JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

CH. DELAUNAY

Note sur un théorème de mécanique

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 5 (1840), p. 255-263.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1840_1_5__255_0>

NOTE

SUR UN THÉORÈME DE MÉCANIQUE;

PAR M. CH. DELAUNAY.

On sait que le mouvement d'un corps solide peut toujours être considéré comme se composant du mouvement de translation d'un quelconque de ses points, et d'un mouvement de rotation autour d'une droite passant par ce point. On peut de même regarder le mouvement d'un système quelconque de corps comme se composant du mouvement de translation d'un de ses points, d'un mouvement de rotation autour d'une droite passant par ce point, et de mouvements relatifs qui changent les positions respectives des corps du système. Pour se rendre bien compte de cette décomposition de mouvement, on peut concevoir qu'à chaque instant, regardant le système comme solide, on détermine les axes principaux qui se croisent en un point de ce système, et l'on voit qu'ainsi, quel que soit le mouvement, il pourra toujours être remplacé par le mouvement de ces axes principaux et les mouvements des diverses parties du système relativement à ces axes; d'ailleurs le mouvement des axes principaux, comme celui d'un corps solide, se composera du mouvement de translation du point où ils se croisent, et d'un mouvement de rotation autour d'une droite passant par ce point.

Lorsque le système, d'abord en repos, est mis en mouvement par des impulsions, la droite autour de laquelle commencent à tourner les axes principaux passant par un point quelconque, prend le nom d'*axe spontané de rotation,* relativement à ce point; il est évident que pour un même mouvement il y a autant d'axes spontanés de rotation qu'il y a de points dans le système.

Lagrange démontre (*Mécanique analytique,* tome I, page 293) que, dans un système libre, en faisant abstraction du mouvement de translation, tout axe spontané de rotation est tel que la somme des forces vives du système est un maximum ou un minimum, théorème qui avait d'abord été donné par Euler, dans le cas d'un corps solide. Lagrange fait voir en effet que la condition commune au maximum et au minimum est satisfaite; mais il ne s'occupe pas de savoir lequel du maximum ou du minimum a réellement lieu, ou bien s'il y a tantôt maximum, tantôt minimum. L'objet de cette Note est de faire voir qu'il y a toujours maximum.

Je considère d'abord le cas d'un corps solide, et je prends pour origine un point quelconque du corps et pour axes coordonnés les axes principaux qui passent par ce point lorsque le corps est en repos. Comme Lagrange, je ferai abstraction du mouvement du point qui est à l'origine, ou, ce qui revient au même, je considérerai ce point comme fixe; dès lors le corps ne pourra plus prendre qu'un mouvement de rotation autour de ce point.

Soient X, Y, Z les composantes parallèles aux axes de l'une des forces instantanées appliquée au point dont les coordonnées sont x, y, z et u, v, w, les composantes aussi parallèles aux axes de la vitesse de ce point résultant de l'action des forces instantanées sur le corps; on a, par le principe de D'Alembert, combiné avec le principe des vitesses virtuelles,

$$\sum m(u\delta x + v\delta y + w\delta z) = \sum m(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z). \quad (1)$$

Puisque le corps ne peut que tourner autour de l'origine, tous les déplacements virtuels δx, δy, δz, s'exprimeront au moyen de trois rotations arbitraires $\delta\psi$, $\delta\omega$, $\delta\varphi$ autour des axes des x, des y et des z, et l'on aura

$$\delta x = z\delta\omega - y\delta\varphi, \quad \delta y = x\delta\varphi - z\delta\psi, \quad \delta z = y\delta\psi - x\delta\omega.$$

Substituant dans l'équation (1) et égalant séparément à zéro les coefficients de $\delta\psi$, $\delta\omega$, $\delta\varphi$, nous aurons les trois équations suivantes :

$$\sum m(wy - vz) = \sum m(Zy - Yz),$$
$$\sum m(uz - wx) = \sum m(Xz - Zx),$$
$$\sum m(vx - uy) = \sum m(Yx - Xy);$$

mais on a

$$u = \frac{dx}{dt}, \qquad v = \frac{dy}{dt}, \qquad w = \frac{dz}{dt};$$

et si $d\psi$, $d\omega$, $d\varphi$ représentent les angles dont le corps tourne autour des trois axes pendant le premier instant de son mouvement, on aura

$$u = z\frac{d\omega}{dt} - y\frac{d\varphi}{dt},$$

$$v = x\frac{d\varphi}{dt} - z\frac{d\psi}{dt},$$

$$w = y\frac{d\psi}{dt} - x\frac{d\omega}{dt}.$$

Mettant ces valeurs dans les équations précédentes et remarquant que l'on a

$$\sum mxy = 0, \quad \sum mxz = 0, \quad \sum myz = 0,$$

on trouvera

$$\frac{d\psi}{dt}\sum m(y^2 + z^2) = \sum m(Zy - Yz),$$

$$\frac{d\omega}{dt}\sum m(x^2 + z^2) = \sum m(Xz - Zx),$$

$$\frac{d\varphi}{dt}\sum m(x^2 + y^2) = \sum m(Yx - Xy);$$

ou bien, posant

$$A = \sum m(y^2 + z^2), \qquad B = \sum m(x^2 + z^2), \qquad C = \sum m(x^2 + y^2),$$

$$P = \sum m(Zy - Yz), \qquad Q = \sum m(Xz - Zx), \qquad R = \sum m(Yx - Xy),$$

on aura enfin

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{P}{A}, \qquad \frac{d\omega}{dt} = \frac{Q}{B}, \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{R}{C}.$$

On a donc ainsi les composantes de la vitesse de rotation, et on en déduit facilement que les équations de l'axe spontané de rotation sont

$$y = \frac{d\omega}{d\psi}x, \qquad z = \frac{d\varphi}{d\psi}x;$$

ou bien, en remplaçant $d\psi$, $d\omega$ et $d\varphi$ par leurs valeurs,

$$y = \frac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{BP}}x, \qquad z = \frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{CP}}x.$$

Supposons maintenant que le corps, au lieu de pouvoir tourner librement autour de l'origine, soit assujéti à tourner autour d'une droite représentée par les équations

$$y = ax, \qquad z = bx;$$

dans ce cas on pourra bien toujours exprimer les déplacements virtuels δx, δy, δz, au moyen des rotations $\delta\psi$, $\delta\omega$, $\delta\varphi$ autour des trois axes; mais de ces trois rotations, une seule devra être considérée comme arbitraire, et les deux autres seront déterminées par les relations

$$\delta\omega = a\delta\psi, \qquad \delta\varphi = b\delta\psi;$$

on aura donc

$$\delta x = (az - by)\delta\psi, \quad \delta y = (bx - z)\delta\psi, \quad \delta z = (y - ax)\delta\psi;$$

et si l'on substitue ces valeurs dans l'équation (1), elle deviendra

$$\sum m(wy - vz) + a\sum m(uz - wx) + b\sum m(vx - uy) = \mathrm{P} + a\mathrm{Q} + b\mathrm{R}.$$

D'ailleurs $d\psi$ étant l'angle décrit par le corps autour de l'axe des x pendant le premier instant de son mouvement, on verra, comme précédemment, que l'on a

$$u = (az - by)\frac{d\psi}{dt}, \quad v = (bx - z)\frac{d\psi}{dt}, \quad w = (y - ax)\frac{d\psi}{dt};$$

substituant dans l'équation précédente, il viendra

$$(\mathrm{A} + a^2\mathrm{B} + b^2\mathrm{C})\frac{d\psi}{dt} = \mathrm{P} + a\mathrm{Q} + b\mathrm{R};$$

d'où l'on tire

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{P + aQ + bR}{A + a^2B + b^2C}.$$

Mais on peut aussi remplacer dans l'équation (1) δx par $u\delta t$, δy par $v\delta t$, δz par wdt, et elle deviendra

$$\sum m(u^2 + v^2 + w^2) = \sum m(Xu + Yv + Zw),$$

ou bien en remplaçant dans le second membre u, v, w par leurs valeurs données précédemment,

$$\sum m(u^2 + v^2 + w^2) = (P + aQ + bR)\frac{d\psi}{dt}.$$

Donc enfin, représentant par K la somme des forces vives qui forme le premier membre de cette équation, et mettant pour $\frac{d\psi}{dt}$ sa valeur, on aura

$$K = \frac{(P + aQ + bR)^2}{A + a^2B + b^2C}.$$

La valeur de K étant ainsi exprimée en fonction de a et de b, la question est ramenée à faire voir que K sera un maximum lorsqu'on donnera à a et b les valeurs qui correspondent à l'axe spontané de rotation, c'est-à-dire lorsque l'on supposera

$$a = \frac{AQ}{BP}, \qquad b = \frac{AR}{CP};$$

pour cela il suffira d'appliquer la méthode ordinaire des *maxima* et *minima*.

On trouvera d'abord

$$\frac{dK}{da} = \frac{2(P + aQ + bR)(AQ - aBP + b^2CQ - abBR)}{(A + a^2B + b^2C)^2},$$

$$\frac{dK}{db} = \frac{2(P + aQ + bR)(AR - bCP + a^2BR - abCQ)}{(A + a^2B + b^2C)^2}.$$

Ces valeurs sont annulées lorsqu'on y remplace a par $\frac{AQ}{BP}$, et b par $\frac{AR}{CP}$;

c'est-à-dire que pour ces valeurs de a et b, K est un maximum ou un minimum. C'est ce que Lagrange a démontré plus simplement que je ne viens de le faire; mais les calculs précédents étaient nécessaires pour aller plus loin et distinguer si K est maximum ou s'il est minimum.

Si l'on calcule $\frac{d^2K}{da^2}$, $\frac{d^2K}{da\,db}$, $\frac{d^2K}{db^2}$, et qu'on y remplace a par $\frac{AQ}{BP}$, et b par $\frac{AR}{CP}$, on trouvera

$$\frac{d^2K}{da^2} = -\frac{2P^2 l}{A^2(BCP^2+ACQ^2+ABR^2)^2},$$
$$\frac{d^2K}{da\,db} = \frac{2P^2 m}{A^2(BCP^2+ACQ^2+ABR^2)^2},$$
$$\frac{d^2K}{db^2} = -\frac{2P^2 n}{A^2(BCP^2+ACQ^2+ABR^2)^2},$$

en faisant, pour abréger,

$$B^2(BC^2P^4+BA^2R^4+AC^2P^2Q^2+CA^2R^2Q^2+2ABCP^2R^2)=l,$$
$$ABCQR(BCP^2+ACQ^2+ABR^2)=m,$$
$$C^2(CB^2P^4+CA^2Q^4+AB^2P^2R^2+BA^2Q^2R^2+2ABCP^2Q^2)=n.$$

La valeur de $\frac{d^2K}{da^2}$ étant évidemment négative, ainsi que celle de $\frac{d^2K}{db^2}$, il ne reste plus, pour démontrer que K est toujours un maximum, qu'à faire voir que l'équation du second degré

$$l\theta^2 - 2m\theta + n = 0$$

n'a pas de racines réelles; en effet, les valeurs de l, m, n donnent

$$m^2 - ln = -B^2C^2P^2(BCP^2+ACQ^2+ABR^2)^3,$$

quantité essentiellement négative. Donc, dans le cas d'un corps solide, l'axe spontané de rotation est toujours tel, que la somme des forces vives du corps est un maximum.

Passons maintenant au cas d'un système quelconque de corps, et prenons toujours pour origine un des points du système, et pour axes coordonnés les axes principaux qui se croisent en ce point avant que le mouvement ait lieu; représentons encore par X, Y, Z, les trois composantes parallèles aux axes de l'une des forces instantanées appliquée au point m dont les coordonnées sont x, y, z, et par u, v, w, les composantes de la vitesse de ce point due à l'action des forces instantanées, abstraction faite du mouvement de translation. L'équation (1) sera encore l'équation du mouvement que nous considérons.

La vitesse du point m étant due au mouvement de rotation des axes principaux du système autour de l'axe spontané de rotation, et au mouvement de ce point relativement aux axes principaux, nous pouvons poser

$$u = u_1 + \alpha, \quad v = v_1 + \beta, \quad w = w_1 + \gamma,$$

u_1, v_1, w_1 étant les parties de u, v, w qui résultent du mouvement de rotation, et α, β, γ, les parties qui résultent du mouvement de m relativement aux axes principaux; u_1, v_1 et w_1 seront donnés par les relations

$$u_1 = z\frac{d\omega}{dt} - y\frac{d\varphi}{dt}, \quad v_1 = x\frac{d\varphi}{dt} - z\frac{d\psi}{dt}, \quad w_1 = y\frac{d\psi}{dt} - x\frac{d\omega}{dt}.$$

Cela posé, si nous remplaçons dans l'équation (1), δx, δy et δz, successivement par udt, vdt, wdt et par u_1dt, v_1dt, w_1dt, ce qui est toujours permis, il viendra

$$\sum m[(u_1+\alpha)^2+(v_1+\beta)^2+(w_1+\gamma)^2] = \sum m[X(u_1+\alpha)+Y(v_1+\beta)+Z(w_1+\gamma)],$$

et

$$\sum m[(u_1+\alpha)u_1+(v_1+\beta)v_1+(w_1+\gamma)w_1] = \sum m(Xu_1+Yv_1+Zw_1);$$

retranchant ces deux équations l'une de l'autre, on trouvera

$$\sum m(u_1\alpha+\alpha^2+v_1\beta+\beta^2+w_1\gamma+\gamma^2) = \sum m(X\alpha+Y\beta+Z\gamma),$$

d'où

$$\sum m(u_1\alpha+v_1\beta+w_1\gamma) = \sum m(X\alpha+Y\beta+Z\gamma) - \sum m(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$$

Appelant encore K la somme des forces vives du système, on aura

$$K=\sum m(u^2+v^2+w^2)=\sum m(u_1^2+v_1^2+w_1^2)+2\sum m(u_1\alpha+v_1\beta+w_1\gamma)+\sum m(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2);$$

cette valeur, en vertu de l'équation qu'on vient de trouver, se changera en la suivante :

$$K=\sum m(u_1^2+v_1^2+w_1^2)+2\sum m(X\alpha+Y\beta+Z\gamma)-\sum m(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2).$$

Le premier terme de cette expression représente la somme des forces vives du système correspondant au seul mouvement de rotation, et les autres termes ne dépendent que des mouvements relatifs des diverses parties du système; or nous verrions exactement, comme dans le cas d'un corps solide, que $\sum m(u_1^2+v_1^2+w_1^2)$ est un maximum; donc nous pouvons encore dire que l'axe spontané de rotation est toujours tel que la somme des forces vives K du système soit un maximum.

Si l'on ne fait pas abstraction du mouvement de translation, on trouvera encore que la somme des forces vives est un maximum; en effet, puisqu'on ne néglige plus aucune partie du mouvement, cette somme des forces vives sera la même, quel que soit l'axe spontané qu'on considère; on peut donc regarder le mouvement de translation comme étant celui du centre de gravité, et la rotation comme s'effectuant autour de l'axe spontané correspondant à ce point. Si l'on conserve les mêmes notations que précédemment, qu'on représente de plus par a, b, c, les trois composantes de la vitesse du centre de gravité, et par U, V, W, les composantes de la vitesse totale du point m, on aura

$$U=a+u_1+\alpha,\quad V=b+v_1+\beta,\quad W=c+w_1+\gamma;$$

la somme des forces vives K du système sera donc

$$K=\sum m(U^2+V^2+W^2)$$
$$=(a^2+b^2+c^2)\sum m+\sum m[(u_1+\alpha)^2+(v_1+\beta)^2+(w_1+\gamma)^2]+2\sum m[a(u_1+\alpha)+b(v_1+\beta)+c(w_1+\gamma)].$$

Mais d'après les valeurs de u_1, v_1, w_1 données précédemment, et parce que, avant le mouvement, le centre de gravité est à l'origine, on a les relations suivantes :

$$\sum mau_1 = 0, \quad \sum mbv_1 = 0, \quad \sum mcw_1 = 0;$$

de plus, si x', y', z' sont les coordonnées du point m rapportées aux axes principaux mobiles qui passent par le centre de gravité, on aura au commencement du mouvement,

$$\alpha = \frac{dx'}{dt}, \quad \beta = \frac{dy'}{dt}, \quad \gamma = \frac{dz'}{dt};$$

d'où l'on conclut

$$\sum ma\alpha = 0, \quad \sum mb\beta = 0, \quad \sum mc\gamma = 0;$$

la valeur de K se réduit donc à

$$\mathrm{K} = (a^2 + b^2 + c^2)\sum m + \sum m\left[(u_1 + \alpha)^2 + (v_1 + \beta)^2 + (w_1 + \gamma)^2\right];$$

mais le second terme est la somme des forces vives du système, abstraction faite du mouvement de translation, et nous avons vu que cette somme est un maximum; donc K est aussi un maximum.