JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

E. BRASSINE

Sur quelques propriétés des centres de gravité

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 8 (1843), p. 46-48.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1843_1_8__46_0>

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES CENTRES DE GRAVITÉ;

Par E. BRASSINE,

Professeur à l'École d'Artillerie de Toulouse.

Théorème Ier. — *Les centres de gravité de l'aire et du contour, d'un polygone circonscrit à une circonférence, sont toujours situés sur une droite qui passe par le centre de cette circonférence.*

Théorème II. *Les distances des centres de gravité de l'aire et du contour du polygone, au centre de la circonférence inscrite, sont entre elles dans le rapport de 2 à 3.*

Ces théorèmes, qui ont lieu pour un triangle quelconque, s'appliqueraient aussi à un polygone gauche, dont les côtés seraient tangents à une sphère; seulement il faudrait, dans ce cas, remplacer l'aire polygonale par la somme des aires triangulaires qui ont leur sommet commun au centre de la sphère, et pour base les côtés du polygone circonscrit.

Observons que si le centre de gravité du contour polygonal coïncide avec le centre de circonférence qui lui est inscrite, il en sera de même du centre de gravité de l'aire du polygone.

Théorème III. *Le centre de gravité d'un polyèdre circonscrit à une sphère est situé sur la droite qui joint le centre de gravité de l'aire de ce polyèdre avec le centre de la sphère inscrite.*

Théorème IV. *Les distances du centre de gravité du polyèdre et du centre de gravité de son aire au centre de la sphère inscrite, sont entre elles dans le rapport de 3 à 4.*

Ces théorèmes, qui sont vrais pour une pyramide triangulaire quelconque, font voir clairement que si le centre de gravité de la surface du polyèdre coïncide avec le centre de la sphère inscrite, il en sera de même du centre de gravité du polyèdre lui-même.

Théorème V. — Il est aisé de démontrer que si l'on circonscrit un cône à un ellipsoïde quelconque, la droite qui joint le sommet de ce cône avec le centre de la courbe de contact passe toujours par le centre de l'ellipsoïde, d'où il résulte évidemment que, si l'on regarde la courbe de contact comme la base qui termine le cône circonscrit, *les centres de gravité du cône, de l'ellipsoïde et de l'ellipse de contact seront en ligne droite.*

Pour démontrer les quatre premiers théorèmes, il suffit de décomposer le polygone ou le polyèdre en triangles, ou en pyramides triangulaires ayant leurs sommets communs au centre du cercle inscrit ou de la sphère inscrite. On placera ensuite aux trois sommets de chaque triangle, ou aux quatre sommets de chaque pyramide, des masses sphériques égales, ayant leurs centres à ces sommets, et proportionnelles à leurs aires ou leurs volumes, c'est-à-dire à leurs bases; en composant les poids de ces masses, on arrivera aisément aux théorèmes énoncés.

Nous observerons en terminant que ce mode de démonstration fait trouver, d'une manière immédiate, toutes les constructions qu'on a imaginées pour déterminer les centres de gravité des polygones ou des polyèdres quelconques. Nous nous contenterons de citer les exemples suivants :

1°. Les constructions employées par M. Poinsot, dans la sixième édition de sa *Statique*, pour déterminer les centres de gravité du trapèze ou du tronc de pyramide triangulaire, deviennent évidentes si l'on décompose le trapèze en deux triangles, et qu'on place à leurs sommets respectifs des sphères égales proportionnelles à leurs aires ou aux bases du trapèze, ou si l'on décompose le tronc en trois pyramides triangulaires, aux sommets de chacune desquelles on placera des sphères égales, ayant leurs centres à ces sommets et leurs masses proportionnelles aux volumes respectifs des pyramides.

2°. Le théorème de Monge relatif au centre de gravité de la pyramide triangulaire, et qui consiste en ce que le centre de gravité de la pyramide est le milieu de la droite qui joint les milieux des arêtes opposées, devient une conséquence évidente de la composition de quatre poids égaux placés aux quatre sommets de la pyramide, en ayant soin de composer deux à deux les poids placés aux extrémités des aretes opposées.

3°. Considérons enfin un quadrilatère plan, dont les sommets successifs soient A, B, C, D : la diagonale AC coupe la diagonale BD en deux segments, que nous appellerons m, m', et qui sont proportionnels aux aires des triangles ACB, ACD. Cela posé, en plaçant aux sommets du premier triangle trois masses sphériques égales, ayant leurs centres en ces points, et représentées en grandeur par m, et aux sommets du second trois masses sphériques égales représentées par m', on arrivera immédiatement à cette conséquence, savoir, *que le centre de gravité du quadrilatère se trouve sur la droite qui joint le milieu de la diagonale* AC *avec le point de la diagonale* BD, *qui sépare les deux segments m et m' placés dans un ordre inverse.*

Ces exemples suffisent pour montrer la simplicité des considérations précédentes et l'usage qu'on peut en faire pour la détermination des centres de gravité.