JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

O. TERQUEM

Notice sur un manuscrit hébreu du traité d'arithmétique d'Ibn-Esra, conservé à la Bibliothèque royale

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 6 (1841), p. 275-296.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1841_1_6__275_0>

NOTICE

SUR UN MANUSCRIT HÉBREU

DU

TRAITÉ D'ARITHMÉTIQUE D'IBN-ESRA,

CONSERVÉ A LA BIBLIOTHÈQUE ROYALE

(HEB. 449, COD. HEB. 240);

PAR M. O. TERQUEM.

Les années de la naissance et de la mort de ce célèbre rabbin ne sont pas encore exactement déterminées, mais on sait qu'il est mort à l'âge de soixante-quinze ans, de 1160 à 1170; né à Tolède, enterré probablement dans l'île de Rhodes. Au milieu d'une vie errante, remplie de tribulations diverses, il a composé sur toutes sortes de questions théologiques, cabalistiques, grammaticales et scientifiques une vingtaine d'ouvrages, dont la moitié environ est imprimée. Le Traité d'Arithmétique existe encore en manuscrit dans la bibliothèque du Vatican, de Florence, de Munich, dans la collection bodléienne, et dans celle de la Bibliothèque royale. L'extrait que nous présentons nous paraît suffisant pour donner une idée de l'état de l'Arithmétique au XII^e siècle, dans l'école arabe, dont Ibn-Esra est un des plus illustres disciples.

Le manuscrit, de format petit in-4°, contient 83 pages numérotées au recto seulement, selon l'usage oriental. On y trouve

1°. *Sepher hamispar* (1 à 29). C'est le Traité d'Arithmétique;

2°. *Tischboret* (30 à 50). Évaluation des aires polygonales et circulaires; ouvrage entièrement différent du précédent. A la page 48 on trouve une table des cordes (doubles sinus) de Abram-bar-Chaié, maître d'Ibn-Esra. Nous en rendrons compte. C'est à tort que Rossi croit que ce sont deux titres différents d'un même ouvrage (*Dizionario storico*, vol. I, page 13);

3°. *Sepher haschem* (51 à 55). Considérations arithmético-cabalistiques sur le nom tétragrammique; édité à Munich en 1834, par Lippman (G. H.);

4°. Commentaire sur quelques théorèmes d'Euclide (55 à 58; 58 et 59 pages en blanc);

5°. *Sepher haachad* (60 à 72). Traité de l'unité divine; analogue au précédent ouvrage, mais non identique;

6°. *Biour astorlob* (73 à 76). Commentaire d'Ibn-Esra sur la construction de l'astrolabe par Emmanuel-ben-Jacob, auteur de divers écrits astronomiques;

7°. *Melechet haascheret* (78 à 83, verso). Ouvrage de mnémonique, d'après Pierre-François d'Orvieto. Fin du manuscrit.

Nous ne nous occuperons que du premier numéro. Tout est écrit en caractères rabbiniques cursifs. Plusieurs lettres se rapprochent beaucoup, pour la forme, de l'alphabet arabe, dont l'alphabet rabbinique dérive en grande partie. Je ne possède pas les connaissances paléographiques nécessaires pour juger de l'âge du manuscrit; mais un de nos plus savants orientalistes, compétent en cette matière comme sur tant d'autres, M. Munk, simple employé à la Bibliothèque royale, pourrait nous donner là-dessus d'utiles instructions [*].

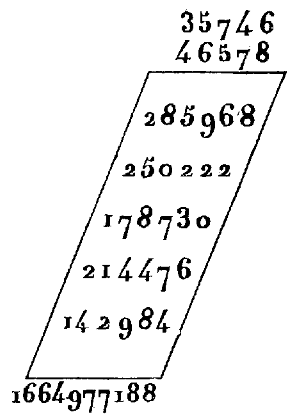
Dans le texte, pour désigner les nombres, l'auteur fait constamment usage des caractères de l'alphabet hébreu; mais en marge, les exemples du texte sont écrits en chiffres tels que nous nous en servons aujourd'hui, et les opérations sont les mêmes que celles maintenant en usage. Ces notes marginales sont donc très-modernes.

On trouve, page 1re, recto, les définitions du VIIe livre d'Euclide, qui est relatif aux nombres; puis les noms des sept arts libéraux, savoir,

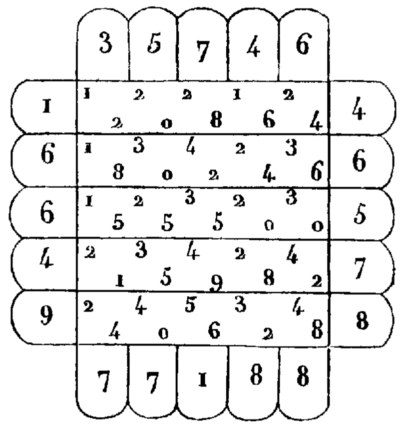
[*] Versé aussi dans les sciences exactes et naturelles, M. Munk est probablement le seul homme en France capable de nous renseigner sur ce que contiennent, à ce sujet, les nombreux ouvrages rabbiniques dont la Bibliothèque royale est en possession.

la grammaire, la dialectique, la rhétorique, l'arithmétique, la médecine, l'astronomie et la musique.

La page est terminée par ces deux procédés de multiplication en chiffres arabes et ainsi disposés :



Procédé péricyclique.



Nous donnons ici la traduction du début de l'auteur, parce qu'il peint l'état intellectuel de ce rabbin et même de son siècle.

Mais je remplace ici et dans la suite les lettres hébraïques du manuscrit par nos chiffres.

L'ouvrage commence ainsi au verso de la page 1re :

LIVRE D'ARITHMÉTIQUE DU SAGE RABBI ABRAHAM IBN-ESRA.

« Le Dieu suprême seul a créé neuf grands orbes, entourant la terre, qui est le monde inférieur. L'auteur du *Sepher jetzira* dit que les voies de la synthèse consistent dans le *nombre*, le *nombré* et le *nombrant* [*]. Il existe donc aussi *neuf caractères*, car *neuf* est la fin de

[*] Le *Sepher jetzira* est le plus ancien ouvrage cabalistique connu. D'après M. Zunz, l'un des plus érudits rabbinistes de l'époque, cet ouvrage n'est pas antérieur au VIIIe siècle. On voit ici l'idée ternaire qui se manifeste dans toutes les cabales.

tout calcul. On appelle ces caractères *unités*. Elles forment le premier degré, car 10 ressemble à 1, 20 à 2 [*]; 100 ressemble à 10 et à 1; 200 à 20 et à 2; de même 1,000 et 10,000. Ce sont là les chefs des *classes* qui viennent après. En voici la preuve : Fais un cercle, écris autour les neuf unités; si tu multiplies 9 par lui-même, le carré est 81, le 1 se voit à la gauche du 9 et le 8 à droite; si tu multiplies 9 par 8, tu as 72, le 2 à la gauche du 9 et le 7 à droite. Le nombre 5 entre les neuf caractères; il est appelé à cause de cela *nombre circulaire*, car il roule sur lui-même. Quand tu multiplies 5 par 9 on a 45, 4 à droite et 5 à gauche; ensuite 9 par 4 donne 36, 3 à droite et 6 à gauche, etc.

» C'est pourquoi les signes d'un nombre multiplié par lui-même ou par un autre, sont au nombre de neuf; c'est pourquoi aussi les savants de l'Inde ont construit tous les nombres au moyen de neuf signes [**]; mais, moi, j'écrirai à leur place des lettres hébraïques. Toujours, si tu as un nombre renfermant des unités de la première classe, savoir, des dixaines, tu écriras d'abord les unités et ensuite les dixaines; si les unités manquent et s'il y a des dixaines, tu feras l'image d'une petite roue [***] au commencement pour indiquer qu'il n'y a pas de nombre du premier degré, et ensuite on écrira les dixaines; s'il y a des dixaines et des centaines, on écrira d'abord le galgal, puis les dixaines en deuxième, et ensuite les centaines en troisième; et s'il y a des mille, en quatrième; et les dix mille, à la cinquième; et des cent mille, à la sixième; et des mille mille, à la septième, et ainsi indéfiniment. Si l'on a des unités, des centaines et point de dixaines, on écrira en premier les

---

[*] Je supprime ici une observation grammaticale sur le nom hébreu de vingt qui est *esrime*, et par analogie devrait être *esraïme*.

[**] Il y a ici dans le texte trois points qui renvoient à la marge où on lit : « Ils ont donné des figures que voici. » Puis, dans le texte, on trouve écrit sur une ligne de droite à gauche, nos chiffres

9 8 7 6 5 4 3 2 1.

Il me paraît évident que c'est une insertion étrangère à l'auteur. Il faudrait collationner d'autres manuscrits.

[***] *Galgal* en hébreu.

unités, le galgal en deuxième et les centaines en troisième, et de cette manière... [*]. Le galgal est comme la paille qui roule poussée par le vent; il n'est que pour conserver *les degrés ;* en langue étrangère il se nomme *sifra*.

» Après avoir mentionné ceci, je vais expliquer les *sept* portes de l'Arithmétique, car elles sont au nombre de *sept* [**] :

PREMIÈRE PORTE. — *Multiplication d'un nombre par lui-même ou par un autre; multiplication d'un nombre par deux autres ou davantage; multiplication de plusieurs nombres par plusieurs nombres.*

DEUXIÈME PORTE. — *Division d'un nombre composé d'une classe par des unités; ou de deux classes par des unités; des classes supérieures par des classes inférieures.*

Je donnerai aussi les preuves de la multiplication et de la division.

TROISIÈME PORTE. — *Addition d'unités avec des classes; des classes entre elles.*

QUATRIÈME PORTE. — *Soustraction; preuves de l'addition et de la soustraction.*

CINQUIÈME PORTE. — *Fractions de plusieurs espèces; entiers sur entiers, entiers avec des fractions, entiers et fractions avec entiers et fractions, fractions avec fractions, fractions avec fractions de fractions, fractions avec fractions de fractions de fractions; le tout soit pour multiplier, soit pour diviser, soit pour ajouter, soit pour soustraire; avec des preuves.*

SIXIÈME PORTE. — *Proportions: très-important. Par-là on résout beaucoup de questions difficiles.*

La plupart des raisonnements d'Astronomie sont tirés de ce chapitre.

---

[*] Le texe est interrompu. Il y a un renvoi à la marge où on lit d'une écriture différente du texte : « On fera pour le reste. On placera le galgal selon le besoin, soit au commencement, soit au milieu, et même deux galgals s'il le faut; la forme du galgal est celle-ci $\overline{\mathrm{O}}$. »

[**] Il est presque inutile d'avertir que dans le manuscrit, il n'existe aucune espèce de séparation. Tout est écrit de suite.

SEPTIÈME PORTE. — *Racines carrées et caractères des carrés parfaits.*

Ils sont en grand nombre. Ce chapitre est le plus difficile de tous.

On ne peut rien comprendre à l'explication des planètes, si l'on ne comprend ce chapitre; les cordes des arcs de cercle en sont des conséquences.

Nous allons présenter l'analyse succincte de ces sept portes, et, pour abréger, nous écrirons les procédés de l'auteur en signes algébriques.

PREMIÈRE PORTE.

Avant d'en venir au procédé général, l'auteur donne divers procédés pour des cas particuliers.

Premier exemple.

$$30 \times 200; \quad 3 \times 2 = 6;$$

d'où

$$30 \times 200 = 6000.$$

Troisième exemple.

$$29 \times 31 = (30 - 1)(30 + 1) = 30^2 - 1 = 900 - 1 = 899.$$

Cinquième exemple.

$$15^2; \quad \frac{15}{3} = 5, \quad 5^2 = 25, \quad 25 \times 10 = 250,$$
$$250 - 5^2 = 225 = 15^2.$$

Sixième exemple.

$$24^2; \quad \frac{24}{3} = 8; \quad 8^2 = 64; \quad 64 \times 10 = 640;$$
$$640 - 64 = 576 = 24^2.$$

Huitième exemple.

$$22^2; \quad 22 = 21 + 1; \quad \frac{21}{3} = 7; \quad 7^2 = 49; \quad 49 \cdot 10 = 490;$$
$$490 - 7^2 = 441 = 21^2; \quad 21^2 + 21 + 22 = 484 = 22^2.$$

Règle générale.

Premier exemple.

$$\begin{array}{ccccc}
 & 1 & 2 & 7 & \\
 & 3 & 5 & 5 & \\
\hline
3 & 2 & 3 & 3 & 5 \\
 & 1 & 1 & 5 & \\
 & 6 & 1 & & \\
 & 5 & 5 & & \\
\hline
4 & 5 & 0 & 8 & 5
\end{array}$$

» Soit à multiplier 127 par 355. On écrit le multiplicateur en bas; on multiplie 7 par 5 et l'on écrit le produit 35 sur une première ligne horizontale; on multiplie 7 par 50; j'écris 5 dans une seconde ligne sous les dixaines de la première, et 3 dans cette première ligne à côté des dixaines; je multiplie 71 par 300; j'écris 1 dans la deuxième ligne sous les centaines de la première et 2 à côté de ces centaines; je multiplie 20 par 5; j'écris dans la troisième ligne, sous les centaines de la première, et ainsi de suite; faisant la somme, on obtient le produit cherché. »

Nous avons abrégé; mais dans le texte, la multiplication est indiquée jusqu'à 100 par 300.

Le chapitre est terminé par la preuve de la multiplication par 9, telle que nous la pratiquons.

DEUXIÈME PORTE.

Division.

L'auteur débute par ces considérations :

« Tout nombre est composé d'unités; mais l'unité n'est pas un nombre, car un nombre est susceptible d'altération, de multiplication, et de division; or l'unité n'est pas soumise à ces accidents; donc l'unité n'est pas un nombre [*]; d'ailleurs un nombre entier est précédé d'un autre plus petit et suivi d'un plus grand; tandis que 1 est suivi de 2, mais n'est précédé de rien.

» Les astronomes ont divisé le zodiaque en 12 signes; parce que 12 a pour diviseurs 2, 3, 4, 6.

» Ils ont partagé le signe en 30 degrés, parce que 30 a pour diviseurs 2, 3, 5, 6, 15.

» Ils ont de même divisé la circonférence en 360 parties; car 360 divisé par 2, 3, 4, etc., donne des nombres entiers.

Premier exemple. Diviser 9000 par 70,

$$\begin{array}{cccc} & & 4 & \\ 9 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 2 & 8 \\ & & 7 & 0 \end{array}$$

J'écris le dividende 70 au-dessous du diviseur, unité sur unité et dixaines sur dixaines, en laissant un intervalle pour écrire le quotient entre; je divise 9 par 7; le quotient est 1, que j'écris entre les deux sous les centaines; il reste 2; je divise 20 par 7; j'écris le quotient 2 à côté de l'unité; il reste 6; je divise 60 par 7; j'écris le quotient 8 à côté de 2; il reste 4 que j'écris au-dessus des dixaines; le quotient est 128 et le reste 40.

Deuxième exemple. 20000 à diviser par 90. De la même manière.

Troisième exemple. 4032 à diviser par 30:

$$\begin{array}{cccc} & & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 & 2 \\ & 1 & 3 & 4 \\ & & 3 & 0 \end{array}$$

[*] C'est l'opinion d'Euclide (liv. VII, *Définition* 1), et des philosophes grecs. Ibn-Esra a aussi en vue une proposition théologique. Chez les écrivains juifs, science, histoire, poésie, tout se rattache à Dieu. C'est l'idée dominante dans toute cette monotone littérature.

Quatrième exemple. 8213 à diviser par 353:

$$\begin{array}{cccc} & & 9 & 4 \\ 8 & 2 & 1 & 3 \\ & & 2 & 3 \\ & 3 & 5 & 3 \end{array}$$

« 3 dans 8, 2 fois; j'écris 2 sous les dixaines; 2 fois 3 font 6; j'ôte 6 de 8, il reste 2; 2 fois 5 font 10; j'ôte de 22, il reste 12; 2 fois 3 font 6; j'ôte de 11, reste 5; ainsi il reste 115; 3 dans 11, 3 fois; j'écris à côté de 2; $3 \times 3 = 9$; 9 de 11, reste 2; $3 \times 5 = 15$; 15 de 25, il reste 10; $3 \times 3 = 9$; 9 de 13, il reste 4. Ainsi le quotient est 23 et il reste 94. »

Observation. On voit que ce procédé est très-long, parce qu'en multipliant le diviseur par le chiffre du quotient, on fait la multiplication de gauche à droite, tandis que nous la faisons de droite à gauche.

Les autres exemples sont relatifs à des nombres qui contiennent des zéro ou donnent des zéro au quotient.

La preuve de la division par 9 termine ce chapitre.

L'auteur ne donne pas de règles générales pour faire les opérations, mais des exemples qui servent à faire connaître ces règles.

TROISIÈME PORTE.

Sommes.

Énoncé. La somme des nombres naturels est $\frac{(1+n)n}{2}$; et l'auteur ajoute ces mots: « J'ai découvert que cette somme $= \frac{n^2+n}{2}$; » le tout sans démonstration.

Question. 465 étant la somme d'une progression naturelle des nombres, combien y a-t-il de termes?

Solution. Doublez, il vient 930; la racine carrée la plus approchée est 30; c'est le nombre de termes.

Enoncé. La somme des carrés des nombres naturels est

$$\frac{n(n+1)}{1.2} \times \frac{2n+1}{3},$$

sans démonstration.

On donne ensuite des règles pour additionner des nombres complexes renfermant des degrés, minutes, secondes et tierces.

Observation. Les Arabes connaissaient la numération décuple, celle des puissances positives de 10, mais ignoraient la numération décimale ou celle des puissances négatives de 10; et, chose fort singulière, ils l'ont remplacée par la division sexagésimale; ils appelaient les soixantièmes, des minutes, les soixantièmes au carré des secondes, et ainsi de suite. De même que nous réduisons les fractions ordinaires en fractions décimales, les Arabes les réduisent en fractions sexagésimales, ou en minutes,.secondes, tierces, etc. Ils cherchent ainsi les racines carrées et cubiques à moins d'une minute, d'une seconde près.

Mais il est bon de remarquer que les Arabes traitent ces fractions comme des nombres complexes et n'ont pas une numération sexagésimale; tandis que nous avons une numération décimale, avantage immense. Il serait fort curieux de savoir quand cette numération s'est établie en Europe. Je la crois très-récente.

Les règles que donne ici l'auteur pour l'addition des degrés, minutes et secondes, sont donc analogues à celles qu'on trouve dans nos traités d'Arithmétique, pour l'addition des quantités décimales. Il en est de même dans la porte suivante.

QUATRIÈME PORTE.

Règles pour la soustraction des nombres complexes, degrés, minutes, secondes.

CINQUIÈME PORTE.

Fractions.

Considérations diverses sur l'importance et l'utilité des fractions, entre autres, dans la théorie des nombres irrationnels. Il énonce, en passant, que la somme de la suite naturelle des nombres impairs engendre tous les carrés.

Règle ordinaire pour réduire les fractions au même dénominateur, et divers cas particuliers. — Élévation d'une fraction au carré.

1°. Multiplication des fractions :

Premier exemple.

$$\frac{3}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{12}{25} = \frac{2}{5} + \frac{2}{25}.$$

Deuxième exemple.

$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}; \text{ trois procédés.}$$

Premier procédé.

$$3 \times 4 = 12; \quad \frac{2}{3} \times 12 = 8; \quad \frac{3}{4} \times 12 = 9; \quad 8 \times 9 = 72;$$
$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{72}{144} = \frac{1}{2}.$$

Deuxième procédé.

$$2 \times 3 = 6; \quad 3 \times 4 = 12; \quad \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}.$$

Le troisième est analogue au premier.

2°. Multiplication des nombres fractionnaires :

Premier exemple.

$$3\,\frac{4}{5} \times 6\,\frac{7}{8}; \text{ trois procédés.}$$

Premier procédé.

$$3 \times 6 = 18;\quad 3 \times \frac{7}{8} = \frac{21}{8} = 2\,\frac{5}{8};\quad 18 + 2\,\frac{5}{8} = 20\,\frac{5}{8};$$
$$6 \times \frac{4}{5} = \frac{24}{5} = 4\,\frac{4}{5};\quad 20\,\frac{5}{8} + 4\,\frac{4}{5} = 24 + \frac{57}{40} = 25\,\frac{17}{40};$$
$$\frac{4}{5} \times \frac{7}{8} = \frac{28}{40};\quad \frac{28}{40} + \frac{17}{40} = \frac{45}{40} = 1\,\frac{5}{40} = 1\,\frac{1}{8};$$

ainsi

$$3\,\frac{4}{5} \times 6\,\frac{7}{8} = 26\,\frac{1}{8}.$$

Deuxième procédé.

$$3\,\frac{4}{5} = \frac{152}{40};\quad 6\,\frac{7}{8} = \frac{275}{40};\quad 152 \times 275 = 41800;$$
$$\frac{41800}{1600} = 26\,\frac{200}{1600} = 26\,\frac{1}{8}.$$

Troisième procédé.

$$3\,\frac{4}{5} = \frac{19}{5};\quad 6\,\frac{7}{8} = \frac{55}{8};\quad \frac{19}{5} \times \frac{55}{8} = \frac{1645}{40} = 26\,\frac{5}{40} = 26\,\frac{1}{8}.$$

De là on passe aux fractions qu'un *homme ne peut prononcer*.

Pour comprendre cette locution, il faut se rappeler, qu'en français, nous exprimons tout dénominateur, quelque grand qu'il soit, au moyen de la terminaison *ième;* il n'en est pas ainsi en hébreu; on ne peut aller que jusqu'à 10; mais pour dire cinq onzièmes, Ibn-Esra dit : cinq de onze; et il appelle cela une fraction qu'on ne peut exprimer. Quelquefois pour des dix-huitièmes, il dit des tiers de sixième; de même que les femmes disent un demi-quart pour $\frac{1}{8}$ ou un demi-tiers pour $\frac{1}{6}$.

Premier exemple.

$$\frac{3}{7} \times \frac{5}{11};$$

la deuxième fraction est ineffable.

$$\frac{3}{7} = \frac{33}{77}; \quad \frac{5}{11} = \frac{35}{77}; \quad 33 \times 35 = 1155; \quad \frac{1155}{77} = 15;$$

ainsi

$$\frac{3}{7} \times \frac{5}{11} = \frac{15}{77}, \text{ à peu près } \frac{1}{5}.$$

Deuxième exemple.

$$\frac{9}{13} \times \frac{17}{19},$$

deux fractions ineffables.

Il réduit d'abord les fractions au même dénominateur, les multiplie ensemble, et fait ensuite la simplification. Il se croit obligé de prendre ce singulier détour, parce qu'il a commencé par expliquer la multiplication pour le cas où les deux dénominateurs sont égaux; et il ramène tout à ce cas-là.

3°. Fractions de fractions :

Premier exemple.

$$\frac{2}{3} \text{ de } \frac{1}{4} \text{ de } \frac{1}{5} \times \frac{6}{7} \text{ de } \frac{1}{8};$$

$$2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 8 = 1680; \quad \frac{1}{5} \times 1680 = 336;$$

$$\frac{1}{4} \times 336 = 84; \quad \frac{2}{3} \times 84 = 56; \quad \frac{1}{8} \text{ de } 1680 = 210;$$

$$\frac{1}{7} \text{ de } 210 = 30; \quad \frac{6}{7} \text{ de } 210 = 180; \quad 56 \times 180 = 10080; \quad \frac{10080}{1680} = 6.$$

Ainsi

$$\frac{2}{3} \text{ de } \frac{1}{4} \text{ de } \frac{1}{5} \times \frac{6}{7} \text{ de } \frac{1}{8} = \frac{6}{6.5.7.8}.$$

4°. Division de fractions : comme de nos jours.

L'auteur quitte ici la division des fractions, par la raison, dit-il, qu'on n'a pas grand besoin de cette opération, et il vient à l'addition des fractions.

Premier exemple.

$$\frac{2}{5}+\frac{5}{7};\quad \frac{2}{5}\text{ de }35 = 14;\quad \frac{5}{7}\text{ de }35 = 25;$$

donc

$$\frac{2}{5}+\frac{5}{7}=\frac{14+25}{35}=\frac{29}{35}=9\,\frac{4}{35}.$$

Ne pouvant exprimer les trente-cinquièmes, il dit que ce sont les $\frac{4}{5}$ de $\frac{1}{7}$.

Observation. L'auteur n'a aucune marque pour désigner les fractions. Quand s'est introduit l'usage d'écrire le numérateur au-dessus du dénominateur et les séparant par un trait, soit oblique, soit horizontal? Les plus grands progrès des sciences exactes sont dus à l'introduction de ce genre de signes, qui manquent encore à la théorie des nombres. Nous n'avons aucun signe pour désigner un nombre entier, un nombre premier, des nombres premiers entre eux, etc., etc. La même lacune se fait sentir en mécanique pour distinguer les diverses espèces d'unités dont la confusion est une cause principale des difficultés de cette science.

Deuxième exemple.

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9};\ \text{deux procédés.}$$

Premier procédé.

$$\frac{1}{5}=\frac{1}{9}+\frac{4}{5.9};\qquad \frac{1}{7}=\frac{1}{9}+\frac{2}{7.9};$$

donc

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}=\frac{3}{9}+\frac{1}{9}\left(\frac{4}{5}+\frac{2}{7}\right)=\frac{3}{9}+\frac{1}{9}\left(1+\frac{3}{5.7}\right)=\frac{4}{9}+\frac{3}{5.7.9}.$$

Deuxième procédé. Par la réduction au même dénominateur.

Question. Trouver le nombre qui, augmenté de son $\frac{1}{9}$ et de son $\frac{1}{30}$, fasse 50?

Solution.

$$9 \times 10 = 90;\quad \frac{1}{9}\text{ de }90 + \frac{1}{10}\text{ de }90 = 19;\quad 19 + 90 = 109;$$

$$50 \times 19 = 4500;\quad \frac{4500}{109} = 41\,\frac{31}{109},\text{ nombre cherché.}$$

On fait la vérification.

Une deuxième question de ce genre est résolue de la même manière

Le chapitre est terminé par des calculs relatifs à des conversions de nombres en degrés, minutes, secondes, et multiplications de ces nombres, et il dit que, par ce moyen, *Ptolémée le roi* a calculé les cordes des arcs de cercle. Ibn-Esra confond l'astronome avec le roi, erreur commune à presque tous les écrivains juifs. Elle s'est même glissée. par inadvertance, dans l'ouvrage hébreu sur la comète de Halley, publié à Wilna en 1835, par M. Slonymski, israélite polonais, familiarisé avec les méthodes de la *Mécanique céleste.*

SIXIÈME PORTE.

Proportion.

Ce chapitre commence par les définitions des proportions arithmétiques et géométriques à trois termes et de la moyenne proportionnelle : ensuite, des proportions à quatre termes; ensuite, sans démonstration. la proposition suivante :

La somme des carrés de quatre termes, en proportion géométrique, est égale au carré de la somme des extrêmes plus le carré de la différence des moyens, ou bien au carré de la somme des moyens plus le carré de la différence des extrêmes.

Définition de la proportion harmonique; elle consiste, comme on sait, dans cette relation entre trois quantités a, b, c,

$$\frac{a}{c} = \frac{b-a}{c-b}.$$

connaissant deux de ces quantités, trouver la troisième; trois questions avec leurs solutions.

Règle de trois. Divisez le produit des extrêmes par le moyen connu.

Ibn-Esra recommande de figurer le *galgal* pour le terme inconnu; de sorte que le galgal tient lieu de la lettre x, pour désigner l'inconnue. Ainsi la proportion $2 : 4 :: 6 : x$ s'écrit ainsi $2 . 4 . 6 . \bar{o}$.

On trouve ensuite les solutions de plusieurs questions relatives à la règle de société, de commerce, de change, comme dans les traités modernes.

Les monnaies sont le florin d'or à divers titres, et le dinar valant 12 pechoutimes.

Problèmes exigeant l'emploi de la règle de trois composée; questions des courriers allant au-devant l'un de l'autre ou se poursuivant, et autres questions de fausse position qu'on résout depuis Viète par des équations du premier degré. Nous n'en rapporterons qu'une seule dont l'auteur donne deux solutions.

Question. Une somme de 120 florins est à partager entre quatre frères : chacun d'eux exhibe un testament en vertu de quoi le premier (A) prétend avoir tout; le deuxième (B) la moitié; le troisième (C) le tiers; et le quatrième (D) le quart; combien chacun doit-il recevoir?

Solution des Savants étrangers.

A prend $\frac{120}{125} \times 60 = 57\,\frac{3}{5}$,

B — $\frac{120}{125} \times 30 = 28\,\frac{4}{5}$,

C — $\frac{120}{125} \times 20 = 19\,\frac{1}{5}$,

D — $\frac{120}{125} \times 15 = 14\,\frac{2}{5}$.

Solution des Savants israëlites. (Traduction textuelle.)

« Les trois premiers disent à D : tu prétends le $\frac{1}{4}$ ou 30 florins; nous avons même droit que toi à ces 30 florins; ainsi prenons chacun $7\,\frac{1}{2}$ florins et retire-toi avec ta part.

» Les deux premiers disent ensuite à C : tu prétends au tiers ou à

40 florins; tu as déjà eu ta part aux 30 florins; il ne reste donc que 10 florins, auxquels nous avons des droits égaux; chacun $3\frac{1}{3}$, et retire-toi avec ta part.

» Le premier dit à B: tu prétends à la moitié ou à 60 florins; tu as déjà eu ta part de 40, et il reste 20 à partager entre nous deux, chacun 10.

» Le premier A prend tout le reste. Ainsi

D reçoit	$7\frac{1}{2}$	$= 7\frac{3}{6}$,
C »	$7\frac{1}{2} + 3\frac{1}{3}$	$= 10\frac{5}{6}$,
B »	$7\frac{1}{2} + 3\frac{1}{3} + 10$	$= 20\frac{5}{6}$.
A »	$7\frac{1}{2} + 3\frac{1}{3} + 10 + 60$	$= 80\frac{5}{6}$,
	Total....	120.

Observation. On reconnaît dans cette seconde solution la logique tortueuse du talmudiste. Pour traiter la question généralement dans ce sens, il faut trouver la somme de la série finie

$$\frac{1}{n(n-1)^2} + \frac{1}{(n-1)(n-2)^2} + \frac{1}{(n-2)(n-3)^2} + \text{etc.};$$

et l'on parvient à cette relation connue,

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n(n-1)} + \frac{1}{(n-1)(n-2)} + \ldots \frac{1}{2.1} = 1,$$

n étant un nombre entier positif.

Le chapitre est terminé par la manière de se servir des parties proportionnelles dans les tables astronomiques, et de réduire ces parties en minutes, secondes, etc.

SEPTIÈME PORTE (page 23).

Extractions de racines.

Caractères auxquels on peut reconnaître les carrés parfaits, par les chiffres initiaux.

Il extrait la racine carrée de 200, d'après la méthode moderne; et pour celle de 300, il s'y prend ainsi : la différence entre 400 et 300 est 100; la racine de 400 est 20; 100 divisé par 2×20, donne 3 pour quotient entier; ainsi la racine de 300 est $20 - 3 = 17$; puis, il trouve cette même racine par la manière ordinaire. A la page 24, on lit cette singulière annonce :

« Maintenant, je vais te découvrir une partie de ce mystère, et pourquoi c'est ainsi : Sache que deux des grandes causes, l'une va vers l'orient et l'autre vers l'occident, et la force supérieure est une entre les deux. »

Ce mystère consiste en ceci : 1 et 9 au carré donnent le même chiffre initial.
2 et 8 *idem.*
3 et 7 *idem.*

Mais 5 est un nombre *circulant,* se reproduisant lui-même.

On trouve ensuite les énoncés suivants :

$$a^2 \times b^2 = (ab)^2,$$

$$\frac{a^2}{b^2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2,$$

$$(a+b)^2 = 2(a^2+b^2) - (a-b)^2,$$

$$(a+b+c)^2 = 3(a^2+b^2+c^2) - (a-b)^2 - (a-c)^2 - (b-c)^2,$$

$$(a+b+c+d)^2 = 4(a^2+b^2+c^2+d^2) - (a-b)^2 - (a-c)^2 - (a-d)^2 - (b-c)^2 - (b-d)^2 - (c-d)^2.$$

Observation. De ces identités on peut conclure que le double de la somme de deux carrés est égal à la somme de deux carrés; que le triple de la somme de trois carrés est égale à la somme de quatre carrés, etc., etc.

Racines carrées des fractions; exemples pris dans la division sexagésimale astronomique.

Premier exemple. Soit à extraire la racine carrée de $7^{\circ}.50'.24''$, c'est-à-dire de

$$7 + \frac{50}{60} + \frac{22}{60^2};$$

voici le procédé, écrit algébriquement,

$$7^{\circ}.50'.24'' = 7^{\circ}.48'.2'.24'' = 7^{\circ}.48'.144'' = 7^{\circ}.48'.(12'')^2:$$

faisons

$$\sqrt{7^{\circ}.48'.(12'')^2} = 3^{\circ} - a,$$

$$-2.48'.(12'')^2 = -6a + a^2 = -72'.(12'')^2.$$

d'où

$$a = \frac{72}{6} = 12';$$

ainsi la racine cherchée est

$$3^{\circ} - 12' = 2^{\circ}.48'$$

à peu près.

L'auteur expose ensuite très-obscurément une méthode d'approximation procédant d'après les puissances négatives de 60. Elle s'exécute ainsi : Quand on a une première approximation, on l'élève au carré.

et retranche ce carré du nombre donné; on divise le reste par le double de la racine; l'on ajoute le quotient à la première approximation, ou bien on l'en retranche, selon que le quotient est positif ou négatif, on obtient une seconde approximation, et ainsi de suite.

Questions sur la longueur d'une échelle placée contre un mur, résolues à l'aide du théorème de Pythagore.

Questions relatives au cercle. Il dit qu'on peut considérer dans le cercle, six choses, dont deux étant connues, les quatre autres sont déterminées. Parmi ces six choses, il y un mot hébreu, kafal, *double,* dont je ne comprends pas l'application.

Solution de ce problème. Connaissant la corde et la flèche, trouver le diamètre.

Ensuite, il fait mention (page 29) d'une propriété mystico-géométrique du cercle, dont il parle aussi d'une manière extrêmement obscure, dans un autre de ses ouvrages, intitulé *Jesod More,* à la fin du chapitre XI [*]. C'était une énigme indéchiffrable; toutefois, M. Eichenbaum, d'Odessa, avec une admirable sagacité, en a découvert le mot, et a publié son incontestable explication dans le *Kerem hemed,* ouvrage périodique hébreu, édité à Tarnopol et imprimé à Vienne [**].

Voici cette mirifique propriété. Inscrivant dans un cercle un triangle isoscèle ayant sa base perpendiculaire aux $\frac{2}{3}$ du rayon, et pour hauteur les $\frac{4}{3}$ du rayon, l'aire de ce triangle

$$=\frac{8}{9}\sqrt{2}r^2 = 1,25r^2 = \mathrm{A};$$

[*] M. le docteur Creizenach, connu par un Traité d'algèbre, où l'on trouve une nouvelle démonstration des formules de Cramer, a fait paraître l'année dernière, à Francfort-sur-Mein, une traduction allemande et latine en regard du texte du *Jesod More*.

[**] *Kerem hemed,* 1839, tome IV, page 113. M. Creizebach a adopté, dans sa traduction, cette explication, confirmée aussi par notre manuscrit.

à un centième de r^2 près où r désigne le rayon; le périmètre de la circonférence

$$= 2\pi r = 6,28r = \mathrm{B},$$

d'où

$$\frac{\mathrm{B}r}{\mathrm{A}} = 5\,\frac{3}{125},$$

ou à peu près

$$\mathrm{B}r = 5\mathrm{A};$$

si nous prenons donc pour diamètre le nombre 10, on aura

$$\mathrm{B} = \mathrm{A},$$

c'est-à-dire que l'aire du triangle inscrit est exprimée par les mêmes chiffres que le périmètre, et cette propriété n'a lieu que pour le diamètre 10; or 10 est la valeur numérale de la lettre Jod, qui est la lettre initiale du nom tétragramme Jehova : il existe donc une relation mystique entre ce nom et les propriétés du cercle.

Observation. J'ai consigné ici cette élucubration mathématico-cabalistique, comme un échantillon du genre; encore n'en a-t-on pas toujours de cette facture. J'ai lu, il y a bien des années, les principales œuvres cabalistiques, et cette lecture m'a confirmé dans l'opinion, contrairement à ce que pensent des hommes dont j'estime les travaux, que ce serait un temps déplorablement perdu que celui qu'on consacrerait à l'étude des cabalistes, alchymistes, théosophes et mystiques de toute région. D'ailleurs cette étude n'est pas sans dangers : rien n'est contagieux comme les folies transcendantes; la plus forte intelligence peut y faire naufrage. Lorsqu'on a longtemps médité sur certaines aberrations abstruses, et qu'on n'a épargné aucune peine pour les comprendre, alors, par l'instigation de l'inévitable démon qui a nom amour-propre, on finit par se dissimuler l'extravagance de ces recherches, pour en proclamer même l'importance et en soutenir la réalité ontologique : cela s'est vu et se verra toujours.

Ici se termine le manuscrit, dont les neuf dernières lignes sont inintelligibles pour moi. Sur la même page, après la fin, on lit douze lignes consacrées à cette question : De trois choses, la corde, la flèche et le diamètre, connaissant deux, trouver la troisième. Ces lignes sont-elles d'Ibn-Esra ?

Les travaux de M. Chasles, si érudit, si consciencieux, ont avancé beaucoup nos connaissances sur l'histoire de l'Arithmétique chez les anciens. Il paraît que dans les quatre opérations, ils procédaient à peu près comme nous. La numération parlée étant décimale de toute antiquité, on traitait les classes d'unités comme des nombres complexes, et qu'on distinguait les uns des autres à l'aide de signes quelconques écrits en tête de ces nombres, *apices ;* comme nous faisons pour les toises, les pieds, les pouces, etc.; des cadres creux remplis de poussière (en hébreu, *abaque*) et à fond blanc, servaient probablement à faire et à défaire les opérations. Le *Talmud,* ouvrage du IV[e] siècle, défend, un jour du sabbat, de tracer des caractères *dans l'abaque,* c'est-à-dire dans la poussière des écrivains. (*Sabbat,* p. 104.) Les Indiens se servent encore de ces abaques dans leurs écoles, et nous aussi dans l'enseignement mutuel. Les traités sur l'usage de l'abaque paraissent être très-nombreux depuis le XII[e] siècle. L'arithmétique d'Ibn-Esra n'a précédé que d'environ un siècle l'*Abacus* de Fibonacci. Ils suivent à peu près la même marche, donnant la multiplication avant l'addition, etc. On sait d'ailleurs que Fibonacci a appris ses méthodes chez des négociants juifs, à Oran. Il est problable que ce sont des commerçants de cette nation qui auront adopté les chiffres arabes, si commodes pour la tenue des livres. Introduits par eux sur les côtes de Barbarie, ces chiffres se seront répandus de là en Italie, en Espagne et dans le reste de l'Europe. Boëce avait déjà une idée confuse de l'existence de ces chiffres et de leurs noms, que le savant M. Vincent nous a appris, avec une grande probabilité, être d'origine semitique.