JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

G. LAMÉ

Mémoires sur les surfaces isostatiques dans les corps solides homogènes en équilibre d'élasticité

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 6 (1841), p. 37-60.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1841_1_6__37_0>

MÉMOIRE

SUR LES SURFACES ISOSTATIQUES

DANS LES CORPS SOLIDES HOMOGÈNES EN ÉQUILIBRE D'ÉLASTICITÉ;

PAR G. LAMÉ.

Les géomètres qui se sont occupés de la théorie des corps élastiques ont trouvé les relations qui existent entre les pressions autour de chaque point d'un corps solide, soumis à des efforts extérieurs. Mais ces propriétés ne sont pas les seules que l'on puisse déduire des équations différentielles qui représentent l'équilibre intérieur et les petits mouvements d'un corps solide, car elles se bornent à considérer les variations des pressions autour d'un point; elles démontrent, par exemple, que toutes ces forces, obliques en général sur les éléments plans qu'elles sollicitent, sont facilement déterminées, tant en grandeur qu'en direction, lorsqu'on connaît les directions et les intensités de trois pressions principales, lesquelles s'exercent au même point, normalement à trois éléments plans orthogonaux entre eux. Or, lorsqu'on passe d'un point à un autre du même corps solide, la direction et la grandeur des pressions principales varient en général, et les lois de ces variations sont nécessairement comprises implicitement dans les équations différentielles de la question. Personne, que je sache, n'a encore entrepris de développer ces lois, ou de les transformer en d'autres dont l'énoncé puisse facilement se prêter aux applications. Tel est le but que je me suis proposé d'atteindre dans ce Mémoire. La simplicité et surtout la généralité des résultats auxquels j'ai été conduit me font espérer que ce travail ne sera pas sans importance pour la théorie mathématique de l'élasticité.

Si, partant de tout point d'un corps solide, on passe sur un des éléments plans principaux qui se trouvent pressés ou tirés normalement à tout autre point infiniment voisin du premier; que de ce nouveau point on se dirige vers un troisième situé sur le plan principal correspondant au second point, et ainsi de suite; on pourra tracer ainsi, dans l'intérieur du corps solide, trois systèmes de surfaces orthogonales qui jouiront de la propriété d'être toutes pressées ou tirées normalement, c'est-à-dire que chacune de ces surfaces divisera le corps en deux parties qui n'exerceront l'une sur l'autre que des pressions ou des tractions normales.

Ce triple système de surfaces existe dans tout corps solide homogène; il varie dans un même corps avec les directions, les intensités, et les points d'application des efforts extérieurs; il est déterminé et constant dans chaque état d'équilibre, mais il peut changer avec le temps lors du mouvement. J'appelle *isostatiques* ces surfaces et leurs trois systèmes conjugués. Les surfaces isostatiques étant orthogonales doivent nécessairement se couper suivant leurs lignes de courbure.

Pour découvrir les lois que je cherchais, j'ai dû d'abord transformer les équations et les expressions différentielles que fournit la théorie mathématique de l'élasticité, en prenant pour nouvelles coordonnées les paramètres de trois systèmes de surfaces orthogonales, et supposant les déplacements des molécules projetés sur les tangentes aux axes courbes. Pour être effectuées, ces transformations ont exigé l'emploi des formules qui lient entre eux les paramètres différentiels des surfaces conjuguées. Ces formules sont démontrées dans mon Mémoire sur les coordonnées curvilignes, qui fait partie du tome V de ce Journal.

Pour rapporter ensuite l'état d'équilibre du corps solide à ses surfaces isostatiques, il suffit d'exprimer que les forces tangentielles sont nulles sur les surfaces coordonnées dans toute l'étendue du corps. Cette condition introduit trois nouvelles équations, qui établissent des relations nécessaires entre les variations des déplacements normaux aux surfaces isostatiques et les courbures de ces surfaces. Ces relations constituent déjà une partie des lois qu'il s'agissait de démêler; les autres s'obtiennent en combinant ces relations avec les équations générales de l'équilibre d'élasticité, et indiquent de quelle manière varient les pressions normales lorsqu'on passe d'une surface isostatique à une autre. Toutes ces lois sont d'une grande simplicité, et se prêtent facilement aux applications.

---

§ I.

Équations connues du mouvement et de l'équilibre des solides élastiques.

Les équations générales des petits mouvements intérieurs d'un corps solide homogène, dans lequel l'élasticité est la même suivant toute direction, sont, d'après plusieurs géomètres,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}+2\,\frac{d\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right)}{dx}=\frac{\delta}{\varepsilon}\left(\frac{d^2u}{dt^2}-\mathrm{X}\right),\\
&\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy^2}+\frac{d^2v}{dz^2}+2\,\frac{d\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right)}{dy}=\frac{\delta}{\varepsilon}\left(\frac{d^2v}{dt^2}-\mathrm{Y}\right),\\
&\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{d^2w}{dy^2}+\frac{d^2w}{dz^2}+2\,\frac{d\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right)}{dz}=\frac{\delta}{\varepsilon}\left(\frac{d^2w}{dt^2}-\mathrm{Z}\right);
\end{aligned}\right.$$

x, y, z, sont les coordonnées rectilignes orthogonales d'un point quelconque m du corps solide, lors de son équilibre d'homogénéité; t représente le temps ou la quatrième variable indépendante; u, v, w, projections sur les trois axes de la distance très petite qui sépare la molécule m de sa position primitive, sont des fonctions inconnues de x, y, z, t, lesquelles doivent vérifier, dans toute l'étendue du corps, les équations (1), et satisfaire en outre aux conditions statiques ou dynamiques de sa surface; X, Y, Z, composantes de la force accélératrice qui agit sur la molécule m, sont des fonctions données de x, y, z, et en général de t; δ représente la densité constante du corps, et ε son coefficient invariable d'élasticité.

Lorsque l'équilibre est établi dans l'intérieur du solide, sous l'action persistante des efforts extérieurs, les équations précédentes régissent encore cet équilibre : les fonctions u, v, w, et X, Y, Z, sont alors indépendantes du temps, et les termes en $\frac{d^2u}{dt^2}$, $\frac{d^2v}{dt^2}$, $\frac{d^2w}{dt^2}$, disparaissent conséquemment.

On sait en outre que la dilatation variable θ est liée aux fonctions u, v, w, par l'équation

$$(2)\qquad \theta = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz};$$

en sorte que si l'on désigne par $\Delta_2 F$ le paramètre différentiel du second ordre d'une fonction F, ou l'expression

$$\frac{d^2F}{dx^2} + \frac{d^2F}{dy^2} + \frac{d^2F}{dz^2},$$

les équations du mouvement seront plus simplement

$$(3)\qquad \begin{cases} \Delta_2 u + 2\dfrac{d\theta}{dx} = \dfrac{\delta}{\varepsilon}\left(\dfrac{d^2u}{dt^2} - X\right), \\ \Delta_2 v + 2\dfrac{d\theta}{dy} = \dfrac{\delta}{\varepsilon}\left(\dfrac{d^2v}{dt^2} - Y\right), \\ \Delta_2 w + 2\dfrac{d\theta}{dz} = \dfrac{\delta}{\varepsilon}\left(\dfrac{d^2w}{dt^2} - Z\right); \end{cases}$$

et celles de l'équilibre,

$$(4)\qquad \begin{cases} \Delta_2 u + 2\dfrac{d\theta}{dx} + \dfrac{\delta}{\varepsilon} X = 0, \\ \Delta_2 v + 2\dfrac{d\theta}{dy} + \dfrac{\delta}{\varepsilon} Y = 0, \\ \Delta_2 w + 2\dfrac{d\theta}{dz} + \dfrac{\delta}{\varepsilon} Z = 0. \end{cases}$$

Les équations (1), en ayant égard à la valeur (2) de la fonction θ, peuvent aussi s'écrire sous la forme suivante :

$$(5)\qquad \begin{cases} 3\dfrac{d\theta}{dx} + \dfrac{d\left(\dfrac{du}{dy} - \dfrac{dv}{dx}\right)}{dy} - \dfrac{d\left(\dfrac{dw}{dx} - \dfrac{du}{dz}\right)}{dz} = \dfrac{\delta}{\varepsilon}\left(\dfrac{d^2u}{dt^2} - X\right), \\ 3\dfrac{d\theta}{dy} + \dfrac{d\left(\dfrac{dv}{dz} - \dfrac{dw}{dy}\right)}{dz} - \dfrac{d\left(\dfrac{du}{dy} - \dfrac{dv}{dx}\right)}{dx} = \dfrac{\delta}{\varepsilon}\left(\dfrac{d^2v}{dt^2} - Y\right), \\ 3\dfrac{d\theta}{dz} + \dfrac{d\left(\dfrac{dw}{dx} - \dfrac{du}{dz}\right)}{dx} - \dfrac{d\left(\dfrac{dv}{dz} - \dfrac{dw}{dy}\right)}{dy} = \dfrac{\delta}{\varepsilon}\left(\dfrac{d^2w}{dt^2} - Z\right); \end{cases}$$

desquelles on conclut, en les ajoutant, après les avoir respectivement différentiées par rapport à x, y, z,

$$\Delta_2 \theta + \frac{\delta}{3\epsilon}\left(\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} - \frac{d^2\theta}{dt^2}\right) = 0, \tag{6}$$

équation que doit toujours vérifier la fonction θ, ou la dilatation variable.

§ II.

Relations entre les pressions intérieures.

Il est encore une autre forme sous laquelle on emploie les équations du mouvement et de l'équilibre des corps élastiques : si l'on pose

$$\left\{\begin{aligned} &N = \epsilon\left(\theta + 2\frac{du}{dx}\right), \quad N_1 = \epsilon\left(\theta + 2\frac{dv}{dy}\right), \quad N_2 = \epsilon\left(\theta + 2\frac{dw}{dz}\right); \\ &T = \epsilon\left(\frac{dw}{dy} + \frac{dv}{dz}\right), \quad T_1 = \epsilon\left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}\right), \quad T_2 = \epsilon\left(\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy}\right); \end{aligned}\right. \tag{7}$$

les équations (1) peuvent s'écrire ainsi :

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{dN}{dx} + \frac{dT_2}{dy} + \frac{dT_1}{dz} = \delta\left(\frac{d^2u}{dt^2} - X\right), \\ &\frac{dT_2}{dx} + \frac{dN_1}{dy} + \frac{dT}{dz} = \delta\left(\frac{d^2v}{dt^2} - Y\right), \\ &\frac{dT_1}{dx} + \frac{dT}{dy} + \frac{dN_2}{dz} = \delta\left(\frac{d^2w}{dt^2} - Z\right). \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Les groupes de fonctions $[N, T_2, T_1]$, $[T_2, N_1, T]$, $[T_1, T, N_2]$, représentent les projections sur les trois axes des tractions ou pressions, obliques en général, qui sollicitent trois éléments plans se coupant en m, et parallèles aux plans coordonnés; le premier groupe est relatif à l'élément plan perpendiculaire aux x, le second aux y, le troisième aux z. N, N_1, N_2, sont les composantes de ces forces normales aux plans sollicités; T, T_1, T_2, donnent leurs six composantes tangentielles, lesquelles sont égales deux à deux.

Si l'on désigne par N', N'_1, N'_2, T', T'_1, T'_2, les composantes normales et tangentielles des tractions ou pressions exercées au même point m, sur trois autres éléments plans, parallèles à de nouveaux plans coordonnés rectangulaires; $[m_1, m_2, m_3]$, $[n_1, n_2, n_3]$, $[p_1, p_2, p_3]$, représentant les cosinus des angles que les nouveaux axes des x', y', z', font avec ceux des x, y, z, ces nouvelles composantes sont liées aux premières N, N_1, N_2, T, T_1, T_2, par les six formules suivantes :

$$(9)\quad\left\{\begin{aligned}
\mathrm{N}' &= m_1^2\mathrm{N} + m_2^2\mathrm{N}_1 + m_3^2\mathrm{N}_2 + 2m_2m_3\mathrm{T} + 2m_3m_1\mathrm{T}_1 + 2m_1m_2\mathrm{T}_2,\\
\mathrm{N}'_1 &= n_1^2\mathrm{N} + n_2^2\mathrm{N}_1 + n_3^2\mathrm{N}_2 + 2n_2n_3\mathrm{T} + 2n_3n_1\mathrm{T}_1 + 2n_1n_2\mathrm{T}_2,\\
\mathrm{N}'_2 &= p_1^2\mathrm{N} + p_2^2\mathrm{N}_1 + p_3^2\mathrm{N}_2 + 2p_2p_3\mathrm{T} + 2p_3p_1\mathrm{T}_1 + 2p_1p_2\mathrm{T}_2;\\
\mathrm{T}' &= n_1p_1\mathrm{N} + n_2p_2\mathrm{N}_1 + n_3p_3\mathrm{N}_2 + (n_2p_3 + n_3p_2)\mathrm{T} + (n_3p_1 + n_1p_3)\mathrm{T}_1 + (n_1p_2 + n_2p_1)\mathrm{T}_2,\\
\mathrm{T}'_1 &= p_1m_1\mathrm{N} + p_2m_2\mathrm{N}_1 + p_3m_3\mathrm{N}_2 + (p_2m_3 + p_3m_2)\mathrm{T} + (p_3m_1 + p_1m_3)\mathrm{T}_1 + (p_1m_2 + p_2m_1)\mathrm{T}_2,\\
\mathrm{T}'_2 &= m_1n_1\mathrm{N} + m_2n_2\mathrm{N}_1 + m_3n_3\mathrm{N}_2 + (m_2n_3 + m_3n_2)\mathrm{T} + (m_3n_1 + m_1n_3)\mathrm{T}_1 + (m_1n_2 + m_2n_1)\mathrm{T}_2.
\end{aligned}\right.$$

Les neuf cosinus (m_1, m_2, m_3), (n_1, n_2, n_3), (p_1, p_2, p_3), sont d'ailleurs liés entre eux par les six formules connues.

Toutes les équations contenues dans les § I et II, représentent, à l'aide des coordonnées rectilignes, toutes les lois du mouvement vibratoire et de l'équilibre intérieur d'un corps solide, homogène et d'élasticité constante. Il s'agit, dans ce Mémoire, d'exprimer les mêmes lois à l'aide d'un système de coordonnées curvilignes. Cette transformation exige l'emploi des formules différentielles que doivent vérifier les paramètres des trois systèmes conjugués de surfaces orthogonales. Ces formules sont établies dans le Mémoire sur les coordonnées curvilignes, qui fait partie du tome V de ce Journal, et auquel se rapportent tous les renvois accompagnés de la lettre M.

§ III.

Déplacements normaux aux surfaces conjuguées.

Il s'agit maintenant de transformer en coordonnées curvilignes ρ, ρ_1, ρ_2, les équations qui représentent les petits mouvements et l'équilibre intérieur d'un corps solide.

Les normales aux surfaces ρ, ρ_1, ρ_2, qui se coupent en m, font avec les axes rectilignes des x, y, z, des angles dont les cosinus sont

$$\left(\frac{1}{h}\frac{d\rho}{dx}, \frac{1}{h}\frac{d\rho}{dy}, \frac{1}{h}\frac{d\rho}{dz}\right), \quad \left(\frac{1}{h_1}\frac{d\rho_1}{dx}, \frac{1}{h_1}\frac{d\rho_1}{dy}, \frac{1}{h_1}\frac{d\rho_1}{dz}\right), \quad \left(\frac{1}{h_2}\frac{d\rho_2}{dx}, \frac{1}{h_2}\frac{d\rho_2}{dy}, \frac{1}{h_2}\frac{d\rho_2}{dz}\right);$$

si donc l'on désigne par R, R_1, R_2, les projections du déplacement de la molécule m sur ces trois normales, on aura

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} u &= \frac{R}{h}\frac{d\rho}{dx} + \frac{R_1}{h_1}\frac{d\rho_1}{dx} + \frac{R_2}{h_2}\frac{d\rho_2}{dx}, \\ v &= \frac{R}{h}\frac{d\rho}{dy} + \frac{R_1}{h_1}\frac{d\rho_1}{dy} + \frac{R_2}{h_2}\frac{d\rho_2}{dy}, \\ w &= \frac{R}{h}\frac{d\rho}{dz} + \frac{R_1}{h_1}\frac{d\rho_1}{dz} + \frac{R_2}{h_2}\frac{d\rho_2}{dz}. \end{aligned}\right.$$

Ces valeurs de u, v, w, étant différentiées puis substituées dans l'équation (2) donnent, en se servant des formules (8) M,

$$(11)\quad \theta = h^2\frac{d\frac{R}{h}}{d\rho} + h_1^2\frac{d\frac{R_1}{h_1}}{d\rho_1} + h_2^2\frac{d\frac{R_2}{h_2}}{d\rho_2} + \frac{R}{h}\Delta_2\rho + \frac{R_1}{h_1}\Delta_2\rho_1 + \frac{R_2}{h_2}\Delta_2\rho_2,$$

et en éliminant $\Delta_2\rho$, $\Delta_2\rho_1$, $\Delta_2\rho_2$, à l'aide des formules (24) M,

$$(11\,bis)\quad \left\{\begin{aligned} \theta &= hh_1h_2\left(\frac{d\frac{R}{h_1h_2}}{d\rho} + \frac{d\frac{R_1}{h_2h}}{d\rho_1} + \frac{d\frac{R_2}{hh_1}}{d\rho_2}\right); \\ \theta &= \frac{dRh}{d\rho} + \frac{dR_1h_1}{d\rho_1} + \frac{dR_2h_2}{d\rho_2} - \frac{1}{hh_1h_2}\left(\frac{dhh_1h_2}{d\rho}Rh + \frac{dhh_1h_2}{d\rho_1}R_1h_1 + \frac{dhh_1h_2}{d\rho_2}R_2h_2\right); \\ \theta &= h\frac{dR}{d\rho} + h_1\frac{dR_1}{d\rho_1} + h_2\frac{dR_2}{d\rho_2} \\ &\quad - \left(\frac{h}{h_1}\frac{dh_1}{d\rho} + \frac{h}{h_2}\frac{dh_2}{d\rho}\right)R - \left(\frac{h_1}{h_2}\frac{dh_2}{d\rho_1} + \frac{h_1}{h}\frac{dh}{d\rho_1}\right)R_1 - \left(\frac{h_2}{h}\frac{dh}{d\rho_2} + \frac{h_2}{h_1}\frac{dh_1}{d\rho_2}\right)R_2. \end{aligned}\right.$$

Dans ces différentes formes de la valeur de θ, ou de la dilatation, on doit regarder R, R_1, R_2, comme représentant des fonctions inconnues de ρ, ρ_1, ρ_2 et t; h, h_1, h_2, comme des fonctions données de ρ, ρ_1, ρ_2.

§ IV.

Pressions qui sollicitent les surfaces orthogonales.

Soient représentées par A, A_1, A_2, τ, τ_1, τ_2, les composantes normales et tangentielles des tractions exercées sur trois éléments plans, tangents en m aux trois surfaces conjuguées; pour déduire ces composantes des équations (9), il faut y substituer à (m_1, m_2, m_3), (n_1, n_2, n_3),

(p_1, p_2, p_3), les cosinus des angles que les normales aux surfaces ρ, ρ_1, ρ_2, font avec les axes des x, y, z, et à N, N_1, N_2, T, T_1, T_2, leurs valeurs (7) en u, v, w; ce qui donne pour A, par exemple,

$$\frac{\mathrm{A}}{\varepsilon} = \theta + \frac{2}{h^2}\left[\frac{d\rho}{dx}\left(\frac{du}{dx}\frac{d\rho}{dx} + \frac{du}{dy}\frac{d\rho}{dy} + \frac{du}{dz}\frac{d\rho}{dz}\right) + \frac{d\rho}{dy}\left(\frac{dv}{dx}\frac{d\rho}{dx} + \frac{dv}{dy}\frac{d\rho}{dy} + \frac{dv}{dz}\frac{d\rho}{dz}\right) + \frac{d\rho}{dz}\left(\frac{dw}{dx}\frac{d\rho}{dx} + \frac{dw}{dy}\frac{d\rho}{dy} + \frac{dw}{dz}\frac{d\rho}{dz}\right)\right],$$

ou plus simplement, d'après les formules (8) M,

$$\frac{\mathrm{A}}{\varepsilon} = \theta + 2\left(\frac{du}{d\rho}\frac{d\rho}{dx} + \frac{dv}{d\rho}\frac{d\rho}{dy} + \frac{dw}{d\rho}\frac{d\rho}{dz}\right).$$

Si maintenant on différentie par rapport à ρ les équations (10), et qu'on ajoute les trois résultats respectivement multipliés par $\frac{d\rho}{dx}$, $\frac{d\rho}{dy}$, $\frac{d\rho}{dz}$, les formules (2) M et (13) M donneront définitivement

$$\frac{du}{d\rho}\frac{d\rho}{dx} + \frac{dv}{d\rho}\frac{d\rho}{dy} + \frac{dw}{d\rho}\frac{d\rho}{dz} = h^2\frac{d\frac{\mathrm{R}}{h}}{d\rho} + h\frac{dh}{d\rho}\frac{\mathrm{R}}{h} - \frac{h_1^2}{h}\frac{dh}{d\rho_1}\frac{\mathrm{R}_1}{h_1} - \frac{h_2^2}{h}\frac{dh}{d\rho_2}\frac{\mathrm{R}_2}{h_2},$$

ce qui donne, par des transformations faciles, pour $\frac{\mathrm{A}}{\varepsilon}$ et par suite pour $\frac{\mathrm{A}_1}{\varepsilon}$, $\frac{\mathrm{A}_2}{\varepsilon}$, les valeurs

$$(12)\begin{cases} \dfrac{\mathrm{A}}{\varepsilon} = \theta + 2\left(h\dfrac{d\mathrm{R}}{d\rho} - \dfrac{h_1}{h}\dfrac{dh}{d\rho_1}\mathrm{R}_1 - \dfrac{h_2}{h}\dfrac{dh}{d\rho_2}\mathrm{R}_2\right) = \theta + 2\left[\dfrac{d\mathrm{R}h}{d\rho} - \dfrac{1}{h}\left(\dfrac{dh}{d\rho}\mathrm{R}h + \dfrac{dh}{d\rho_1}\mathrm{R}_1h_1 + \dfrac{dh}{d\rho_2}\mathrm{R}_2h_2\right)\right], \\ \dfrac{\mathrm{A}_1}{\varepsilon} = \theta + 2\left(h_1\dfrac{d\mathrm{R}_1}{d\rho_1} - \dfrac{h_2}{h_1}\dfrac{dh_1}{d\rho_2}\mathrm{R}_2 - \dfrac{h}{h_1}\dfrac{dh_1}{d\rho}\mathrm{R}\right) = \theta + 2\left[\dfrac{d\mathrm{R}_1h_1}{d\rho_1} - \dfrac{1}{h_1}\left(\dfrac{dh_1}{d\rho}\mathrm{R}h + \dfrac{dh_1}{d\rho_1}\mathrm{R}_1h_1 + \dfrac{dh_1}{d\rho_2}\mathrm{R}_2h_2\right)\right], \\ \dfrac{\mathrm{A}_2}{\varepsilon} = \theta + 2\left(h_2\dfrac{d\mathrm{R}_2}{d\rho_2} - \dfrac{h}{h_2}\dfrac{dh_2}{d\rho}\mathrm{R} - \dfrac{h_1}{h_2}\dfrac{dh_2}{d\rho_1}\mathrm{R}_1\right) = \theta + 2\left[\dfrac{d\mathrm{R}_2h_2}{d\rho_2} - \dfrac{1}{h_2}\left(\dfrac{dh_2}{d\rho}\mathrm{R}h + \dfrac{dh_2}{d\rho_1}\mathrm{R}_1h_1 + \dfrac{dh_2}{d\rho_2}\mathrm{R}_2h_2\right)\right]. \end{cases}$$

Si on les ajoute, on trouve, en ayant égard à la troisième des formes (11) *bis* de θ : $\mathrm{A} + \mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2 = 5\varepsilon\theta$, comme cela devait être d'après un théorème connu.

Les mêmes substitutions étant faites dans la dernière des formules (9), on trouve, en simplifiant les résultats d'après les formules (8) M,

$$\frac{\tau_2}{\varepsilon} = \frac{h}{h_1}\left(\frac{du}{d\rho}\frac{d\rho_1}{dx} + \frac{dv}{d\rho}\frac{d\rho_1}{dy} + \frac{dw}{d\rho}\frac{d\rho_1}{dz}\right) + \frac{h_1}{h}\left(\frac{du}{d\rho_1}\frac{d\rho}{dx} + \frac{dv}{d\rho_1}\frac{d\rho}{dy} + \frac{dw}{d\rho_1}\frac{d\rho}{dz}\right);$$

or les équations (10) étant différentiées successivement par rapport à ρ et ρ_1, les formules (2) M, et (12) M, donnent, toute réduction faite,

$$\frac{du}{d\rho_1}\frac{d\rho_1}{dx}+\frac{dv}{d\rho}\frac{d\rho_1}{dy}+\frac{dw}{d\rho}\frac{d\rho_1}{dz}=h_1^2\frac{d\frac{\mathrm{R}_1}{h_1}}{d\rho}+\frac{h_1^2}{h}\frac{dh}{d\rho_1}\frac{\mathrm{R}}{h}+h_1\frac{dh_1}{d\rho}\frac{\mathrm{R}_1}{h_1},$$

$$\frac{du}{d\rho_1}\frac{d\rho}{dx}+\frac{dv}{d\rho_1}\frac{d\rho}{dy}+\frac{dw}{d\rho_1}\frac{d\rho}{dz}=h^2\frac{d\frac{\mathrm{R}}{h}}{d\rho_1}+h\frac{dh}{d\rho_1}\frac{\mathrm{R}}{h}+\frac{h^2}{h_1}\frac{dh_1}{d\rho}\frac{\mathrm{R}_1}{h_1}.$$

De là résulte, pour $\frac{\tau_2}{\varepsilon}$, et par suite pour $\frac{\tau_1}{\varepsilon}$, $\frac{\tau}{\varepsilon}$,

$$(13)\left\{\begin{aligned}
\frac{\tau}{\varepsilon}&=h_1\frac{d\mathrm{R}_2}{d\rho_1}+h_2\frac{d\mathrm{R}_1}{d\rho_2}+\frac{h_1}{h_2}\frac{dh_2}{d\rho_1}\mathrm{R}_2+\frac{h_2}{h_1}\frac{dh_1}{d\rho_2}\mathrm{R}_1=\frac{1}{h_1h_2}\left(h_1^2\frac{d\mathrm{R}_2h_2}{d\rho_1}+h_2^2\frac{d\mathrm{R}_1h_1}{d\rho_2}\right),\\
\frac{\tau_1}{\varepsilon}&=h_2\frac{d\mathrm{R}}{d\rho_2}+h\frac{d\mathrm{R}_2}{d\rho}+\frac{h_2}{h}\frac{dh}{d\rho_2}\mathrm{R}+\frac{h}{h_2}\frac{dh_2}{d\rho}\mathrm{R}_2=\frac{1}{h_2h}\left(h_2^2\frac{d\mathrm{R}h}{d\rho_2}+h^2\frac{d\mathrm{R}_2h_2}{d\rho}\right),\\
\frac{\tau_2}{\varepsilon}&=h\frac{d\mathrm{R}_1}{d\rho}+h_1\frac{d\mathrm{R}}{d\rho_1}+\frac{h}{h_1}\frac{dh_1}{d\rho}\mathrm{R}_1+\frac{h_1}{h}\frac{dh}{d\rho_1}\mathrm{R}=\frac{1}{hh_1}\left(h^2\frac{d\mathrm{R}_1h_1}{d\rho}+h_1^2\frac{d\mathrm{R}h}{d\rho_1}\right).
\end{aligned}\right.$$

Si les surfaces conjuguées ρ, ρ_1, ρ_2, étaient encore des plans orthogonaux, leurs paramètres différentiels du second ordre h, h_1, h_2, seraient invariables, et pourraient toujours être ramenés à avoir l'unité pour valeur commune; les équations (10), (12), (13), donneraient alors, pour la dilatation et pour les composantes des tractions exercées sur des éléments plans parallèles aux nouveaux plans coordonnés, des expressions en tout semblables à (2) et (7).

§ V.

Relations entre les pressions et les courbures des surfaces sollicitées.

Les forces normales et tangentielles, qui sollicitent les surfaces orthogonales, peuvent facilement s'exprimer par les variations des déplacements normaux, et par les courbures de ces surfaces; de telle sorte que les paramètres différentiels du premier ordre disparaissant, ces expressions se prêtent alors facilement à une interprétation géométrique. En effet, la troisième des formes (11) *bis*, et les valeurs (12) et (13), rapprochées des formules (b)M, donnent immédiatement

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned}
\theta &= \frac{d\mathrm{R}}{ds} + \frac{d\mathrm{R}_1}{ds_1} + \frac{d\mathrm{R}_2}{ds_2} - \left(\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{c_2}\right)\mathrm{R} - \left(\frac{1}{\gamma_2} + \frac{1}{c}\right)\mathrm{R}_1 - \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{c_1}\right)\mathrm{R}_2; \\
\frac{\mathrm{A}}{\varepsilon} &= \theta + 2\left(\frac{d\mathrm{R}}{ds} - \frac{\mathrm{R}_1}{c} - \frac{\mathrm{R}_2}{\gamma}\right), \\
\frac{\mathrm{A}_1}{\varepsilon} &= \theta + 2\left(\frac{d\mathrm{R}_1}{ds_1} - \frac{\mathrm{R}_2}{c_1} - \frac{\mathrm{R}}{\gamma_1}\right), \\
\frac{\mathrm{A}_2}{\varepsilon} &= \theta + 2\left(\frac{d\mathrm{R}_2}{ds_2} - \frac{\mathrm{R}}{c_2} - \frac{\mathrm{R}_1}{\gamma_2}\right); \\
\frac{\tau}{\varepsilon} &= \frac{d\mathrm{R}_2}{ds_1} + \frac{d\mathrm{R}_1}{ds_2} + \frac{\mathrm{R}_2}{\gamma_2} + \frac{\mathrm{R}_1}{c_1}, \\
\frac{\tau_1}{\varepsilon} &= \frac{d\mathrm{R}}{ds_2} + \frac{d\mathrm{R}_2}{ds} + \frac{\mathrm{R}}{\gamma} + \frac{\mathrm{R}_2}{c_2}, \\
\frac{\tau_2}{\varepsilon} &= \frac{d\mathrm{R}_1}{ds} + \frac{d\mathrm{R}}{ds_1} + \frac{\mathrm{R}_1}{\gamma_1} + \frac{\mathrm{R}}{c}.
\end{aligned} \right.$$

Ces nouvelles valeurs font voir clairement l'influence que les courbures des surfaces conjuguées peuvent avoir sur les tractions qui les sollicitent. Il sera facile de les énoncer en lois, dans un langage géométrique, en ayant recours aux définitions et aux principes établis au § VI (M, seconde partie).

§ VI.

Équations transformées du mouvement des solides élastiques, rapportées aux pressions.

Les trois équations des petits mouvements intérieurs du corps solide, prises sous la forme (8), et qui sont en N, N_1, N_2, T, T_1, T_2, doivent être exprimées en A, A_1, A_2, τ, τ_1, τ_2, pour être rapportées aux coordonnées curvilignes. Pour opérer cette transformation, il faut faire usage des équations (9), qui donnent facilement

$$
(15)\left\{
\begin{aligned}
\mathrm{N} &= \frac{1}{h^2}\left(\frac{d\rho}{dx}\right)^2 \mathrm{A} + \frac{1}{h_1^2}\left(\frac{d\rho_1}{dx}\right)^2 \mathrm{A}_1 + \frac{1}{h_2^2}\left(\frac{d\rho_2}{dx}\right)^2 \mathrm{A}_2 + \frac{2}{h_1h_2}\frac{d\rho_1}{dx}\frac{d\rho_2}{dx}\tau + \frac{2}{h_2h}\frac{d\rho_2}{dx}\frac{d\rho}{dx}\tau_1 + \frac{2}{hh_1}\frac{d\rho}{dx}\frac{d\rho_1}{dx}\tau_2,\\
\mathrm{N}_1 &= \frac{1}{h^2}\left(\frac{d\rho}{dy}\right)^2 \mathrm{A} + \frac{1}{h_1^2}\left(\frac{d\rho_1}{dy}\right)^2 \mathrm{A}_1 + \frac{1}{h_2^2}\left(\frac{d\rho_2}{dy}\right)^2 \mathrm{A}_2 + \frac{2}{h_1h_2}\frac{d\rho_1}{dy}\frac{d\rho_2}{dy}\tau + \frac{2}{h_2h}\frac{d\rho_2}{dy}\frac{d\rho}{dy}\tau_1 + \frac{2}{hh_1}\frac{d\rho}{dy}\frac{d\rho_1}{dy}\tau_2;\\
\mathrm{N}_2 &= \frac{1}{h^2}\left(\frac{d\rho}{dz}\right)^2 \mathrm{A} + \frac{1}{h_1^2}\left(\frac{d\rho_1}{dz}\right)^2 \mathrm{A}_1 + \frac{1}{h_2^2}\left(\frac{d\rho_2}{dz}\right)^2 \mathrm{A}_2 + \frac{2}{h_1h_2}\frac{d\rho_1}{dz}\frac{d\rho_2}{dz}\tau + \frac{2}{h_2h}\frac{d\rho_2}{dz}\frac{d\rho}{dz}\tau_1 + \frac{2}{hh_1}\frac{d\rho}{dz}\frac{d\rho_1}{dz}\tau_2;\\
\mathrm{T} &= \frac{1}{h^2}\frac{d\rho}{dy}\frac{d\rho}{dz}\mathrm{A} + \frac{1}{h_1^2}\frac{d\rho_1}{dy}\frac{d\rho_1}{dz}\mathrm{A}_1 + \frac{1}{h_2^2}\frac{d\rho_2}{dy}\frac{d\rho_2}{dz}\mathrm{A}_2\\
&\quad + \left(\frac{d\rho_1}{dy}\frac{d\rho_2}{dz} + \frac{d\rho_1}{dz}\frac{d\rho_2}{dy}\right)\frac{\tau}{h_1h_2} + \left(\frac{d\rho_2}{dy}\frac{d\rho}{dz} + \frac{d\rho_2}{dz}\frac{d\rho}{dy}\right)\frac{\tau_1}{h_2h} + \left(\frac{d\rho}{dy}\frac{d\rho_1}{dz} + \frac{d\rho}{dz}\frac{d\rho_1}{dy}\right)\frac{\tau_2}{hh_1},\\
\mathrm{T}_1 &= \frac{1}{h^2}\frac{d\rho}{dz}\frac{d\rho}{dx}\mathrm{A} + \frac{1}{h_1^2}\frac{d\rho_1}{dz}\frac{d\rho_1}{dx}\mathrm{A}_1 + \frac{1}{h_2^2}\frac{d\rho_2}{dz}\frac{d\rho_2}{dx}\mathrm{A}_2\\
&\quad + \left(\frac{d\rho_1}{dz}\frac{d\rho_2}{dx} + \frac{d\rho_1}{dx}\frac{d\rho_2}{dz}\right)\frac{\tau}{h_1h_2} + \left(\frac{d\rho_2}{dz}\frac{d\rho}{dx} + \frac{d\rho_2}{dx}\frac{d\rho}{dz}\right)\frac{\tau_1}{h_2h} + \left(\frac{d\rho}{dz}\frac{d\rho_1}{dx} + \frac{d\rho}{dx}\frac{d\rho_1}{dz}\right)\frac{\tau_2}{hh_1},\\
\mathrm{T}_2 &= \frac{1}{h^2}\frac{d\rho}{dx}\frac{d\rho}{dy}\mathrm{A} + \frac{1}{h_1^2}\frac{d\rho_1}{dx}\frac{d\rho_1}{dy}\mathrm{A}_1 + \frac{1}{h_2^2}\frac{d\rho_2}{dx}\frac{d\rho_2}{dy}\mathrm{A}_2\\
&\quad + \left(\frac{d\rho_1}{dx}\frac{d\rho_2}{dy} + \frac{d\rho_1}{dy}\frac{d\rho_2}{dx}\right)\frac{\tau}{h_1h_2} + \left(\frac{d\rho_2}{dx}\frac{d\rho}{dy} + \frac{d\rho_2}{dy}\frac{d\rho}{dx}\right)\frac{\tau_1}{h_2h} + \left(\frac{d\rho}{dx}\frac{d\rho_1}{dy} + \frac{d\rho}{dy}\frac{d\rho_1}{dx}\right)\frac{\tau_2}{hh_1};
\end{aligned}
\right.
$$

et substituer ces valeurs dans les équations (8). Il suffit de faire ces substitutions dans la première de ces équations. Dans le résultat, les termes en A donnent, d'après les formules (8) M,

$$\frac{d\dfrac{\mathrm{A}}{h^2}\dfrac{d\rho}{dx}\cdot\dfrac{d\rho}{dx}}{dx} + \frac{d\dfrac{\mathrm{A}}{h^2}\dfrac{d\rho}{dx}\cdot\dfrac{d\rho}{dy}}{dy} + \frac{d\dfrac{\mathrm{A}}{h^2}\dfrac{d\rho}{dx}\cdot\dfrac{d\rho}{dz}}{dz} = h^2\,\frac{d\dfrac{\mathrm{A}}{h^2}\dfrac{d\rho}{dx}}{d\rho} + \frac{\mathrm{A}}{h_2}\frac{d\rho}{dx}\Delta_2\rho\,;$$

ou, en substituant, à $\Delta_2\rho$ et $\dfrac{d\dfrac{d\rho}{dx}}{d\rho}$, leurs valeurs (24) M et (14 *bis*) M, puis mettant $\dfrac{d\rho}{dx}$, $\dfrac{d\rho_1}{dx}$, $\dfrac{d\rho_2}{dx}$ en facteurs communs, et réduisant :

$$\left[h_1h_2\,\frac{d\dfrac{\mathrm{A}}{h_1h_2}}{d\rho}\frac{d\rho}{dx} + \frac{\mathrm{A}}{h}\frac{dh}{d\rho_1}\frac{d\rho_1}{dx} + \frac{\mathrm{A}}{h}\frac{dh}{d\rho_2}\frac{d\rho_2}{dx}\right].$$

Les termes en A_1 et A_2 deviennent pareillement

$$\left[h_2h\,\frac{d\dfrac{\mathrm{A}_1}{h_2h}}{d\rho_1}\frac{d\rho_1}{dx} + \frac{\mathrm{A}_1}{h_1}\frac{dh_1}{d\rho_2}\frac{d\rho_2}{dx} + \frac{\mathrm{A}_1}{h_1}\frac{dh_1}{d\rho}\frac{d\rho}{dx}\right],$$

$$\left[hh_1\,\frac{d\dfrac{\mathrm{A}_2}{hh_1}}{d\rho_2}\frac{d\rho_2}{dx} + \frac{\mathrm{A}_2}{h_2}\frac{dh_2}{d\rho}\frac{d\rho}{dx} + \frac{\mathrm{A}_2}{h_2}\frac{dh_2}{d\rho_1}\frac{d\rho_1}{dx}\right].$$

Les termes en τ donnent, d'après les formules (8) M,

$$\left(\frac{\tau}{h_1 h_2}\Delta_2\rho_2 + h_2^2\frac{d\frac{\tau}{h_1 h_2}}{d\rho_2}\right)\frac{d\rho_1}{dx} + \left(\frac{\tau}{h_1 h_2}\Delta_2\rho_1 + h_1^2\frac{d\frac{\tau}{h_1 h_2}}{d\rho_1}\right)\frac{d\rho_2}{dx} + \frac{\tau}{h_1 h_2}\left(h_2^2\frac{d\frac{d\rho_1}{dx}}{d\rho_2} + h_1^2\frac{d\frac{d\rho_2}{dx}}{d\rho_1}\right);$$

ou, en observant que la dernière parenthèse est nulle, d'après les formules (9) M, substituant à $\Delta_2\rho_1$, $\Delta_2\rho_2$, leurs valeurs (24) M, et réduisant :

$$hh_1h_2\left(\frac{d\frac{\tau}{hh_1^2}}{d\rho_2}\frac{d\rho_1}{dx} + \frac{d\frac{\tau}{hh_2^2}}{d\rho_1}\frac{d\rho_2}{dx}\right).$$

Les termes en τ_1 et τ_2 deviennent pareillement

$$hh_1h_2\left(\frac{d\frac{\tau_1}{h_1h_2^2}}{d\rho}\frac{d\rho_2}{dx} + \frac{d\frac{\tau_1}{h_1h^2}}{d\rho_2}\frac{d\rho}{dx}\right),$$
$$hh_1h_2\left(\frac{d\frac{\tau_2}{h_2h^2}}{d\rho_1}\frac{d\rho}{dx} + \frac{d\frac{\tau_2}{h_2h_1^2}}{d\rho}\frac{d\rho_1}{dx}\right).$$

Si l'on réunit maintenant tous ces termes, que l'on pose

$$X = \frac{F}{h}\frac{d\rho}{dx} + \frac{F_1}{h_1}\frac{d\rho_1}{dx} + \frac{F_2}{h_2}\frac{d\rho_2}{dx},$$

F, F_1, F_2, étant les composantes de la force accélératrice sur les normales aux surfaces ρ, ρ_1, ρ_2, et qu'enfin l'on prenne pour u sa valeur (10), on trouve, pour la première des équations (8), en mettant $\frac{d\rho}{dx}$, $\frac{d\rho_1}{dx}$, $\frac{d\rho_2}{dx}$ en facteurs communs :

$$\begin{aligned}
&\left[h_1h_2\frac{d\frac{A}{h_1h_2}}{d\rho} + hh_1h_2\left(\frac{d\frac{\tau_2}{h_2h^2}}{d\rho_1} + \frac{d\frac{\tau_1}{h_1h^2}}{d\rho_2}\right) + \frac{A_1}{h_1}\frac{dh_1}{d\rho} + \frac{A_2}{h_2}\frac{dh_2}{d\rho} + \frac{\delta}{h}\left(F - \frac{d^2R}{dt^2}\right)\right]\frac{d\rho}{dx}\\
+&\left[h_2h\frac{d\frac{A_1}{h_2h}}{d\rho_1} + hh_1h_2\left(\frac{d\frac{\tau}{hh_1^2}}{d\rho_1} + \frac{d\frac{\tau_2}{h_2h_1^2}}{d\rho}\right) + \frac{A_2}{h_2}\frac{dh_2}{d\rho_1} + \frac{A}{h}\frac{dh}{d\rho_1} + \frac{\delta}{h_1}\left(F_1 - \frac{d^2R_1}{dt^2}\right)\right]\frac{d\rho_1}{dx}\\
+&\left[hh_1\frac{d\frac{A_2}{hh_1}}{d\rho_2} + hh_1h_2\left(\frac{d\frac{\tau_1}{h_1h_2^2}}{d\rho} + \frac{d\frac{\tau}{hh_2^2}}{d\rho_1}\right) + \frac{A}{h}\frac{dh}{d\rho_2} + \frac{A_1}{h_1}\frac{dh_1}{d\rho_2} + \frac{\delta}{h_2}\left(F_2 - \frac{d^2R_2}{dt^2}\right)\right]\frac{d\rho_2}{dx} = 0.
\end{aligned}$$

Les mêmes substitutions, faites dans les deux autres équations (8), donneraient évidemment le même résultat, avec cette différence qu'au lieu des facteurs $\frac{d\rho}{dx}$, $\frac{d\rho_1}{dx}$, $\frac{d\rho_2}{dx}$, on aurait $\frac{d\rho}{dy}$, $\frac{d\rho_1}{dy}$, $\frac{d\rho_2}{dy}$ et ensuite $\frac{d\rho}{dz}$, $\frac{d\rho_1}{dz}$, $\frac{d\rho_2}{dz}$; d'où il sera facile de conclure que les parenthèses qui multiplient ces facteurs doivent être nulles.

On a donc, pour représenter les petits mouvements intérieurs d'un corps solide, à l'aide d'un système de coordonnées curvilignes, les trois équations

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned}
&h_1h_2\frac{d\frac{A}{h_1h_2}}{d\rho}+hh_1h_2\left(\frac{d\frac{\tau_2}{h_2h^2}}{d\rho_1}+\frac{d\frac{\tau_1}{h_1h^2}}{d\rho_2}\right)+\frac{A_1}{h_1}\frac{dh_1}{d\rho}+\frac{A_2}{h_2}\frac{dh_2}{d\rho}+\frac{\delta}{h}F=\frac{\delta}{h}\frac{d^2R}{dt^2},\\
&h_2h\,\frac{d\frac{A_1}{h_2h}}{d\rho_1}+hh_1h_2\left(\frac{d\frac{\tau}{hh_1^2}}{d\rho_2}+\frac{d\frac{\tau_2}{h_2h_1^2}}{d\rho}\right)+\frac{A_2}{h_2}\frac{dh_2}{d\rho_1}+\frac{A}{h}\frac{dh}{d\rho_1}+\frac{\delta}{h_1}F_1=\frac{\delta}{h_1}\frac{d^2R_1}{dt^2},\\
&hh_1\,\frac{d\frac{A_2}{hh_1}}{d\rho_2}+hh_1h_2\left(\frac{d\frac{\tau_1}{h_1h_2^2}}{d\rho}+\frac{d\frac{\tau}{hh_2^2}}{d\rho_1}\right)+\frac{A}{h}\frac{dh}{d\rho_2}+\frac{A_1}{h_1}\frac{dh_1}{d\rho_2}+\frac{\delta}{h_2}F_2=\frac{\delta}{h_2}\frac{d^2R_2}{dt^2},
\end{aligned}\right.$$

ou, en développant et multipliant respectivement ces trois équations par h, h_1, h_2,

$$(16\,bis.)\quad \left\{\begin{aligned}
&h\,\frac{dA}{d\rho}+h_1\frac{d\tau_2}{d\rho_1}+h_2\frac{d\tau_1}{d\rho_2}+\delta.F=\frac{h}{h_1}\,\frac{dh_1}{d\rho}(A-A_1)+\frac{h}{h_2}\,\frac{dh_2}{d\rho}(A-A_2)\\
&\qquad+\left(2\frac{h_1}{h}\frac{dh}{d\rho_1}+\frac{h_1}{h_2}\frac{dh_2}{d\rho_1}\right)\tau_2+\left(2\frac{h_2}{h}\frac{dh}{d\rho_2}+\frac{h_2}{h_1}\frac{dh_1}{d\rho_2}\right)\tau_1+\delta\,\frac{d^2R}{dt^2};\\
&h\,\frac{d\tau_2}{d\rho}+h_1\frac{dA_1}{d\rho_1}+h_2\,\frac{d\tau}{d\rho_2}+\delta.F_1=\frac{h_1}{h_2}\,\frac{dh_2}{d\rho_1}(A_1-A_2)+\frac{h_1}{h}\frac{dh}{d\rho_1}(A_1-A)\\
&\qquad+\left(2\frac{h_2}{h_1}\frac{dh_1}{d\rho_2}+\frac{h_2}{h}\frac{dh}{d\rho_2}\right)\tau+\left(2\frac{h}{h_1}\,\frac{dh_1}{d\rho}+\frac{h}{h_2}\,\frac{dh_2}{d\rho}\right)\tau_2+\delta\frac{d^2R_1}{dt^2},\\
&h\,\frac{d\tau_1}{d\rho}+h_1\,\frac{d\tau}{d\rho_1}+h_2\frac{dA_2}{d\rho_2}+\delta.F_2=\frac{h_2}{h}\frac{dh}{d\rho_2}(A_2-A)+\frac{h_2}{h_1}\frac{dh_1}{d\rho_2}(A_2-A_1)\\
&\qquad+\left(2\frac{h}{h_2}\,\frac{dh_2}{d\rho}+\frac{h}{h_1}\,\frac{dh_1}{d\rho}\right)\tau_1+\left(2\frac{h_1}{h_2}\frac{dh_2}{d\rho_1}+\frac{h_1}{h}\,\frac{dh}{d\rho_1}\right)\tau+\delta\,\frac{d^2R_2}{dt^2}.
\end{aligned}\right.$$

Si l'on élimine les paramètres, à l'aide des formules (b) M, ces équations prennent la forme suivante :

$$
(17)\left\{\begin{aligned}
&\frac{dA}{ds}+\frac{d\tau_2}{ds_1}+\frac{d\tau_1}{ds_2}+\delta.F=\frac{1}{\gamma_1}(A-A_1)+\frac{1}{c_2}(A-A_2)+\left(\frac{2}{c}+\frac{1}{\gamma_2}\right)\tau_2+\left(\frac{2}{\gamma}+\frac{1}{c_1}\right)\tau_1+\delta.\frac{d^2R}{dt^2},\\
&\frac{d\tau_2}{ds}+\frac{dA_1}{ds_1}+\frac{d\tau_1}{ds_2}+\delta.F_1=\frac{1}{\gamma_2}(A_1-A_2)+\frac{1}{c}(A_1-A)+\left(\frac{2}{c_1}+\frac{1}{\gamma}\right)\tau+\left(\frac{2}{\gamma_1}+\frac{1}{c_2}\right)\tau_2+\delta.\frac{d^2R_1}{dt^2},\\
&\frac{d\tau_1}{ds}+\frac{d\tau}{ds_1}+\frac{dA_2}{ds_2}+\delta.F_2=\frac{1}{\gamma}(A_2-A)+\frac{1}{c_1}(A_2-A_1)+\left(\frac{2}{c_2}+\frac{1}{\gamma_1}\right)\tau_1+\left(\frac{2}{\gamma_2}+\frac{1}{c}\right)\tau+\delta.\frac{d^2R_2}{dt^2}.
\end{aligned}\right.
$$

§ VII.

Équations du mouvement des solides élastiques en coordonnées curvilignes.

Pour obtenir les trois équations générales en R, R_1 et R_2 seulement, il faudrait substituer, dans les équations (16), les valeurs (12) et (13) de A, A_1, A_2, τ, τ_1, τ_2; mais il est plus simple de transformer directement les équations (5).

Si l'on pose, pour simplifier,

$$
(18)\qquad \frac{du}{dy}-\frac{dv}{dx}=W,\quad \frac{dw}{dx}-\frac{du}{dz}=V,\quad \frac{dv}{dz}-\frac{dw}{dy}=U,
$$

ces équations (5) prennent la forme suivante :

$$
(19)\qquad \left\{\begin{aligned}
&3\frac{d\theta}{dx}+\frac{dW}{dy}-\frac{dV}{dz}+\frac{\delta}{\epsilon}\left(X-\frac{d^2u}{dt^2}\right)=0,\\
&3\frac{d\theta}{dy}+\frac{dU}{dz}-\frac{dW}{dx}+\frac{\delta}{\epsilon}\left(Y-\frac{d^2v}{dt^2}\right)=0,\\
&3\frac{d\theta}{dz}+\frac{dV}{dx}-\frac{dU}{dy}+\frac{\delta}{\epsilon}\left(Z-\frac{d^2w}{dt^2}\right)=0.
\end{aligned}\right.
$$

Or les valeurs (10) donnent facilement, par des différentiations dans lesquelles on regarde $\frac{R}{h}$, $\frac{R_1}{h_1}$, $\frac{R_2}{h_2}$, comme fonctions de ρ, ρ_1, ρ_2 :

$$
\begin{aligned}
W=\frac{du}{dy}-\frac{dv}{dx}=&\left(\frac{d\frac{R_2}{h_2}}{d\rho_1}-\frac{d\frac{R_1}{h_1}}{d\rho_2}\right)\left(\frac{d\rho_1}{dy}\frac{d\rho_2}{dx}-\frac{d\rho_1}{dx}\frac{d\rho_2}{dy}\right)+\left(\frac{d\frac{R}{h}}{d\rho_2}-\frac{d\frac{R_2}{h_2}}{d\rho}\right)\left(\frac{d\rho_2}{dy}\frac{d\rho}{dx}-\frac{d\rho_2}{dx}\frac{d\rho}{dy}\right)\\
&+\left(\frac{d\frac{R_1}{h_1}}{d\rho}-\frac{d\frac{R}{h}}{d\rho_1}\right)\left(\frac{d\rho}{dy}\frac{d\rho_1}{dx}-\frac{d\rho}{dx}\frac{d\rho_1}{dy}\right),
\end{aligned}
$$

ou, en éliminant les secondes parenthèses de chaque terme, à l'aide des formules (4) M :

$$W=\frac{h_1h_2}{h}\left(\frac{d\,\frac{R_2}{h_2}}{d\rho_1}-\frac{d\,\frac{R_1}{h_1}}{d\rho_2}\right)\frac{d\rho}{dz}+\frac{h_2h}{h_1}\left(\frac{d\,\frac{R}{h}}{d\rho_2}-\frac{d\,\frac{R_2}{h_2}}{d\rho}\right)\frac{d\rho_1}{dz}+\frac{hh_1}{h_2}\left(\frac{d\,\frac{R_1}{h_1}}{d\rho}-\frac{d\,\frac{R}{h}}{d\rho_1}\right)\frac{d\rho_2}{dz}.$$

Les fonctions V et U s'obtiennent de la même manière, et si l'on pose

$$(20)\quad \frac{h_1h_2}{h}\left(\frac{d\frac{R_2}{h_2}}{d\rho_1}-\frac{d\,\frac{R_1}{h_1}}{d\rho_2}\right)=r,\quad \frac{h_2h}{h_1}\left(\frac{d\,\frac{R}{h}}{d\rho_2}-\frac{d\,\frac{R_2}{h_2}}{d\rho}\right)=r_1,\quad \frac{hh_1}{h_2}\left(\frac{d\,\frac{R_1}{h_1}}{d\rho}-\frac{d\,\frac{R}{h}}{d\rho_1}\right)=r_2,$$

on aura

$$\begin{aligned}
U &= r\,\frac{d\rho}{dx}+r_1\,\frac{d\rho_1}{dx}+r_2\,\frac{d\rho_2}{dx},\\
V &= r\,\frac{d\rho}{dy}+r_1\,\frac{d\rho_1}{dy}+r_2\,\frac{d\rho_2}{dy},\\
W &= r\,\frac{d\rho}{dz}+r_1\,\frac{d\rho_1}{dz}+r_2\,\frac{d\rho_2}{dz};
\end{aligned}$$

d'où l'on conclura, comme ci-dessus,

$$\frac{dU}{dy}-\frac{dV}{dx}=\frac{h_1h_2}{h}\left(\frac{dr_2}{d\rho_1}-\frac{dr_1}{d\rho_2}\right)\frac{d\rho}{dz}+\frac{h_2h}{h_1}\left(\frac{dr}{d\rho_2}-\frac{dr_2}{d\rho}\right)\frac{d\rho_1}{dz}+\frac{hh_1}{h_2}\left(\frac{dr_1}{d\rho}-\frac{dr}{d\rho_1}\right)\frac{d\rho_2}{dz}.$$

Si l'on substitue cette dernière expression dans la troisième des équations (19), en y remplaçant en outre $\frac{d\theta}{dz}$ par $\left(\frac{d\theta}{d\rho}\frac{d\rho}{dz}+\frac{d\theta}{d\rho_1}\frac{d\rho_1}{dz}+\frac{d\theta}{d\rho_2}\frac{d\rho_2}{dz}\right)$, Z par $\left(\frac{F}{h}\frac{d\rho}{dz}+\frac{F_1}{h_1}\frac{d\rho_1}{dz}+\frac{F_2}{h_2}\frac{d\rho_2}{dz}\right)$, et u par sa valeur (10), on obtient

$$\begin{aligned}
&\left[3\,\frac{d\theta}{d\rho}+\frac{h_1h_2}{h}\left(\frac{dr_1}{d\rho_2}-\frac{dr_2}{d\rho_1}\right)+\frac{\delta}{\varepsilon h}\left(F-\frac{d^2R}{dt^2}\right)\right]\frac{d\rho}{dz}\\
+&\left[3\,\frac{d\theta}{d\rho_1}+\frac{h_2h}{h_1}\left(\frac{dr_2}{d\rho}-\frac{dr}{d\rho_2}\right)+\frac{\delta}{\varepsilon h_1}\left(F_1-\frac{d^2R_1}{dt^2}\right)\right]\frac{d\rho_1}{dz}\\
+&\left[3\,\frac{d\theta}{d\rho_2}+\frac{hh_1}{h_2}\left(\frac{dr}{d\rho_1}-\frac{dr_1}{d\rho}\right)+\frac{\delta}{\varepsilon h_2}\left(F_2-\frac{d^2R_2}{dt^2}\right)\right]\frac{d\rho_2}{dz}=0;
\end{aligned}$$

d'où il est facile de conclure, comme au § VI, que les trois équations transformées sont

$$(21)\quad \begin{cases} 3\,h\,\dfrac{d\theta}{d\rho} + h_1h_2\left(\dfrac{dr_1}{d\rho_2} - \dfrac{dr_2}{d\rho_1}\right) + \dfrac{\delta}{\varepsilon}\,\mathrm{F} = \dfrac{\delta}{\varepsilon}\dfrac{d^2\mathrm{R}}{dt^2},\\ 3\,h_1\,\dfrac{d\theta}{d\rho_1} + h_2h\left(\dfrac{dr_2}{d\rho} - \dfrac{dr}{d\rho_2}\right) + \dfrac{\delta}{\varepsilon}\,\mathrm{F}_1 = \dfrac{\delta}{\varepsilon}\dfrac{d^2\mathrm{R}_1}{dt^2},\\ 3\,h_2\,\dfrac{d\theta}{d\rho_2} + hh_1\left(\dfrac{dr}{d\rho_1} - \dfrac{dr_1}{d\rho}\right) + \dfrac{\delta}{\varepsilon}\,\mathrm{F}_2 = \dfrac{\delta}{\varepsilon}\dfrac{d^2\mathrm{R}_2}{dt^2}, \end{cases}$$

ou bien, en y substituant à r, r_1, r_2, leurs valeurs (20),

$$(22)\quad \begin{cases} 3\,\dfrac{h}{h_1h_2}\dfrac{d\theta}{d\rho} + \dfrac{d\,\dfrac{h_2h}{h_1}\left(\dfrac{d\frac{\mathrm{R}}{h}}{d\rho_2} - \dfrac{d\frac{\mathrm{R}_2}{h_2}}{d\rho}\right)}{d\rho_2} - \dfrac{d\,\dfrac{hh_1}{h_2}\left(\dfrac{d\frac{\mathrm{R}_1}{h_1}}{d\rho} - \dfrac{d\frac{\mathrm{R}}{h}}{d\rho_1}\right)}{d\rho_1} = \dfrac{\delta}{\varepsilon h_1h_2}\left(\dfrac{d^2\mathrm{R}}{dt^2} - \mathrm{F}\right),\\ 3\,\dfrac{h_1}{h_2h}\dfrac{d\theta}{d\rho_1} + \dfrac{d\,\dfrac{hh_1}{h_2}\left(\dfrac{d\frac{\mathrm{R}_1}{h_1}}{d\rho} - \dfrac{d\frac{\mathrm{R}}{h}}{d\rho_1}\right)}{d\rho} - \dfrac{d\,\dfrac{h_1h_2}{h}\left(\dfrac{d\frac{\mathrm{R}_2}{h_2}}{d\rho_1} - \dfrac{d\frac{\mathrm{R}_1}{h_1}}{d\rho_2}\right)}{d\rho_2} = \dfrac{\delta}{\varepsilon h_2h}\left(\dfrac{d^2\mathrm{R}_1}{dt^2} - \mathrm{F}_1\right),\\ 3\,\dfrac{h_2}{hh_1}\dfrac{d\theta}{d\rho_2} + \dfrac{d\,\dfrac{h_1h_2}{h}\left(\dfrac{d\frac{\mathrm{R}_2}{h_2}}{d\rho_1} - \dfrac{d\frac{\mathrm{R}_1}{h_1}}{d\rho_2}\right)}{d\rho_1} - \dfrac{d\,\dfrac{h_2h}{h_1}\left(\dfrac{d\frac{\mathrm{R}}{h}}{d\rho_2} - \dfrac{d\frac{\mathrm{R}_2}{h_2}}{d\rho}\right)}{d\rho} = \dfrac{\delta}{\varepsilon hh_1}\left(\dfrac{d^2\mathrm{R}_2}{dt^2} - \mathrm{F}_2\right). \end{cases}$$

Ces trois équations, respectivement différentiées en ρ, ρ_1, ρ_2, puis ajoutées, donnent

$$(23)\quad hh_1h_2\left[\frac{d\,\frac{h}{h_1h_2}\frac{d\theta}{d\rho}}{d\rho} + \frac{d\,\frac{h_1}{h_2h}\frac{d\theta}{d\rho_1}}{d\rho_1} + \frac{d\,\frac{h_2}{hh_1}\frac{d\theta}{d\rho_2}}{d\rho_2} + \frac{\delta}{3\varepsilon}\left(\frac{d\frac{\mathrm{F}}{h_1h_2}}{d\rho} + \frac{d\frac{\mathrm{F}_1}{h_2h}}{d\rho_1} + \frac{d\frac{\mathrm{F}_2}{hh_1}}{d\rho_2}\right)\right] = \frac{\delta}{3\varepsilon}\frac{d^2\theta}{dt^2},$$

ou, d'après la formule (25) M,

$$(24)\qquad \frac{3\varepsilon}{\delta}\,\Delta_2\theta + hh_1h_2\left(\frac{d\,\frac{\mathrm{F}}{h_1h_2}}{d\rho} + \frac{d\,\frac{\mathrm{F}_1}{h_2h}}{d\rho_1} + \frac{d\,\frac{\mathrm{F}_2}{hh_1}}{d\rho_2}\right) = \frac{d^2\theta}{dt^2},$$

équation qui n'est autre que (6).

§ VIII.

Équations de l'équilibre des solides élastiques, en coordonnées curvilignes.

Lorsque le corps solide est intérieurement en équilibre, les déplacements normaux R, R_1, R_2, ne doivent pas contenir le temps; on obtiendra donc les équations générales de cet équilibre, en annulant les termes en $\frac{d^2R}{dt^2}$, $\frac{d^2R_1}{dt^2}$, $\frac{d^2R_2}{dt^2}$, dans les équations (16), (17) ou (22), qui deviennent alors

$$(25)\left\{\begin{aligned}
&h_1h_2\frac{d\frac{A}{h_1h_2}}{d\rho}+hh_1h_2\left(\frac{d\frac{\tau_2}{h_2h^2}}{d\rho_1}+\frac{d\frac{\tau_1}{h_1h^2}}{d\rho_2}\right)+\frac{A_1}{h_1}\frac{dh_1}{d\rho}+\frac{A_2}{h_2}\frac{dh_2}{d\rho}+\frac{\delta}{h}F=0,\\
&h_2h\frac{d\frac{A_1}{h_2h}}{d\rho_1}+hh_1h_2\left(\frac{d\frac{\tau_2}{h_2h_1^2}}{d\rho_2}+\frac{d\frac{\tau_2}{h_2h_1^2}}{d\rho}\right)+\frac{A_2}{h_2}\frac{dh_2}{d\rho_1}+\frac{A}{h}\frac{dh}{d\rho_1}+\frac{\delta}{h_1}F_1=0,\\
&hh_1\frac{d\frac{A_2}{hh_1}}{d\rho_2}+hh_1h_2\left(\frac{d\frac{\tau_1}{h_1h_2^2}}{d\rho}+\frac{d\frac{\tau}{hh_2^2}}{d\rho_1}\right)+\frac{A}{h}\frac{dh}{d\rho_2}+\frac{A_1}{h_1}\frac{dh_1}{h\rho_2}+\frac{\delta}{h_2}F_2=0,
\end{aligned}\right.$$

d'après les formules (16); ou bien

$$(26)\left\{\begin{aligned}
&\frac{dA}{ds}+\frac{d\tau_2}{ds_1}+\frac{d\tau_1}{ds_2}+\delta F=\frac{A-A_1}{\gamma_1}+\frac{A-A_2}{c_2}+\left(\frac{2}{c}+\frac{1}{\gamma_2}\right)\tau_2+\left(\frac{2}{\gamma}+\frac{1}{c_1}\right)\tau_1,\\
&\frac{d\tau_2}{ds}+\frac{dA_1}{ds_1}+\frac{d\tau}{ds_2}+\delta.F_1=\frac{A_1-A_2}{\gamma_2}+\frac{A_1-A}{c}+\left(\frac{2}{c_1}+\frac{1}{\gamma_2}\right)\tau+\left(\frac{2}{\gamma_1}+\frac{1}{c_2}\right)\tau_2,\\
&\frac{d\tau_1}{ds}+\frac{d\tau}{ds_1}+\frac{dA_2}{ds_2}+\delta.F_2=\frac{A_2-A}{\gamma}+\frac{A_2-A_1}{c_1}+\left(\frac{2}{c_2}+\frac{1}{\gamma_1}\right)\tau_1+\left(\frac{2}{\gamma_2}+\frac{1}{c}\right)\tau
\end{aligned}\right.$$

d'après celles (17); on a encore

$$(27)\left\{\begin{aligned}
&3h\frac{d\theta}{d\rho}+h_1h_2\left[\frac{d\frac{h_2h}{h_1}\left(\frac{d\frac{R}{h}}{d\rho_2}-\frac{d\frac{R_2}{h_2}}{d\rho}\right)}{d\rho_2}-\frac{d\frac{hh_1}{h_2}\left(\frac{d\frac{R_1}{h_1}}{d\rho}-\frac{d\frac{R}{h}}{d\rho_1}\right)}{d\rho_1}\right]+\frac{\delta}{\varepsilon}F=0,\\
&3h_1\frac{d\theta}{d\rho_1}+h_2h\left[\frac{d\frac{hh_1}{h_2}\left(\frac{d\frac{R_1}{h_1}}{d\rho}-\frac{d\frac{R}{h}}{d\rho_1}\right)}{d\rho}-\frac{d\frac{h_1h_2}{h}\left(\frac{d\frac{R_2}{h_2}}{d\rho_1}-\frac{d\frac{R_1}{h_1}}{d\rho_2}\right)}{d\rho_2}\right]+\frac{\delta}{\varepsilon}F_1=0,\\
&3h_2\frac{d\theta}{d\rho_2}+hh_1\left[\frac{d\frac{h_1h_2}{h}\left(\frac{d\frac{R_2}{h_2}}{d\rho_1}-\frac{d\frac{R_1}{h_1}}{d\rho_2}\right)}{d\rho_1}-\frac{d\frac{h_2h}{h_1}\left(\frac{d\frac{R}{h}}{d\rho_2}-\frac{d\frac{R_2}{h_2}}{d\rho}\right)}{d\rho}\right]+\frac{\delta}{\varepsilon}F_2=0,
\end{aligned}\right.$$

d'après les équations (22). L'un ou l'autre de ces groupes, dans lesquels il faut supposer A, A_1, A_2, τ, τ_1, τ_2, θ, remplacés par les expressions (11), (12) et (13) ou (14), peut représenter l'état d'équilibre du corps solide rapporté à des coordonnées curvilignes quelconques. Il est aisé de voir que ces groupes reprennent les formes ordinaires (8) ou (5), lorsque les surfaces coordonnées sont des plans parallèles et orthogonaux.

§ IX.

Cas simple d'une compression uniforme.

Pour vérifier les équations trouvées dans un cas simple, faisons abstraction de la force accélératrice, et supposons que tous les points matériels du corps solide se rapprochent d'un même point, pris pour origine des x, y, z, de quantités proportionnelles aux distances qui les en séparent, sur les droites mêmes qui mesurent ces distances; ce sera le cas physique d'une contraction uniforme dans tous les sens, opérée par un fluide comprimé, qui entourerait le solide. L'équilibre existera encore dans ce nouvel état du corps, si les équations du paragraphe précédent sont identiquement satisfaites par les valeurs de R, R_1, R_2, déduites de l'hypothèse posée.

Soient $\sqrt{x^2+y^2+z^2}=r$ la distance qui sépare la molécule m de l'origine des x, y, z, avant la compression; et $(-\alpha r)$ la quantité dont cette même molécule se trouve rapprochée de la même origine, sur la droite r, quand la compression est opérée et l'équilibre rétabli intérieurement. On aura évidemment, pour les composantes de ce déplacement,

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} R &= -\frac{\alpha}{h}\left(x\frac{d\rho}{dx}+y\frac{d\rho}{dy}+z\frac{d\rho}{dz}\right),\\ R_1 &= -\frac{\alpha}{h_1}\left(x\frac{d\rho_1}{dx}+y\frac{d\rho_1}{dy}+z\frac{d\rho_1}{dz}\right),\\ R_2 &= -\frac{\alpha}{h_2}\left(x\frac{d\rho_2}{dx}+y\frac{d\rho_2}{dy}+z\frac{d\rho_2}{dz}\right),\end{aligned}\right.$$

et l'on doit supposer ici que x, y, z, $\frac{d\rho}{dx}$, $\frac{d\rho_1}{dx}$, ..., h, h_1, h_2, sont des fonctions connues de ρ, ρ_1, ρ_2.

La valeur de θ [seconde forme du groupe (11) *bis*], ayant reçu les valeurs (28) de R, R_1, R_2, si l'on développe le résultat, en y remplaçant les coefficients différentiels de x, y, z, en ρ, ρ_1, ρ_2, et $\frac{d\frac{d\rho}{dx}}{d\rho}$, $\frac{d\frac{d\rho_1}{dx}}{d\rho}$, ... par les valeurs déduites des formules (11)M et (14) *bis*M, on trouve facilement, toute réduction faite,

$$\theta = -3\alpha, \tag{29}$$

résultat prévu. La valeur de τ (31) devient

$$\tau = -\frac{\alpha\varepsilon}{h_1 h_2}\left[h_1^2\,\frac{d\left(x\frac{d\rho_2}{dx}+y\frac{d\rho_2}{dy}+z\frac{d\rho_2}{dz}\right)}{d\rho_1} + h_2^2\,\frac{d\left(x\frac{d\rho_1}{dx}+y\frac{d\rho_1}{dy}+z\frac{d\rho_1}{dz}\right)}{d\rho_2}\right];$$

or la parenthèse développée devient, d'après le groupe (5)M,

$$x\left(h_1^2\frac{d\frac{d\rho_2}{dx}}{d\rho_1}+h_2^2\frac{d\frac{d\rho_1}{dx}}{d\rho_2}\right)+y\left(h_1^2\frac{d\frac{d\rho_2}{dy}}{d\rho_1}+h_2^2\frac{d\frac{d\rho_1}{dy}}{d\rho_2}\right)+z\left(h_1^2\frac{d\frac{d\rho_2}{dz}}{d\rho_1}+h_2^2\frac{d\frac{d\rho_1}{dz}}{d\rho_2}\right)$$
$$+2\left(\frac{d\rho_1}{dx}\frac{d\rho_2}{dx}+\frac{d\rho_1}{dy}\frac{d\rho_2}{dy}+\frac{d\rho_1}{dz}\frac{d\rho_2}{dz}\right),$$

et tous les termes disparaissent d'eux-mêmes, d'après les formules (2)M et (9)M; ainsi $\tau = 0$. On arrive à la même conclusion pour τ_1 et τ_2. Donc, dans le cas actuel, les forces tangentielles sont partout nulles, quel que soit le système de coordonnées curvilignes adopté. La valeur de A (12) devient

$$A = -3\alpha - 2\alpha\left\{\begin{array}{l}\dfrac{d\left(x\frac{d\rho}{dx}+y\frac{d\rho}{dy}+z\frac{d\rho}{dz}\right)}{d\rho} - \dfrac{1}{h}\left(x\dfrac{d\rho}{dx}+y\dfrac{d\rho}{dy}+z\dfrac{d\rho}{dz}\right)\dfrac{dh}{d\rho} \\ -\dfrac{1}{h}\left(x\dfrac{d\rho_1}{dx}+y\dfrac{d\rho_1}{dy}+z\dfrac{d\rho_1}{dz}\right)\dfrac{dh}{d\rho_1} - \dfrac{1}{h}\left(x\dfrac{d\rho_2}{dx}+y\dfrac{d\rho_2}{dy}+z\dfrac{d\rho_2}{dz}\right)\dfrac{dh}{d\rho_2}\end{array}\right\};$$

d'où, développant, et remplaçant $\frac{dx}{d\rho}$, $\frac{dy}{d\rho}$, $\frac{dz}{d\rho}$, par leurs valeurs (5)M, puis remarquant que les termes en x, en y, en z, sont nuls d'eux-mêmes d'après les formules (11)M, on trouve simplement

$$A = -5\alpha\varepsilon = -P. \tag{30}$$

On aurait aussi $A_1 = A_2 = -5\alpha\varepsilon$; c'est-à-dire que la pression est constante, et la même dans tous les sens, pour le corps entier.

Les valeurs de θ, A, A_1, A_2, τ, τ_1, τ_2, étant maintenant connues, on peut vérifier si elles satisfont aux équations générales de l'équilibre (25), dans lesquelles il faut supprimer F, F_1, F_2. Or la première de ces équations devient, par ces substitutions,

$$-P\left(h_1 h_2 \frac{d\frac{1}{h_1 h_2}}{d\rho} + \frac{1}{h_1}\frac{dh_1}{d\rho} + \frac{1}{h_2}\frac{dh_2}{d\rho}\right) = 0,$$

et est identique. Ainsi le groupe (25) est identiquement satisfait. Les valeurs (28), données aux déplacements, correspondent donc à un état d'équilibre.

§ X.

Formule entre des intégrales définies, déduite du cas de la compression.

Le cas qui vient d'être traité conduit à une conséquence analytique remarquable. Supposons que les surfaces ρ soient toutes fermées, et considérons l'une d'elles en particulier; le phénomène de la contraction fera rapprocher tous ses points matériels de l'origine des x, y, z, que nous supposerons située dans l'intérieur de cette enveloppe; on aura évidemment l'espace parcouru et abandonné à l'extérieur, lors de ce déplacement général, en intégrant la différentielle $(-R\,ds_1 ds_2)$, et étendant l'intégrale à toutes les valeurs des paramètres ρ_1 et ρ_2; mais ce même espace doit être égal à la compression cubique constante $(-\theta)$ multipliée par le volume enveloppé $V = \int\int\int ds\,ds_1 ds_2$; l'intégrale triple qui précède étant étendue à toutes les valeurs de ρ_1 et ρ_2, et aux valeurs du paramètre ρ inférieures à celle de la surface considérée.

Ainsi l'on devra avoir, en substituant à ds, ds_1, ds_2 leurs valeurs $\left(\frac{d\rho}{h}, \frac{d\rho_1}{h_1}, \frac{d\rho_2}{h_2}\right)$, à R et θ celles (28) et (29), et supprimant le facteur commun α,

$$(31)\qquad \int\int \frac{\left(x\frac{d\rho}{dx} + y\frac{d\rho}{dy} + z\frac{d\rho}{dz}\right)}{hh_1h_2} d\rho_1 d\rho_2 = 3V = 3\int\int\int \frac{d\rho\, d\rho_1 d\rho_2}{hh_1h_2},$$

équation dans laquelle on suppose $\left(x\frac{d\rho}{dx}+y\frac{d\rho}{dy}+z\frac{d\rho}{dz}\right)$ et h, h_1, h_2, exprimées en fonction de ρ, ρ_1, ρ_2. [J'ai donné une application de la formule (31), dans ce Journal, cahier de novembre 1838.]

§ XI.

Condition des surfaces isostatiques, et variation des tractions principales.

L'équilibre intérieur d'un corps solide étant maintenant exprimé en coordonnées curvilignes quelconques, par les équations des § III, IV, V et VIII, il est facile de trouver les lois qui régissent les variations de grandeur et de direction des tractions ou des pressions principales. Les surfaces *isostatiques*, orthogonales entre elles, sur lesquelles s'exercent les tractions principales, et qui ont été suffisamment définies dans l'introduction, jouissent de la propriété de n'être sollicitées par aucune force tangentielle. Il suit de là que le système coordonné des paragraphes cités, ne sera autre que celui des surfaces isostatiques, si l'on exprime que les composantes tangentielles (13) ou (14) sont nulles dans toute l'étendue du corps.

Ainsi les trois équations

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} &h_1^2\frac{dR_2h_2}{d\rho_1}+h_2^2\frac{dR_1h_1}{d\rho_2}=0,\\ &h_2^2\frac{dRh}{d\rho_2}+h^2\frac{dR_2h_2}{d\rho}=0,\\ &h^2\frac{dR_1h_1}{d\rho}+h_1^2\frac{dRh}{d\rho_1}=0,\end{aligned}\right.$$

d'après les valeurs (13); ou celles-ci

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{dR_2}{ds_1}+\frac{dR_1}{ds_2}+\frac{R_2}{\gamma_2}+\frac{R_1}{c_1}=0,\\ &\frac{dR}{ds_2}+\frac{dR_2}{ds}+\frac{R}{\gamma}+\frac{R_2}{c_2}=0,\\ &\frac{dR_1}{ds}+\frac{dR}{ds_1}+\frac{R_1}{\gamma_1}+\frac{R}{c}=0,\end{aligned}\right.$$

d'après les valeurs (14), renferment les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un système de surfaces orthogonales soit un système isostatique. Elles expriment les relations qui doivent alors exister entre les déplacements normaux et les courbures des surfaces.

Lorsque le corps solide est rapporté à des surfaces isostatiques, les équations qui expriment son équilibre intérieur se simplifient; en effet, si l'on pose $\tau = \tau_1 = \tau_2 = 0$, dans le groupe (25), on obtient pour ces équations

$$(34)\quad \left\{\begin{array}{l} h\dfrac{dA}{d\rho} + \delta . F = \dfrac{h}{h_1}\dfrac{dh_1}{d\rho}(A - A_1) + \dfrac{h}{h_2}\dfrac{dh_2}{d\rho}(A - A_2), \\ h_1\dfrac{dA_1}{d\rho_1} + \delta . F_1 = \dfrac{h_1}{h_2}\dfrac{dh_2}{d\rho_1}(A_1 - A_2) + \dfrac{h_1}{h}\dfrac{dh}{d\rho_1}(A_1 - A), \\ h_2\dfrac{dA_2}{d\rho_2} + \delta . F_2 = \dfrac{h_2}{h}\dfrac{dh}{d\rho_2}(A_2 - A) + \dfrac{h_2}{h_1}\dfrac{dh_1}{d\rho_2}(A_2 - A_1); \end{array}\right.$$

ou bien, d'après les formules (b) M,

$$(35)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{dA}{ds} + \delta . F = \dfrac{A - A_1}{\gamma_1} + \dfrac{A - A_2}{c_2}, \\ \dfrac{dA_1}{ds_1} + \delta . F_1 = \dfrac{A_1 - A_2}{\gamma_2} + \dfrac{A_1 - A}{c}, \\ \dfrac{dA_2}{ds_2} + \delta . F_2 = \dfrac{A_2 - A}{\gamma} + \dfrac{A_2 - A_1}{c_1}. \end{array}\right.$$

Ces relations expriment de quelle manière doit varier la traction principale exercée sur une surface isostatique, lorsqu'en suivant sa direction on passe à une autre surface isostatique, infiniment voisine de la première. Si, faisant abstraction de la force accélératrice, on adopte les définitions que j'ai établies (§ V, M, deuxième partie), la loi unique, donnée par les équations (35), pourra s'énoncer ainsi :

Dans un corps solide, en équilibre intérieurement, chaque traction principale éprouve, suivant sa direction même, une variation qui est égale à la somme de ses excès sur les deux autres tractions principales, respectivement multipliées par les courbures correspondantes de la surface sollicitée.

Telle est la loi générale qui régit les variations de grandeur des tractions principales. Quant à la loi unique, donnée par les équations (33), elle régit en quelque sorte les variations de direction de ces forces, puisqu'elle détermine les formes des surfaces isostatiques.

§ XII.

Cas simple d'un déplacement général par translation.

Les équations (32) sont identiquement satisfaites, d'après les formules (9) M, lorsque l'on prend pour R, R_1, R_2, les valeurs

$$(36)\quad \begin{cases} R = \dfrac{a}{h}\dfrac{d\rho}{dx} + \dfrac{b}{h}\dfrac{d\rho}{dy} + \dfrac{c}{h}\dfrac{d\rho}{dz}, \\ R_1 = \dfrac{a}{h_1}\dfrac{d\rho_1}{dx} + \dfrac{b}{h_1}\dfrac{d\rho_1}{dy} + \dfrac{c}{h_1}\dfrac{d\rho_1}{dz}, \\ R_2 = \dfrac{a}{h_2}\dfrac{d\rho_2}{dx} + \dfrac{b}{h_2}\dfrac{d\rho_2}{dy} + \dfrac{c}{h_2}\dfrac{d\rho_2}{dz}. \end{cases}$$

Les forces tangentielles sont donc nulles d'elles-mêmes. Mais il est aisé de voir que les déplacements moléculaires donnés par les équations (36) sont tous égaux et parallèles, puisqu'ils ont tous pour projections sur les axes des x, y, z, les constantes a, b, c; d'où il suit que le corps n'éprouve alors qu'un mouvement de translation; les forces tangentielles devaient donc être nulles dans ce cas. Il doit d'ailleurs en être de même des tractions normales aux surfaces conjuguées; et en effet, si l'on substitue les valeurs (36) dans les expressions (12) de A, A_1, A_2, on trouve qu'elles se réduisent à zéro, d'après les formules (11) M, ainsi que θ [seconde formule (11) *bis*]. Les équations générales de l'équilibre (27) sont en outre satisfaites par les valeurs (36), quand on néglige les forces accélératrices; car θ est nul, et les expressions

$$\left(\frac{d\frac{R_2}{h_2}}{d\rho_1} - \frac{d\frac{R_1}{h_1}}{d\rho_2}\right), \quad \left(\frac{d\frac{R}{h}}{d\rho_2} - \frac{d\frac{R_2}{h_2}}{d\rho}\right), \quad \left(\frac{d\frac{R_1}{h_1}}{d\rho} - \frac{d\frac{R}{h}}{d\rho_1}\right),$$

se réduisent aussi à zéro, d'après les formules (7) M.

On verrait, tout aussi facilement, que les valeurs de R, R_1, R_2, exprimées en coordonnées curvilignes, qui correspondraient à un mouvement général de rotation du corps solide autour d'un même axe fixe, donnent zéro pour la dilatation (11), pour les tractions normales (12), pour les forces tangentielles (13), et vérifient les équations d'équilibre (27). Ces deux cas simples, ainsi que celui qui est traité au § IX, dont les résultats étaient connus d'avance, constatent la réalité de toutes nos formules.

Les nouvelles équations de l'équilibre intérieur d'un corps solide, contenues dans ce Mémoire, sont les seules dont on puisse faire usage pour aborder un problème général, fécond en applications, et dont voici l'énoncé :

Déterminer les forces qui doivent solliciter un corps solide, découpé par un système donné de surfaces orthogonales, pour que ce système soit isostatique.

La solution de ce problème consistera à chercher des fonctions R, R_1, R_2, des coordonnées curvilignes données, qui satisfassent à la fois aux équations (32) et (27); ces valeurs étant ensuite substituées dans les équations (12), donneront les tractions ou les pressions principales en chaque point du corps solide, et par suite les forces qui doivent solliciter sa surface.