# JOURNAL
DE
# MATHÉMATIQUES
## PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE


G. GASCHEAU

**Application du théorème de M. Sturm aux transformées des équations binomes**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série*, tome 7 (1842), p. 126-132.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1842_1_7__126_0>

APPLICATION DU THÉORÈME DE M. STURM

# AUX TRANSFORMÉES DES ÉQUATIONS BINOMES;

PAR G. GASCHEAU,

Ancien Élève de l'École Polytechnique, Inspecteur de l'Académie d'Orléans.

---

**1.** L'équation binome de degré impair, étant débarrassée de sa racine réelle 1, conduit à une équation réciproque de degré pair; et celle-ci dépend d'une transformée de degré sous-double. Après avoir traité cette question, M. Lefébure de Fourcy ajoute :

« Par la règle de M. Sturm, on reconnaît facilement que toutes les » racines de ces transformées sont réelles. » (*Leçons d'Algèbre*, troisième édition, page 487, note.)

En cherchant une démonstration générale de cette proposition, je suis arrivé à une propriété des transformées dont il s'agit qui m'a paru assez curieuse.

Soit l'équation

$$y^{2m+1} = 1;$$

ses $2m$ racines imaginaires sont données par l'équation réciproque

$$y^m + \frac{1}{y^m} + y^{m-1} + \frac{1}{y^{m-1}} + \ldots + y + \frac{1}{y} + 1 = 0.$$

On prend, pour inconnue de la transformée, la fonction

$$z = y + \frac{1}{y}.$$

Représentant par $n$ un nombre entier positif quelconque, je pose

$$U_n = y^n + \frac{1}{y^n}$$

et

$$S_n = y^n + \frac{1}{y^n} + y^{n-1} + \frac{1}{y^{n-1}} + \ldots + y + \frac{1}{y} + 1;$$

d'où je conclus

$$(1) \qquad S_n = U_n + U_{n-1} + U_{n-2} + \ldots + U_1 + 1.$$

En faisant successivement $n = 1, 2, 3, \ldots$, on forme ces deux tableaux :

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{ll} U_1 = z, & S_1 = z + 1, \\ U_2 = z^2 - 2, & S_2 = z^2 + z - 1, \\ U_3 = z^3 - 3z, & S_3 = z^3 + z^2 - 2z - 1, \\ U_4 = z^4 - 4z^2 + 2, & S_4 = z^4 + z^3 - 3z^2 - 2z + 1, \\ U_5 = z^5 - 5z^3 + 5z, & S_5 = z^5 + z^4 - 4z^3 - 3z^2 + 3z + 1, \\ U_6 = z^6 - 6z^4 + 9z^2 - 2, & S_6 = z^6 + z^5 - 5z^4 - 4z^3 + 6z^2 + 3z - 1. \\ \vdots & \vdots \end{array} \right.$$

La propriété de la fonction $S_n$ qui démontre la proposition énoncée dans la note de M. Lefébure de Fourcy peut être exprimée par le théorème suivant :

*Écrivez toutes les fonctions* $S_1$, $S_2$, $S_3$,.., *jusqu'à* $S_n$; *prenez la dérivée, par rapport à z, de chacune de ces fonctions; je dis que la série des polynomes ainsi formés est précisément la suite des polynomes que l'on obtient en appliquant le théorème de M. Sturm à l'équation* $S_n = 0$. (Il est bien entendu que chaque fonction de la suite de M. Sturm doit être débarrassée des facteurs numériques communs à tous ses termes.)

Ce théorème étant admis, on remarque que les premiers termes des fonctions $S_1$, $S_2$, $S_3$,..., $S_n$ sont positifs; il en sera donc de même des premiers termes de leurs dérivées : donc la règle relative aux conditions de réalité des racines, donnée par M. Lefébure (page 463, n° 495), apprendra que toutes les racines de l'équation $S_n = 0$ sont réelles.

La démonstration du théorème s'appuie sur quelques lemmes que je vais établir.

**2.** On connaît la loi de formation des fonctions U; elle est exprimée par l'égalité

$$U_n = U_{n-1} z - U_{n-2}. \tag{3}$$

Or je dis que les fonctions S sont assujetties aux mêmes conditions, c'est-à-dire qu'*une fonction* S *se forme en multipliant la précédente par* $z$, *et en retranchant du produit l'avant-précédente ;* de sorte que l'on a

$$S_n = S_{n-1} z - S_{n-2}. \tag{4}$$

En effet, la relation (3) donne

$$\begin{aligned}
U_n &= U_{n-1} z - U_{n-2}, \\
U_{n-1} &= U_{n-2} z - U_{n-3}, \\
U_{n-2} &= U_{n-3} z - U_{n-4}, \\
&\vdots \\
U_3 &= U_2 z - U_1, \\
U_2 &= U_1 z - 2.
\end{aligned}$$

Ajoutant ces égalités, en ayant égard à l'équation (1), on trouve

$$S_n - U_1 - 1 = (S_{n-1} - 1) z - (S_{n-2} + 1);$$

comme on a $U_1 = z$, cette égalité, réduction faite, revient à la relation (4), qui était à démontrer.

**3.** Considérons une fonction S de la seconde colonne du tableau (2) : pour obtenir le reste de la division de ce polynome par sa dérivée, il conviendra préalablement de multiplier le dividende par le carré de l'exposant de $z$ dans son premier terme, afin d'éviter les fractions. Si nous voulons opérer de la même manière sur la dérivée d'une fonction S de ce même tableau et sur la dérivée de la fonction suivante, pour avoir le reste de la division de ces deux polynomes, nous aurons également soin de multiplier le premier terme du dividende par le carré du coefficient du premier terme du diviseur.

En effectuant donc ces préparations et ensuite les divisions auxquelles elles se rapportent sur quelque fonction que ce soit du tableau (2), on reconnaîtra que les deux formules suivantes présentent exactement le résultat des opérations en question exécutées sur ces fonctions, pour toutes les valeurs de $n$ comprises dans ce tableau :

$$(5) \qquad (n-1)^2 S'_n = [n(n-1)z+1] S'_{n-1} - n^2 S'_{n-2};$$

$$(6) \qquad n^2 S_n = (nz+1) S'_n - (2n+1) S'_{n-1}.$$

Chaque lettre accentuée représente la première dérivée de la fonction exprimée par la même lettre sans accent. Les multiplicateurs $(n-1)^2$ et $n^2$ des premiers membres sont les facteurs qu'il a fallu introduire pour éviter les fractions. Les coefficients $n^2$ et $2n+1$, qui affectent les derniers termes des seconds membres, sont analogues à ceux que l'on peut supprimer dans l'opération du plus grand commun diviseur. Remarquons, d'ailleurs, que, dans l'égalité (5), $S'_{n-2}$ est d'un degré en $z$ inférieur d'une unité à celui de $S'_{n-1}$; que, dans la suivante (6), $S'_{n-1}$ est de la même manière inférieur à $S'_n$. Cela posé, nous trouverons, dans les formules (5) et (6), la traduction de ces deux théorèmes :

1°. *Si l'on divise, l'une par l'autre, les dérivées de deux fonctions* S *consécutives*, PRISES EN REMONTANT *dans le tableau* (2), *le reste de l'opération, débarrassé d'un facteur numérique, sera égal, au signe près, à la dérivée de la fonction qui suit la seconde des deux proposées ;*

2°. *Si l'on divise une fonction* S *du tableau* (2) *par sa dérivée, on obtiendra, pour reste réduit, la dérivée de la fonction suivante prise en signe contraire.*

On établit facilement ces deux théorèmes par la méthode d'induction. Supposant donc que les équations (5) et (6) soient vérifiées, il s'agit de prouver que l'on aura,

$$1^\circ \qquad n^2 S'_{n+1} = [n(n+1)z+1] S'_n - (n+1)^2 S'_{n-1};$$

$$2^\circ \quad (n+1)^2 S_{n+1} = [(n+1)z+1] S'_{n+1} - (2n+3) S'_n.$$

Le théorème du n° 2 donne

$$S_{n+1} = zS_n - S_{n-1};$$

prenant les dérivées des deux membres de cette égalité, on a

$$S'_{n+1} = S_n + zS'_n - S'_{n-1}.$$

Éliminons $S_n$ entre cette dernière et l'équation (6), et nous trouverons l'équation 1° ci-dessus. Cette première formule est donc démontrée.

Pour obtenir l'équation 2°, je remarque d'abord que l'hypothèse, admettant l'équation (6), donne aussi

$$(n-1)^2 S_{n-1} = [(n-1)z + 1] S'_{n-1} - (2n-1) S'_{n-2}.$$

Éliminant $S'_{n-2}$ entre celle-ci et l'équation (5), on obtient

$$n^2 S_{n-1} = (2n-1) S'_n - (nz-1) S'_{n-1}.$$

La valeur de $S_{n-1}$, donnée par cette équation, et la valeur de $S_n$, fournie par l'équation (6), étant portées dans l'égalité $S_{n+1} = zS_n - S_{n-1}$, on trouve

$$n^2 S_{n+1} = (nz^2 + z - 2n + 1) S'_n - [(n+1)z + 1] S'_{n-1}.$$

Enfin nous pouvons éliminer $S'_{n-1}$ entre cette dernière et l'équation ci-dessus 1°, qui vient d'être démontrée; et le résultat de cette élimination sera l'équation 2°, qui était à démontrer.

4. Les deux propriétés précédentes donnent immédiatement la démonstration du théorème énoncé n° 1. En effet, soit Z le premier membre de la transformée en $z$ fournie par une équation binome de degré impair, de sorte que l'on ait $Z = S_n$; les théorèmes traduits par les équations (6) et (5) donneront cette suite d'équations :

$$\begin{aligned}
n^2 Z &= (nz+1) Z' - (2n+1) S'_{n-1},\\
(n-1)^2 Z' &= [n(n-1)z + 1] S'_{n-1} - n^2 S'_{n-2},\\
(n-2)^2 S'_{n-1} &= [(n-1)(n-2)z + 1] S'_{n-2} - (n-1)^2 S'_{n-3}.\\
&\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots
\end{aligned}$$

Ces égalités prouvent que la suite donnée par le théorème de M. Sturm, appliqué à l'équation $Z = 0$, sera

$$Z,\ Z',\ S'_{n-1},\ S'_{n-2}, \ldots, \quad \text{ou} \quad S_n, S'_n, S'_{n-1}, S'_{n-2}, \ldots$$

5. Connaissant la suite donnée par le théorème de M. Sturm, on peut s'assurer que les racines de l'équation $Z = 0$ ou $S_n = 0$ sont comprises entre $+2$ et $-2$; d'où l'on conclura que toutes les valeurs de $y$, déduites de l'équation $y + \frac{1}{y} = z$, sont imaginaires. Il faut donc prouver que *la suite dont il s'agit n'a que des permanences pour* $z = 2$, *et qu'elle ne présente que des variations pour* $z = -2$.

Avec $z = \pm 2$, on a $y = \pm 1$; donc, à cause de la relation $U_n = y^n + \frac{1}{y^n}$, la valeur $z = 2$ donnera à toutes les fonctions U la même valeur 2; et, pour $z = -2$, chaque polynome conservera la valeur numérique 2; mais les fonctions d'indice pair seront positives, et les fonctions d'indice impair seront négatives. L'égalité (1) prouve que $z = 2$ donne aux fonctions successives S les valeurs des nombres impairs consécutifs 3, 5, etc., et que $z = -2$ les rend alternativement égales à $+1$ et à $-1$. Donc, en résumant, on a

pour $z = 2$,

$$U_n = 2 \quad \text{et} \quad S_n = 2n + 1;$$

pour $z = -2$,

$$U_{2p} = 2, \quad U_{2q+1} = -2, \quad \text{et} \quad S_{2p} = 1, \quad S_{2q+1} = -1.$$

Cherchons maintenant ce que deviennent les dérivées de ces fonctions pour les mêmes valeurs $+2$ et $-2$ attribuées à $z$. On remarque d'abord que la valeur $z = 2$ donne à chacune des dérivées des fonctions U du tableau (2) une valeur numérique égale au carré de son indice; appliquant ensuite la méthode d'induction à la dérivée de l'équation (3), on étend cette remarque à toutes les dérivées des fonctions U. Il résulte d'ailleurs de la forme de ces polynomes que le changement du signe de $z$ entraîne seulement le changement du signe de chaque dérivée d'indice pair. L'égalité (1) prouve que la dérivée de $S_n$ est égale à la somme des dérivées des fonctions U depuis $U_1$ jusqu'à $U_n$; donc, pour $z = 2$, on aura

$$S'_n = 1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2,$$

donc S' est positif. Pour $z = -2$, on obtiendra

$$S'_n = 1 - 2^2 + 3^2 - \ldots \pm n^2;$$

et comme chaque terme est plus grand que le précédent, il s'ensuit que $S'_n$ sera positif ou négatif selon que $n$ sera impair ou pair; donc enfin,

pour $z = 2$,

$$U'_n = n^2, \quad \text{et} \quad S'_n > 0;$$

pour $z = -2$,

$$U'_{2p} = -(2p)^2, \quad U'_{2q+1} = (2q+1)^2, \quad \text{et} \quad S'_{2p} < 0, \quad S'_{2q+1} > 0.$$

Avec un peu d'attention, on trouve dans ces deux résultats la démonstration de la proposition énoncée.