$$g = \frac{2M}{a}.$$

Mais  $M = \pi a^2 \rho_1$ ; on aura donc

$$g = 2\pi \rho_1 a,$$

et par suite

$$\alpha = \frac{\rho}{\rho_1}.$$

Donc  $\alpha$  représente le rapport de la densité du liquide à la densité moyenne du cylindre.

DEUXIÈME CAS.  $\gamma = \gamma_1 (1 - 2k \cos s\varpi)$ ,  $k$  étant plus petit que  $\frac{1}{2}$ , et  $s$  étant entier.

15. Déterminons d'abord  $\gamma_1$  et  $\nu_1$ , et pour cela posons

$$\gamma \nu_1 = \gamma_1 \zeta_1,$$

nous aurons

$$\gamma_1 = - \gamma_1 \frac{d\zeta_1}{d\varpi},$$

et par suite, la première des équations (13) deviendra

$$g a \gamma_1 (1 - 2k \cos s\varpi) \frac{d^2 \zeta_1}{d\varpi^2} + 4a^2 (n - n')^2 \zeta_1 + (1 - 2k \cos s\varpi) \frac{dV_1'}{d\varpi} - \frac{2ma^2}{q^2} \sin 2\varpi (1 - 2k \cos s\varpi) = 0.$$

Il est facile de voir, en déterminant par des approximations successives la valeur de  $\zeta_1$ , ordonnée suivant les puissances croissantes de  $k$ , que cette valeur ne peut être que de la forme suivante :

$$\zeta_1 = A_2 \sin 2\varpi + A_{s-2} \sin (s-2)\varpi + A_{s+2} \sin (s+2)\varpi + A_{2s-2} \sin (2s-2)\varpi + A_{2s+2} \sin (2s+2)\varpi + \dots;$$



il en résulte

$$\gamma_1 = -\gamma_1 \left[ \begin{array}{l} 2A_2 \cos 2\varpi + (s-2)A_{s-2} \cos(s-2)\varpi \\ + (s+2)A_{s+2} \cos(s+2)\varpi + (2s-2)A_{2s-2} \cos(2s-2)\varpi \\ + (2s+2)A_{2s+2} \cos(2s+2)\varpi + \dots \end{array} \right],$$

et l'on aura

$$V'_1 = -\gamma_1 2\pi\rho a^2 \left[ \begin{array}{l} A_2 \cos 2\varpi + A_{s-2} \cos(s-2)\varpi \\ + A_{s+2} \cos(s+2)\varpi + A_{2s-2} \cos(2s-2)\varpi \\ + A_{2s+2} \cos(2s+2)\varpi + \dots \end{array} \right].$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'équation différentielle, qu'on développe, et qu'on égale à zéro les coefficients des sinus des divers multiples de  $\varpi$  (en supposant que  $s$  soit tel qu'on n'ait pas

$$ns - 2 = n's + 2,$$

ce qui exclut les valeurs

$$s = 1, \quad s = 2, \quad s = 4),$$

on obtient les relations suivantes, dans lesquelles  $L$ ,  $i^2$  et  $\alpha$  représentent les mêmes quantités que précédemment, sauf que  $\gamma$  est remplacé par  $\gamma_1$ ,

$$\begin{aligned} (i^2 + 2\alpha - 2^2)A_2 - (s-2)(s-2-\alpha)A_{s-2}k + (s+2)(s+2-\alpha)A_{s+2}k - L &= 0, \\ (2\alpha - 2^2)A_2k + [i^2 + (s-2)\alpha - (s-2)^2]A_{s-2} + (2s-2)(2s-2-\alpha)A_{2s-2}k - Lk &= 0, \\ (2^2 - 2\alpha)A_2k + [i^2 + (s+2)\alpha - (s+2)^2]A_{s+2} + (2s+2)(2s+2-\alpha)A_{2s+2}k + Lk &= 0, \\ (s-2)(s-2-\alpha)A_{s-2}k + [i^2 + (2s-2)\alpha - (2s-2)^2]A_{2s-2} + (3s-2)(3s-2-\alpha)A_{3s-2}k &= 0, \\ (s+2)(s+2-\alpha)A_{s+2}k + [i^2 + (2s+2)\alpha - (2s+2)^2]A_{2s+2} + (3s+2)(3s+2-\alpha)A_{3s+2}k &= 0, \\ (2s-2)(2s-2-\alpha)A_{2s-2}k + [i^2 + (3s-2)\alpha - (3s-2)^2]A_{3s-2} + (4s-2)(4s-2-\alpha)A_{4s-2}k &= 0, \\ (2s+2)(2s+2-\alpha)A_{2s+2}k + [i^2 + (3s+2)\alpha - (3s+2)^2]A_{3s+2} + (4s+2)(4s+2-\alpha)A_{4s+2}k &= 0, \\ \text{etc.} \end{aligned}$$

Ces relations, à partir de la quatrième, se forment d'après une loi évidente. Pour en déduire les valeurs des coefficients  $A_2$ ,  $A_{s-2}$ ,  $A_{s+2}$ , etc., on peut remarquer que si l'on développe ces coefficients suivant les puissances croissantes de  $k$ , le premier terme de  $A_2$  sera indépendant de  $k$ ; les premiers termes de  $A_{s-2}$  et  $A_{s+2}$  seront divisibles par  $k$ ; et, en général, les premiers termes de  $A_{ns-2}$  et  $A_{ns+2}$  seront divisibles par  $k^n$ .

Si donc on pose

$$\begin{aligned} A_2 &= A_2^{(0)} + A'_2 k + A''_2 k^2 + A'''_2 k^3 + \dots, \\ A_{s-2} &= A'_{s-2} k + A''_{s-2} k^2 + A'''_{s-2} k^3 + \dots, \\ A_{s+2} &= A'_{s+2} k + A''_{s+2} k^2 + A'''_{s+2} k^3 + \dots, \\ A_{2s-2} &= A''_{2s-2} k^2 + A'''_{2s-2} k^3 + \dots, \\ A_{2s+2} &= A''_{2s+2} k^2 + A'''_{2s+2} k^3 + \dots, \\ &\text{etc.}, \end{aligned}$$

et qu'on substitue dans les équations précédentes, on trouvera, en égalant à zéro les coefficients des diverses puissances de  $k$ ,

$$\begin{aligned} (i^2 + 2\alpha - 2^2)A_2^{(0)} - L &= 0, \\ (i^2 + 2\alpha - 2^2)A'_2 &= 0, \\ (i^2 + 2\alpha - 2^2)A''_2 - (s-2)(s-2-\alpha)A'_{s-2} + (s+2)(s+2-\alpha)A'_{s+2} &= 0, \\ (i^2 + 2\alpha - 2^2)A'''_2 - (s-2)(s-2-\alpha)A''_{s-2} + (s+2)(s+2-\alpha)A''_{s+2} &= 0, \\ &\text{etc.}; \\ (2\alpha - 2^2)A_2^{(0)} + [i^2 + (s-2)\alpha - (s-2)^2]A'_{s-2} - L &= 0, \\ (2\alpha - 2^2)A'_2 + [i^2 + (s-2)\alpha - (s-2)^2]A''_{s-2} &= 0, \\ &\text{etc., etc.}; \end{aligned}$$

relations au moyen desquelles on déterminera facilement les valeurs de

$$A_2^{(0)}, A'_2, A''_2, \dots, A'_{s-2}, A''_{s-2}, \dots, A'_{s+2}, A''_{s+2}, \dots, \text{etc.}$$

On peut remarquer immédiatement qu'il résulte de ces relations, qu'on a

$$A'_2 = 0, A''_{s-2} = 0, A'_{s+2} = 0, A'''_2 = 0, A'''_{2s-2} = 0, A'''_{2s+2} = 0, \dots;$$

c'est-à-dire que généralement  $A_{ns-2}$  et  $A_{ns+2}$  ne renferment que les puissances paires de  $k$ , si  $n$  est pair, et qu'ils ne renferment que les puissances impaires de  $k$ , si  $n$  est impair.

En opérant de la même manière sur les équations (14), et posant

$$\gamma^{\nu_2} = \gamma_1 \zeta_2,$$

nous trouverons, pour déterminer  $\zeta_2$ , l'équation différentielle

$$g a \gamma_1 (1 - 2k \cos s \varpi) \frac{d^2 \zeta_2}{d \varpi^2} + 4a^2 (n - n')^2 \zeta_2 + (1 - 2k \cos s \varpi) \frac{dV_2'}{d\varpi} + \frac{2m a^2}{q^2} \cos 2\varpi (1 - 2k \cos s \varpi) = 0.$$

Si nous posons ensuite

$$\zeta_2 = B_2 \cos 2\varpi + B_{s-2} \cos (s-2)\varpi + B_{s+2} \cos (s+2)\varpi + B_{2s-2} \cos (2s-2)\varpi + B_{2s+2} \cos (2s+2)\varpi + \dots,$$

nous en déduirons les valeurs de  $\gamma_2$  et de  $V_2'$ , et en substituant dans l'équation différentielle, nous trouverons les relations suivantes, qui serviront à déterminer les coefficients de la valeur de  $\zeta_2$  :

$$\begin{aligned} (i^2 + 2\alpha - 2^2) B_2 + (s-2)(s-2-\alpha) B_{s-2} k + (s+2)(s+2-\alpha) B_{s+2} k + L &= 0, \\ (2^2 - 2\alpha) B_2 k + [i^2 + (s-2)\alpha - (s-2)^2] B_{s-2} + (2s-2)(2s-2-\alpha) B_{2s-2} k - L k &= 0, \\ (2^2 - 2\alpha) B_2 k + [i^2 + (s+2)\alpha - (s+2)^2] B_{s+2} + (2s+2)(2s+2-\alpha) B_{2s+2} k - L k &= 0, \\ (s-2)(s-2-\alpha) B_{s-2} k + [i^2 + (2s-2)\alpha - (2s-2)^2] B_{2s-2} + (3s-2)(3s-2-\alpha) B_{3s-2} k &= 0, \\ (s+2)(s+2-\alpha) B_{s+2} k + [i^2 + (2s+2)\alpha - (2s+2)^2] B_{2s+2} + (3s+2)(3s+2-\alpha) B_{3s+2} k &= 0, \\ (2s-2)(2s-2-\alpha) B_{2s-2} k + [i^2 + (3s-2)\alpha - (3s-2)^2] B_{3s-2} + (4s-2)(4s-2-\alpha) B_{4s-2} k &= 0, \\ (2s+2)(2s+2-\alpha) B_{2s+2} k + [i^2 + (3s+2)\alpha - (3s+2)^2] B_{3s+2} + (4s+2)(4s+2-\alpha) k B_{4s+2} &= 0, \\ \text{etc.} \end{aligned}$$

A l'inspection de ces relations, on reconnaît immédiatement que l'on a

$$B_2 = -A_2, \quad B_{s-2} = A_{s-2}, \quad B_{s+2} = -A_{s+2}, \quad B_{2s-2} = A_{2s-2}, \\ B_{2s+2} = -A_{2s+2}, \dots;$$

et, en général,

$$B_{ns-2} = A_{ns-2}, \quad B_{ns+2} = -A_{ns+2}.$$

D'après cela, nous aurons pour  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  les valeurs

$$\gamma_1 = -\gamma_1 \left[ \begin{array}{l} 2A_2 \cos 2\varpi + (s-2)A_{s-2} \cos (s-2)\varpi \\ + (s+2)A_{s+2} \cos (s+2)\varpi + (2s-2)A_{2s-2} \cos (2s-2)\varpi \\ + (2s+2)A_{2s+2} \cos (2s+2)\varpi + \dots \end{array} \right], \\ \gamma_2 = -\gamma_1 \left[ \begin{array}{l} 2A_2 \sin 2\varpi - (s-2)A_{s-2} \sin (s-2)\varpi \\ + (s+2)A_{s+2} \sin (s+2)\varpi - (2s-2)A_{2s-2} \sin (2s-2)\varpi \\ + (2s+2)A_{2s+2} \sin (2s+2)\varpi - \dots \end{array} \right];$$

et comme on a

$$y = y_1 \cos 2[(n - n')t - \lambda] + y_2 \sin 2[(n - n')t - \lambda],$$

il en résultera

$$y = -\gamma_1 \left\{ \begin{aligned} &2A_2 \cos 2[(n - n')t - \lambda - \varpi] + (s - 2)A_{s-2} \cos [2(n - n')t - 2\lambda + (s - 2)\varpi] \\ &+ (s + 2)A_{s+2} \cos [2(n - n')t - 2\lambda - (s + 2)\varpi] \\ &+ (2s - 2)A_{2s-2} \cos [2(n - n')t - 2\lambda + (2s - 2)\varpi] \\ &+ (2s + 2)A_{2s+2} \cos [2(n - n')t - 2\lambda - (2s + 2)\varpi] + \text{etc.} \dots \end{aligned} \right\}$$

La loi que nous avons adoptée pour la profondeur du liquide, à la surface du cylindre (A), est telle, que pour tous les points de cette surface pour lesquels  $s\varpi$  est un multiple pair de  $\pi$ , la profondeur est un minimum, et est égale à  $\gamma_1(1 - 2k)$ ; tandis que pour tous les points pour lesquels  $s\varpi$  est un multiple impair de  $\pi$ , cette profondeur est un maximum, et est égale à  $\gamma_1(1 + 2k)$ . Pour tous ces points de profondeur maximum ou minimum, le liquide atteint sa plus grande ou sa plus petite hauteur au moment où l'on a

$$(n - n')t - \lambda - \varpi = 0, \quad \text{ou} \quad = \pi,$$

c'est-à-dire au moment où le cylindre (B) traverse le méridien du lieu qu'on considère. Pour tous les autres points, l'instant de la plus grande ou de la plus petite hauteur du liquide sera généralement différent de celui du passage du cylindre (B) au méridien.

Nous remarquerons enfin que si l'on a  $k = 0$ , la valeur de  $y$  se confond avec celle que l'on a trouvée dans le cas d'une profondeur constante; car tous les coefficients  $A_{s-2}$ ,  $A_{s+2}$ ,  $A_{2s-2}$ , etc., s'annulent, et  $A_2$  se réduit à  $A_2^{(0)}$ , en sorte qu'on a

$$y = \frac{2\gamma_1 L}{2^2 - i^2 - 2\alpha} \cos 2[(n - n')t - \lambda - \varpi].$$

TROISIÈME CAS. *Liquide ne recouvrant pas tout le cylindre, et restant toujours compris entre deux plans méridiens, entre lesquels la profondeur  $\gamma$  est constante.*

**16.** Dans les deux cas précédents, nous avons pu déterminer complètement le mouvement du liquide sur le cylindre (A), en tenant compte de l'action du liquide sur lui-même; mais maintenant que nous

allons nous occuper de cas dans lesquels le liquide ne recouvre pas tout le cylindre, nous serons obligés, pour ne pas trop compliquer la question, de négliger cette action du liquide sur lui-même et de ne tenir compte que de l'action directe du cylindre (B) sur ce liquide. Il est aisé de voir que cela revient à négliger la quantité que nous avons désignée par  $\alpha$ , dans les numéros précédents, c'est-à-dire le rapport de la densité du liquide à la densité moyenne du cylindre, et que le résultat sera d'autant plus exact que ce rapport sera plus petit. Nous supprimerons donc désormais dans les équations (13) et (14) les termes qui renferment  $V'_1$  et  $V'_2$ .

Nous allons d'abord considérer le cas où le liquide reste toujours compris entre deux plans méridiens correspondant à  $\varpi = \varpi_1$  et à  $\varpi = -\varpi_1$ , et où la profondeur du liquide, entre ces deux plans, est partout la même. Dans ce cas, les équations (13) donnent, pour déterminer  $\nu_1$ , l'équation

$$\frac{d^2 \nu_1}{d\varpi^2} + i^2 \nu_1 - L \sin 2\varpi = 0;$$

et  $\nu_1$  sera en outre assujéti à devenir nul pour  $\varpi = \varpi_1$  et pour  $\varpi = -\varpi_1$ . L'intégrale complète de cette équation différentielle est

$$\nu_1 = A \sin i\varpi + B \cos i\varpi + \frac{L}{i^2 - 4} \sin 2\varpi,$$

A et B étant les deux constantes arbitraires; et si l'on détermine ces constantes de manière à avoir  $\nu_1 = 0$  pour  $\varpi = \varpi_1$  et pour  $\varpi = -\varpi_1$ , on aura

$$\nu_1 = \frac{L}{i^2 - 4} \left( \sin 2\varpi - \frac{\sin 2\varpi_1}{\sin i\varpi_1} \sin i\varpi \right).$$

On trouvera de même, au moyen des équations (14),

$$\nu_2 = \frac{L}{i^2 - 4} \left( \frac{\cos 2\varpi_1}{\cos i\varpi_1} \cos i\varpi - \cos 2\varpi \right).$$

On aura donc

$$\nu = \frac{L}{i^2 - 4} \left\{ \begin{array}{l} \left( \sin 2\varpi - \frac{\sin 2\varpi_1}{\sin i\varpi_1} \sin i\varpi \right) \cos 2[(n - n')t - \lambda] \\ + \left( \frac{\cos 2\varpi_1}{\cos i\varpi_1} \cos i\varpi - \cos 2\varpi \right) \sin 2[(n - n')t - \lambda] \end{array} \right\},$$

et ensuite

$$y = -\frac{\gamma L}{i^2 - 4} \left\{ \begin{aligned} & \left( 2 \cos 2\varpi - i \frac{\sin 2\varpi_1}{\sin i\varpi_1} \cos i\varpi \right) \cos 2[(n - n')t - \lambda] \\ & + \left( 2 \sin 2\varpi - i \frac{\cos 2\varpi_1}{\cos i\varpi_1} \sin i\varpi \right) \sin 2[(n - n')t - \lambda] \end{aligned} \right\}.$$

Enfin, si l'on pose

$$\begin{aligned} N \cos(2\varpi + 2\varepsilon) &= \frac{\gamma L}{4 - i^2} \left( 2 \cos 2\varpi - i \frac{\sin 2\varpi_1}{\sin i\varpi_1} \cos i\varpi \right), \\ N \sin(2\varpi + 2\varepsilon) &= \frac{\gamma L}{4 - i^2} \left( 2 \sin 2\varpi - i \frac{\cos 2\varpi_1}{\cos i\varpi_1} \sin i\varpi \right); \end{aligned}$$

on aura

$$y = N \cos 2[(n - n')t - \lambda - \varpi - \varepsilon].$$

et les quantités N et  $\varepsilon$  seront déterminées par les formules

$$\begin{aligned} N &= \frac{\gamma L}{4 - i^2} \sqrt{\left( 2 \cos 2\varpi - i \frac{\sin 2\varpi_1}{\sin i\varpi_1} \cos i\varpi \right)^2 + \left( 2 \sin 2\varpi - i \frac{\cos 2\varpi_1}{\cos i\varpi_1} \sin i\varpi \right)^2}, \\ \text{tang } 2\varepsilon &= \frac{i[\sin(i+2)\varpi_1 \sin(i-2)\varpi + \sin(i-2)\varpi_1 \sin(i+2)\varpi]}{i[\sin(i+2)\varpi_1 \cos(i-2)\varpi - \sin(i-2)\varpi_1 \cos(i+2)\varpi] - 2 \sin 2i\varpi}. \end{aligned}$$

La valeur de  $y$  qu'on vient de trouver satisfait à la condition que la quantité du liquide reste constamment la même, condition qui s'exprime par l'équation

$$\int_{-\varpi_1}^{+\varpi_1} y d\varpi = 0;$$

en effet, l'on a

$$\int y d\varpi = -\gamma v,$$

quantité qui est nulle pour  $\varpi = \varpi_1$  et pour  $\varpi = -\varpi_1$ .

L'angle  $\varepsilon$ , étant pris de manière que N soit positif, et étant réduit en temps, représente le retard du maximum de la hauteur du liquide sur le passage du cylindre (B) au méridien. Les deux valeurs de  $\varepsilon$  correspondant à  $\varpi = \varpi_1$  et à  $\varpi = -\varpi_1$ , sont égales et de signes contraires : donc autant ce maximum de la hauteur du liquide retarde sur le pas-

sage du cylindre (B) au méridien, pour une de ces limites, autant il avance sur ce passage pour l'autre limite. La même chose a lieu pour deux points quelconques de la surface du cylindre (A), correspondant à des valeurs de  $\varpi$  égales et de signes contraires.

Pour comparer la hauteur maximum à laquelle le liquide s'élèvera dans ce cas, avec la hauteur maximum correspondant au premier cas, la profondeur  $\gamma$  restant la même, il suffira de déterminer le rapport de N au coefficient du cosinus dans la valeur de  $\gamma$  du n° 15, après avoir fait dans ce coefficient  $\alpha = 0$ , afin de partir des mêmes hypothèses; on trouvera ainsi pour ce rapport

$$\sqrt{\left(\cos 2\varpi - \frac{i}{2} \frac{\sin 2\varpi_1}{\sin i\varpi_1} \cos i\varpi\right)^2 + \left(\sin 2\varpi - \frac{i}{2} \frac{\cos 2\varpi_1}{\cos i\varpi_1} \sin i\varpi\right)^2}.$$

QUATRIÈME CAS.  $\gamma = 2\gamma_1 \cos s\varpi$ ,  $s$  étant quelconque.

17. Nous supposons actuellement que la profondeur du liquide soit donnée par la formule

$$\gamma = 2\gamma_1 \cos s\varpi,$$

$s$  étant quelconque, et qu'il n'y ait de liquide que pour les points pour lesquels  $\varpi$  est compris entre  $-\frac{\pi}{2s}$  et  $\frac{\pi}{2s}$ .

Si l'on élimine  $\gamma_1$  entre les équations (13), qu'on multiplie par  $2 \cos s\varpi$ , et qu'on pose

$$\gamma \nu_1 = \gamma_1 \zeta_1,$$

on trouve l'équation

$$ga \gamma_1 \frac{d^2 \zeta_1}{d\varpi^2} \cdot 2 \cos s\varpi + 4a^2 (n - n')^2 \zeta_1 - \frac{2m a^2}{q^2} \sin (s + 2) \varpi \\ + \frac{2m a^2}{q^2} \sin (s - 2) \varpi = 0,$$

ou bien, en vertu des notations adoptées,

$$2 \cos s\varpi \frac{d^2 \zeta_1}{d\varpi^2} + i^2 \zeta_1 + L \sin (s - 2) \varpi - L \sin (s + 2) \varpi = 0.$$

Pour satisfaire à cette équation, nous prendrons

$$\zeta_1 = A_2 \sin 2\varpi + A_{s-2} \sin (s-2)\varpi + A_{s+2} \sin (s+2)\varpi \\ + A_{2s-2} \sin (2s-2)\varpi + A_{2s+2} \sin (2s+2)\varpi + \dots$$

En substituant et égalant à zéro les coefficients des divers sinus, nous obtiendrons les relations suivantes :

$$i^2 A_2 + (s-2)^2 A_{s-2} - (s+2)^2 A_{s+2} = 0, \\ 2^2 A_2 + i^2 A_{s-2} - (2s-2)^2 A_{2s-2} + L = 0, \\ 2^2 A_2 - i^2 A_{s+2} + (2s+2)^2 A_{2s+2} + L = 0, \\ (s-2)^2 A_{s-2} - i^2 A_{2s-2} + (3s-2)^2 A_{3s-2} = 0, \\ (s+2)^2 A_{s+2} - i^2 A_{2s+2} + (3s+2)^2 A_{3s+2} = 0, \\ (2s-2)^2 A_{2s-2} - i^2 A_{3s-2} + (4s-2)^2 A_{4s-2} = 0, \\ (2s+2)^2 A_{2s+2} - i^2 A_{3s+2} + (4s+2)^2 A_{4s+2} = 0, \\ \text{etc.}$$

La loi de ces relations est évidente, à partir de la quatrième.

On reconnaîtra facilement que si l'on opère de même sur les équations (14), et qu'on pose

$$\gamma \nu_2 = \gamma_1 \zeta_2,$$

on aura

$$\zeta_2 = -A_2 \cos 2\varpi + A_{s-2} \cos (s-2)\varpi - A_{s+2} \cos (s+2)\varpi \\ + A_{2s-2} \cos (2s-2)\varpi - A_{2s+2} \cos (2s+2)\varpi + \dots,$$

les coefficients étant les mêmes que précédemment.

Les relations qui ont été trouvées entre ces coefficients peuvent servir à les déterminer tous en fonction de deux d'entre eux qui resteront arbitraires : mais il existe des conditions auxquelles doivent satisfaire  $\zeta_1$  et  $\zeta_2$ , et qui serviront à les déterminer. En effet, la profondeur  $\gamma$  du liquide étant nulle pour  $\varpi = -\frac{\pi}{2s}$  et pour  $\varpi = \frac{\pi}{2s}$ , et les valeurs de  $\nu_1$  et de  $\nu_2$  ne devant jamais être infinies, il s'ensuit que  $\zeta_1$  et  $\zeta_2$  doivent également être nuls pour ces deux valeurs de  $\varpi$ ; en remplaçant donc  $\varpi$  par  $\frac{\pi}{2s}$ , dans  $\zeta_1$  et  $\zeta_2$ , et égalant à zéro, on



trouvera

$$\left. \begin{aligned} & \left[ \begin{aligned} & A_2 - A_{2s+2} + A_{4s+2} - A_{6s+2} + \dots \\ & + A_{2s-2} - A_{4s-2} + A_{6s-2} - \dots \end{aligned} \right] \sin \frac{\pi}{s} \\ + & \left[ \begin{aligned} & A_{s+2} - A_{3s+2} + A_{5s+2} - A_{7s+2} + \dots \\ & + A_{s-2} - A_{3s-2} + A_{5s-2} - A_{7s-2} + \dots \end{aligned} \right] \cos \frac{\pi}{s} \end{aligned} \right\} = 0,$$

$$\left. \begin{aligned} - & \left[ \begin{aligned} & A_2 - A_{2s+2} + A_{4s+2} - A_{6s+2} + \dots \\ & + A_{2s-2} - A_{4s-2} + A_{6s-2} - \dots \end{aligned} \right] \cos \frac{\pi}{s} \\ + & \left[ \begin{aligned} & A_{s+2} - A_{3s+2} + A_{5s+2} - A_{7s+2} + \dots \\ & + A_{s-2} - A_{3s-2} + A_{5s-2} - A_{7s-2} + \dots \end{aligned} \right] \sin \frac{\pi}{s} \end{aligned} \right\} = 0.$$

En remplaçant  $\varpi$  par  $-\frac{\pi}{2s}$ , on trouverait les mêmes équations. Ces deux équations reviennent évidemment aux deux suivantes :

$$\left. \begin{aligned} & A_2 - A_{2s+2} + A_{4s+2} - A_{6s+2} + \dots \\ & + A_{2s-2} - A_{4s-2} + A_{6s-2} - \dots \end{aligned} \right\} = 0,$$

$$\left. \begin{aligned} & A_{s+2} - A_{3s+2} + A_{5s+2} - A_{7s+2} + \dots \\ & + A_{s-2} - A_{3s-2} + A_{5s-2} - A_{7s-2} + \dots \end{aligned} \right\} = 0,$$

qui serviront à trouver les valeurs des deux coefficients qui étaient restés indéterminés.

D'après les valeurs trouvées pour  $\zeta_1$  et  $\zeta_2$ , on aura pour  $y_1$  et  $y_2$  les valeurs suivantes :

$$y_1 = -\gamma_1 \left[ \begin{aligned} & 2A_2 \cos 2\varpi + (s-2)A_{s-2} \cos(s-2)\varpi + (s+2)A_{s+2} \cos(s+2)\varpi \\ & + (2s-2)A_{2s-2} \cos(2s-2)\varpi + (2s+2)A_{2s+2} \cos(2s+2)\varpi + \dots \end{aligned} \right],$$

$$y_2 = -\gamma_1 \left[ \begin{aligned} & 2A_2 \sin 2\varpi - (s-2)A_{s-2} \sin(s-2)\varpi + (s+2)A_{s+2} \sin(s+2)\varpi \\ & - (2s-2)A_{2s-2} \sin(2s-2)\varpi + (2s+2)A_{2s+2} \sin(2s+2)\varpi - \dots \end{aligned} \right],$$

et par conséquent pour  $y$ , la valeur

$$y = -\gamma_1 \left\{ \begin{aligned} & 2A_2 \cos 2[(n-n')t - \lambda - \varpi] + (s-2)A_{s-2} \cos 2\{[(n-n')t - \lambda - \varpi] + s\varpi\} \\ & + (s+2)A_{s+2} \cos\{2[(n-n')t - \lambda - \varpi] - s\varpi\} + (2s-2)A_{2s-2} \cos\{2[(n-n')t - \lambda - \varpi] + 2s\varpi\} \\ & + (2s+2)A_{2s+2} \cos\{2[(n-n')t - \lambda - \varpi] - 2s\varpi\} + \dots \end{aligned} \right\},$$

ou bien

$$y = N \cos 2[(n-n')t - \lambda - \varpi - \varepsilon],$$

les quantités  $N$  et  $\varepsilon$  étant déterminées par les formules

$$\operatorname{tang} 2\varepsilon = \frac{-(s-2)A_{s-2} \sin s\varpi + (s+2)A_{s+2} \sin s\varpi - (2s-2)A_{2s-2} \sin 2s\varpi + (2s+2)A_{2s+2} \sin 2s\varpi - \dots}{2A_2 + (s-2)A_{s-2} \cos s\varpi + (s+2)A_{s+2} \cos s\varpi + (2s-2)A_{2s-2} \cos 2s\varpi + (2s+2)A_{2s+2} \cos 2s\varpi + \dots},$$

$$N = \gamma \sqrt{[-(s-2)A_{s-2} \sin s\varpi + (s+2)A_{s+2} \sin s\varpi - \dots]^2 + [2A_2 + (s-2)A_{s-2} \cos s\varpi + (s+2)A_{s+2} \cos s\varpi + \dots]^2}.$$

On verra, comme dans le numéro précédent, que cette valeur de  $\gamma$  satisfait à la condition que la quantité de liquide reste constante.

On reconnaît encore ici que, pour des valeurs de  $\varpi$  égales et de signes contraires,  $\varepsilon$  prend aussi des valeurs égales et de signes contraires; en sorte que, autant le maximum de la hauteur du liquide retarde sur le passage du cylindre (B) au méridien en un point, autant ce maximum avance sur ce passage en un autre point symétrique du premier par rapport au plan méridien correspondant à  $\varpi = 0$ . Ce résultat s'applique aux deux limites du liquide, qui sont placées symétriquement par rapport à ce plan.

#### § IV.

##### *Considérations générales sur les marées de l'océan Atlantique.*

**18.** C'est dans un Mémoire sur les marées du port de Londres, présenté à la Société royale de cette ville, en juin 1831, que M. Lubbock émet pour la première fois l'idée que la marée se propage du sud au nord dans l'océan Atlantique [\*]: « En sorte que, ajoute-t-il, la pleine » mer arrive à peu près en même temps sur la côte de Portugal, et » sur la côte opposée d'Amérique, circonstance remarquable qui a été » signalée par Bacon. » Ce Mémoire ne renferme pas d'autres détails à ce sujet, si ce n'est une carte réduite sur laquelle sont marqués, sur les côtes orientales et occidentales de l'océan Atlantique, plusieurs points opposés où les marées ont lieu au même moment.

---

[\*] It will be seen that the continents alter the direction of the *cotidal* lines (I mean the series of points at which it is high water at the same instant), and that the progress of the tide is not always from east to west: in the Atlantic it is from south to north; so that it is high water at nearly the same time on the coast of Portugal and on the opposite coasts of America. This remarkable circumstance is Noticed by Bacon. (*Transactions philosophiques* de 1831, page 382.)

En mai 1833, M. Whewell présenta à la même Société un Mémoire intitulé : *Essai d'une première approximation d'une carte de lignes cotidales* (il entend par ligne cotidale la suite des points dans lesquels la pleine mer arrive au même moment). Dans ce Mémoire, l'auteur s'appuie sur tous les renseignements recueillis par les navigateurs et qui ont pu parvenir à sa connaissance, pour tracer dans toutes les mers les lignes cotidales, lignes qui indiquent, comme on le concevra aisément, les positions successives du flot-marée (*tide-wave*). Pour l'océan Atlantique en particulier, il trouve, en réduisant les heures des pleines mers dans différents lieux en temps de Greenwich, que ces heures vont constamment en retardant sur la côte est de cet océan, depuis le cap de Bonne-Espérance jusque vers les îles Britanniques; et il en conclut que le flot-marée marche du sud au nord, comme l'indique du reste très-clairement la carte générale qui est annexée à son Mémoire, et sur laquelle les lignes cotidales de l'océan Atlantique sont des lignes convexes vers le nord, et ayant leurs extrémités sur des points des deux côtes à peu près opposés.

Dans un nouveau Mémoire sur les marées du port de Londres, présenté en 1836, M. Lubbock suppose que ces marées suivent les mêmes lois qu'au cap de Bonne-Espérance, si ce n'est qu'elles sont en retard de trente-six heures sur celles de ce cap; parce qu'il admet, comme précédemment, que le flot-marée se propage dans l'océan Atlantique du sud au nord, qu'il tourne autour des îles Britanniques, pour arriver jusqu'à Londres, et que, pour faire ce trajet, il met trente-six heures, dont douze pour aller du cap de Bonne-Espérance à Gibraltar, douze de Gibraltar à Édimbourg, et douze d'Édimbourg à Londres. Il ajoute qu'il a reconnu que le retard des marées à Brest est beaucoup plus petit qu'à Londres, et qu'il n'y a pas de doute qu'il ne soit moindre au cap de Bonne-Espérance qu'à Brest.

Il est évident d'après cela que, pour MM. Lubbock et Whewell, les marées de Brest, et celles de toute la partie nord de l'océan Atlantique ne sont, du moins en grande partie, que des marées dérivées, et qu'elles sont le résultat des oscillations que la Lune et le Soleil produisent dans la mer du Sud.

**19.** Voyons d'abord si les faits sur lesquels repose l'idée admise par

les deux savants anglais ne pourraient pas s'accorder avec l'idée contraire, qui consisterait à regarder les marées des côtes d'Europe, sur l'océan Atlantique, comme produites en grande partie par l'action directe de la Lune et du Soleil. Imaginons pour cela que les marées de la mer du Sud produisent, comme ils le supposent, des ondulations qui se propagent du sud au nord, dans l'océan Atlantique, et qu'en même temps les actions de la Lune et du Soleil donnent lieu, quelque part dans cet océan, à des marées directes, dont les heures sur les côtes s'accordent à peu près avec celles du flot venant de la mer du Sud; ces marées directes ne feront qu'augmenter la hauteur des marées observées sur ces côtes, et les heures resteront toujours à peu près les mêmes que si elles n'existaient pas. Si donc on se contente de considérer les heures des marées aux différents points des côtes, il semblera toujours que les marées ne sont que le résultat de celles qui se produisent dans la mer du Sud, et que les actions directes du Soleil et de la Lune n'y entrent pour rien. Eh bien, j'ai de fortes raisons de croire que ce cas hypothétique se trouve réalisé dans la nature.

Si nous considérons, en effet, la figure de l'océan Atlantique, nous remarquerons qu'en allant du sud au nord, après un resserrement assez considérable vers l'équateur, entre l'Afrique et l'Amérique du Sud, il s'élargit et forme un immense bassin dont la plus grande largeur en longitude est d'environ 70 degrés, et correspond à peu près au parallèle du trentième degré de latitude nord; sur les côtes d'Afrique et d'Europe qui sont voisines de cette plus grande largeur, l'établissement varie de onze heures à trois heures, en marchant du sud au nord, et par conséquent pourrait assez bien convenir à des marées qui seraient produites directement dans ce bassin. On voit donc, d'après cela, que les heures des marées recueillies par les navigateurs sur les divers points des côtes occidentales d'Afrique et d'Europe ne peuvent pas suffire pour démontrer que les marées que nous observons soient presque exclusivement produites par celles de la mer du Sud, puisque ces heures s'accordent avec l'hypothèse où des marées directes, même très-considérables, se produisent vers le trentième degré de latitude nord.

MM. Lubbock et Whewell s'appuient encore sur un autre fait: c'est que la pleine mer arrive à peu près au même instant dans des points des deux côtes de l'Océan ayant même latitude. Mais ce fait n'est nullement

contraire à notre hypothèse; car, lorsque des marées se produisent directement dans une mer limitée, il peut très-bien se faire que la pleine mer arrive en même temps, ou à peu près, sur les deux côtes opposées. Ensuite les heures de la pleine mer sur les côtes des États-Unis éprouvent probablement des retards en raison du peu de profondeur que la mer doit présenter jusqu'à une certaine distance des côtes dans ces contrées, et ces heures ne doivent pas, par conséquent, être considérées comme pouvant conduire à des résultats bien concluants.

**20.** Maintenant que nous avons reconnu que rien, dans les faits cités, ne s'oppose à ce qu'on regarde les marées de la partie nord de l'océan Atlantique comme étant en grande partie des marées directes, nous allons chercher à donner diverses preuves qui contribueront à confirmer l'exactitude de cette hypothèse.

La première et la meilleure consistera dans la considération des hauteurs des marées, dont les savants anglais ne se sont pas occupés. Ces hauteurs ne sont pas connues d'une manière bien précise, quoique cependant leur détermination soit sujette à moins d'incertitude que celle de l'établissement; mais les renseignements donnés par les navigateurs sur ces hauteurs seront bien suffisants pour l'objet que nous nous proposons ici.

Pour la côte occidentale d'Afrique, j'ai consulté le Tableau général des vents, des courants et des marées, par Ch. Romme; la description des côtes d'Afrique, par Owen; le Mémoire de M. Roussin sur la navigation aux côtes occidentales d'Afrique, et les Cartes qui composent l'*Hydrographie française*. J'ai pu former ainsi le Tableau suivant, qui donne les hauteurs des marées en pieds, avec l'indication des sources où je les ai puisées.

Cap de Bonne-Espérance. . . . .	{	3 <sup>pi</sup> . . . . .	Romme.
		5 <sup>pi</sup> . . . . .	Owen.
Simon's-Bay. . . . .		3 <sup>pi</sup> . . . . .	Romme.
Ile Sainte-Hélène. . . . .		2 <sup>pi</sup> . 9 <sup>po</sup> . . . . .	Romme.
Saint-Paul de Loando . . . . .		5 <sup>pi</sup> . . . . .	Owen.
Baie de Corisco. . . . .		7 <sup>pi</sup> . . . . .	Owen.
Entrée de la rivière de Benin. . .		8 <sup>pi</sup> . . . . .	Owen.

Rivière Sierra-Léone. . . . .	{ 10 <sup>pi.</sup> . . . . .	Romme.
	{ 12 <sup>pi.</sup> 6 <sup>po.</sup> . . . . .	Owen.
Iles de Loss. . . . .	{ 12 à 15 <sup>pi.</sup> . . . . .	Romme.
	{ 13 <sup>pi.</sup> . . . . .	Owen.
Archipel des Bissagos, entrée du grand canal. . . . .	8 <sup>pi.</sup> . . . . .	Roussin.
Archipel des Bissagos, canal oriental. . . . .	12 à 15 <sup>pi.</sup> . . . . .	Roussin.
Ile Gorée. . . . .	{ 2 à 3 <sup>pi.</sup> . . . . .	Romme.
	{ 2 <sup>pi.</sup> 6 <sup>po.</sup> . . . . .	<i>Hydr. franç.</i> (Roussin)
Ile Saint-Nicolas (cap Vert). . . . .	5 à 6 <sup>pi.</sup> . . . . .	Romme.
Cap Blanc. . . . .	10 <sup>pi.</sup> dans les syzygies. . . . .	<i>Hydrographie française.</i>
Sainte-Croix de Ténériffe. . . . .	{ 12 <sup>pi.</sup> dans les syzygies. . . . .	} <i>Hydrographie française.</i>
	{ 6 <sup>pi.</sup> dans les quadratures. . . . .	

La plupart de ces hauteurs sont données sans indication des époques auxquelles elles correspondent, en sorte qu'il est possible que plusieurs d'entre elles se rapportent aux syzygies. On peut expliquer ainsi la différence des hauteurs données par Romme et par Owen pour le cap de Bonne-Espérance, différence qui est presque égale à la plus petite des deux hauteurs. Cependant, quoique les marées soient généralement très-petites aux environs du cap de Bonne-Espérance, elles pourraient bien avoir au cap même une hauteur moyenne de 5 pieds. à cause de la position qu'il occupe, à l'extrémité d'un continent qui est disposé de manière à s'opposer à la marche du flot-marée de l'est à l'ouest.

La petitesse des marées à l'île Sainte-Hélène est confirmée par des observations dont parle M. Whewell, dans son Mémoire de 1833. D'après ces observations, la plus grande marée dans cette île est de 3 pieds.

A l'inspection du tableau précédent, on voit que la marée, faible d'abord au cap et à Sainte-Hélène, augmente sur les côtes de Guinée, et devient assez considérable à l'entrée de la rivière Sierra-Léone, et dans les îles de Loss et des Bissagos; puis elle redevient faible à l'île Gorée, où elle n'est plus que de  $2\frac{1}{2}$  pieds; enfin, à partir de là, elle augmente jusque vers les côtes d'Europe.

Quant aux hauteurs des marées sur les côtes d'Europe, je me contenterai de prendre les résultats des observations faites simultanément en divers lieux, en juin 1835, et rapportées par M. Whewell, dans un Mémoire présenté à la Société royale de Londres en 1836 [\*]. D'après ces observations, la hauteur moyenne de la marée est

A Cadix. . . . .	d'environ	$8^{\text{pi}}$ ,
Sur la côte de Portugal . . . . .		$7^{\text{pi}} \cdot \frac{1}{2}$ ,
Pointe nord-ouest de l'Espagne. . . . .		$9^{\text{pi}} \cdot \frac{1}{2}$ ,
A Brest. . . . .		$14^{\text{pi}}$ .

On voit par là que les marées conservent sur les côtes d'Espagne et de Portugal, à peu près la grandeur qu'elles avaient vers le nord de l'Afrique, et qu'elles sont encore plus considérables à Brest.

Si nous cherchons maintenant à nous rendre compte de ce qui devrait arriver si les marées de l'océan Atlantique n'étaient que des marées dérivées provenant de celles de la mer du Sud, nous reconnaitrons que le flot-marée, en s'avancant vers le nord, rencontrerait bientôt la côte de Guinée qui s'opposerait à sa marche, comme une barrière, et que, par conséquent, les marées deviendraient plus grandes sur cette côte; mais qu'après avoir traversé l'espèce de détroit que présente l'Océan, le flot diminuerait en se répandant dans une mer plus vaste, et que les marées redeviendraient au moins aussi faibles qu'au point de départ de ce flot. Les résistances de tout genre, auxquelles la mer est soumise dans ses mouvements, contribueraient encore à faire diminuer la grandeur de ces marées. Les résultats des observations des navigateurs s'accordent assez bien avec cette marche du flot-marée, depuis le cap de Bonne-Espérance, jusque vers le cap Vert; mais, à partir de là, jusqu'aux îles Britanniques, la grandeur des marées est beaucoup plus considérable qu'elle ne devrait l'être dans cette hypothèse; et on ne peut pas dire que cela tient à des circonstances locales, puisque toutes les observations, faites en un grand nombre de lieux très-différents, conduisent au même résultat.

**21.** Dans la crainte qu'il ne reste des doutes sur la petitesse du flot-

---

[\*] *Transactions philosophiques* de 1836, II<sup>e</sup> partie, page 327.

marée dans la mer du Sud, petitesse qui sert de fondement à nos raisonnements, et qui n'a été constatée, dans le numéro précédent, qu'en un très-petit nombre de points, je considérerai aussi les hauteurs des marées sur les côtes de l'Amérique méridionale. Les marées devant se produire, dans la mer du Sud, à peu près comme elles le feraient dans une mer libre de toutes parts, le flot-marée doit marcher de l'est à l'ouest, et par conséquent venir s'arrêter sur les côtes de l'Amérique, où les eaux doivent s'élever plus qu'en pleine mer. Voyons maintenant ce qu'indiquent les observations.

Pendant le séjour de *l'Émulation* (voyage de M. Duperré) sur la rade de Montevideo, en janvier 1831, la plus grande marée observée a été de 2<sup>pi.</sup> 5<sup>po.</sup>; et, ce qui est assez singulier, le 15 janvier, lendemain de la nouvelle lune, le niveau de la mer n'a varié que de 7 pouces, depuis 7 heures du matin jusqu'à 5 heures du soir. La latitude de Montevideo est à peu près la même que celle du cap de Bonne-Espérance.

Suivant le *Pilote du Brésil* de M. Roussin, la hauteur de la marée est d'environ 2<sup>pi.</sup>  $\frac{1}{2}$  à l'île Sainte-Catherine et à Rio-Janeiro; d'environ 4 pieds à l'entrée de la baie du Saint-Esprit; et au plus de 5 pieds, à l'époque des syzygies, dans les îles des Abrolhos.

Il résulte évidemment de ces nombres que les marées de la mer du Sud sont extrêmement faibles et insuffisantes pour être en grande partie la cause des marées des côtes de l'Europe.

Si nous continuons à marcher vers le nord, sur la côte d'Amérique, nous trouvons, toujours d'après le *Pilote du Brésil*, que la marée est d'environ 5 pieds dans la Baie de Tous-les-Saints; qu'elle est de 7<sup>pi.</sup>  $\frac{1}{2}$  dans le port de Fernambouc; de 10 à 12 pieds dans l'île isolée Fernando de Noronha; de 11 à 12 pieds dans la baie de Ciara, à l'époque des syzygies; et enfin, d'environ 8 pieds à Cayenne.

Cette augmentation de la hauteur de la marée vers le nord de la côte du Brésil s'accorde assez bien, ainsi que celle qui a été observée sur la côte de Guinée, avec l'hypothèse de MM. Lubbock et Whewell sur la marche du flot-marée du sud au nord; puisque, vers le rétrécissement que présente l'Océan, ce flot doit devenir plus considérable: mais elle pourrait bien tenir aussi en partie aux marées produites directement dans ces régions équatoriales. C'est ce dont nous ne nous oc-



cupérons pas davantage, notre objet principal étant uniquement de démontrer que les marées de Brest sont en grande partie dues à l'action directe de la Lune et du Soleil sur la partie nord de l'océan Atlantique.

22. Après avoir considéré les hauteurs des marées, nous allons nous occuper de leur régularité, ce qui nous fournira de nouvelles preuves de ce que nous avançons.

Tous les navigateurs s'accordent à dire que les marées de la mer du Sud sont très-irrégulières. Ainsi M. Whewell parle, dans son Mémoire de 1833, d'observations faites à Sainte-Hélène par Maskelyne en 1761, et par le lieutenant Johnson en 1826, observations dont nous avons déjà fait mention plus haut, et d'après lesquelles les marées de Sainte-Hélène sont très-irrégulières.

En 1818, M. de Freycinet fit faire des observations de marées très-précises à Rio-Janeiro, depuis le 8 janvier jusqu'au 24 du même mois. La hauteur de la mer était déterminée de dix minutes en dix minutes, au moyen d'un flotteur, et cela jour et nuit. Eh bien, les résultats de ces observations présentent beaucoup d'irrégularités. Si l'on se contente de prendre les heures des pleines mers et celles des basses mers, on trouve, par exemple, les résultats suivants :

Le 9, basse mer à  $11^h 31^m$  matin,  
*Id.*, basse mer à  $11^h 40^m$  soir,  
 10, basse mer à  $10^h 35^m$  matin,  
*Id.*, basse mer à  $11^h 40^m$  soir,  
 11, basse mer à  $10^h 30^m$  matin,  
 12, basse mer à  $0^h 30^m$  matin,  
*Id.*, basse mer à  $10^h 20^m$  matin,  
 13, basse mer à  $1^h 50^m$  matin,  
*Id.*, basse mer à  $11^h 10^m$  matin,  
 14, basse mer à  $1^h 15^m$  matin,  
*Id.*, basse mer à  $11^h 0^m$  matin,  
 15, basse mer à  $4^h 20^m$  matin,  
*Id.*, basse mer à  $4^h 0^m$  soir.

Le 19,	pleine mer à	1 <sup>h</sup> 43 <sup>m</sup> matin,
<i>Id.</i> ,	pleine mer à	1 <sup>h</sup> 15 <sup>m</sup> soir,
20,	pleine mer à	2 <sup>h</sup> 52 <sup>m</sup> matin,
<i>Id.</i> ,	pleine mer à	1 <sup>h</sup> 25 <sup>m</sup> soir,
21,	pleine mer à	3 <sup>h</sup> 5 <sup>m</sup> matin,
<i>Id.</i> ,	pleine mer à	1 <sup>h</sup> 55 <sup>m</sup> soir,
22,	pleine mer à	3 <sup>h</sup> 45 <sup>m</sup> matin.

Ainsi l'heure de la basse mer, au lieu de retarder à peu près uniformément d'un jour au suivant, avait avancé, pour l'une des deux basses mers de chaque jour, depuis le 9 jusqu'au 12; le 14, cette basse mer était arrivée encore 31 minutes plus tôt que le 9; puis, tout à coup, du 14 au 15, elle avait retardé de 5 heures. Quant aux pleines mers, on voit que, du 19 au 22, l'une des deux a retardé beaucoup moins vite que l'autre.

Je trouve également dans la relation du voyage de Bougainville, en 1826, à l'occasion de son séjour à Rio-Janeiro, du 3 mars au 10 avril suivant : « Les marées n'ont pas eu la moindre régularité au » mouillage devant la ville, et il est impossible de leur assigner ni » époque, ni durée même approchée. Le jusant s'est prolongé presque » toujours bien au delà du flot, et sa vitesse aussi a été plus grande, » quoiqu'elle n'ait jamais excédé un nœud. La seule chose constante, » c'est que le flot porte au nord, et le jusant au sud. Parmi les circon- » stances variées qu'ont présentées les irrégularités des marées, il en » est deux qui sont particulièrement remarquables, et qui ont eu lieu » à des phases semblables de la Lune : lors du premier quartier, la » mer a été étale pendant vingt et une heures, et il n'y a point eu de » flot; au dernier quartier, le jusant a duré vingt-trois heures, et il » n'y a pas eu de flot. »

D'après le *Pilote du Brésil*, les marées sont très-irrégulières dans le canal des Abrolhos.

Toutes ces irrégularités tiennent sans doute à des circonstances locales, telles que les vents, les courants, etc.; mais si ces causes affectent d'une manière aussi notable le phénomène des marées dans la mer du Sud, ne devrait-il pas en résulter de semblables irrégularités dans les marées de nos ports, si elles n'étaient en grande partie produites

que par celles de cette mer? Or il suffit de jeter un coup d'œil sur les observations de marées de Brest, pour se convaincre que ces marées sont très-régulières.

M. Whewell lui-même, dans son Mémoire sur les marées des côtes d'Europe et d'Amérique, en 1835, cite un fait qui lui semble jeter du doute sur la marche du flot-marée du sud au nord : ce fait consiste en ce que l'inégalité diurne ne se présente pas de la même manière, dans les observations faites, en même temps, au cap de Bonne-Espérance, et sur les côtes d'Espagne et de Portugal [\*].

23. Voyons enfin si les dimensions de l'océan Atlantique permettent de supposer que les marées qui s'y produisent directement soient plus fortes que celles de la mer du Sud.

Nous avons déterminé, dans le n° 16, le mouvement d'un liquide sur un cylindre, en supposant que ce liquide soit renfermé entre deux plans diamétraux faisant entre eux un angle égal à  $2\varpi_1$ , et que sa profondeur soit constante entre ces deux plans; et nous avons trouvé que le rapport de la hauteur de la marée produite dans ce liquide à celle qui serait produite si, la profondeur restant la même, le liquide recouvrait tout le cylindre, a pour expression

$$\sqrt{\left(\cos 2\varpi - \frac{i}{2} \frac{\sin 2\varpi_1}{\sin i\varpi_1} \cos i\varpi\right)^2 + \left(\sin 2\varpi - \frac{i}{2} \frac{\cos 2\varpi_1}{\cos i\varpi_1} \sin i\varpi\right)^2}.$$

Si l'on y suppose  $\varpi = \varpi_1$ , afin de ne considérer que les marées qui ont lieu sur les bords de ce liquide, ce rapport prendra la forme

$$\sqrt{1 + \frac{i^2}{4} (\sin^2 2\varpi_1 \cot^2 i\varpi_1 + \cos^2 2\varpi_1 \tan^2 i\varpi_1) - i \sin 2\varpi_1 \cos 2\varpi_1 (\cot i\varpi_1 + \tan i\varpi_1)}.$$

Supposons maintenant que  $\varpi_1$  soit au plus égal à 30 degrés, c'est-à-dire que la largeur du liquide que nous considérons soit, par rapport à la circonférence du cylindre, plus petite que la largeur de la partie nord

---

[\*] J may add, that the notion of the progress of the tide-wave from south to north in the Atlantic is still further involved in difficulties by its appearing that at the cape of Good hope the diurnal inequality showed itself most clearly on the 17th, 18th, and 19th of June; that is, as late as In Spain and Portugal. (*Transactions Philosophiques* de 1836, 2<sup>me</sup> partie, p. 304.)

de l'océan Atlantique relativement à la circonférence du parallèle de la Terre qui lui correspond;  $\sin 2\varpi_1$  et  $\cos 2\varpi_1$ , seront tous deux positifs, et il est clair que l'expression précédente sera généralement plus grande que l'unité, puisqu'il suffira pour cela qu'on ait

$$\frac{i^2}{4} (\sin^2 2\varpi_1 \cot^2 i\varpi_1 + \cos^2 2\varpi_1 \tan^2 i\varpi_1) - i \sin 2\varpi_1 \cos 2\varpi_1 (\cot i\varpi_1 + \tan i\varpi_1) > 0,$$

condition qui sera déjà remplie par toutes les valeurs de  $i$  qui rendront  $\tan i\varpi_1$  négatif. Il est vrai que, si  $\varpi_1$  est très-petit,  $i$  devra être très-grand, et par conséquent la profondeur  $\gamma$  du liquide très-petite, puisqu'on a

$$i^2 = \frac{4a(n - n')^2}{g\gamma};$$

mais si  $\varpi_1$  n'est pas très-petit, l'inégalité précédente sera satisfaite pour un grand nombre de valeurs de  $\gamma$  qui donnent au liquide une profondeur comparable à celle de la mer. Faisons, par exemple,  $\varpi_1 = 30$  degrés, et  $i = \frac{3}{2}$ , et nous trouverons que le rapport des marées du liquide limité et du liquide entièrement libre devient à peu près égal à 3. Or, cette valeur de  $i$  est celle qui conviendrait au cas où les dimensions transversales du cylindre seraient égales à celles de l'équateur terrestre, où  $g$  serait la pesanteur sur la Terre,  $n$  sa vitesse angulaire,  $n'$  la vitesse angulaire de la Lune dans son orbite, et où la profondeur du liquide serait d'environ 4000 mètres.

Il n'est pas nécessaire d'insister davantage sur cette application de nos formules, pour qu'on admette que, malgré la grande différence entre le cas auquel elles se rapportent et le cas de la nature, elles montrent néanmoins que les marées produites directement dans le nord de l'océan Atlantique peuvent être beaucoup plus considérables que celles qui se produiraient dans une mer libre, de même profondeur, et située à la même latitude, et par conséquent aussi plus considérables que les marées de la mer du Sud.

**24.** En résumant ce qui vient d'être dit dans ce paragraphe, nous voyons que :

1°. Les faits sur lesquels repose l'idée adoptée par MM. Lubbock et

Whewell, que les marées de la partie nord de l'océan Atlantique ne sont en grande partie que des marées dérivées, ne sont pas contraires à l'hypothèse d'après laquelle ces marées seraient presque entièrement dues à l'action directe de la Lune et du Soleil;

2°. Les hauteurs des marées observées sur les côtes d'Europe sont trop considérables pour qu'on puisse les regarder comme étant le résultat des marées de la mer du Sud, puisque, d'après toutes les observations connues, ces dernières sont très-faibles;

3°. L'irrégularité qu'on observe généralement dans les marées de la mer du Sud ne s'accorde pas avec la régularité des marées de Brest;

4°. Enfin, les recherches analytiques contenues dans le troisième paragraphe de ce Mémoire montrent qu'on est en droit de supposer que les marées produites directement dans la partie nord de l'océan Atlantique sont plus fortes que celles qui se produisent dans la mer du Sud.

Il me semble impossible, d'après cela, de ne pas admettre, sinon comme certain, au moins comme extrêmement probable, que les marées des côtes d'Europe sur l'océan Atlantique sont presque entièrement dues à l'action directe de la Lune et du Soleil sur la partie nord de cet océan.

---