JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

C.-F. GAUSS

Théorèmes généraux sur les forces attractives et répulsives qui agissent en raison inverse du carré des distances

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 7 (1842), p. 273-324.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1842_1_7__273_0>

THÉORÈMES GÉNÉRAUX
SUR
LES FORCES ATTRACTIVES ET RÉPULSIVES
QUI AGISSENT EN RAISON INVERSE DU CARRÉ DES DISTANCES;

PAR C.-F. GAUSS [*].

(Traduit de l'ouvrage intitulé : *Résultats des observations faites par la Société magnétique* en 1839; par MM. GAUSS et WEBER.)

I.

La nature nous présente plusieurs phénomènes que nous expliquons en supposant certaines forces dont l'action s'exerce entre les plus petites parties des corps, suivant la raison inverse du carré des distances.

De ce nombre est principalement la gravitation universelle, en vertu de laquelle une molécule pondérable exerce sur une autre molécule une action qui tend à les rapprocher dans la direction de la ligne droite qui les joint. La grandeur de cette action est mesurée par $\frac{\mu\mu'}{r^2}$, μ, μ' étant les masses des molécules, r leur distance.

Afin d'expliquer les phénomènes magnétiques, nous imaginons deux fluides dont l'un est considéré comme quantité positive et l'autre comme quantité négative; nous admettons que deux portions μ, μ' de ces fluides exercent l'une sur l'autre dans la direction de la ligne qui les unit, une action encore mesurée par $\frac{\mu\mu'}{r^2}$, et qui est répulsive si μ et μ' sont de même espèce, attractive dans le cas contraire.

[*] Ce Mémoire a été lu le 9 mars 1840 à la Société royale de Gottingue. Quelque temps auparavant M. Chasles aussi s'était livré à des recherches générales sur l'attraction (*voir* le tome VIII, page 209, des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, séance du 11 février 1839): son travail vient de paraître dans les Additions à la *Connaissance des Temps* pour l'année 1845. J. LIOUVILLE.

On peut en dire autant de l'action réciproque qu'exercent les parties des fluides électriques.

L'élément linéaire ds d'un courant galvanique exerce également sur tout élément μ de fluide magnétique (en admettant que ce fluide existe), une action qui est inversement proportionnelle au carré de la distance r; mais ici la force motrice, au lieu d'être dirigée suivant la ligne de jonction, est perpendiculaire au plan mené par μ et par la direction de ds; son intensité ne dépend pas non plus de la seule distance r, mais aussi de l'angle que r fait avec la direction de ds. Cet angle étant désigné par θ, on trouve que $\frac{\sin\theta.\mu ds}{r^2}$ est la mesure de l'action exercée par ds sur μ. Quant à l'action de μ sur ds, elle est naturellement égale et contraire à celle-là.

Si l'on regarde, avec Ampère, deux éléments de courants galvaniques ds, ds', comme agissant l'un sur l'autre dans la direction de la ligne droite qui les unit, soit attractivement, soit répulsivement, on est encore obligé d'admettre que la force motrice est en raison inverse du carré de la distance; mais la manière dont elle dépend de la direction des courants est plus compliquée.

Nous nous bornerons dans cet article aux trois premiers cas, c'est-à-dire à ceux où les forces agissent dans la direction de la droite menée entre l'élément qui produit l'action et celui qui la reçoit, avec une intensité proportionnelle aux masses et inversement proportionnelle au carré de la distance. Il est vrai que plusieurs de nos théorèmes s'appliquent à d'autres cas, avec de légères modifications; mais nous préférons réserver cette extension pour un autre Mémoire.

II.

Soient a, b, c les coordonnées rectangulaires d'un point matériel d'où émane une force attractive ou répulsive. Soit

$$\frac{\mu}{(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2}=\frac{\mu}{r^2}$$

la force accélératrice d'un point indéterminé O dont les coordonnées sont x, y, z; μ désignant, dans le premier cas du paragraphe précédent, la matière pondérable du premier point; dans le deuxième et le troisième cas, la quantité du fluide magnétique ou électrique de ce même point.

Si l'on décompose parallèlement aux axes la force qui agit en O, on trouvera pour les trois composantes les expressions

$$\frac{\varepsilon\mu(a-x)}{r^3},\quad \frac{\varepsilon\mu(b-y)}{r^3},\quad \frac{\varepsilon\mu(c-z)}{r^3},$$

dans lesquelles ε est tantôt égal à $+1$, tantôt égal à -1, selon que la force est attractive ou répulsive. Le choix entre ces deux valeurs est toujours clairement indiqué par la nature, et du point qui exerce l'action, et de celui qui la reçoit. Ces composantes peuvent être mises sous la forme des dérivées partielles

$$\frac{d\frac{\varepsilon\mu}{r}}{dx},\quad \frac{d\frac{\varepsilon\mu}{r}}{dy},\quad \frac{d\frac{\varepsilon\mu}{r}}{dz}.$$

Donc, si plusieurs points matériels μ_0, μ_1, μ_2, etc., agissent à des distances r_0, r_1, r_2, etc., sur un même point O, et si l'on pose

$$\frac{\mu_0}{r_0}+\frac{\mu_1}{r_1}+\frac{\mu_2}{r_2}+\text{etc.}=\sum\frac{\mu}{r}=\mathrm{V},$$

les composantes de la résultante de toutes les forces qui agissent en O seront exprimées par

$$\frac{\varepsilon\, d\mathrm{V}}{dx},\quad \frac{\varepsilon\, d\mathrm{V}}{dy},\quad \frac{\varepsilon\, d\mathrm{V}}{dz}.$$

Lorsque les agents, au lieu d'être concentrés dans des points isolés, remplissent sans intervalle une ligne, une surface, ou un espace matériel quelconque, la sommation $\sum$ doit être remplacée par une intégration simple, double ou triple. Ce dernier cas est celui de la nature; mais comme on peut souvent lui substituer, avec certaines modifications, des agents fictifs, concentrés dans des points ou occupant entièrement des lignes, des surfaces, nous traiterons également ces cas. Nous parlerons donc souvent de masses condensées dans des lignes, des surfaces ou même des points; et nous ne pensons pas que ce soient là des expressions impropres, parce que la masse dans ce cas n'est pour nous que tout ce dont émanent des forces attractives ou répulsives.

III.

Nous avons désigné par x, y, z les coordonnées de tout point de l'espace, et par V la somme des molécules agissantes divisées chacune par sa distance au point considéré, chaque particule devant être affectée du signe $+$ ou du signe $-$, suivant les circonstances. V est donc une fonction de x, y, z, et les recherches que nous allons faire sur la nature de cette fonction nous donneront la clef de la théorie des forces attractives et répulsives. Pour suivre librement la marche de nos recherches, nous appellerons V le potentiel des masses avec lesquelles il est en rapport. Cette définition paraîtra peut-être trop particulière, mais elle suffira au développement de notre problème. Dans un sens plus étendu, si l'on considérait des lois d'attraction autres que celles de la raison inverse du carré de la distance, on pourrait comprendre sous la dénomination de potentiel la fonction de x, y, z dont les dérivées partielles représenteraient les composantes de la force produite.

En désignant par p la résultante des forces qui agissent sur le point (x, y, z), et par α, β, γ les angles que la direction de cette force fait avec les axes, on aura pour les composantes

$$p\cos\alpha = \varepsilon\frac{dV}{dx},\qquad p\cos\beta = \varepsilon\frac{dV}{dy},\qquad p\cos\gamma = \varepsilon\frac{dV}{dz},$$

et

$$p = \sqrt{\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2}.$$

IV.

Quand ds est l'élément d'une ligne, droite ou courbe, $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, sont les cosinus des angles que cet élément fait avec les axes. Donc si θ désigne l'angle compris entre la direction de l'élément et celle de la force résultante, on aura

$$\cos\theta = \frac{dx}{ds}\cos\alpha + \frac{dy}{ds}\cos\beta + \frac{dz}{ds}\cos\gamma.$$

Par conséquent la composante de la force, parallèle à la direction de ds, sera

$$p \cos \theta = \varepsilon \left(\frac{dV}{dx} \frac{dx}{ds} + \frac{dV}{dy} \frac{dy}{ds} + \frac{dV}{dz} \frac{dz}{ds} \right) = \varepsilon \frac{dV}{ds}.$$

Une surface qui contiendra tous les points où le potentiel V a une valeur constante, séparera d'abord les parties de l'espace où V est plus petit que cette valeur, de celles où V est plus grand que cette même valeur. Si la ligne s est tout entière sur cette surface, ou si au moins elle la touche par l'élément ds, on aura $\frac{dV}{ds} = 0$, ce qui donne $\cos \theta = 0$, à moins que les éléments de la force ne se détruisent mutuellement, ou que l'on ait $p = 0$; mais dans ce cas la direction de la résultante est complétement indéterminée. Il suit de là que la résultante en chaque point de la surface considérée est normale à cette surface, et qu'elle agit du côté de l'espace avoisiné par les valeurs plus grandes de V quand $\varepsilon = +1$, et du côté opposé quand $\varepsilon = -1$. Nous donnerons à cette surface le nom de *surface d'équilibre*. Quand la ligne s ne sera pas tout entière sur la même surface d'équilibre, on pourra par chacun de ses points mener une surface d'équilibre. Si s coupe toutes ces surfaces à angle droit, une tangente menée à cette ligne indiquera en chacun de ses points la direction de la résultante, et $\frac{dV}{ds}$ en exprimera l'intensité.

L'intégrale $\int p \cos \theta \, ds = \int \varepsilon \frac{dV}{ds} \, ds$, étendue à un segment arbitraire de la ligne s, est évidemment égale à $\varepsilon (V_1 - V_0)$, V_0 et V_1 étant les valeurs du potentiel aux extrémités de la ligne. Donc si s est une ligne fermée, l'intégrale étendue à la ligne entière sera nulle.

V.

Il est évident que le potentiel a une valeur finie et déterminée en tout point situé en dehors des parties attractives et des parties répulsives. Il en est de même de ses dérivées partielles du premier ordre ou d'ordre supérieur, puisque dans cette supposition, elles deviennent des sommes de parties assignables, ou bien des intégrales dans lesquelles les quantités sous le signe $\int$ ne peuvent jamais devenir infinies. On aura donc

$$\frac{dV}{dx} = \sum \frac{(a-x)\mu}{r^3}, \qquad \frac{d^2V}{dx^2} = \sum \left[\frac{3(a-x)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right]\mu,$$
$$\frac{dV}{dy} = \sum \frac{(b-y)\mu}{r^3}, \qquad \frac{d^2V}{dy^2} = \sum \left[\frac{3(b-y)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right]\mu,$$
$$\frac{dV}{dz} = \sum \frac{(c-z)\mu}{r^3}, \qquad \frac{d^2V}{dz^2} = \sum \left[\frac{3(c-z)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right]\mu.$$

L'équation connue

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0$$

sera vraie pour tous les points de l'espace qui sont en dehors des masses agissantes.

VI.

Parmi les cas où il s'agit de trouver la valeur du potentiel ou les valeurs de ses dérivées partielles pour un point situé en dedans des masses agissantes, nous examinerons celui que l'on remarque dans la nature, c'est-à-dire que nous traiterons le cas où les masses remplissent un espace matériel déterminé de manière que leur densité soit toujours finie, quoiqu'elle soit tantôt la même pour tout le corps, tantôt variable d'un point à un autre.

Soient t l'espace que les masses remplissent; dt un élément infiniment petit de ce volume, auquel correspondent les coordonnées a, b, c; kdt l'élément de masse; V le potentiel relatif au point O (x, y, z); $r = \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2}$ la distance de ce point à l'élément dt. On aura

$$V = \int \frac{kdt}{r};$$

cette intégrale devant s'étendre à tout l'espace t, sera une intégrale triple. On voit facilement que l'intégration sera possible lors même que O se trouvera dans l'intérieur de l'espace t, quoique alors $\frac{1}{r}$ devienne infiniment grand pour les éléments situés à une distance infiniment petite de O. Car si l'on substitue à a, b, c des coordonnées polaires en posant

$$a = x + r\cos u, \quad b = y + r\sin u\cos\lambda, \quad c = z + r\sin u\sin\lambda,$$

on aura

$$dt = r^2 \sin u\, du\, d\lambda\, dr,$$

et

$$\mathrm{V} = \int\int\int kr \sin u\, du\, d\lambda\, dr.$$

Cette intégrale doit être étendue depuis $r = 0$, jusqu'à la valeur que r prend à la limite de t; depuis $\lambda = 0$, jusqu'à $\lambda = 2\pi$; depuis $u = 0$ jusqu'à $u = \pi$. En conséquence, V a nécessairement une valeur finie et déterminée.

Il est facile de voir qu'on pourra aussi poser

$$\frac{d\mathrm{V}}{dx} = \int kdt\,\frac{d\frac{1}{r}}{dx} = \int \frac{k(a-x)}{r^3}\,dt = \mathrm{X},$$

car en employant les coordonnées polaires, on change cette formule dans la suivante

$$\int\int\int k\cos u \sin u\, du\, d\lambda\, dr,$$

où l'intégration est possible, parce que les éléments situés à une distance infiniment petite de O, n'exercent sur cette valeur qu'une influence également infiniment petite. On aura donc une valeur finie et déterminée. Par des raisons analogues, on pourra poser

$$\frac{d\mathrm{V}}{dy} = \int \frac{k(b-y)}{r^3}\,dt = \mathrm{Y},$$
$$\frac{d\mathrm{V}}{dz} = \int \frac{k(c-z)}{r^3}\,dt = \mathrm{Z},$$

et ces fonctions, comme V, acquièrent au dedans de t des valeurs finies et déterminées, qui varient d'une manière continue avec les coordonnées du point O, tant que celui-ci est renfermé dans l'espace t, et même à la surface de t.

VII.

En ce qui concerne les coefficients différentiels des ordres supérieurs, il faut suivre une autre marche pour des points situés en dedans de t; car on ne peut transformer $\frac{dX}{dx}$ en

$$\int k\,dt\,\frac{d\frac{a-x}{r^3}}{dx},$$

c'est-à-dire

$$\int k\,\frac{3(a-x)^2-r^2}{r^5}\,dt,$$

parce que cette formule n'est en réalité qu'un signe sans valeur déterminée. En effet, dans la partie de t qui renferme le point O, on peut étendre l'intégrale à des masses assez rapprochées de ce point pour qu'elle surpasse toute valeur donnée, soit positive, soit négative. Il manque donc ici une condition essentielle sans laquelle l'intégrale entière ne peut avoir de signification réelle, je veux dire la possibilité d'employer la méthode d'exhaustion.

VIII.

Avant d'aborder notre sujet dans toute sa généralité, nous considérerons un cas spécial et très-simple, qui contribuera à rendre notre démonstration plus claire.

Soient t le volume d'une sphère dont le rayon est R et dont le centre est à l'origine des coordonnées; k la densité supposée constante de la masse qui remplit la sphère; $\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ la distance du point O au centre. Nous savons que le potentiel a deux expressions, suivant que O est en dedans ou en dehors de la sphère. Dans le premier cas, on a

$$V = 2\pi k R^2 - \tfrac{2}{3}\pi k \rho^2 = 2\pi k R^2 - \tfrac{2}{3}\pi k (x^2+y^2+z^2);$$

dans le deuxième,

$$V = \tfrac{4}{3}\,\frac{\pi k R^3}{\rho}.$$

A la surface de la sphère, ces deux expressions ont la même valeur $\frac{4}{3}\pi k R^2$, en sorte que le potentiel varie dans tout l'espace d'une manière continue.

Pour les coefficients différentiels, nous obtenons dans l'espace intérieur

$$\frac{dV}{dx} = X = -\tfrac{4}{3}\pi k x,$$
$$\frac{dV}{dy} = Y = -\tfrac{4}{3}\pi k y,$$
$$\frac{dV}{dz} = Z = -\tfrac{4}{3}\pi k z;$$

dans l'espace extérieur,

$$X = -\tfrac{4}{3}\frac{\pi k R^3 x}{\rho^3},$$
$$Y = -\tfrac{4}{3}\frac{\pi k R^3 y}{\rho^3},$$
$$Z = -\tfrac{4}{3}\frac{\pi k R^3 z}{\rho^3}.$$

Ces dernières formules donnent aussi à la surface les mêmes valeurs que les premières; et X, Y, Z varient dans tout l'espace d'une manière continue.

Il en est autrement avec les coefficients différentiels des quantités X, Y, Z. Nous avons dans l'espace intérieur

$$\frac{dX}{dx} = -\tfrac{4}{3}\pi k, \quad \frac{dY}{dy} = -\tfrac{4}{3}\pi k, \quad \frac{dZ}{dz} = -\tfrac{4}{3}\pi k;$$

tandis que, pour l'espace extérieur, nous avons

$$\frac{dX}{dx} = \frac{4\pi k R^3 (3x^2 - \rho^2)}{3\rho^5},$$
$$\frac{dY}{dy} = \frac{4\pi k R^3 (3y^2 - \rho^2)}{3\rho^5},$$
$$\frac{dZ}{dz} = \frac{4\pi k R^3 (3z^2 - \rho^2)}{3\rho^5}.$$

A la surface ces dernières expressions ne sont point identiques avec les premières; elles prennent des valeurs différentes, qui sont

$$\frac{4\pi kx^2}{R^2}, \quad \frac{4\pi ky^2}{R^2}, \quad \frac{4\pi kz^2}{R^2}.$$

Ainsi quoique les coefficients différentiels ci-dessus varient d'une manière continue, tant dans l'espace intérieur que dans l'espace extérieur, ils deviennent discontinus en passant de l'un de ces espaces à l'autre, et ils acquièrent chacun deux valeurs sur la surface de séparation, suivant que dx, dy, dz sont considérées comme positives ou négatives.

Les six autres coefficients différentiels

$$\frac{dX}{dy}, \quad \frac{dX}{dz}; \quad \frac{dY}{dx}, \quad \frac{dY}{dz}; \quad \frac{dZ}{dx}, \quad \frac{dZ}{dy},$$

sont dans le même cas. Dans l'intérieur de la sphère ils sont tous égaux à o, et en passant par la surface de la sphère, ils varient brusquement en prenant les valeurs

$$\frac{4\pi kxy}{R^2}, \quad \frac{4\pi kxz}{R^2}, \quad \text{etc.}$$

La somme

$$\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz},$$

ou

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2},$$

est égale à $-4\pi k$ dans l'intérieur de la sphère, à o à l'extérieur. A la surface elle n'a plus une valeur unique. Si l'on veut mettre de la précision dans le langage, on peut considérer la somme en question comme composée de trois parties ayant chacune deux valeurs différentes. Il y a donc huit combinaisons, dont une correspond à la face intérieure de la sphère, une autre à la face extérieure; les six autres doivent être rejetées comme insignifiantes. Quelques auteurs prétendent que la valeur de cette somme à la surface de la sphère est égale à $-2\pi k$, expression qui représenterait une moyenne entre les valeurs relatives à l'intérieur et celles relatives à l'extérieur; mais il faut rejeter leur analyse, si l'on veut conserver la définition des coefficients différentiels dans toute sa pureté mathématique.

IX.

Le résultat auquel nous sommes parvenus dans l'exemple précédent, n'est qu'un cas particulier d'un théorème général d'après lequel, si le point O est dans l'intérieur de la masse agissante, la valeur de

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2}$$

est égale au produit de -4π par la densité au point O. La manière la plus satisfaisante de démontrer cet important théorème paraît être celle que nous allons exposer.

Nous supposerons que la densité k ne varie pas brusquement dans l'intérieur de t, c'est-à-dire que k est une fonction de a, b, c, savoir $f(a, b, c)$, dont la valeur varie en dedans de t d'une manière continue, tandis qu'au dehors elle est égale à o.

Soit t_1 l'espace qu'occupe t quand l'abscisse de chaque point de la surface de ce corps est diminuée de la quantité e, c'est-à-dire quand la surface a été reculée de e parallèlement à l'axe des x. Soient $t = t_0 + \theta$, $t_1 = t_0 + \theta_1$, en sorte que t_0 désigne tout l'espace qui reste commun à t et t_1. Considérons les intégrales

$$(1) \qquad \int \frac{f(a, b, c)\,(a-x)}{[(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2]^{\frac{3}{2}}}\,dt,$$

$$(2) \qquad \int \frac{f(a, b, c)\,(a-x-e)}{[(a-x-e)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2]^{\frac{3}{2}}}\,dt,$$

$$(3) \qquad \int \frac{f(a+e, b, c)\,(a-x)}{[(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2]^{\frac{3}{2}}}\,dt.$$

L'intégrale (1), étendue à tout l'espace t, sera la valeur de $\frac{dV}{dx}$ ou X, relative au point O. L'intégrale (2), également étendue à t, sera la valeur de $\frac{dV}{dx}$, relative au point dont les coordonnées sont $x + e$, y, z; nous désignons cette valeur par $X + \xi$. Il est évident que cette intégrale est identique avec la troisième étendue à tout l'espace t_1. Soient donc

l l'intégrale (1) étendue à tout l'espace t_0,
λ . . . . θ,
l_1 l'intégrale (3). . . . . t_0,
λ_1 . . . . θ_1;

on aura

$$X = l + \lambda, \qquad X + \xi = l_1 + \lambda_1;$$

et si nous posons

$$f(a+e, b, c) - f(a, b, c) = \Delta k,$$

l'intégrale

$$(4) \qquad \int \frac{\frac{\Delta k}{e}(a-x)}{[(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2]^{\frac{3}{2}}}\, dt.$$

étendue à t_0, sera égale à $\frac{l_1 - l}{e}$.

Les résultats que nous avons trouvés jusqu'ici sont vrais quelle que soit la position du point O. Mais pour ce qui va suivre, nous excluons le cas où ce point serait sur la surface, c'est-à-dire que nous supposons que ce point est à une distance mesurable de la surface, soit en dedans de t, soit en dehors.

Si maintenant nous prenons e infiniment petit, les espaces θ et θ_1 deviennent deux couches infiniment minces et qui sont contiguës à la surface t; décomposons cette surface en éléments ds, et désignons par α l'angle qu'une normale élevée en dehors fait avec l'axe des x. D'après l'hypothèse que e est infiniment petit, on voit que l'angle α sera aigu dans la partie de la surface contiguë à la couche θ, et obtus dans la partie de la surface contiguë à la couche θ_1. Les éléments de volume de θ seront donc exprimés par $e\cos\alpha\, ds$, et ceux de θ_1 par $-e\cos\alpha\, ds$; d'où l'on conclut aisément que $\frac{\lambda-\lambda_1}{e}$ se transforme dans l'intégrale

$$\int \frac{f(a, b, c)(a-x)\cos\alpha}{[(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2]^{\frac{3}{2}}}\, ds,$$

que l'on peut écrire plus simplement

$$\int \frac{k\,(a-x)\cos\alpha}{r^3}\,ds\,;$$

cette intégrale, où k désigne la densité de l'élément ds, doit s'étendre à toute la surface de t.

Dans la supposition que e est infiniment petit, $\frac{\Delta k}{e}$ devient la dérivée partielle $\frac{df(a,b,c)}{da}$ ou $\frac{dk}{da}$, et la valeur de $\frac{l_1-l}{e}$ se transforme dans l'intégrale

$$\int \frac{\frac{dk}{da}(a-x)\,dt}{r^3},$$

étendue à tout l'espace t.

Enfin, pour e infiniment petit, $\frac{l_1-l}{e}-\frac{\lambda-\lambda_1}{e}$ ou $\frac{\xi}{e}$ est la valeur de la dérivée partielle $\frac{d\mathrm{X}}{dx}$ ou $\frac{d^2\mathrm{V}}{dx^2}$. Nous avons donc le résultat très-simple

$$\frac{d^2\mathrm{V}}{dx^2}=\frac{d\mathrm{X}}{dx}=\int \frac{\frac{dk}{da}(a-x)\,dt}{r^3}-\int \frac{k\,(a-x)\cos\alpha\,ds}{r^3},$$

où il faut étendre la première intégration à tout l'espace t, la seconde à toute la surface de t.

Ce résultat subsiste, quelque près que O soit de la surface en dedans ou en dehors, pourvu que ce point ne soit pas sur la surface même, car dans ce cas $\frac{d\mathrm{X}}{dx}$ a deux valeurs différentes. Il est vrai que la première intégrale ne cesse pas d'être continue quand O traverse la surface; mais, en vertu d'un théorème que nous développerons plus tard, quand O passe d'un point intérieur infiniment rapproché de la surface à un point extérieur, la seconde intégrale $-\int \frac{k\,(a-x)\cos\alpha\,ds}{r^3}$ varie brusquement de la quantité $+4\pi k\cos\alpha$, où k et α se rapportent au point du passage. La différence entre les deux valeurs de $\frac{d\mathrm{X}}{dx}$ relatives à ce point est également $+4\pi k\cos\alpha$.

X.

En suivant la même marche, et en désignant par β et γ des angles analogues à α, mais relatifs aux deux autres axes de coordonnées, on trouvera de même

$$\frac{d\mathrm{Y}}{dy} = \int \frac{\frac{dk}{db}(b-y)}{r^3}\,dt - \int \frac{k(b-y)\cos\beta}{r^3}\,ds,$$

$$\frac{d\mathrm{Z}}{dz} = \int \frac{\frac{dk}{dc}(c-z)}{r^3}\,dt - \int \frac{k(c-z)\cos\gamma}{r^3}\,ds.$$

Observons maintenant que l'expression

$$\frac{dk}{da}\frac{a-x}{r} + \frac{dk}{db}\frac{b-y}{r} + \frac{dk}{dc}\frac{c-z}{r}$$

n'est autre chose que la dérivée partielle $\frac{dk}{dr}$, puisque dans cette différentiation la longueur de r varie seule, tandis que sa direction reste constante, et que l'expression

$$\frac{a-x}{r}\cos\alpha + \frac{b-y}{r}\cos\beta + \frac{c-z}{r}\cos\gamma = \cos\psi,$$

en désignant par ψ l'angle que la normale extérieure élevée en ds, fait avec la ligne droite r prolongée. Enfin désignons respectivement par

$$\mathrm{M} \quad \text{et} \quad \mathrm{N}$$

les valeurs des deux intégrales

$$\int \frac{\frac{dk}{dr}}{r^2}\,dt, \qquad \int \frac{k\cos\psi}{r^2}\,ds,$$

étendues, la première à tout l'espace t, la seconde à toute la surface de t. Nous aurons

$$\frac{d^2\mathrm{V}}{dx^2} + \frac{d^2\mathrm{V}}{dy^2} + \frac{d^2\mathrm{V}}{dz^2} = \mathrm{M} - \mathrm{N}.$$

Pour effectuer la première intégration, concevons que le point O soit le centre d'une surface sphérique ayant un rayon égal à l'unité et partagée en éléments $d\sigma$. Les droites menées du point O à tous les points du contour de ds, et indéfiniment prolongées, forment une surface conique (dans le sens le plus étendu du mot). Cette surface conique découpe dans l'espace t une tranche (composée de plusieurs pièces suivant les circonstances), dont $r^2 d\sigma dr$ est un élément indéterminé. La partie de M qui se rapporte à cette tranche sera donc

$$d\sigma \int \frac{dk}{dr} dr,$$

pourvu que dans cette intégration on fasse varier r depuis o jusqu'à la valeur que r atteint au point où une droite, menée du point O à l'élément $d\sigma$, et suffisamment prolongée, rencontre la surface de t. Si cette ligne rencontre la surface de t en plusieurs points, soient

$$O_1, \quad O_2, \quad O_3, \quad O_4, \ldots$$

ces différents points ;

$r_1, \quad r_2, \quad r_3, \quad r_4, \ldots$ les valeurs correspondantes de r;

$ds_1, \; ds_2, \; ds_3, \; ds_4, \ldots$ les éléments de la surface de t, découpée par le cône élémentaire ;

$k_1, \quad k_2, \quad k_3, \quad k_4, \ldots$ les valeurs de k,

et

$\psi_1, \quad \psi_2, \quad \psi_3, \quad \psi_4, \ldots$ les valeurs de ψ en ces éléments.

Nous distinguerons deux cas :

1°. *Le point* O *est en dedans de* t. Dans ce cas les points sont en nombre impair et l'intégration doit s'étendre depuis $r = \text{o}$ jusqu'à $r = r_1$, depuis $r = r_2$ jusqu'à $r = r_3$, etc. D'où l'on voit que si la densité du point O est désignée par k_0, on aura

$$\int \frac{dk}{dr} dr = - k_0 + k_1 - k_2 + k_3 - k_4 + \text{etc.}$$

Comme les angles $\psi_1, \psi_2, \ldots$ sont alternativement aigus et obtus, on aura

$$\begin{aligned} ds_1 \cos\psi_1 &= r_1^2 d\sigma, \\ ds_2 \cos\psi_2 &= -r_2^2 d\sigma, \\ ds_3 \cos\psi_3 &= r_3^2 d\sigma, \\ ds_4 \cos\psi_4 &= -r_4^2 d\sigma, \text{ etc.,} \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} d\sigma \int \frac{dk}{dr} dr &= -k_0 d\sigma + \frac{k_1 \cos\psi_1}{r_1^2} ds_1 + \frac{k_2 \cos\psi_2}{r_2^2} ds_2 + \text{etc.} \\ &= -k_0 d\sigma + \sum \frac{k \cos\psi}{r^2} ds. \end{aligned}$$

La sommation doit être étendue à tous les éléments ds qui correspondent à l'élément $d\sigma$. En intégrant pour tous les $d\sigma$, on aura

$$\mathrm{M} = -4\pi k_0 + \int \frac{k \cos\psi}{r^2} ds;$$

et dans cette formule l'intégrale du second membre devant être étendue à toute la surface de t, n'est autre chose que N; on aura donc

$$\mathrm{M} - \mathrm{N} = -4\pi k_0,$$

ou

$$\frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2} = -4\pi k_0.$$

2°. *Le point* O *est extérieur.* Dans ce cas on n'aura à prendre en considération que ceux des éléments de la surface sphérique, pour lesquels la ligne droite menée par O et un point de $d\sigma$ atteint l'espace t. Le nombre des points O_1, O_2, O_3,... est toujours pair et les angles ψ_1, ψ_2, ψ_3,... sont alternativement obtus et aigus. Donc

$$ds_1 \cos\psi_1 = -r_1^2 d\sigma, \quad ds_2 \cos\psi_2 = r_2^2 d\sigma, \quad ds_3 \cos\psi_3 = -r_3^2 d\sigma, \text{ etc.}$$

Mais comme il faut ici exécuter l'intégration $\int \frac{dk}{dr} dr$, depuis $r = r_1$ jusqu'à $r = r_2$, depuis $r = r_2$ jusqu'à $r = r_3$, etc., il en résulte que

$$\begin{aligned} d\sigma \int \frac{dk}{dr} dr &= \frac{k_1 \cos\psi_1}{r_1^2} ds_1 + \frac{k_2 \cos\psi_2}{r_2^2} ds_2 + \text{etc.} \\ &= \sum \frac{k \cos\psi}{r^2} ds, \end{aligned}$$

et cette sommation étant effectuée pour tous les éléments $d\sigma$ qui se rapportent à ce cas, nous aurons

$$M = \int \frac{k \cos \psi}{r^2} ds = N,$$

et par conséquent, comme nous le savions déjà,

$$\frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2} = 0.$$

XI.

Quoique nous ayons supposé que la densité varie en *tout* l'espace t d'une manière continue, cette condition n'est pas indispensable pour l'exactitude du résultat que nous avons obtenu. Il suffit que la densité varie d'une manière continue tout autour du point O, ou que ce point soit situé dans l'intérieur d'une masse aussi petite que l'on voudra dont on puisse regarder la densité comme continue. Car si nous posons le potentiel de cette dernière masse $= V'$, et le potentiel des autres masses égal à V'', le potentiel entier sera $V = V' + V''$, et comme, d'après l'article précédent,

$$\frac{d^2 V'}{dx^2} + \frac{d^2 V'}{dy^2} + \frac{d^2 V'}{dz^2} = -4\pi k_0,$$

$$\frac{d^2 V''}{dx^2} + \frac{d^2 V''}{dy^2} + \frac{d^2 V''}{dz^2} = 0,$$

il en résulte

$$\frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2} = -4\pi k_0.$$

Mais si cette condition n'était pas non plus satisfaite, et que le point O fût situé sur la surface de séparation de deux espaces dans l'intérieur desquels la densité varie d'une manière continue, mais en devenant discontinue quand on passe d'un espace à l'autre; dans ce cas, $\frac{d^2 V}{dx^2}$, $\frac{d^2 V}{dy^2}$, $\frac{d^2 V}{dz^2}$ auraient chacun deux valeurs différentes, et il faudrait répéter pour leur somme ce que nous avons dit à la fin du § VIII.

XII.

Nous allons maintenant, comme nous l'avons promis, examiner le cas idéal où des forces attractives ou répulsives émanent de tous les points d'une surface et où l'on suppose qu'une masse agissante est distribuée sur cette surface. Dans ce cas, nous appellerons densité en un point quelconque de la surface, le quotient de la masse contenue dans l'élément de surface auquel appartient le point, divisée par l'aire de cet élément. Cette densité peut être la même en tous les points, ou différente d'un point à un autre. Dans le dernier cas, elle peut varier sur toute la surface d'une manière continue (en sorte que les densités de deux points infiniment voisins diffèrent infiniment peu), ou bien la surface peut être partagée en plusieurs parties dans chacune desquelles la densité varie d'une manière continue, quoiqu'en passant de l'une à l'autre la densité varie brusquement. Du reste, la masse peut être tellement distribuée que, sans cesser d'être finie, elle soit infiniment dense en quelques points ou lignes.

Nous supposons que la surface, si elle n'est pas un plan, a en général une courbure continue, sans que cela exclue l'interruption qui pourrait avoir lieu dans quelques points ou lignes (quand la surface présente des coins ou des arêtes).

Ces hypothèses admises, le potentiel aura en chaque point, dont la densité n'est pas infinie, une valeur finie et déterminée, infiniment peu différente de la valeur du potentiel en un point infiniment rapproché du premier, soit sur la surface, soit en dehors [*]. En sorte que le potentiel varie d'une manière continue dans toute ligne située sur la surface ou qui la traverse.

---

[*] On se convaincra sans peine de la valeur finie de l'intégrale qui exprime le potentiel, en décomposant la surface en éléments, par la méthode que nous exposerons au § XV. On verra ainsi que les parties de la surface qui sont à une distance infiniment petite n'ont qu'une influence également infiniment petite sur la valeur de l'intégrale, ce qui démontre la propriété énoncée.

XIII.

Soient k la densité de l'élément de surface ds; a, b, c les coordonnées d'un point de cet élément; r la distance de ce point au point O dont les coordonnées sont x, y, z; et V la valeur au point O du potentiel des masses répandues sur la surface. V sera égal à l'intégrale $\int \frac{k\,ds}{r}$ étendue à la surface entière. Ensuite, si nous désignons respectivement par X, Y, Z les intégrales déjà considérées

$$\int \frac{k(a-x)\,ds}{r^3}, \qquad \int \frac{k(b-y)\,ds}{r^3}, \qquad \int \frac{k(c-z)\,ds}{r^3},$$

nous voyons qu'à la vérité X, Y, Z sont identiques à $\frac{dV}{dx}$, $\frac{dV}{dy}$, $\frac{dV}{dz}$, tant que O est en dehors de la surface, mais qu'il n'en est plus de même quand le point O est sur la surface. Ces expressions se comportent alors d'une manière différente, qui dépend de l'angle formé par la normale et l'axe que l'on considère. Il nous suffira évidemment d'examiner ce qui a lieu pour le premier axe.

1°. Si l'angle de la normale et de l'axe des x est égal à o, l'intégrale X a, au point O, une valeur déterminée; $\frac{dV}{dx}$ y a, au contraire, deux valeurs différentes, suivant que l'on considère dx comme positive ou comme négative;

2°. Si l'angle est droit, l'expression désignée par X n'est pas susceptible d'une véritable intégration (par une raison analogue à celle que nous avons développée dans le § VII), tandis que $\frac{dV}{dx}$ aura une valeur unique et déterminée;

3°. Si l'angle est aigu, on doit dire de X ce que nous en avons dit dans le second cas, et de $\frac{dV}{dx}$ ce que nous en avons dit dans le premier.

Il y aura des modifications à apporter à ce qui précède dans le cas où il existe en O une solution de continuité par rapport à la densité ou à la courbure. Cependant il n'est pas nécessaire, pour le but que nous nous proposons, de nous arrêter à ces exceptions qui, du reste, ne peuvent avoir lieu que dans quelques points ou lignes, et par la suite nous supposerons toujours qu'au point considéré il existe une densité finie et déterminée et un plan tangent déterminé.

XIV.

Avant d'aborder la question générale, il nous paraît utile de considérer un cas particulier. Supposons que la surface donnée soit une portion A de surface sphérique dont la densité k soit constante. V et X désigneront alors les intégrales

$$\int \frac{k\,ds}{r}, \quad \int \frac{k\,(a-x)\,ds}{r^3},$$

étendues à l'aire A. Si nous désignons les mêmes intégrales par V_1, X_1 lorsqu'on les prend pour le reste B de la surface sphérique, et par V_0, X_0 lorsqu'on les étend à la surface entière, nous aurons

$$V = V_0 - V_1, \quad X = X_0 - X_1.$$

Soit R le rayon de cette sphère; supposons que le centre soit pris pour origine des coordonnées, et posons

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \rho,$$

en sorte que ρ désigne la distance du point O à l'origine.

Maintenant nous savons que $V_0 = 4\pi k R$, lorsque le point O est dans l'intérieur de la sphère, et que $V_0 = \frac{4\pi k R^2}{\rho}$, lorsque O est à l'extérieur; à la surface, ces deux valeurs sont égales. Il suit de là que la dérivée partielle $\frac{dV_0}{dx}$ est égale à o dans l'intérieur de la sphère, à $-\frac{4\pi k R^2 x}{\rho^3}$ en dehors; à la surface, on devra prendre l'une ou l'autre de ces valeurs suivant le signe de dx; mais ces deux valeurs ne seront égales que pour $x = 0$, ce qui correspond au deuxième cas du paragraphe précédent.

L'expression désignée par X_0, qui, au dedans et au dehors de la sphere, est identique à $\frac{dV_0}{dx}$, n'a plus à la surface aucune signification. En effet, il ne peut y avoir de véritable intégration qu'autant qu'infiniment près du point O, $a - x$ est un infiniment petit d'un ordre supérieur à r, ce qui aura lieu pour

$$y = 0, \quad z = 0, \quad x = \pm R;$$

mais, dans ce cas, l'intégrale

$$X_0 = \mp 2\pi k$$

ne correspond à aucune des valeurs de $\frac{dV_0}{dx}$, mais seulement à leur moyenne arithmétique. Ce cas rentre évidemment dans le premier du paragraphe précédent.

Maintenant, quand le point O est situé sur la portion de surface sphérique A, X_1 et $\frac{dV_1}{dx}$ sont identiques et ont des valeurs déterminées et continues. D'où il suit que la relation entre $X_0 - X_1$ et $\frac{dV_0}{dx} - \frac{dV_1}{dx}$, c'est-à-dire entre X et $\frac{dV}{dx}$, est la même que celle qui existe entre X_0 et $\frac{dV_0}{dx}$. De là on conclurait les théorèmes du paragraphe précédent.

XV.

Il importe, pour l'examen général auquel nous allons nous livrer, de prendre pour origine un point P de la surface, et pour axe des x la normale à la surface élevée par le point P. Si ψ est l'angle compris entre la normale à l'élément indéterminé ds et l'axe des x, $ds \cos \psi$ sera la projection de l'élément ds, sur le plan des yz. Si ensuite on pose

$$\sqrt{b^2 + c^2} = \rho, \quad b = \rho \cos \theta, \quad c = \rho \sin \theta,$$

$\rho d\rho d\theta$ sera aussi l'aire de cette projection élémentaire, en sorte que l'élément de surface ds sera égal à $\frac{\rho d\rho d\theta}{\cos \psi}$. L'élément de masse qui y est contenu sera désigné par $h\rho d\rho d\theta$, en posant pour abréger

$$h = \frac{k}{\cos \psi}.$$

Examinons maintenant comment la valeur de X varie brusquement quand le point O, se mouvant sur l'axe des x, passe d'un côté de la surface à l'autre, c'est-à-dire quand x passe du négatif au positif ou *vice versa*. Observons d'abord qu'il est indifférent de considérer la surface entière ou bien seulement une portion de cette surface qui renferme le point P, puisque l'influence du reste de la surface sur la valeur de X varie d'une manière continue. Il est donc permis de ne faire varier ρ que depuis o jusqu'à sa valeur limite ρ' fixée arbitrairement, et de supposer que, dans la surface ainsi limitée, h et $\frac{a}{\rho}$ varient d'une manière continue. Si pour chaque valeur déterminée de θ, nous posons

$$Q = \int_0^{\rho'} \frac{h(a-x)}{r^3} \rho d\rho,$$

nous aurons

$$X = \int_0^{\pi} Q d\theta.$$

Il s'agit maintenant de comparer les valeurs de X lorsqu'on suppose successivement $x = 0$, x infiniment petit et positif, x infiniment petit et négatif. Désignons ces trois valeurs de X par X_0, X_1, X_2, et les valeurs correspondantes de Q par Q_0, Q_1, Q_2.

Comme $r = \sqrt{(a-x)^2 + \rho^2}$, on obtient, θ étant constant,

$$d.\frac{h(a-x)}{r} = -\frac{h(a-x)\rho d\rho}{r^3} + \frac{dh}{d\rho}\cdot\frac{a-x}{r} d\rho + \frac{da}{d\rho}\frac{h\rho^2}{r^3} d\rho,$$

et par conséquent

$$Q = \int_0^{\rho'} \frac{dh}{d\rho}\frac{a-x}{r} d\rho + \int_0^{\rho'} \frac{da}{d\rho}\cdot\frac{h\rho^2}{r^3} d\rho - \frac{h'(a-x')}{r'} + \text{const}.$$

Dans cette formule, les valeurs de h, a, r pour $\rho = \rho'$ sont désignées par h', a', r'. La constante doit avoir la valeur de $\frac{h(a-x)}{r}$ pour $\rho = 0$, et par conséquent, en désignant par k_0 la densité du point P, cette constante sera égale à $-k_0$ pour une valeur positive de x, et à $+k_0$ pour une valeur négative de x, puisque pour $\rho = 0$ on a

$$a = 0, \quad \psi = 0, \quad h = k_0, \quad x = \pm r.$$

Au contraire, dans le cas où $x = 0$, on doit attribuer à la constante la valeur limite de $\frac{ha}{r}$, quand ρ décroît indéfiniment. La constante sera donc nulle dans ce cas, puisque a est une quantité infiniment petite d'un ordre supérieur à r.

La valeur de l'intégrale $\int \frac{dh}{d\rho} \, \frac{a-x}{r} d\rho$ reste la même, à un infiniment petit près, quand on fait $x = 0$, ou x égal à une quantité infiniment petite $\pm \varepsilon$.

Car si l'on décompose l'intégrale en

$$\int_0^{\delta} \frac{dh}{d\rho} \cdot \frac{a-x}{r} d\rho + \int_{\delta}^{\rho'} \frac{dh}{d\rho} \cdot \frac{a-x}{r} d\rho,$$

il est évident que cela a lieu pour la première partie, lorsque δ est infiniment petit; pour la seconde quand $\frac{\delta}{\varepsilon}$ est infiniment grand; pour toute l'expression, quand δ est un infiniment petit d'un ordre supérieur à ε.

Une conclusion analogue aura lieu pour $\int \frac{da}{d\rho} \frac{h\rho^2}{r^3} d\rho$ quand les points de la surface qui correspondent à une valeur déterminée de θ forment une courbe ayant un rayon de courbure fini en P, en sorte que dans l'espace en question, $\frac{a}{\rho^2}$ acquière une valeur finie continue. C'est ce dont on s'assure en désignant cette valeur par A, car alors

$$\frac{da}{d\rho} = 2A\rho + \frac{dA}{d\rho}\rho^2,$$

et l'intégrale dont il s'agit se décompose dans les deux suivantes

$$\int \frac{2\rho^3 A h d\rho}{r^3} + \int \frac{dA}{d\rho} \frac{\rho^4}{r^3} h d\rho,$$

où la justesse de notre conclusion devient évidente.

Enfin il est évident que les valeurs de $\frac{h'(a'-x)}{r}$ correspondantes aux trois valeurs attribuées à x sont égales, en négligeant des infiniment petits du premier ordre.

Il en résulte que $Q_1 + k_0$, Q_0, $Q_2 - k_0$ sont égaux à une différence infiniment petite près, et l'on peut en dire autant de

$$\int_0^{2\pi} (Q_1 + k_0)d\theta, \quad \int_0^{2\pi} Q_0\, d\theta, \quad \int_0^{2\pi} (Q_2 - k_0)d\theta,$$

ou des quantités

$$X_1 + 2\pi k_0, \quad X_0, \quad X_2 - 2\pi k_0.$$

Cet important théorème peut s'énoncer aussi de la manière suivante : La limite de X, quand x d'abord positif décroît indéfiniment, est égale à $X_0 - 2\pi k_0$; la limite de la même quantité est $X_0 + 2\pi k_0$, quand x d'abord négatif décroît indéfiniment en valeur absolue; c'est-à-dire que X varie deux fois brusquement de la quantité $-2\pi k_0$, quand x passe du négatif au positif, la première fois en atteignant la valeur o, la seconde fois en la dépassant.

XVI.

Dans la démonstration du paragraphe précédent, nous avons supposé que les courbes d'intersection de la surface et des plans menés par l'axe des x, ont en P une courbure finie; mais le résultat auquel nous sommes parvenus n'en subsiste pas moins lorsque la courbure en P est infiniment grande, un seul cas excepté. La supposition que $\frac{a}{\rho}$ devient infiniment petit en même temps que ρ entraîne l'existence d'un plan tangent déterminé au point P; mais ces deux quantités ne sont du même ordre que lorsqu'il y a un rayon de courbure fini, tandis que pour un rayon de courbure infiniment petit, $\frac{a}{\rho}$ est d'un ordre inférieur à ρ. Nous allons néanmoins prouver que notre résultat subsiste dans ce dernier cas, sous la condition que les ordres des deux quantités soient comparables.

A cet effet supposons que $\frac{a}{\rho}$ et ρ^{μ} soient du même ordre, μ désignant un exposant positif fini, et que, par conséquent, $\frac{a}{\rho^{1+\mu}}$ soit une quantité finie et qui varie d'une manière continue dans l'espace en question.

En désignant $\frac{a}{\rho^{1+\mu}}$ par B, l'intégrale

$$\int \frac{da}{d\rho}\,\frac{h\rho^2}{r^3}\,d\rho$$

se décomposera dans les deux suivantes

$$\int \frac{(1+\mu)\rho^{2+\mu}h\mathrm{B}}{r^3}\,d\rho + \int \frac{\rho^{3+\mu}}{r^3}\cdot\frac{d\mathrm{B}}{d\rho}\,h\,d\rho.$$

Le théorème du paragraphe précédent a lieu immédiatement pour la deuxième intégrale, et avec quelque modification pour la première. Car si l'on pose

$$\frac{1}{\mu} = m, \quad \rho^{\mu} = \sigma, \quad \text{ou} \quad \rho = \sigma^{m},$$

la première intégrale devient

$$= (m+1)\int \frac{\mathrm{B}h\sigma^{3m}d\sigma}{[\sigma^{2m}+(a-x)^2]^{\frac{3}{2}}};$$

elle n'a une valeur infiniment petite que lorsque les limites de l'intégration sont o et une valeur infiniment petite de σ; mais pour chaque valeur finie de σ, le coefficient de $d\sigma$ conserve la même valeur, à un infiniment petit près, soit qu'on fasse $x = 0$, soit qu'on donne à x une valeur infiniment petite. Cette propriété appartient donc à l'intégrale entière, lorsqu'elle est étendue depuis $\sigma = 0$ jusqu'à $\sigma = \sqrt[m]{\rho}$.

Il y a cependant un cas auquel nos conclusions ne s'appliquent pas, c'est celui où $\frac{a}{\rho}$ n'est du même ordre avec aucune puissance de ρ, comme si, par exemple, $\frac{a}{\rho}$ était du même ordre que $\frac{1}{\log\frac{1}{\rho}}$. Dans ce cas, pour toute position du point O infiniment rapprochée de la surface, Q croîtrait au delà de toute limite, et il en serait de même de X, si cette circonstance ne se présentait pas seulement pour quelques valeurs de θ, mais pour toutes les valeurs de θ. Il est toutefois inutile de s'arrêter à ce cas exceptionnel, dont le développement ne serait d'aucune utilité pour nos recherches.

XVII.

Nous allons maintenant considérer la quantité Y, dont $\frac{hbdbdc}{r^3}$ est un élément indéterminé, et dans cette analyse nous conserverons les mêmes hypothèses et les mêmes notations que dans le § XV.

Comme

$$r = \sqrt{b^2 + c^2 + (a - x)^2},$$

et que

$$\frac{d.\frac{h}{r}}{db} = -\frac{hb}{r^3} + \frac{1}{r}\frac{dh}{db} - \frac{h(a-x)}{r^3}\frac{da}{db},$$

puisque c est considérée comme constante, la première intégration donnera

$$\int \frac{hbdb}{r^3} = \frac{h^{(1)}}{r^{(1)}} - \frac{h^{(2)}}{r^{(2)}} + \int \frac{1}{r}\frac{dh}{db}db - \int \frac{h(a-x)}{r^3}\frac{da}{db}db.$$

Dans cette formule les intégrales doivent s'étendre depuis la plus petite jusqu'à la plus grande valeur de b pour chaque valeur déterminée de c; les valeurs de h et r relatives aux limites, sont désignées par $h^{(1)}$, $r^{(1)}$, $h^{(2)}$, $r^{(2)}$. Si, pour abréger, on pose

$$\frac{h^{(1)}}{r^{(1)}} - \frac{h^{(2)}}{r^{(2)}} = \mathrm{T}, \quad \frac{\rho}{r}.\frac{dh}{db} - \frac{h(a-x)}{r^3}\rho\frac{da}{db} = \mathrm{U},$$

on aura plus simplement

$$\mathrm{Y} = \int \mathrm{T}dc + \int\int \frac{\mathrm{U}}{\rho} dbdc,$$

formule où l'intégration relative à c doit s'étendre depuis la plus petite jusqu'à la plus grande valeur que cette coordonnée acquiert sur la surface. Dans l'intégrale double, $dbdc$ est la projection d'un élément indéterminé de la surface sur le plan des yz; or cette projection étant aussi exprimée par $\rho d\rho d\theta$, on pourra écrire

$$\mathrm{Y} = \int \mathrm{T}dc + \int\int \mathrm{U}d\rho d\theta,$$

formule où, dans l'intégrale double, l'intégration relative à ρ a pour limites o et ρ'; celle relative à θ a pour limites o et 2π. Or, en raisonnant comme dans le § XV, on voit que cette expression conserve, à un infiniment petit près, la même valeur, soit qu'on pose $x = 0$, soit qu'on fasse x infiniment petit. En d'autres termes, la limite de Y pour des valeurs positives ou négatives de x indéfiniment décroissantes, reste la même, et sa valeur n'est autre que celle que prend Y pour $x = 0$. Par analogie, nous désignerons cette valeur par Y_0, en remarquant toutefois qu'elle ne représente pas exclusivement la valeur de l'intégrale $\int \frac{kb\,ds}{r^3}$ pour $x = 0$ (parce que cette expression n'admet pas pour $x = 0$ une véritable intégration); elle n'est qu'une des valeurs de l'intégrale, celle que l'on obtient en intégrant dans l'ordre indiqué plus haut.

Mais ce résultat est sujet à quelques restrictions (voir le § XVI) dans le cas particulier où le rayon de courbure de la surface en P est infiniment petit, et aussi quand, dans ce même point, $\frac{dh}{db}$ devient infiniment grand; mais il est inutile, pour le but que nous nous proposons, d'examiner ces cas exceptionnels, qui d'ailleurs ne peuvent se présenter que dans quelques points ou lignes, non pas dans les parties mêmes de la surface, mais à leurs limites.

Enfin ce que nous avons dit de Y s'appliquera évidemment à l'intégrale $Z = \int \frac{kc\,ds}{r^3}$. Cette intégrale aura aussi la même valeur Z_0, quand le point O, situé sur l'axe des x, sera infiniment près du point P, soit du côté des x positives, soit du côté des x négatives, et cette valeur limite Z_0 est celle de l'intégrale $\int\int \frac{kcdcdb}{r^3}$ pour $x = 0$, en supposant qu'on ait commencé à intégrer relativement à c.

XVIII.

Si l'on considère que dans tous les points de l'espace qui ne sont pas sur la surface, les quantités $\frac{dV}{dx}$, $\frac{dV}{dy}$, $\frac{dV}{dz}$ sont identiques avec X, Y, Z, et que V varie partout d'une manière continue, on en conclura, en s'appuyant sur les résultats du paragraphe précédent, qu'à une distance infiniment petite de P, ou pour des valeurs infiniment petites de x, y, z, la valeur de V, en négligeant des quantités infiniment petites d'ordre supérieur, est toujours exprimée par

$$V_0 + x(X_0 - 2\pi k_0) + yY_0 + zZ_0$$

quand x est positif, et par

$$V_0 + x(X_0 + 2\pi k_0) + yY_0 + zZ_0,$$

quand x est négatif. Dans cette formule, V_0 désigne la valeur de V au point P, c'est-à-dire pour $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Nous allons maintenant considérer les valeurs de V dans une ligne droite qui traverse P, et qui fait avec les axes les angles A, B, C. Si nous désignons par t une partie indéterminée de cette ligne, et par t_0 la valeur de t en P, nous aurons, en supposant $t - t_0$ infiniment petit et en négligeant un infiniment petit d'ordre supérieur,

$$V = V_0 + (t - t_0)\,(X_0 \cos A + Y_0 \cos B + Z_0 \cos C \mp 2\pi k_0 \cos A).$$

On devra prendre le signe supérieur pour des valeurs positives, et l'inférieur pour des valeurs négatives de $(t - t_0)\cos A$, c'est-à-dire qu'au point P, $\frac{dV}{dt}$ a deux valeurs pour un angle A aigu, savoir,

$$X_0 \cos A + Y_0 \cos B + Z_0 \cos C - 2\pi k_0 \cos A,$$
$$X_0 \cos A + Y_0 \cos B + Z_0 \cos C + 2\pi k_0 \cos A,$$

suivant que dt est positif ou négatif. Quand l'angle A est droit, c'est-à-dire quand la ligne droite est tangente à la surface, ces deux valeurs se réduisent à une seule qui est

$$\frac{dV}{dt} = Y_0 \cos B + Z_0 \cos C.$$

Les théorèmes que nous avons développés jusqu'ici ne sont pas essentiellement nouveaux, mais nous avons cru devoir nous y arrêter parce qu'ils servent d'introduction à la série de théorèmes nouveaux que nous allons démontrer dans les paragraphes suivants.

XIX.

Soient V le potentiel d'un système de masses $M_1, M_2, M_3, \ldots$ concentrées dans les points $P_1, P_2, P_3, \ldots$;

v le potentiel d'un système de masses $m_1, m_2, m_3, \ldots$ concentrées dans les points $p_1, p_2, p_3, \ldots$;

$V_1, V_2, V_3, \ldots$ les valeurs de V en ces derniers points;

$v_1, v_2, v_3, \ldots$ les valeurs de v dans les points $P_1, P_2, P_3, \ldots$;

on aura l'équation

$$M_1 v_1 + M_2 v_2 + \text{etc.} = m_1 V_1 + m_2 V_2 + \text{etc.},$$

ou bien

$$\sum Mv = \sum mV,$$

en représentant par M une masse quelconque du premier système et par m une masse quelconque du second. Les notations $\sum Mv$ et $\sum mV$ ainsi définies, désignent la somme de toutes les quantités telles que $\frac{Mm}{\rho}$ en appelant ρ la distance des points où sont placées les masses M et m.

Quand les masses de l'un des systèmes ou de tous les deux, au lieu d'occuper des points isolés, sont distribuées sans intervalles sur des lignes, sur des surfaces, ou dans des espaces matériels, l'équation précédente subsiste, en substituant à chaque somme l'intégrale qui en est la limite.

Donc si, par exemple, les masses du second système sont distribuées sur une surface de telle sorte que la masse kds occupe l'élément de surface ds, on aura $\sum M = \int kVds$, et si l'on fait une hypothèse analogue sur le premier système, en supposant que KdS est la masse contenue dans l'élément dS, on aura $\int KvdS = \int kVds$. Il importe, dans ce dernier cas, de remarquer que l'équation subsisterait quand même les deux surfaces coïncideraient. Mais, afin de ne pas dépasser les bornes que nous nous sommes imposées, nous nous bornerons à donner une idée de la manière dont on démontre rigoureusement l'extension du théorème à ce cas particulier. Il est évident que les deux intégrales, considérées comme s'appliquant à une seule et même surface, sont les limites de deux intégrales relatives à des surfaces distinctes qui se rapprocheraient indéfiniment, surfaces que, pour plus de simplicité, on prendra égales et parallèles. A la vérité cette marche ne paraît applicable qu'au cas où toutes les normales à la surface font des angles aigus avec une même ligne droite. Mais une surface dans laquelle cette condition ne serait pas remplie (ce qui arriverait pour une surface fermée) pouvant toujours être décomposée en parties qui satisfont à cette condition, on voit immédiatement que ce cas se ramène au premier.

XX.

Si nous appliquons le théorème du paragraphe précédent au cas ou le second système des masses est répandu d'une manière uniforme sur la surface d'une sphère de rayon R, où sa densité constante k est prise égale à 1, nous voyons que le potentiel v qui en résulte est dans l'intérieur de la sphère constant et égal à $4\pi R$; dans tout point situé hors de la sphère, à une distance r du centre, on a $v = \frac{4\pi R^2}{r}$, c'est-à-dire que v est alors égal au potentiel d'une masse $4\pi R^2$, réunie au centre de la sphère. A la surface, les deux valeurs de v deviennent égales. Donc, si le premier système des masses est tout entier dans l'intérieur de la sphère, $\sum Mv$ sera égal au produit de $4\pi R$ par toute la masse de ce système. Mais si ce système est tout entier en dehors de la sphère, $\sum Mv$ sera égal au produit de $4\pi R^2$ par la valeur que le potentiel du système possède au centre de la sphère.

Enfin, si le premier système est distribué d'une manière continue sur la surface de la sphère, on trouve pour $\int k_0 ds$ deux expressions équivalentes. De là résulte ce théorème.

Théorème. « Si V désigne le potentiel d'une masse (distribuée d'une » manière quelconque) sur l'élément ds d'une surface sphérique de

» rayon R et qu'on intègre $V ds$ pour toute la surface, on aura

$$\int V ds = 4\pi (RM_0 + R^2 V_0),$$

» désignant par M_0 toute la masse située dans l'intérieur de la
» sphère, par V_0 le potentiel de la masse extérieure pour le centre de
» la sphère, et en regardant à volonté comme masse intérieure ou
» masse extérieure la masse distribuée sur la surface même de la
» sphère. »

XXI.

Théorème. « Le potentiel V de masses situées en dehors d'un espace
» limité, ne peut avoir une valeur constante dans une partie de cet
» espace et une valeur différente dans une autre partie. »

Démonstration. Supposons que dans chaque point de l'espace A, le potentiel ait une valeur constante a, et que, dans un espace B contigu à A, il puisse avoir une valeur plus grande que a (dans le sens algébrique). Construisons une sphère dont une partie soit en B, et l'autre partie avec le centre soit en A, ce qui est toujours possible. Si R désigne le rayon de cette sphère et ds un élément quelconque de sa surface, on aura, d'après le théorème précédent,

$$\int V ds = 4\pi R^2 a,$$

et par conséquent

$$\int (V - a) ds = 0.$$

Or cela est impossible, puisque, pour la partie de la surface située en A, $V - a = 0$, tandis que pour l'autre partie $V - a$ n'est pas nul, mais a une valeur positive, d'après ce que nous avons supposé plus haut.

On verrait, d'une manière analogue, qu'il est impossible que V soit plus petit que a, dans un espace contigu à A.

Cependant l'un ou l'autre de ces cas devrait arriver, si notre théorème était faux.

De ce théorème on déduit les corollaires suivants :

1°. Si l'espace qui contient les masses renferme un espace vide, et que le potentiel, dans une partie de cet espace, ait une valeur constante, cette valeur conviendra à tout l'espace vide;

2°. Si le potentiel de masses contenues dans un espace fini a une valeur constante dans une partie quelconque de l'espace extérieur, cette valeur conviendra à tout l'espace extérieur.

On voit en même temps que, dans le second cas, la valeur constante du potentiel ne peut être que 0; car si m désigne la somme des masses dans le cas où elles ont toutes le même signe, et dans tout autre cas si m désigne la somme des masses positives ou des masses négatives, suivant que l'action des unes l'emporte sur l'action des autres le potentiel, en un point dont la plus courte distance au système est r, sera toujours en valeur absolue moindre que $\frac{m}{r}$. Or cette fraction peut devenir dans l'espace extérieur moindre que toute quantité donnée.

XXII.

Théorème. « Soient ds l'élément d'une surface enveloppant un es-
» pace fini, et P l'action exercée dans une direction normale à ds par
» des masses distribuées d'une manière quelconque. Regardons comme
» positive toute force dirigée suivant cette normale en dehors ou en de-
» dans, suivant que l'on donne le signe + aux masses attractives ou aux
» masses répulsives. Cela posé, l'intégrale $\int P ds$, étendue à la surface
» entière, sera égale à $4\pi M + 2\pi M_1$, M désignant la somme des masses
» placées dans l'intérieur de l'espace et M_1 la somme de celles qui sont
» distribuées sur la surface même. »

Démonstration. Si l'on désigne par $U d\mu$ la partie de P qui provient de l'élément de masse $d\mu$; par r la distance qui sépare les éléments $d\mu$, ds; par u l'angle qu'une normale intérieure, menée en ds, fait avec r, on aura

$$U = \frac{\cos u}{r^2}.$$

Mais, d'après un théorème démontré au § VI de l'ouvrage intitulé *Theoria attractionis corporum spheroidicorum ellipticorum*, on doit avoir, pour chaque valeur déterminée de $d\mu$,

$$\int \frac{\cos u}{r^2}\, ds = 0, \quad 2\pi, \quad \text{ou} \quad 4\pi,$$

suivant que $d\mu$ est placé en dehors de l'espace enveloppé par la surface, sur la surface même, ou au dedans de l'espace. Or, comme $\int \mathrm{P}\,ds$ est égal à la somme de toutes les valeurs de $d\mu \int \mathrm{U}ds$, notre théorème se trouve ainsi démontré.

Le théorème auxiliaire que nous venons d'employer doit être modifié dans un cas particulier. Nous savons que r désignait la distance d'un *point donné* à l'élément ds. Or, quand ce point est donné sur la surface, la formule

$$\int \frac{\cos u}{r^2}\, ds = 2\pi$$

n'est rigoureuse qu'autant que la continuité de la courbure de la surface n'est pas interrompue en ce point. Cette interruption a lieu lorsque le point est situé sur une arête ou dans un coin. Il faut alors remplacer 2π par l'aire d'une portion de surface sphérique, ayant pour rayon l'unité, pour centre le point en question, portion découpée par le cône formé de toutes les tangentes à la surface en ce point. Mais, ces exceptions n'ayant lieu que dans des lignes ou des points, jamais dans une portion finie de surface, on voit qu'elles restent sans influence sur l'usage que nous avons fait du théorème auxiliaire.

XXIII.

Élevons une normale par un point quelconque de la surface, et désignons par p la distance de ce point à un point quelconque de la normale, en considérant cette distance comme positive quand le point est du côté interne de la surface. On peut considérer le potentiel des masses comme une fonction de p et de deux autres variables servant à déterminer la position du second point considéré. On peut en dire autant de $\frac{dV}{dp}$, dont, au reste, nous ne considérerons la valeur que pour un point situé sur la surface, c'est-à-dire pour $p = 0$. Cette valeur est identique avec P quand les masses se trouvent toutes à l'extérieur ou toutes à l'intérieur, ou bien les unes à l'intérieur et les autres à l'extérieur, ou encore dans l'un et l'autre espace, pourvu qu'il n'y ait aucune masse à la surface même. On aura donc, dans cette hypothèse,

$$\int \frac{dV}{dp}\, ds = 4\pi M.$$

Au contraire, dans le cas où la masse est exclusivement distribuée à la surface, et de telle manière que l'élément ds contienne la masse kds, les valeurs de $\frac{dV}{dp}$ et de P ne sont plus identiques. La dernière de ces quantités est, par rapport à p, ce que X_0, dans le § XV, était par rapport à x; mais $\frac{dV}{dp}$ a deux valeurs différentes, $P - 2\pi k$, et $P + 2\pi k$, suivant que dp est positif ou négatif. Or, comme il est évident que l'intégrale $\int kds$, étendue à la surface entière, a pour valeur toute la masse M_1 distribuée sur cette surface, et que, d'après le théorème du paragraphe précédent, $\int P ds = 2\pi M_1$, on aura

$$\int \frac{dV}{dp}\, ds = 0, \quad \text{ou} \quad \int \frac{dV}{dp}\, ds = 4\pi M_1,$$

suivant que l'on prend partout pour $\frac{dV}{dp}$ la valeur relative à la face intérieure, ou la valeur relative à la face extérieure; l'intégrale $\int \frac{dV}{dp}\, ds$ doit être calculée, dans le premier cas, en considérant la masse M_1 comme appartenant à l'espace extérieur, et dans le second à l'espace intérieur.

Il résulte de là que l'équation $\int \frac{dV}{dp}\, ds = 4\pi M$ convient à des masses distribuées d'une manière quelconque, pourvu que M désigne l'ensemble des masses de l'intérieur. Cependant il faut bien se rappeler que, s'il y a des masses distribuées d'une manière continue à la surface, il faudra les considérer comme intérieures ou en faire abstraction, suivant qu'on aura pris pour $\frac{dV}{dp}$ sa valeur à la surface externe, ou sa valeur à la surface interne.

S'il n'y a pas de masses dans l'intérieur de l'espace, on aura

$$\int \frac{dV}{dp} ds = 0,$$

pourvu que l'on prenne les valeurs de $\frac{dV}{dp}$ relatives à la surface interne.

XXIV.

Théorème. « En admettant l'existence des conditions exigées à la fin » du dernier paragraphe, en désignant par T l'espace considéré, par » q la force totale avec laquelle agissent sur l'élément dT les masses » situées en dehors de l'espace ou distribuées d'une manière continue à » la surface, on a l'équation importante

$$\int V \frac{dV}{dp} ds = -\int q^2 dT,$$

» la première intégrale s'étendant à toute la surface, et la seconde à » tout l'espace T. »

Démonstration. Prenons des coordonnées rectangulaires, et considérons dans l'espace T une droite parallèle à l'axe des x, et pour laquelle, par conséquent, y et z sont constants; il résulte de l'équation identique

$$\frac{d\left(V \frac{dV}{dx}\right)}{dx} = \left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + V \frac{d^2V}{dx^2},$$

que l'intégrale

$$\int \left[\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + V \frac{d^2V}{dx^2}\right] dx,$$

étendue à la partie de la ligne comprise dans l'intérieur de l'espace T, est égale à la différence des valeurs de $V \frac{dV}{dx}$ aux extrémités de la ligne, quand la ligne coupe la surface en deux points seulement, et que dans tout autre cas, cette intégrale est égale à

$$\sum \varepsilon \mathrm{V}\frac{d\mathrm{V}}{dx},$$

en prenant dans cette somme les valeurs de $\mathrm{V}\frac{d\mathrm{V}}{dx}$ aux points d'intersection de la droite et de la surface, et en donnant à ε la valeur -1 pour les intersections d'ordre impair (la première, la troisième, etc.), la valeur $+1$ pour les intersections d'ordre pair. Si maintenant on considère cette ligne droite comme l'arête d'un prisme infiniment petit ayant pour section normale $dydz$, et par conséquent pour élément de volume $dxdydz$, l'intégrale

$$\int \left[\left(\frac{d\mathrm{V}}{dx}\right)^2 + \mathrm{V}\frac{d^2\mathrm{V}}{dx^2}\right) d\mathrm{T},$$

étendue à toutes les parties de T qui font partie de cet espace prismatique, sera égale à $\sum \varepsilon \mathrm{V}\frac{d\mathrm{V}}{dx}\, dydz$. Ce prisme coupe la surface en deux ou plus généralement en un nombre pair de parties. L'une de ces sections étant désignée par ds, et ρ étant l'angle que fait avec l'axe des x une normale intérieure élevée en ds, on aura

$$dydz = \pm \cos\rho ds,$$

le signe supérieur étant pour les intersections d'ordre impair, et le signe inférieur pour les autres. Il suit de là que l'intégrale précédente est égale à

$$-\sum \mathrm{V}\frac{d\mathrm{V}}{dx}\cos\rho ds,$$

expression dans laquelle le signe sommatoire se rapporte aux éléments de surfaces que nous avons considérés. Il est visible qu'en décomposant tout l'espace en de semblables éléments prismatiques, on ne laissera échapper aucun point de la surface, et que l'on aura

$$\int \left[\left(\frac{d\mathrm{V}}{dx}\right)^2 + \mathrm{V}\frac{d^2\mathrm{V}}{dx^2}\right) \Big]d\mathrm{T} = -\int \mathrm{V}\frac{d\mathrm{V}}{dx}\cos\rho ds,$$

la première intégration devant s'étendre à tout l'espace T, la deuxième à toute la surface s. Maintenant il est évident que $\cos \rho = \frac{dx}{dp}$, en conservant à p la signification qu'il a dans le § XXIII et en considérant x comme fonction de p et des deux autres variables qui servent à distinguer les points de la surface les uns des autres. Donc

$$\int \left[\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + V \frac{d^2V}{dx^2} \right] dT = - \int V \frac{dV}{dx} \frac{dx}{dp} ds.$$

Bien entendu que, dans le cas où la surface même contient des masses, et où par conséquent $\frac{dV}{dx}$ a deux valeurs différentes, il s'agit de la valeur relative à l'espace intérieur.

On arrivera, par des considérations analogues, aux équations

$$\int \left[\left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + V \frac{d^2V}{dy^2} \right] dT = - \int V \frac{dV}{dy} \frac{dy}{dp} ds,$$
$$\int \left[\left(\frac{dV}{dz}\right)^2 + V \frac{d^2V}{dz^2} \right] dT = - \int V \frac{dV}{dz} \frac{dz}{dp} ds,$$

en ajoutant ces trois équations membre à membre, et en observant que dans l'espace T on a

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0,$$
$$\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2 = q^2,$$

et qu'à la surface

$$\frac{dV}{dx}\frac{dx}{dp} + \frac{dV}{dy}\frac{dy}{dp} + \frac{dV}{dz}\frac{dz}{dp} = \frac{dV}{dp},$$

on aura

$$\int q^2 dT = - \int V \frac{dV}{dp} ds.$$

ce qu'il fallait démontrer.

Ce théorème, en ayant égard au dernier corollaire du paragraphe précédent, peut être exprimé d'une manière plus générale par l'équation

$$\int q^2 dT = \int (A - V) \frac{dV}{dp} ds,$$

A étant une constante arbitraire.

XXV.

Théorème. « Les mêmes choses étant admises que dans le paragraphe précédent, si le potentiel V a une valeur constante en tout » point de la surface qui limite l'espace T, cette valeur convient à tous » les points de l'espace lui-même; d'où résulte une destruction totale » des forces dans tout l'espace. »

Démonstration. Si dans l'équation la plus générale du paragraphe précédent, on met pour A la valeur constante que le potentiel possède à la surface, on a

$$\int q^2 d\mathrm{T} = 0;$$

d'où résulte $q = 0$ pour tous les points de l'espace T; ensuite

$$\frac{d\mathrm{V}}{dx} = 0, \quad \frac{d\mathrm{V}}{dy} = 0, \quad \frac{d\mathrm{V}}{dz} = 0,$$

d'où l'on conclut que V est constant dans tout l'espace T.

XXVI.

Théorème. « Lorsque des masses sont situées dans l'intérieur d'un » espace limité T, ou répandues d'une manière continue sur quelques » parties ou sur la totalité de la surface s de T, si le potentiel a, en » chaque point de cette surface, une valeur constante A, le potentiel » aura, en tout point O de l'espace infini extérieur T′,

» 1°. Une valeur nulle, si $\mathrm{A} = 0$;

» 2°. Une valeur plus petite que A et de même signe, quand A est » différent de 0. »

Démonstration. 1°. Il faut d'abord prouver que le potentiel ne peut pas avoir en O une valeur qui soit hors des limites 0 et A. En effet supposons que le potentiel puisse avoir en O une telle valeur B, et désignons par C une quantité arbitraire comprise à la fois entre B et 0, et entre B et A. Menons par le point O des lignes droites dans toutes les directions; il y aura sur chacune de ces droites un point O′ pour lequel la valeur du potentiel sera égale à C, et de plus toute la ligne

OO' doit appartenir à l'espace T'. Cela résulte de la continuité des valeurs du potentiel qui doit, si la droite est suffisamment prolongée, varier de B à A ou devenir infiniment petit, suivant que la ligne droite perce ou ne perce pas la surface s (*voir* les observations de la fin du § XXI). L'ensemble de tous les points O' formera une surface terminée de toutes parts, et comme le potentiel est constamment égal à C sur cette surface, il faudrait, d'après le théorème du paragraphe précédent, qu'il eût, en tous les points de l'espace limité par la surface dont il s'agit, la même valeur C. Mais nous savons, au contraire, que nous avons au point O une valeur B différente de C. L'hypothèse que nous avons admise sur le potentiel conduit donc à une contradiction.

Ceci prouve le théorème énoncé dans le cas où $A = 0$, et fait voir, dans le cas où A est différent de 0, que la valeur du potentiel en O ne peut être plus grande que A ni être de signe contraire.

2°. Pour compléter la démonstration dans le second cas, décrivons du point O comme centre, et avec un rayon R plus petit que la plus courte distance entre O et s, une surface sphérique que nous décomposerons en ses éléments ds. Soit V le potentiel en chaque élément ds, et désignons encore par B la valeur du potentiel au point O. D'après le théorème du § XX, l'intégrale $\int V ds$, étendue à toute la surface sphérique, est égale à $4\pi R^2 B$, et par suite

$$\int (V - B)\, ds = 0.$$

Or cette équation ne peut subsister qu'autant que V a la même valeur B dans tous les points de la surface sphérique, ou bien a en certains points une valeur plus grande que B, et en d'autres une valeur plus petite. Dans la première supposition on conclurait du § XXV que le potentiel est constant dans tout l'espace intérieur de la sphère, et du § XXI qu'il aurait cette même valeur (et par suite une valeur nulle) dans tout l'espace infini extérieur à T. Mais cela est en contradiction avec l'hypothèse que le potentiel est différent de 0 à la surface s, par l'impossibilité où est le potentiel de varier brusquement. Quant à la seconde supposition, elle est en contradiction manifeste avec ce qu'on a déjà vu (1°), lorsqu'on suppose $B = 0$ ou $= A$; B doit donc être compris entre 0 et A.

XXVII.

Théorème. « Dans le théorème du paragraphe précédent, le premier » cas, celui où la valeur constante du potentiel est nulle, ne peut avoir » lieu que lorsque la somme algébrique des masses est nulle ; le second » cas ne peut se présenter que lorsque cette somme est différente de o. »

Démonstration. Soit ds l'élément d'une surface sphérique, de rayon R, et qui renferme l'espace T. Désignons par M la somme de toutes les masses, et par V leur potentiel en ds. D'après le théorème du § XX, l'intégrale $\int V ds = 4\pi RM$; d'après le précédent théorème, le potentiel V est nul pour tout point de la surface sphérique quand $A = 0$, plus petit que A et de même signe quand $A \gtrless 0$. Il en résulte, dans le premier cas, que $4\pi RM = 0$, d'où $M = 0$; dans le deuxième, que $4\pi RM$, et par suite M est de même signe que A. On en conclut aussi que dans le second cas, $4\pi RM$ est plus petit que $\int A ds = 4\pi RA$, M plus petit que RA, et A plus grand que $\frac{M}{R}$.

La seconde partie de ce théorème, dans son rapport avec le théorème du paragraphe précédent, peut être énoncée de la manière suivante :

« Lorsque des masses dont la somme algébrique est nulle sont si» tuées dans l'intérieur d'un espace limité par une surface fermée, ou » distribuées en partie d'une manière continue sur la surface, et que le » potentiel a une valeur constante en chaque point de cette surface, » cette valeur ne peut être différente de o, et s'étend à tout l'espace in» fini extérieur; d'où suit que, dans tout l'espace extérieur, les ac» tions de ces masses se neutralisent complétement. »

XXVIII.

On se convaincra facilement que toutes les conclusions du paragraphe précédent subsistent quand s est une surface non fermée, et qu'il n'existe des masses que sur cette surface. Dans ce cas il n'y a plus d'espace T, et tout point qui n'appartient pas à la surface appartient à l'espace infini extérieur. Si le potentiel a en tout point de la surface une valeur constante A différente de o, il aura en dehors une valeur plus petite et de même signe.

Ce qui se rapporte au cas de $A = o$ est encore vrai ici, mais sans utilité. En effet, le potentiel aura dans ce cas une valeur nulle en tout point de l'espace; donc, t étant la longueur d'une ligne droite, on aura partout $\frac{dV}{dt} = o$. De là et du § XVIII on conclura que la densité est nulle en tout point de la surface, c'est-à-dire que la surface ne peut contenir aucune masse.

Au reste, cette dernière observation convient aussi au cas de masses exclusivement distribuées sur une surface fermée; car, d'après le § XXV, on voit que la valeur du potentiel est o dans tout l'espace intérieur.

XXIX.

Avant de passer à de nouvelles recherches concernant des masses distribuées d'une manière continue sur une surface, il importe de distinguer deux modes différents de distribution, correspondants au cas où nous considérons des masses toutes de même signe (que nous regarderons comme positives) et au cas où nous considérons des masses de signes différents. Quand une masse M sera distribuée sur une surface de manière que l'élément ds en contienne une portion mds, nous dirons que la distribution est *homogène* si m est partout positif, ou du moins n'est jamais négatif. Si m désigne la densité, comme cela a lieu ordinairement, l'intégrale $\int mds$, étendue à la surface entière, donnera la masse M. Dans le cas contraire, où m est positif en certains points et négatif dans d'autres, nous dirons que la distribution est *hétérogène,* et M ne désignera plus alors la somme des masses, mais la valeur absolue de la différence entre la somme des masses positives et la somme des masses négatives. Un cas remarquable de la distribution hétérogène est celui où $M = o$; il peut paraître étrange que l'on dise alors qu'une masse nulle est distribuée sur la surface.

XXX.

Il est évident que, dans le cas de la distribution *homogène* d'une masse M sur une surface, la valeur positive du potentiel en chaque point de la surface est plus grande que $\frac{M}{r}$, r étant la plus grande distance de deux points de la surface. Le potentiel ne pourrait avoir la valeur $\frac{M}{r}$ qu'à une extrémité de la ligne r, et lorsqu'on supposerait toute la masse M concentrée à l'autre extrémité. Mais nous écarterons ce cas particulier, et nous supposerons seulement que la masse totale est distribuée d'une manière continue, chaque élément ds en possédant une quantité infiniment petite mds. L'intégrale $\int V m ds$, étendue à toute la surface, sera donc plus grande que $\int \frac{M}{r} mds$ ou que $\frac{M^2}{r}$, et il est évident qu'il existera un certain mode de distribution pour lequel cette intégrale aura une valeur minimum. Nous allons démontrer que, dans le mode de distribution correspondant à la valeur minimum de $\int V m ds$, le potentiel V a une valeur constante en tout point de la surface, qu'aucun élément de cette surface ne reste vide, enfin qu'il n'y a qu'une seule distribution de ce genre. Dans ce but, nous commencerons par traiter une question beaucoup plus générale.

XXXI.

Soit U une grandeur ayant en chaque point de la surface une valeur déterminée, finie et continue.

L'intégrale

$$\Omega = \int (V - 2U)\, m ds,$$

étendue à la surface entière, pourra avoir des valeurs très-différentes, suivant les différentes manières dont la masse sera distribuée sur la surface; mais il est évident qu'il y a tel mode de distribution pour lequel l'intégrale a la plus petite valeur possible. Cela posé, on aura ce théorème.

Théorème. « Dans le cas où le dernier mode de distribution est supposé avoir lieu,

» 1°. La différence $V - U = W$ a une valeur constante dans toutes » les parties de la surface qui contiennent quelques portions de la » masse M;

» 2°. Partout où la surface ne possède pas de parties de masses, W est » plus grand, ou du moins n'est pas plus petit que la valeur constante » en question. »

1. Nous allons d'abord démontrer que si à un mode de distribution on en substitue un autre qui en diffère infiniment peu, en changeant m en $m + \mu$, la variation correspondante de Ω sera exprimée par $2\int W\mu ds$.

En effet, les variations de Ω et de V étant désignées respectivement par $\delta\Omega$ et δV, on aura

$$\delta\Omega = \int \delta V m ds + \int (V - 2U)\,\mu ds.$$

Mais on a

$$\int \delta V m ds = \int V\mu ds,$$

d'après le § XIX, puisque δV n'est autre chose que le potentiel des masses dans le mode de distribution où chaque élément de surface contient la masse μ, et qu'en conséquence V, m, δV, μ sont les analogues des quantités désignées par les lettres V, K, v, k, tandis que ds remplace à la fois dS et ds. On aura donc

$$\delta\Omega = \int (2V - 2U)\,\mu ds = 2\int W\mu ds.$$

2. Il est évident que la variation de μ doit être assujettie à la condition $\int \mu ds = 0$, et à cette autre que μ ne soit négatif en aucune partie vide de la surface; autrement la distribution cesserait d'être homogène.

3. Supposons maintenant que, dans un mode déterminé de distribution, la quantité W ait des valeurs différentes en divers points de la surface. Soit A une valeur moyenne entre la plus grande et la plus petite valeur de W; soit P la partie de la surface où l'on a $W > A$, et Q la partie de la surface où l'on a $W < A$; soient p, q deux portions égales de la surface donnée, l'une prise en P, l'autre en Q. Supposons que, dans toute l'étendue de p, la variation de m soit constante et ait la valeur négative $\mu = -\nu$, et que dans q, au contraire, elle ait la valeur constante positive $\mu = \nu$; partout ailleurs supposons cette variation nulle. Il est évident que la première condition de l'art. **2** est remplie; quant à la seconde, qui exige qu'aucune partie de p ne soit vide de matière, il sera toujours possible d'y satisfaire toutes les fois que P ne sera pas entièrement vide.

Il suit de là que la variation $\delta\Omega$ est négative, ce que l'on voit facilement en mettant cette variation sous la forme $2\int(W - A)\mu ds$.

On voit aussi que, dans tout mode de distribution où la quantité W a des valeurs différentes dans les parties pleines de la surface, ou bien où W, ayant la même valeur dans les parties pleines, a une valeur plus petite dans les parties vides, par un changement dans la distribution Ω diminue. Il est donc nécessaire que, dans le cas du minimum, les conditions énoncées au théorème soient remplies.

XXXII.

Quand on applique les résultats précédents au cas particulier considéré plus haut (§ XXX), où $U = 0$, W désigne simplement le potentiel des masses de la surface, Ω l'intégrale $\int Vmds$. En rapprochant le théorème du dernier paragraphe de celui du § XXVIII, on voit que, dans la distribution correspondante au minimum de $\int Vmds$, aucune partie de la surface ne peut être vide; car, lors même que la surface serait fermée, si elle présentait des parties pleines et des parties vides, les premières ne formeraient pas une surface fermée, et les secondes relativement aux premières appartiendraient à l'espace infini extérieur. Donc (§ XXVIII) le potentiel aurait une valeur moindre dans ces parties de la surface, ce que nous venons de voir être impossible.

Il est donc démontré qu'il existe une distribution homogène d'une masse donnée, où aucune partie de surface ne reste vide et où tous ses points ont le même potentiel. Afin de démontrer d'une manière complète le théorème du § XXX, il reste à prouver que ce mode de distribution est unique. C'est ce que nous ferons plus bas, en traitant d'un théorème plus général.

La proposition que, dans le cas du minimum de $\int \mathrm{V}m\,ds$, aucune partie de la surface ne peut rester vide, peut s'énoncer de la manière suivante :

« Dans tout mode de distribution où des parties de la surface restent » vides, l'intégrale $\int \mathrm{V}m\,ds$ surpasse sa valeur minimum d'une quantité » finie. »

XXXIII.

La démonstration du § XXXI repose principalement sur l'existence d'un minimum de Ω, laquelle est tant qu'on se borne à la distribution homogène d'une masse donnée. Si la même évidence avait lieu dans un cas quelconque et lorsque la deuxième condition (§ XXX, 2) n'est pas remplie, on pourrait dès à présent établir ce théorème : *il existe un mode de distribution homogène ou hétérogène, dans lequel* $\mathrm{W} = \mathrm{V} - \mathrm{U}$ *a une valeur constante dans tous les points de la surface.* Mais, comme l'existence d'un minimum n'est plus évidente dès qu'on ne se borne plus à une distribution homogène, nous sommes obligé d'employer une démonstration un peu plus compliquée pour parvenir au but important que nous nous sommes proposé.

Nous supposerons d'abord trois distributions différentes, et, au lieu des expressions indéterminées m, V, qui désignaient la densité et le potentiel, nous emploierons les suivantes :

$$\begin{array}{lll} 1^{\circ}. & m = m_0, & \mathrm{V} = \mathrm{V}_0; \\ 2^{\circ}. & m = m_1, & \mathrm{V} = \mathrm{V}_1; \\ 3^{\circ}. & m = \mu, & \mathrm{V} = \nu. \end{array}$$

La première distribution est une distribution homogène de la masse M, et correspond au minimum de $\int \mathrm{V}m\,ds$;

La deuxième est également homogène, et se rapporte à la même masse M; mais elle correspond au minimum de l'intégrale

$$\int (\mathrm{V} - 2\varepsilon \mathrm{U})\, m\, ds,$$

ε étant un coefficient constant arbitraire;

La troisième dépend des deux premières, par la relation $\mu = \frac{m_1 - m_0}{\varepsilon}$: c'est donc une distribution hétérogène dans laquelle la somme des masses est nulle.

D'après ce qui a été démontré (§ XXXI), V_0 est constant dans toute l'étendue de la surface; $\mathrm{V}_1 - \varepsilon \mathrm{U}$ est constant dans la partie où a lieu la seconde distribution, et dans cette même partie $v - \mathrm{U}$ est nécessairement constant, puisque $v = \frac{\mathrm{V}_1 - \mathrm{V}_0}{\varepsilon}$.

Suivant la valeur de ε, la seconde distribution couvrira la surface entière, ou en laissera une partie vide. Mais cette seconde distribution devenant identique à la première quand $\varepsilon = 0$, il en résulte que les parties qui, pour une valeur de ε, restent vides, diminuent de plus en plus quand ε décroît; en sorte qu'elles se remplissent entièrement quand ε atteint la valeur 0. Il peut arriver néanmoins que des parties de surface restent vides quelque petit que soit ε, quand cette quantité conserve le même signe; mais, dans tous les cas, il suffit de remarquer que, pour ε infiniment petit, aucune partie *finie* de la surface ne peut rester vide; car, si le contraire avait lieu, il en résulterait (§ XXXII, à la fin) que l'intégrale $\int \mathrm{V}_1 m_1 ds$ surpasserait d'une quantité finie l'intégrale $\int \mathrm{V}_0 m_0 ds$; or, si l'on désignait la différence par e, on aurait

$$\int (\mathrm{V}_1 - 2\varepsilon \mathrm{U}) m_1 ds - \int (\mathrm{V}_0 - 2\varepsilon \mathrm{U}) m_0 ds = e - 2\varepsilon \int \mathrm{U}(m_1 - m_0) ds.$$

La différence de ces deux intégrales deviendrait donc positive pour une valeur infiniment petite de ε, ce qui est en contradiction avec la supposition que, dans le second mode de distribution, l'intégrale $\int (\mathrm{V} - 2\varepsilon \mathrm{U})\, mds$ soit un minimum.

De là résulte que si, dans le troisième mode de distribution, nous prenons μ égal à la limite vers laquelle converge le rapport $\frac{m_1 - m_0}{\varepsilon}$, quand ε décroît indéfiniment, v — U aura en tous les points de la surface une valeur constante.

Imaginons maintenant un quatrième mode de distribution dans lequel on ait $m = m_0 + \mu$; la masse distribuée sera M, et le potentiel (savoir $V_0 + v$) aura aussi avec U une différence constante sur la surface; ce qui démontre le théorème énoncé.

XXXIV.

Il nous reste à prouver qu'il n'existe pour la masse M qu'un seul mode de distribution, pour lequel $V - U$ soit une constante dans toute l'étendue de la surface. En effet, si deux distributions donnaient ce résultat, m et V étant désignés dans la première par m_1 et V_1, et dans la seconde par m_2 et V_2, le potentiel d'une troisième distribution dans laquelle on aurait $m = m_1 - m_2$ serait $V_1 - V_2$. Il serait donc constant et la masse entière serait nulle. Donc (§ XXVIII) on aurait

$$m_1 - m_2 = 0;$$

d'où l'on voit que les deux distributions seraient identiques.

Enfin il y a toujours une distribution pour laquelle la différence $V - U$ a une valeur constante donnée; car, si α est une constante arbitraire, les notations restant les mêmes, le potentiel de la distribution où $m = \alpha m_0 + \mu$ sera égal à $\alpha V_0 + U$, et la différence constante $\alpha V_0 + v - U$ sera déterminée pour chaque valeur de α. La masse distribuée ne sera plus arbitraire, elle devra être égale à αM. Mais il n'y aura qu'une seule manière de satisfaire à cette condition.

XXXV.

La détermination rigoureuse d'un pareil mode de distribution d'une masse sur une surface donnée et pour une forme donnée de la fonction U, est, dans la plupart des cas, au-dessus des forces de l'analyse telle qu'elle existe aujourd'hui. Le cas le plus simple où l'on puisse résoudre le problème est celui où la surface donnée est sphérique; mais nous préférons examiner un cas plus général, celui où la surface donnée diffère très-peu d'une sphère, et où l'on peut négliger les infiniment petits d'un ordre supérieur à la différence infiniment petite entre le rayon du sphéroïde et le rayon de la sphère.

Soient R le rayon de la sphère, r la distance d'un point quelconque de l'espace au centre de la sphère, u l'angle compris entre r et une droite fixe, λ l'angle compris entre un plan mené par la droite fixe et par r, et un plan fixe; $R(1+\gamma z)$ la distance d'un point indéterminé du sphéroïde au centre de la sphère, γ étant un facteur constant très-petit dont on peut négliger la seconde puissance, et z étant une fonction de u et de λ; enfin soit U une fonction donnée de u et de λ.

Le potentiel V de la masse distribuée dans toute l'étendue de la surface sphérique peut être exprimé, en chaque point extérieur, par une série ordonnée suivant les puissances descendantes de r et à laquelle nous donnerons la forme

$$A_0 \frac{R}{r} + A_1 \left(\frac{R}{r}\right)^2 + A_2 \left(\frac{R}{r}\right)^3 + \text{etc.}$$

Dans chaque point de l'espace intérieur, le potentiel sera exprimé par la série ascendante

$$B_0 + B_1 \left(\frac{r}{R}\right) + B_2 \left(\frac{r}{R}\right)^2 + B_3 \left(\frac{r}{R}\right)^3 + \text{etc.}$$

Les coefficients $A_0, A_1, A_2, \ldots$, sont des fonctions de u et de λ assujetties à satisfaire à certaines équations aux différences partielles (voir *Résultats*, etc., 1838, p. 22), et il en est de même des fonctions B_0, B_1, B_2, etc. Sur la surface en question, le potentiel doit être égal à une fonction donnée U de u et de λ; on aura donc

$$\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{2}} V = (1+\gamma z)^{\frac{1}{2}} U.$$

Si nous supposons que $(1+\gamma z)^{\frac{1}{2}} U$ soit développé par la série

$$P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + \text{etc.},$$

dont tous les termes satisfont aux équations différentielles déjà citées; et si nous considérons que les développements en série du potentiel doivent être admis à la surface même, nous aurons

$$\begin{aligned} & P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + \text{etc.} \\ = {} & A_0(1+\gamma z)^{-\frac{1}{2}} + A_1(1+\gamma z)^{-\frac{3}{2}} + A_2(1+\gamma z)^{-\frac{5}{2}} + \text{etc.}, \\ = {} & B_0(1+\gamma z)^{\frac{1}{2}} + B_1(1+\gamma z)^{\frac{3}{2}} + B_2(1+\gamma z)^{\frac{5}{2}} + \text{etc.} \end{aligned}$$

Donc, si l'on néglige les quantités du même ordre que γ, on aura

$$P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + \text{etc.} = A_0 + A_1 + A_2 + \text{etc.}$$

Mais une fonction de u et λ ne peut être développée que d'une seule manière en une série dont les différents termes satisfassent aux mêmes équations différentielles. L'égalité précédente entraîne donc celles-ci :

$$P_0 = A_0, \quad P_1 = A_1, \quad P_2 = A_2, \text{ etc.}$$

On verra de la même manière, et en négligeant les quantités du même ordre que γ, que $P_0 = B_0$, $P_1 = B_1$, etc.

Donc si l'on pose

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} A_0 = P_0 + \gamma a_0, & B_0 = P_0 - \gamma b_0, \\ A_1 = P_1 + \gamma a_1, & B_1 = P_1 - \gamma b_1, \\ A_2 = P_2 + \gamma a_2, & B_2 = P_2 - \gamma b_2, \\ A_3 = P_3 + \gamma a_3, & B_3 = P_3 - \gamma b_3, \\ \text{etc.}, & \text{etc.}, \end{array} \right.$$

on voit que $a_0, a_1, a_2, \ldots, b_0, b_1, b_2, \ldots$ satisfont aux équations différentielles dont nous avons parlé; ensuite, si l'on substitue ces valeurs dans les équations écrites plus haut, on aura, en négligeant les quantités du même ordre que γ^2, et divisant par γ,

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \text{etc.} &= \tfrac{1}{2} z (P_0 + 3P_1 + 5P_2 + \text{etc.}), \\ b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + \text{etc.} &= \tfrac{1}{2} z (P_0 + 3P_1 + 5P_2 + \text{etc.}). \end{aligned}$$

Donc, en négligeant des infiniment petits du même ordre que γ, on a

$$b_0 = a_0, \quad b_1 = a_1, \quad b_2 = a_2, \text{ etc.},$$

et sauf des quantités du même ordre que γ^2,

$$(2)\quad B_0 = P_0 - \gamma a_0,\quad B_1 = P_1 - \gamma a_1,\quad B_2 = P_2 - \gamma a_2,\ \text{etc.}$$

Le coefficient différentiel $\frac{dV}{dr}$ a deux valeurs différentes à la surface. Celle qui correspond au cas où dr est négatif, c'est-à-dire à la face intérieure, est plus grande que celle qui correspond à la face extérieure. La différence entre ces deux valeurs est $4\pi m \cos\theta$, m désignant la densité, et θ l'angle de la normale et du rayon vecteur, au point considéré de la surface. [Voir § XIII, où t, A, k_0 ont la même signification que r, θ, m, dans ce moment.] On trouve ces deux valeurs en différentiant les formules qui donnent V pour l'espace intérieur et pour l'espace extérieur, et posant dans le résultat $r = R(1+\gamma z)$. On aura ainsi pour la première

$$\frac{1}{R}\left[B_1 + 2B_2(1+\gamma z) + 3B_3(1+\gamma z)^2 + \text{etc.}\right]$$

et pour la seconde

$$-\frac{1}{R}\left[A_0(1+\gamma z)^{-2} + A_1(1+\gamma z)^{-3} + A_2(1+\gamma z)^{-4} + \text{etc.}\right]$$

Nous aurons donc, en multipliant la différence par $R(1+\gamma z)^{\frac{3}{2}}$,

$$\begin{aligned}4\pi m R\cos\theta(1+\gamma z)^{\frac{3}{2}} = {} & A_0(1+\gamma z)^{-\frac{1}{2}} + A_1(1+\gamma z)^{-\frac{3}{2}} + A_2(1+\gamma z)^{\frac{5}{2}} + \text{etc.}\\ & + B_1(1+\gamma z)^{\frac{3}{2}} + 2B_2(1+\gamma z)^{\frac{5}{2}} + \text{etc.}\end{aligned}$$

En substituant dans ce résultat, pour A_0, A_1, etc., leurs valeurs tirées des équations (1), pour $B_0, B_1, \ldots$, leurs valeurs tirées des équations (2), et en négligeant tous les termes du même ordre que γ^2, nous aurons

$$\begin{aligned}4\pi m R\cos\theta(1+\gamma z)^{\frac{3}{2}} = {} & P_0 + 3P_1 + 5P_2 + 7P_3 + \text{etc.}\\ & + \gamma(a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \text{etc.})\\ & - \tfrac{1}{2}\gamma z(P_0 + 5P_1 + 3P_2 + 7P_3 + \text{etc.};\end{aligned}$$

mais, les deux dernières séries se détruisant quand on néglige les quantités du même ordre que γ^2, on aura

$$m = \frac{(1+\gamma z)^{-\frac{3}{2}}}{4\pi R\cos\theta}(P_0 + 3P_1 + 5P_2 + 7P_3 + \text{etc.}),$$

ce qui résout le problème. Au lieu de $(1+\gamma z)^{-\frac{3}{2}}$, on peut écrire $1-\frac{3}{2}\gamma z$ et supprimer le diviseur $\cos\theta$; car, en général, θ est du même ordre que γ, et $\cos\theta$ ne diffère de 1 que d'une quantité du même ordre que γ^2.

Quand il s'agit d'une sphère, on a $\gamma=0$; on obtient alors, et le résultat est rigoureux,

$$m=\frac{1}{4\pi R}(P_0+3P_1+5P_2+7P_3+\text{etc.}),$$

P_0, P_1, P_2,... étant les divers termes du développement de U.

XXXVI.

Dans les recherches précédentes, la quantité U a été laissée indéterminée. Si l'on suppose que U est le potentiel d'un système de masses donné, on arrive à un résultat de la plus haute importance.

Théorème. « Si à un mode D de distribution du système donné, que » l'on prend soit exclusivement dans l'intérieur de la surface fermée s, » soit exclusivement dans l'espace extérieur, on substitue un mode de » distribution E dans lequel la masse donnée est exclusivement distri- » buée sur la surface même : dans le premier cas, l'effet de E sera égal à » l'effet de D dans tout l'espace extérieur ; dans le second cas, les deux » effets seront égaux dans tous les points de l'espace intérieur. »

Pour démontrer ce théorème, considérons le potentiel U de D dans tous les points de s, et le potentiel V de E. A la surface, $V-U$ devient égal à 0 dans le premier cas, tandis que dans le second cette différence est seulement constante ; car $-U$ sera le potentiel relatif à une distribution D' qui serait le contraire de celle désignée par D, en sorte que chaque molécule serait remplacée par une molécule opposée. Donc $V-U$ est le potentiel des deux distributions coexistantes D' et E ; donc, dans le premier cas, les effets de ces deux distributions se détruisent dans tout l'espace extérieur, tandis que, dans le second cas, ils se détruisent dans l'espace intérieur (voir §§ XXVII et XXV) ; c'est-à-dire que les effets de D et E seront les mêmes dans les espaces correspondants. D'ailleurs, dans le premier cas, la masse entière de E sera égale à celle de D ; dans le second, elle restera arbitraire.

Le théorème qui a été énoncé dans les ouvrages intitulés : *Intensitas* *vis magneticæ*, page 10, et *Théorie générale du magnétisme terrestre*, n'est plus qu'un cas particulier du théorème que nous venons de démontrer.

XXXVII.

Nous avons dit au § XXXV que le calcul de la distribution E rencontre, dans la plupart des cas, des obstacles insurmontables. Cependant il existe un cas qui ne présente aucune difficulté et dont nous allons parler : c'est celui où U est constant, et où par conséquent la surface s est une surface d'équilibre pour le système des masses de la distribution D. On voit facilement qu'il ne s'agit ici que du cas où la distribution D est exclusivement intérieure, et que la masse entière n'est pas o. Autrement, il n'y aurait pas d'effet qu'il serait nécessaire de remplacer par une distribution de masses sur s.

Soit O un point de la surface s; soit r la longueur d'une droite qui coupe la surface à angle droit en ce point, et regardons-la comme croissante dans la direction du dedans au dehors. Soit $-$ C la valeur constante de la dérivée $\frac{dU}{dr}$ en O, et représentons par m la densité du point O dans le mode de distribution E. La dérivée $\frac{dV}{dr}$ a deux valeurs différentes en O. Celle qui se rapporte à l'espace intérieur est égale à la dérivée $\frac{dU}{dr}$, c'est-à-dire à $-$ C, par la raison que $V = U$ dans tout l'espace extérieur; celle qui se rapporte à l'espace extérieur sera égale à o, parce que V est constant à la surface et dans tout l'espace intérieur. Mais la seconde valeur devant surpasser de $4\pi m$ la première, on aura

$$4\pi m = C, \qquad \text{ou} \qquad m = \frac{C}{4\pi}.$$

Il est évident que C n'est autre chose, et pour la grandeur absolue et pour le signe, que la résultante des masses de la distribution D.