JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

CH. DELAUNAY

Note sur la ligne de longueur donnée qui renferme une aire maximum sur une surface

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 8 (1843), p. 241-244.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1843_1_8__241_0>

NOTE

SUR LA LIGNE DE LONGUEUR DONNÉE

QUI RENFERME UNE AIRE MAXIMUM SUR UNE SURFACE;

Par M. Ch. DELAUNAY.

Lorsqu'on cherche, parmi les diverses courbes planes isopérimètres, celle qui renferme une aire maximum, on trouve qu'en chacun de ses points elle a le même rayon de courbure; d'où l'on conclut immédiatement que cette courbe est un cercle. On peut se proposer de déterminer, de la même manière, parmi les diverses courbes isopérimètres tracées sur une surface quelconque, celle qui renferme une aire maximum sur cette surface : telle est la question dont je donne ici la soluion.

Il est évident qu'on arrivera au même résultat, quant à la nature de la courbe cherchée, soit qu'on suppose que cette courbe forme à elle seule tout le contour de l'aire qui doit être un maximum, soit qu'on considère une partie de ce contour comme ayant une figure invariable, l'autre partie seulement étant formée par une portion de la courbe cherchée. Nous admettrons donc que l'aire soit limitée de trois côtés par des courbes se projetant sur le plan des xy suivant des lignes droites parallèles aux axes des x et des y; en sorte que l'expression de cette aire sera

$$\int_a^b dx \int_c^y dy \sqrt{1 + p^2 + q^2};$$

a, b, c étant des constantes; p et q désignant, comme à l'ordinaire, les dérivées partielles de z relatives à x et à y tirées de l'équation de la surface; et la limite supérieure de l'intégrale relative à y étant la valeur de y pour un point quelconque de la courbe cherchée. Cette courbe devra être déterminée de manière à rendre l'expression précédente un maximum, en même temps que l'intégrale

$$\int_a^b dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

conservera une valeur constante; c'est-à-dire qu'elle devra rendre la quantité

$$\int_a^b dx \int_c^y dy \sqrt{1 + p^2 + q^2} + m \int_a^b dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

un maximum absolu, m étant une constante.

Pour trouver ce maximum absolu, on devra satisfaire à l'équation

$$\int_a^b dx \left[\delta y \sqrt{1 + p^2 + q^2} + m \frac{\frac{dy}{dx}\frac{d\delta y}{dx} + \frac{dz}{dx}\frac{d\delta z}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}} \right] = 0.$$

Remarquons maintenant que, la courbe cherchée étant située tout entière sur la surface donnée, on a pour un point quelconque de cette courbe,

$$\frac{dz}{dx} = p + q\frac{dy}{dx},$$

et aussi

$$\delta z = q\delta y;$$

en vertu de ces relations, l'équation précédente deviendra

$$\int_a^b dx \left[\delta y \sqrt{1 + p^2 + q^2} + m \frac{\frac{dy}{dx}\frac{d\delta y}{dx} + \left(p + q\frac{dy}{dx}\right)\frac{dq\delta y}{dx}}{\sqrt{1 + p^2 + 2pq\frac{dy}{dx} + (1+q^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} \right] = 0.$$

Si nous employons enfin le procédé ordinaire de l'intégration par parties, pour dégager δy dans tous les termes, et que nous égalions le coefficient de δy à zéro, nous trouverons l'équation suivante,

$$\sqrt{1+p^2+q^2} - m\frac{d}{dx}\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+p^2+2pq\frac{dy}{dx}+(1+q^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} - mq\frac{d}{dx}\frac{p+q\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+p^2+2pq\frac{dy}{dx}+(1+q^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = 0;$$

qui est l'équation différentielle de la courbe cherchée. En développant les calculs, désignant par r, s, t les dérivées partielles $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dxdy}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$, tirées de l'équation de la surface, et remarquant que

$$\sqrt{1+p^2+2pq\frac{dy}{dx}+(1+q^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\frac{ds}{dx},$$

on mettra aisément cette équation sous la forme

$$\frac{d^2y}{dx^2}(1+p^2+q^2)+\left[r+2s\frac{dy}{dx}+t\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]\left(q-p\frac{dy}{dx}\right)$$
$$=\frac{1}{m}\frac{ds^3}{dx^3}\sqrt{1+p^2+q^2}.$$

Pour interpréter cette équation différentielle, nous prendrons l'équation du plan osculateur de la courbe, qui est

$$\left[p\frac{d^2y}{dx^2}-r\frac{dy}{dx}-2s\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-t\left(\frac{dy}{dx}\right)^3\right](x-x')$$
$$+\left[q\frac{d^2y}{dx^2}+r+2s\frac{dy}{dx}+t\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right](y-y')-\frac{d^2y}{dx^2}(z-z')=0,$$

et l'équation du plan tangent à la surface, au même point, qui est

$$z-z'=p(x-x')+q(y-y');$$

x', y', z' étant les coordonnées courantes de ces deux plans.

En désignant par θ l'angle de ces deux plans, et calculant le cosinus de cet angle, on trouvera la valeur suivante,

$$\cos\theta=\frac{\frac{d^2y}{dx^2}(1+p^2+q^2)+\left[r+2s\frac{dy}{dx}+t\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]\left(q-p\frac{dy}{dx}\right)}{\sqrt{1+p^2+q^2}\sqrt{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2(1+p^2+q^2)+\left[r+2s\frac{dy}{dx}+t\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^2\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]+2\left[r+2s\frac{dy}{dx}+t\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]\frac{d^2y}{dx^2}\left(q-p\frac{dy}{dx}\right)}}$$

D'un autre côté, en nommant ρ le rayon de courbure de la courbe, on a

$$\frac{ds^2}{\rho^2}=\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(d\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(d\frac{dz}{ds}\right)^2;$$

d'où, en développant,

$$\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{ds}{dx}\right)^6 = \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2(1+p^2+q^2) + \left[r + 2s\frac{dy}{dx} + t\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^2\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]$$
$$+ 2\left[r + 2s\frac{dy}{dx} + t\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]\frac{d^2y}{dx^2}\left(q - p\frac{dy}{dx}\right).$$

En combinant cette relation avec la valeur de $\cos\theta$, on trouve

$$\frac{d^2y}{dx^2}(1+p^2+q^2) + \left[r + 2s\frac{dy}{dx} + t\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]\left(q - p\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\cos\theta\sqrt{1+p^2+q^2}}{\rho}\left(\frac{ds}{dx}\right)^3;$$

et par suite, l'équation différentielle de la courbe cherchée deviendra simplement

$$\rho = m\cos\theta.$$

Ainsi *cette courbe jouit de la propriété que, en chacun de ses points, son rayon de courbure est proportionnel au cosinus de l'angle formé par son plan osculateur et le plan tangent à la surface.*

Cette propriété peut être énoncée autrement : en effet, si l'on conçoit toutes les sphères qui contiennent le cercle osculateur de la courbe, et qui, par conséquent, ont un contact du second ordre avec cette courbe, leurs centres seront situés sur une perpendiculaire au plan osculateur, passant par le centre de courbure; et il est facile de voir que celle de ces sphères qui a son centre sur le plan tangent à la surface a pour rayon

$$\frac{\rho}{\cos\theta};$$

on peut donc dire que *en chaque point de la courbe de longueur donnée qui renferme une aire maximum sur une surface, la sphère qui contient le cercle osculateur de la courbe et dont le centre est sur le plan tangent à la surface, a un rayon constant.*