JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

MAURICE LEVY

Mémoire sur la théorie des plaques élastiques planes

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 3 (1877), p. 219-306.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1877_3_3__219_0>

Mémoire sur la théorie des plaques élastiques planes;

PAR M. MAURICE LEVY.

Les formules que Poisson et Kirchhoff ont déduites des équations générales de la théorie mathématique de l'élasticité, pour représenter la flexion d'une plaque mince, fournissent la même équation aux dérivées partielles du quatrième ordre; mais celles de Poisson comportent trois conditions à la surface et donnent lieu à un problème d'Analyse impossible toutes les fois que les forces agissantes ne sont pas telles que ces trois conditions se réduisent d'elles-mêmes à deux ; les formules de Kirchhoff, au contraire, ne comportent que deux conditions à la surface, et donnent lieu à un problème d'Analyse toujours possible et déterminé.

Pour cette raison, la théorie de Kirchhoff est généralement admise, sans que l'on ait pu pourtant découvrir la moindre erreur dans celle de Poisson. M. Boussinesq, dans un Mémoire publié au tome XVI du *Journal de M. Liouville,* lui en attribue une; mais je montre qu'elle n'existe pas; je dis, de plus, que les deux théories, si discordantes en apparence, sont au fond identiques, et que celle si séduisante de Kirchhoff n'est, quoiqu'elle conduise à un problème d'Analyse toujours soluble, applicable que dans les cas très-exceptionnels où celle de Poisson s'applique elle-même, et que, dans ces cas, elles fournissent toutes deux des résultats identiques.

Pour mettre le problème en équation d'une manière générale, au lieu de considérer dès l'abord, comme on l'a fait, une question d'approximation, je traite d'abord un certain nombre de problèmes rigoureux, relatifs à des cylindres de hauteur quelconque; j'arrive à plusieurs résultats en eux-mêmes intéressants, et de nature à élucider beaucoup le problème si obscur des plaques; parmi ces résultats, je citerai ceux-ci : 1° quelles que soient les pressions exercées sur la surface latérale d'un corps cylindrique ou prismatique sur la masse entière et sur les bases duquel n'agissent pas de forces, il est impossible qu'une ligne matérielle, naturellement droite et perpendiculaire sur les deux bases, se transforme, par suite de la déformation élastique, en une courbe algébrique d'un degré supérieur au troisième; 2° pour qu'elle puisse se transformer en une courbe algébrique (d'un degré nécessairement égal ou inférieur au troisième), il faut qu'entre la résultante de translation et le moment résultant des pressions agissant le long de chacune des génératrices de la surface latérale il existe une certaine relation.

Une fois obtenus, les résultats rigoureux que nous cherchons relativement à des cylindres de hauteur quelconque, nous les appliquons à des cylindres de hauteur très-petite, c'est-à-dire à des plaques. Cette marche, on le conçoit, est incomparablement plus nette et moins sujette à méprises que celle qui consiste à faire les approximations sur les équations aux dérivées partielles servant de point de départ. C'est d'une façon analogue qu'a opéré M. de Saint-Venant, dans son Mémoire sur la torsion des prismes.

Après avoir mis ainsi le problème en équation, en faisant abstraction des forces telles que la pesanteur agissant sur la masse entière de la plaque, pour introduire ces forces sans reprendre des calculs qui deviendraient extrêmement compliqués, nous employons une méthode qui constitue une sorte d'extension de la méthode de la variation des constantes arbitraires; elle pourrait se nommer la méthode de la variation de la forme des fonctions arbitraires. Elle consiste, en effet, à modifier la forme des diverses fonctions qui entrent dans nos équations, de façon telle que, sans cesser de satisfaire aux conditions sur les bases, lesquelles ne changent pas, elles puissent satisfaire aux nouvelles équations d'équilibre intérieur résultant de l'introduction des forces agissant sur la masse de la plaque et aux nouvelles conditions sur la surface latérale.

Une fois les forces proportionnelles aux masses introduites, le théorème de d'Alembert fournit les équations du mouvement.

Nous appliquons notre théorie à l'équilibre et au mouvement de la plaque circulaire, soit libre, soit appuyée, soit encastrée sur son pourtour. Dans le cas de l'équilibre, nos formules permettent de calculer en termes finis la flèche au centre de la plaque appuyée ou encastrée, quelle que soit la répartition des forces extérieures; dans le cas du mouvement, le mouvement vibratoire du centre de la plaque ne dépend que des déplacements moyens et des vitesses moyennes sur les circonférences concentriques à la plaque et non des déplacements initiaux et vitesses initiales imprimés à chaque point. Enfin, si l'on suppose tout symétrique autour du centre, nos formules coïncident avec celles de Poisson, qui, dans ce cas particulier, le seul qu'il ait traité, se trouvent satisfaire à toutes les conditions du problème.

I.

Sur les difficultés qui subsistent dans la théorie des plaques minces.

C'est Lagrange qui, le premier, à l'occasion des travaux de M^lle^ Sophie Germain, a donné, sans démonstration, l'équation à différences partielles du quatrième ordre dont dépend le problème, et cette équation a été retrouvée depuis, par les moyens les plus divers; elle ne peut pas faire doute, et c'est seulement sur la possibilité de satisfaire aux conditions à la surface, conditions dont Lagrange ne s'est pas occupé, que porte la difficulté.

Kirchhoff, dans son beau Mémoire : *Uber das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastichen Scheibe*, publié au tome L du « Journal de Crelle », et devenu classique en Allemagne, montre facilement que M^lle^ Sophie Germain trouve des conditions à la surface, en général incompatibles avec l'équation à différences partielles à satisfaire.

Cela n'a rien de surprenant, les travaux, d'ailleurs remarquables, de M^lle^ Sophie Germain étant basés sur une hypothèse que la théorie mathématique de l'élasticité est venue infirmer.

Ce qui est, au contraire, très-inattendu, c'est que Kirchhoff montre aussi que Poisson, qui, dans son Mémoire de 1828, s'appuie pourtant uniquement sur les équations générales de la théorie mathématique de l'élasticité, en faisant un calcul d'approximation très-rationnel, est néanmoins conduit, lui aussi, à un problème d'Analyse dont les données sont, en général, incompatibles.

Supposons une plaque d'épaisseur uniforme et très-petite 2ε, dont le plan moyen pris pour plan des xy soit, pour abréger le langage, regardé comme horizontal, en sorte que la coordonnée verticale z d'un point quelconque de la plaque varie entre les limites $-\varepsilon$ et $+\varepsilon$, et reste, par suite, très-petite. Sur la masse entière de la plaque agissent des forces telles que la pesanteur; sur son pourtour cylindrique, des pressions connues ou à déterminer; sur ses bases, des pressions nulles.

Soient u, v et w les composantes parallèles aux axes, du déplacement élastique d'un de ses points; Poisson admet que les trois fonctions u, v, w et, par suite, celles qui expriment les composantes des forces élastiques, sont développables suivant les puissances positives de la quantité très-petite z, et il conduit son calcul d'approximation de façon à négliger les quantités de l'ordre de z^2 ou ε^2 dans les pressions qui sont de l'ordre de z ou de ε et les quantités de l'ordre de ε^3 dans celles des pressions qui sont de l'ordre de ε^2. Dans ce dernier cas sont les pressions qui s'annulent sur les deux bases, c'est-à-dire pour $z = \pm\varepsilon$, puisque, si l'on admet qu'elles sont susceptibles d'être représentées approximativement par une fonction algébrique en z, elles contiennent nécessairement le facteur $\varepsilon^2 - z^2$, et sont, par suite, au moins du second degré.

Voici les résultats auxquels il arrive :

1° W_0 étant une fonction des deux seules variables x et y qui représente le déplacement vertical d'un point du plan moyen, et ce plan étant supposé sans tension, ce que Poisson ne suppose pas, mais ce que nous admettrons dans cet exposé de son travail, pour élaguer tout ce qui ne donne pas lieu à difficulté, les composantes u, v, w du déplacement d'un point situé à la distance z du plan moyen peuvent être sensiblement représentées par les expressions

$$(a) \qquad u = -\frac{\partial W_0}{\partial x} z, \quad v = -\frac{\partial W_0}{\partial y}, \quad w = W_0.$$

Ces équations expriment, comme Poisson le fait remarquer, qu'une petite ligne droite primitivement verticale ou normale au plan moyen reste, après la déformation, sensiblement droite et normale à la surface moyenne déformée.

2° La fonction W_0, au moyen de laquelle se trouvent ainsi exprimées toutes les inconnues du problème, doit satisfaire à l'équation à différences partielles du quatrième ordre déjà trouvée par les prédécesseurs de Poisson

$$(b) \qquad \frac{d^4 W_0}{dx^4} + 2\frac{d^4 W_0}{dx^2 dy^2} + \frac{d^4 W_0}{dy^4} = f(x, y),$$

f étant une fonction donnée dépendant des forces proportionnelles aux masses qui agissent sur la plaque.

3° Sur le contour du plan moyen, c'est-à-dire sur sa ligne d'intersection avec le cylindre formant la surface latérale de la plaque, la fonction W_0 doit satisfaire à trois conditions. Elles expriment que les pressions extérieures agissant le long de l'une quelconque des génératrices de ce cylindre et les forces élastiques agissant le long de cette même génératrice se feraient équilibre si cette petite ligne était rigide.

Soient ab, $a_1 b_1$ deux génératrices infiniment voisines de ce cylindre, en sorte que $ab = a_1 b_1 = 2\varepsilon$; soit ds leur distance comptée sur la courbe que forme le contour du plan moyen.

Transportons toutes les pressions extérieures agissant sur le rectangle aba_1b_1 en son centre, c'est-à-dire au point milieu de l'élément linéaire ds, comme si ce rectangle faisait partie d'un système rigide.

Dans l'hypothèse où nous nous plaçons d'une tension nulle sur le plan moyen, la résultante de translation de ces forces est verticale ou parallèle aux génératrices ab, $a_1 b_1$; appelons-la $Z_0 ds$; quant à l'axe du couple résultant, il est clair qu'il est nécessairement situé dans le plan moyen; appelons $\mathfrak{T} ds$ et $\mathfrak{M} ds$ ses composantes suivant la tangente et la normale à la courbe qui limite le plan moyen.

Transportons de la même manière les forces élastiques qui agissent sur le rectangle aba_1b_1; nommons, suivant une notation de M. de Saint-Venant, $\overline{Z_0} ds$, $\overline{\mathfrak{T}} ds$, $\overline{\mathfrak{M}} ds$ leur résultante de translation et les composantes de l'axe de leur couple résultant.

Les équations de Poisson signifient que, sur tout le périmètre, on doit avoir

$$(c) \qquad \begin{cases} \overline{Z_0} + Z_0 = 0, \\ \overline{\mathfrak{M}} + \mathfrak{M} = 0, \\ \overline{\mathfrak{T}} + \mathfrak{T} = 0. \end{cases}$$

Et, comme les forces élastiques $\overline{Z}_0$, $\overline{\mathfrak{T}}$, $\overline{\mathfrak{N}}$ s'expriment au moyen des dérivées des déplacements u, v, w, et par suite aussi, en vertu de (a) au moyen des dérivées de la fonction inconnue W_0, on a trois conditions au pourtour auxquelles cette fonction doit satisfaire.

Or Kirchhoff montre que ces trois conditions à la surface ou au pourtour sont incompatibles avec l'équation à différences partielles qui régit la fonction W_0; que si l'on assujettit cette fonction à satisfaire à cette équation et à deux des conditions à la surface, on ne dispose plus des arbitraires nécessaires pour satisfaire à la troisième, en sorte que, pour que le problème d'Analyse soit possible, il faut qu'une certaine condition soit remplie entre les forces extérieures données qui agissent sur la plaque, résultat qui semble absurde, étant donnée la question de Physique dont ce problème d'Analyse est la traduction.

Cependant il est impossible, il me paraît en tous cas impossible, de découvrir une erreur dans le Mémoire de Poisson; l'équation à différences partielles (b) trouvée pour la fonction W_0 n'a jamais été mise en doute; les conditions à la surface données par Poisson sont *rigoureusement* nécessaires; on pourrait douterqu'elles soient suffisantes; si, en effet, il s'agissait d'un cylindre de hauteur 2ε finie et d'un problème à résoudre rigoureusement, il ne suffirait pas d'exprimer, comme le fait Poisson, que les forces extérieures élastiques agissant le long de chaque génératrice du cylindre contournant satisfont aux conditions d'équilibre d'un système invariable, mais qu'il y a équilibre entre la force extérieure et la force élastique agissant sur *chacun des éléments superficiels* de ce cylindre. Or ces dernières conditions entraînent celles de Poisson, en sorte que celles-ci sont rigoureusement nécessaires.

Les calculs de Poisson montrent, et c'est là leur caractère et le caractère même du problème des plaques, qu'ils sont suffisants au degré d'approximation qu'il a cherché; mais leur nécessité n'est pas seulement une question d'approximation; elle est de rigueur.

Comment alors expliquer que ces conditions puissent être analytiquement surabondantes, quand d'ailleurs on sait que le problème général d'Analyse auquel donne lieu la théorie mathématique de l'élasticité est possible et déterminé?

Sans s'arrêter à cette question, Kirchhoff, dans le Mémoire susmentionné, reprend le problème d'une autre manière. Se bornant au cas où la tension du plan moyen est nulle, il commence par poser cette hypothèse, analogue à celle que fait Jacob Bernoulli sur les verges élastiques et à celle que Navier avait déjà faite en 1820 sur le problème même des plaques [*], qu'une petite ligne naturellement droite et normale au plan moyen reste, après la déformation : 1° droite, 2° normale au plan moyen déformé.

En introduisant ces hypothèses dans l'expression du potentiel des forces élastiques et écrivant que la variation du potentiel pour un déplacement virtuel δu, δv, δw est égale au travail correspondant des forces extérieures appliquées, soit sur la masse entière, soit sur la surface latérale de la plaque, il est conduit, pour définir la fonction W_0, à la même équation à différences partielles du quatrième ordre que Poisson; mais il trouve que cette fonction n'est assujettie à satisfaire qu'à deux conditions à la surface au lieu de trois. L'une de ces conditions est identique à l'une de celles de Poisson; l'autre est une combinaison particulière des deux autres conditions de Poisson.

Par suite de la réduction à deux des conditions au pourtour, le problème devient possible et déterminé.

Mais alors se présente cette question très-grave : Comment deux géomètres traitant le même problème, en faisant usage l'un et l'autre des principes de la théorie mathématique de l'élasticité, les employant seulement sous deux formes analytiques différentes, mais en réalité absolument équivalentes, peuvent-ils arriver à des solutions différentes, et tellement différentes que l'un rencontre un problème d'Analyse insoluble là où l'autre trouve un problème possible et déterminé?

Cette circonstance, rapporte M. de Saint-Venant dans son grand Ouvrage sur les leçons de Navier, a fait dire à M. Gehring, un disciple

---

[*] *Mémoire sur la flexion des plans élastiques.* Cet admirable travail n'a qu'un défaut : il est entaché d'une erreur de calcul, d'une erreur d'inadvertance tout à fait inexplicable, qui, je crois, n'a pas été remarquée (elle se trouve au § 4 du Mémoire autographié qui existe à la Bibliothèque de l'École des Ponts et Chaussées), et sans laquelle Navier serait nécessairement arrivé à des formules tout à fait analogues à celles données trente ans plus tard par Kirchhoff. Mais ce Mémoire méritera toujours d'être lu et étudié comme un modèle de ce que peuvent les moyens les plus primitifs dans des mains aussi habiles. Sans le secours de la théorie mathématique de l'élasticité, dont il est, comme on le sait, le premier fondateur, mais qu'il ne créa que l'année suivante, ne disposant que du précepte « *Ut tensio sic vis* », il arrive à ses fins par les moyens les plus rapides et les plus élégants.

de Kirchhoff, dans une thèse inaugurale [*], que l'emploi du potentiel ou du calcul des variations peut *seul* conduire pour chaque question au nombre justement nécessaire et suffisant de conditions à remplir [**].

N'ayant eu occasion de connaître le travail de M. Gehring que par l'analyse qu'en donne Clebsch dans son Ouvrage sur la théorie mathématique de l'élasticité, je ne vois pas très-bien le sens qu'il attribue à la thèse qu'il soutient, et qui, par elle-même, semble n'en avoir aucun. C'est, en effet, comme si l'on soutenait que le principe des vitesses virtuelles peut *seul* conduire, dans chaque question de Statique, au nombre justement nécessaire et suffisant de conditions à remplir pour l'équilibre, et que toute autre méthode pourrait donner trop ou trop peu de conditions.

M. de Saint-Venant, après avoir exposé les difficultés dont nous venons de parler, ajoute : « Ce sujet est délicat. Nous ne doutons pas que les équations aux limites de M. Kirchhoff ne soient les véritables ; mais en quoi celles de Poisson sont-elles fausses? C'est ce que nous n'avons pas encore eu le loisir d'étudier à fond. »

Je voudrais montrer que les deux théories de Poisson et de Kirchhoff, si différentes en apparence, sont, au fond, identiques; que quand celle de Poisson n'est pas applicable, ce qui a lieu toutes les fois qu'une de ses trois conditions ne rentre pas dans les deux autres, celle de Kirchhoff ne l'est pas davantage.

Poisson considère, et c'est bien évidemment ainsi que le problème se pose, une plaque taillée dans un solide élastique et isotrope, dans un solide naturel ; il prend les équations qui régissent l'équilibre d'un tel solide ; il développe en séries, comme il a été dit, les fonctions inconnues ; il s'arrête aux premiers termes des séries et il reconnaît, chemin faisant et sans l'avoir cherché, que ce calcul d'approximation équivaut à supposer que les petites lignes primitivement droites et normales à la surface moyenne restent *sensiblement* telles, c'est-à-dire restent telles aux termes près qu'il a négligés.

Poursuivant ses calculs, il est conduit à un problème d'Analyse im-

---

[*] *De æquationibus differentialibus quibus æquilibrium et motus laminæ cristallinæ definiuntur dissertatio inauguralis.*

[**] *Résumé des leçons de Navier*, avec Notes, Appendice de M. de Saint-Venant. — Partie historique, page CCLXVIII.

possible ; de là on ne peut, à aucun degré, déduire qu'il se soit trompé ; la seule chose à conclure, et cette conclusion est rigoureuse et me paraît très-importante, c'est le théorème suivant :

Étant donnée une plaque mince dont les deux bases ne sont soumises à aucune pression, il n'est pas permis, en général, même lorsque, dans l'évaluation des pressions qui sont de l'ordre de l'épaisseur de la plaque, on néglige les quantités de l'ordre du carré de cette épaisseur, mais que, dans les pressions qui sont de l'ordre du carré de l'épaisseur, on ne néglige que le cube de cette dimension, d'admettre que la plaque se déforme de façon que chaque ligne primitivement droite et normale au plan moyen reste, après la déformation, droite et normale à la surface moyenne déformée.

Pour que cela puisse être admis, il faut qu'entre les forces qui la sollicitent, tant sur son pourtour cylindrique que sur sa masse entière, il existe une certaine relation.

Voilà, croyons-nous, le résultat absolument certain et le seul que l'on puisse tirer du beau travail de Poisson.

Nous établissons plus loin un théorème beaucoup plus général et *rigoureux*.

Maintenant Kirchhoff, lui, admet *a priori* que, dans la plaque qu'il étudie, les petites lignes droites normales à la surface moyenne restent telles après la déformation ; il porte cette hypothèse dans l'expression du potentiel ou du travail virtuel des forces intérieures ; il la porte aussi dans les expressions des déplacements virtuels δu, δv, δw attribuées à chaque point de la plaque et qui entrent dans l'expression du travail virtuel des forces extérieures et il écrit que la somme des travaux de toutes les forces tant extérieures qu'intérieures est nulle pour les déplacements virtuels dont les expressions δu, δv, δw *ont été ainsi simplifiées d'après son hypothèse.* Cela revient à dire qu'il applique le principe des vitesses virtuelles non pas à tous les déplacements compatibles avec la constitution d'un corps solide naturel, ni même à des déplacements que l'on soit assuré d'avance être compatibles avec cette constitution, mais à des déplacements *supposés,* aux déplacements en vertu desquels chaque petite ligne droite et normale à la surface moyenne reste telle après le déplacement. Ces déplacements, ainsi admis *a priori,* sont-ils compatibles avec la constitution d'une plaque taillée dans un solide naturel ? C'est justement ce qui est en question, c'est-à-dire que pour s'en assurer il faudrait que le problème à résoudre fût résolu; j'ajoute que cela n'est même plus en question après la proposition que j'ai énoncée plus haut comme la conséquence certaine de la théorie de Poisson; cette proposition montre justement que les déplacements virtuels supposés *a priori* par Kirchhoff sont, en général, incompatibles avec la constitution d'une plaque prise dans un solide élastique et isotrope.

Donc, en général, les équations de Kirchhoff ne s'appliquent pas à une telle plaque; elles s'appliquent à une plaque de constitution idéale, semi-élastique, semi-rigide, à savoir : élastique dans toutes les directions parallèles au plan moyen; rigide, ou tout au moins inflexible dans le sens perpendiculaire; en un mot, à une plaque dont les diverses parties seraient censées *liées* les unes aux autres, de telle façon que les déplacements *supposés* puissent se produire et soient les seuls pouvant se produire.

On conçoit très-bien qu'en admettant ainsi entre les molécules du corps que l'on étudie des liaisons qui réduisent le nombre et la nature des déplacements virtuels possibles, on réduira le nombre des conditions d'équilibre.

Rien n'est d'ailleurs plus légitime que d'étudier ainsi des systèmes de constitution idéale, des systèmes semi-rigides, de même qu'il est légitime d'étudier en Mécanique des corps entièrement rigides, quoique de tels corps n'existent pas dans la nature. Toute la question est de savoir dans quelle mesure les résultats obtenus pourront s'appliquer aux solides naturels; or il ressort précisément du théorème donné plus haut que les résultats obtenus pour les systèmes étudiés par Kirchhoff ne seront pas, en général, applicables aux solides naturels; ils ne sont applicables que dans les cas particuliers où, entre les forces qui agissent sur les plaques, existe une relation telle que le mode particulier de déformation qu'il supposait puisse se produire, c'est-à-dire dans les cas où l'une des trois conditions à la surface de Poisson se trouve être satisfaite d'elle-même, soit identiquement, soit en vertu des deux autres; mais alors le problème d'Analyse de Poisson devient possible et conduit aux mêmes résultats que les formules de Kirchhoff.

Ainsi, quand la théorie de Poisson n'est pas applicable, celle de Kirchhoff ne l'est pas non plus, et *vice versa*. C'est ce qui devait être, parce qu'au fond elles sont absolument identiques.

Dans ses admirables leçons de Physique mathématique, Kirchhoft est revenu tout récemment sur cette question en cherchant à justifier son hypothèse. Mais déjà de ce qui précède il ressort qu'il est impossible d'en donner une démonstration qui ne comporte pas une infinité de cas d'exceptions. Dans une Note insérée aux *Comptes rendus* du 30 avril 1877, nous en avons cité un parmi un nombre illimité que nous donnerons plus loin.

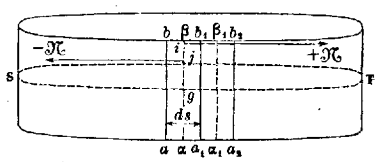
Mais il y a plus : dans cette Note nous montrons que, quand les forces agissant sur le pourtour de la plaque sont discontinues, il arrive en général que les formules de M. Kirchhoff cessent même d'avoir un sens, ce qui entraîne, en principe, leur rejet dans tous les cas; car, en vertu du principe dû à M. de Saint-Venant, de la superposition des effets des forces élastiques, on est toujours en droit de regarder tout effet de forces continues s'exerçant sur un corps élastique comme résultant de la superposition des effets d'un nombre limité ou illimité de systèmes de forces discontinues, en sorte que le seul problème qu'il soit nécessaire et suffisant de savoir résoudre, c'est celui relatif à l'effet d'une force unique de position quelconque sur un corps élastique donné.

M. Boussinesq, persuadé que Poisson s'était trompé, a, dans un Mémoire publié au tome XVI du *Journal de M. Liouville*, cherché à mettre son erreur en évidence et aussi à établir les équations de Kirchhoff sans faire l'hypothèse qui sert de point de départ à l'éminent savant allemand.

Cela équivaut à dire que M. Boussinesq a cherché à établir que les équations de Kirchhoff sont bien applicables aux plaques naturelles, et à montrer en quoi celles de Poisson seraient erronées.

Ce qui précède démontre déjà que le but que s'est proposé M. Boussinesq ne peut être atteint; mais il n'est pas sans intérêt d'indiquer par où pèche son raisonnement que voici.

Fig. 1.



Soit (*fig.* 1) ab, a_1b_1, a_2b_2, ... une suite de génératrices infiniment voisines et équidistantes du cylindre contournant la plaque; soit ds l'équidistance de ces petites lignes qui ont toutes pour longueur l'épaisseur 2ε de la plaque.

Appelons, comme précédemment, $Z_0 ds$ la résultante de translation des forces extérieures agissant sur le rectangle $ab\,a_1\,b_1$, et qu'on pourrait nommer l'*effort tranchant;* $\mathfrak{E}\,ds$ et $\mathfrak{M}\,ds$ les composantes tangentielle et normale de l'axe du couple résultant, en sorte que $\mathfrak{E}\,ds$ est l'axe d'un couple dont le plan est normal au cylindre contournant et qu'on pourrait appeler le *couple de flexion*, et $\mathfrak{M}\,ds$ l'axe d'un couple dont le plan est tangent à ce cylindre et qu'on pourrait appeler le *couple de torsion.*

Ce dernier couple, dit M. Boussinesq, peut être remplacé par deux forces $\mathfrak{M}$ et $-\mathfrak{M}$ appliquées en deux points i et j de la ligne moyenne du rectangle $ab\,a_1\,b_1$ et distants de ds; puis on peut faire tourner ce couple $(\mathfrak{M}, -\mathfrak{M})$ dans son plan, de façon que la force $+\mathfrak{M}$ soit dirigée suivant ab, et celle $-\mathfrak{M}$ suivant $a_1\,b_1$.

Si l'on opère de même sur le rectangle $a_1\,b_1\,a_2\,b_2$, on aura de même un couple dont l'une des forces, celle qui est égale à $+\left(\mathfrak{M} + \frac{d\mathfrak{M}}{ds}ds\right)$ sera dirigée suivant la génératrice $a_1\,b_1$, en sorte que la résultante des forces provenant des deux couples dirigée suivant cette ligne sera $\frac{d\mathfrak{M}}{ds}ds$; à cette force vient s'ajouter celle $Z_0 ds$ de même direction, en sorte que l'on aurait au total :

1° La force verticale

$$\left(Z_0 + \frac{d\mathfrak{M}}{ds}\right) ds;$$

2° Le couple de flexion $\mathfrak{E}\,ds$.

En opérant de même sur les forces élastiques, on les réduirait aussi à une force verticale qui, d'après nos notations antérieures, serait

$$\left(\overline{Z}_0 + \frac{d\overline{\mathfrak{M}}}{ds}\right) ds$$

et à un couple

$$\overline{\mathfrak{E}}\,ds.$$

Les équations de conditions à remplir sur le pourtour seraient donc au nombre de deux seulement

$$\overline{\mathfrak{C}} + \mathfrak{C} = 0, \quad \overline{Z}_0 + \frac{d\overline{\mathfrak{N}}}{ds} + Z + \frac{d\mathfrak{N}}{ds} = 0.$$

Ce sont bien celles trouvées d'une autre manière par Kirchhoff.

C'est pour n'avoir pas songé à faire tourner ainsi ces couples ($\mathfrak{N}$, $-\mathfrak{N}$) que Poisson se serait, suivant M. Boussinesq, trompé et serait arrivé à une condition de trop à la surface. « Poisson, dit M. Boussinesq, à la page 244 de son Mémoire, ayant négligé de remplacer les couples parallèles au cylindre contournant par des forces dirigées suivant les génératrices de ce cylindre, et de fondre, par suite, leur effet dans celui de la composante Z_0, les a regardés comme représentant un mode d'action distinct sur chaque bande (chaque rectangle $a\,b\,a_1 b_1$), ce qui lui a donné une condition de trop. »

A priori, on admettra difficilement que dans un problème on puisse arriver à un résultat différent, suivant qu'on aura ou non remplacé un couple par un couple statiquement équivalent, si toutefois cette substitution est permise ; un artifice, quel qu'il soit, on le comprend, peut faciliter la solution d'un problème, mais non la modifier; s'il la modifie, on peut affirmer d'avance qu'il est illégitime; c'est, en effet, ce qui a lieu ici. Il n'est permis ni rigoureusement, ni approximativement, si l'on a affaire à une plaque prise dans un solide naturel, comme l'a supposé Poisson et comme le suppose M. Boussinesq, puisque son but est de se passer de l'hypothèse de Kirchhoff, de remplacer les deux forces $\mathfrak{N}$, $-\mathfrak{N}$ appliquées aux points i et j de la ligne médiane du rectangle $a\,b\,a_1 b_1$ par un autre couple statiquement équivalent dont les deux forces soient dirigées suivant les côtés ab, $a_1 b_1$ de ce rectangle. En effet, quelles que soient les forces élastiques agissant sur les différents éléments superficiels qui composent le rectangle $ab\,a_1 b_1$, de hauteur 2ε et de largeur ds, on peut les supposer appliquées aux différents points de sa ligne médiane $\alpha\beta$. Comme nous l'avons déjà fait observer plus haut, le caractère essentiel de l'approximation que Poisson a cherchée et que l'on cherche dans les plaques minces réside dans ce que, au lieu de déterminer rigoureusement ces forces, on les remplace approximativement par d'autres, par des pressions fictives, satisfaisant simplement à la condition d'avoir même résultante de translation et même moment résultant que les pressions vraies; mais il va de soi que les pressions fictives doivent s'exercer sur les mêmes éléments superficiels que les pressions vraies qu'elles remplacent approximativement : leurs points d'application doivent donc être distribués sur la ligne $\alpha\beta$. Il s'ensuit qu'on peut, sans inconvénient et dans la limite d'approximation supposée, remplacer les deux forces $\mathfrak{M}$, $-\mathfrak{M}$ appliquées aux points i et j par d'autres équivalentes, *pourvu qu'elles soient aussi appliquées en des points de la ligne* $\alpha\beta$; mais on n'est pas en droit de tourner le couple ($\mathfrak{M}$, $-\mathfrak{M}$) de façon que les points d'application des deux forces qui les composent s'éloignent de cette ligne d'une quantité infiniment petite de l'ordre de ds. Cela est évident, et, pour rendre la chose en quelque sorte palpable, il suffit de supposer une plaque appuyée sur son pourtour moyen, c'est-à-dire une plaque dont le contour moyen ST soit supposé fixe. Alors il est clair que le couple ($\mathfrak{M}$, $-\mathfrak{M}$) agissant aux points i et j produira une déformation élastique, tandis que, si on le tourne dans son plan de façon à faire agir les deux forces qui le composent aux deux extrémités de la petite ligne ds du contour moyen, il n'en produira pas, cette ligne étant supposée fixe.

Même, si l'on admettait que les lignes telles que ab, $\alpha\beta$, $a_1 b_1$, etc., primitivement normales au plan moyen, se comportent comme si elles étaient inflexibles, le déplacement du couple opéré par M. Boussinesq ne serait encore pas permis. Pour qu'il devienne licite, il faut supposer non-seulement que les droites telles que $\alpha\beta$, primitivement normales au plan moyen, restent droites après la déformation, mais encore qu'elles restent normales au plan moyen. Alors l'ensemble des deux lignes $\alpha\beta$ et ds forme un système invariable, puisque leur angle ne peut, par hypothèse, pas changer, et il devient légitime de transporter le couple ($\mathfrak{M}$, $-\mathfrak{M}$) de l'une à l'autre.

Ainsi, pour que ce déplacement de couple soit admissible, il faut justement admettre *en son entier* l'hypothèse de Kirchhoff, cette hypothèse que Kirchhoff a franchement mise en évidence au début de son ancien Mémoire, et que le but principal de M. Boussinesq et aussi de M. Gehring était d'éviter [*].

---

[*] L'examen du travail de M. Gehring, qui porte sur la déformation *finie* des plaques planes, nous conduirait en dehors des limites de notre sujet. Nous aurons

Ainsi, en résumé, la solution de Poisson n'est pas suffisante, non parce qu'elle est erronée en quelque point que ce soit, mais parce qu'elle est trop particulière, parce que, en général, elle ne permet pas de satisfaire à toutes les conditions du problème. La solution de Kirchhoff est tout aussi particulière et n'est applicable que dans les mêmes cas; en dehors de ces cas, les formules de Poisson manifestent d'elles-mêmes leur impuissance en conduisant à un problème d'Analyse impossible; l'insuffisance de celles de Kirchhoff est un peu plus cachée en ce qu'elles conduisent toujours, et c'est par là qu'elles séduisent et paraissent plus vraies que celles de Poisson, à un système d'équations différentielles soluble; mais ces équations, ne sont pas en général, applicables aux solides isotropes et le problème des plaques *élastiques et isotropes* reste à mettre en équation.

II.

Sur quelques cas particuliers du problème de l'équilibre d'un cylindre élastique.

Pour y parvenir, au lieu de prendre de suite, comme on l'a fait, un problème d'approximation, nous chercherons d'abord à résoudre un problème rigoureux; au lieu de considérer une plaque mince, nous considérerons d'abord un cylindre élastique de hauteur 2ε quelconque; nous ferons abstraction des forces telles que la pesanteur agissant sur sa masse; nous supposerons que sur ses deux bases ne s'exercent pas de pressions, mais seulement sur sa surface latérale. Le plan moyen du cylindre étant pris pour plan des xy et l'axe des z étant, par suite, parallèle à ses génératrices, nous posons la question suivante :

Est-il possible de trouver pour les composantes u, v, w des déplacements élastiques d'un point quelconque de ce corps et, par suite, pour les composantes des forces élastiques qui s'y exercent, des expressions algébriques et entières relativement à z, composées d'un nombre fini

peut-être occasion d'en parler dans un Mémoire que nous nous réservons de faire sur la déformation finie ou infiniment petite des plaques courbes.

de termes, satisfaisant en tous les points du cylindre aux équations d'équilibre élastique et satisfaisant, en outre, à la condition que les pressions soient nulles sur les deux bases? S'il existe une solution de cette forme, elle permettra d'abord de résoudre rigoureusement le problème de l'équilibre élastique des corps cylindriques dans une infinité de cas nouveaux; si, d'ailleurs, cette solution contient assez d'arbitraires pour permettre de satisfaire aux conditions sur la surface latérale, en prenant arbitrairement non pas chacune des forces agissant sur cette surface (ce qui ne pourrait pas être à cause de la forme particulière adoptée pour la solution), mais la résultante de translation et le moment résultant des pressions agissant le long de chaque génératrice, alors le problème des plaques tel qu'il est posé sera résolu. Si, au contraire, la solution cherchée n'existe pas, ou si, existant, elle ne renferme pas assez d'arbitraires pour permettre de remplir cette dernière condition, alors de ce résultat négatif on pourra tout au moins déduire que ce problème des plaques ne peut pas être résolu sous forme algébrique par rapport à z, et qu'il faut chercher quelque expression d'une autre forme.

Soit θ la dilatation cubique, en un point d'un corps élastique et isotrope; les équations d'équilibre, lorsqu'on fait abstraction des forces extérieures, peuvent s'écrire

$$(1)\qquad \begin{cases} (2k+1)\theta + \Delta_2 u = 0, \\ (2k+1)\theta + \Delta_2 v = 0, \\ (2k+1)\theta + \Delta_2 w = 0, \\ \theta = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z}, \end{cases}$$

où

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

et k est un coefficient numérique qui, d'après les idées de Poisson, de Cauchy, de Duhamel, de M. de Saint-Venant et les belles expériences de M. Cornu, devrait être pris égal à $\frac{1}{2}$.

Les composantes des pressions que nous désignons, avec Lamé, par les lettres N_i et T_i, auront pour expressions, K étant un nouveau coefficient qui est en relation très-simple avec ce qu'on appelle le module d'élasticité,

$$(2)\quad \begin{cases} N_1 = 2K\left(k\theta + \dfrac{\partial u}{\partial x}\right), & N_2 = 2K\left(k\theta + \dfrac{\partial v}{\partial y}\right), \quad N_3 = 2K\left(k\theta + \dfrac{\partial w}{\partial z}\right), \\ T_1 = K\left(\dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\right), & T_2 = K\left(\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\right), \quad T_3 = K\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right). \end{cases}$$

Pour résoudre le problème posé, développons d'abord les quatre fonctions u, v, w, θ en séries illimitées par rapport aux puissances entières et positives de z. Soit

$$(3)\quad u = \sum_i U_i \frac{z^i}{i!}, \quad v = \sum_i V_i \frac{z^i}{i!}, \quad w = \sum_i W_i \frac{z^i}{i!}, \quad \theta = \sum_i \theta_i \frac{z^i}{i!},$$

où U_i, V_i, W_i, θ_i sont quatre séries de fonctions indéterminées des deux seules variables x, y.

Si l'on porte ces expressions dans les équations (1), on obtient, pour définir ces fonctions, les quatre séries d'équations

$$(a)\qquad (2k+1)\frac{\partial \theta_i}{\partial x} + \Delta_2 U_i + U_{i+2} = 0,$$

$$(b)\qquad (2k+1)\frac{\partial \theta_i}{\partial y} + \Delta_2 V_i + V_{i+2} = 0,$$

$$(c)\qquad (2k+1)\,\theta_{i+1} + \Delta_2 W_i + W_{i+2} = 0,$$

$$(d)\qquad \theta_i = \frac{\partial U_i}{\partial x} + \frac{\partial V_i}{\partial y} + W_{i+1},$$

qui doivent avoir lieu pour toutes les valeurs 0, 1, 2, 3, ... de i jusqu'à l'infini.

Si l'on différentie la première par rapport à x, la seconde par rapport à y; qu'on les ajoute à la troisième, où i est remplacé par $i+1$, il viendra, à cause de la dernière,

$$\Delta_2 \theta_i + \theta_{i+2} = 0,$$

qui fournit θ_2, θ_3, θ_4, ... au moyen des deux fonctions θ_0, θ_1, lesquelles restent seules arbitraires.

Le symbole Δ_2 équivaut simplement, pour les fonctions à deux variables, à $\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$. Introduisons encore la notation symbolique

$$\Delta_2^i F=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^i F,$$

en sorte que

$$\Delta_2^0 F=F,\quad \Delta_2^1 F=\Delta_2 F.$$

On tire de la dernière équation

$$\text{(I)}\qquad \theta_{2j}=(-1)^j\Delta_2^j\theta_0,\quad \theta_{2j+1}=(-1)^j\Delta_2^j\theta_1,$$

qui s'appliquent à toutes les valeurs de j, y compris $j=0$.

Les θ_i étant ainsi connus, l'équation (a) fournit U_2, U_3, U_4, ... au moyen des deux fonctions U_0, U_1 qui restent arbitraires; et de même l'équation (b) fournit tous les V_i au moyen de deux nouvelles fonctions arbitraires V_0, V_1. Il vient ainsi

$$\text{(II)}\qquad \left\{\begin{aligned} U_{2j} &=(-1)^j\left[\Delta_2^j U_0+j(2k+1)\frac{\partial\Delta_2^{j-1}\theta_0}{\partial x}\right],\\ U_{2j+1} &=(-1)^j\left[\Delta_2^j U_1+j(2k+1)\frac{\partial\Delta_2^{j-1}\theta_1}{\partial x}\right],\end{aligned}\right.$$

$$\text{(III)}\qquad \left\{\begin{aligned} V_{2j} &=(-1)^j\left[\Delta_2^j V_0+j(2k+1)\frac{\partial\Delta_2^{j-1}\theta_0}{\partial y}\right],\\ V_{2j+1} &=(-1)^j\left[\Delta_2^j V_1+j(2k+1)\frac{\partial\Delta_2^{j-1}\theta_1}{\partial y}\right],\end{aligned}\right.$$

applicables aussi à toutes les valeurs de j, y compris $j=0$.

L'équation (d) fournira ensuite tous les W_i, *excepté* W_0, au moyen des U_i, V_i, θ_i, c'est-à-dire au moyen des six fonctions arbitraires θ_0, θ_1, U_0, U_1, V_0, V_1 et de leurs dérivées. Il vient

$$\text{(IV)}\qquad \left\{\begin{aligned} W_{2j-1} &=(-1)^j\left\{\Delta_2^{j-1}\left(\frac{\partial U_0}{\partial x}+\frac{\partial V_0}{\partial y}\right)+[j(2k+1)-2k-2]\Delta_2^{j-1}\theta_0\right\},\\ W_{2j} &=(-1)^j\left\{\Delta_2^{j-1}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}+\frac{\partial V_1}{\partial y}\right)+[j(2k+1)-2k-2]\Delta_2^{j-1}\theta_1\right\}.\end{aligned}\right.$$

Ces nouvelles équations ne s'appliquent que pour $j=1, 2, 3, \ldots$; pour $j=0$, elles n'ont pas de sens.

Nous connaissons maintenant toutes les fonctions θ_i, U_i, V_i, W_i, sauf celle W_0; mais il nous reste à satisfaire à l'équation (c). Si l'on y porte toutes les expressions que nous venons de trouver, on reconnaît qu'elle est satisfaite d'elle-même pour toutes les valeurs de i, sauf pour $i = 0$; et pour cette dernière valeur elle devient

$$\Delta_2 W_0 + W_2 + (2k+1)\theta_1 = 0,$$

ou, en remplaçant W_2 par sa valeur (IV),

$$\text{(V)} \qquad \Delta_2 W_0 = \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} - (2k+2)\theta_1,$$

qui sert à définir W_0.

Cette distinction, qui s'établit ainsi dès le début entre la fonction W_0 et toutes les autres, mérite d'être remarquée; il était assez naturel de s'attendre, d'après la forme des équations de l'élasticité, à ce que les fonctions indéterminées U_i, V_i, W_i s'expriment au moyen de six fonctions arbitraires. Il se trouve qu'elles s'expriment au moyen de six pareilles fonctions θ_0, θ_1, U_0, U_1, V_0, V_1, et au moyen d'une septième fonction W_0, qui n'est pas entièrement arbitraire, mais qui est définie par une équation à dérivées partielles du second ordre et renferme, par suite, des arbitraires. Cette fonction W_0 est précisément celle qui, dans les plaques, donne la flexion du plan moyen; elle est la seule inconnue du problème des plaques dans les théories que nous avons exposées et, dans une théorie plus complète, elle restera toujours l'inconnue principale; on comprend donc que cette particularité que nous signalons ici et qui mérite d'être remarquée même au point de vue analytique, en ce qu'elle dénote une fois de plus la difficulté de connaître à l'avance le nombre et la nature des arbitraires qui s'introduisent dans les intégrales, même les plus particulières, des équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur, aura une grande importance dans l'étude des plaques.

Si l'on porte ces valeurs des U_i, V_i, W_i, θ_i dans les expressions (2) des forces élastiques et qu'on pose, pour abréger,

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} N_1 &= \sum_i N_1^{(i)} \frac{z^i}{i!}, \quad & N_2 &= \sum_i N_2^{(i)} \frac{z^i}{i!}, \quad & N_3 &= \sum_i N_3^{(i)} \frac{z^i}{i!}; \\ T_1 &= \sum_i T_1^{(i)} \frac{z^i}{i!}, \quad & T_2 &= \sum_i T_2^{(i)} \frac{z^i}{i!}, \quad & T_3 &= \sum_i T_3^{(i)} \frac{z^i}{i!}, \end{aligned} \right.$$

on aura, en faisant les réductions convenables, pour toutes les valeurs de j autres que $j = 0$,

$$
(\mathrm{VI})\left\{
\begin{array}{ll}
(1) & \left\{\begin{array}{l}
N_1^{(2j)} = (-1)^j\, 2K \left\{ k\Delta_2^j \Theta_0 + (2k+1)j \dfrac{\partial^2 \Delta_2^{(j-1)}\Theta_0}{\partial x^2} + \Delta_2^j \dfrac{\partial U_0}{\partial x} \right\}, \\
N_1^{(2j+1)} = (-1)^j\, 2K \left\{ k\Delta_2^j \Theta_1 + (2k+1)j \dfrac{\partial^2 \Delta_2^{(j+1)}\Theta_1}{\partial x^2} + \Delta_2^j \dfrac{\partial U_1}{\partial x} \right\},
\end{array}\right. \\
(2) & \left\{\begin{array}{l}
N_2^{(2j)} = (-1)^j\, 2k \left\{ k\Delta_2^j \Theta_0 + (2k+1)j \dfrac{\partial^2 \Delta_2^{(j-1)}\Theta_0}{\partial y^2} + \Delta_2^j \dfrac{\partial U_0}{\partial y} \right\}, \\
N_2^{(2j+1)} = (-1)^j\, 2K \left\{ k\Delta_2^j \Theta_1 + (2k+1)j \dfrac{\partial^2 \Delta_2^{(j-1)}\Theta_1}{\partial y^2} + \Delta_2^j \dfrac{\partial U_1}{\partial y} \right\},
\end{array}\right. \\
(3) & \left\{\begin{array}{l}
N_3^{(2j)} = (-1)^j\, 2K \left\{ [1+k-j(2k+1)]\Delta_2^j \Theta_0 - \Delta_2^j \left(\dfrac{\partial U_0}{\partial x} + \dfrac{\partial V_0}{\partial y}\right) \right\}, \\
N_3^{(2j+1)} = (-1)^j\, 2K \left\{ [1+k-j(2k+1)]\Delta_2^j \Theta_1 - \Delta_2^j \left(\dfrac{\partial U_1}{\partial x} + \dfrac{\partial V_1}{\partial x}\right) \right\},
\end{array}\right. \\
(4) & \left\{\begin{array}{l}
T_1^{(2j)} = (-1)^j K \left\{ -2[1+k-j(2k+1)] \dfrac{\partial \Delta_2^{j-1}\Theta_1}{\partial y} \right. \\
\qquad\qquad \left. + \dfrac{\partial \Delta_2^{j-1}\left(\dfrac{\partial U_1}{\partial x} + \dfrac{\partial V_1}{\partial y}\right)}{\partial y} + \Delta_2^j V_1 \right\}, \\
T_1^{(2j-1)} = (-1)^j K \left\{ -2[1+k-j(2k-1)] \dfrac{\partial \Delta_2^{j-1}\Theta_0}{\partial y} \right. \\
\qquad\qquad \left. + \dfrac{\partial \Delta_2^{j-1}\left(\dfrac{\partial U_0}{\partial y} + \dfrac{\partial V_0}{\partial y}\right)}{\partial y} + \Delta_2^j V_0 \right\},
\end{array}\right. \\
(5) & \left\{\begin{array}{l}
T_2^{2j} = (-1)^j K \left\{ -2[1+k-j(2k+1)] + \dfrac{\partial \Delta_2^{j-1}\Theta_1}{\partial x} \right. \\
\qquad\qquad \left. + \dfrac{\partial \Delta_2^{j-1}\left(\dfrac{\partial U_1}{\partial x} + \dfrac{\partial V_1}{\partial y}\right)}{\partial x} + \Delta_2^j U_1 \right\}, \\
T_2^{2j-1} = (-1)^j K \left\{ -2[1+k-j(2k+1)] \dfrac{\partial \Delta_2^{j-1}\Theta_0}{\partial x} \right. \\
\qquad\qquad \left. + \dfrac{\partial \Delta_2^{j-1}\left(\dfrac{\partial U_0}{\partial x} + \dfrac{\partial V_0}{\partial y}\right)}{\partial x} + \Delta_2^j U_0 \right\},
\end{array}\right. \\
(6) & \left\{\begin{array}{l}
T_3^{2j} = (-1)^j K \left\{ 2j(2k+1) \dfrac{\partial^2 \Delta_2^{j-1}\Theta_0}{\partial x\, \partial y} + \Delta_2^j \left(\dfrac{\partial U_0}{\partial y} + \dfrac{\partial V_0}{\partial x}\right) \right\}, \\
T_3^{(2j+1)} = (-1)^j K \left\{ 2j(2k+1) \dfrac{\partial^2 \Delta_2^{j-1}\Theta_1}{\partial x\, \partial y} + \Delta_2^j \left(\dfrac{\partial U_1}{\partial y} + \dfrac{\partial V_1}{\partial x}\right) \right\}.
\end{array}\right.
\end{array}\right.
$$

Les équations qui donnent les $N_1^{(i)}$, $N_2^{(i)}$, $N_3^{(i)}$ et les $T_3^{(i)}$ sont encore applicables pour $j = 0$. Celles qui donnent les $T_1^{(i)}$ et $T_2^{(i)}$ n'ont plus de sens, et l'on trouve

$$
\text{(VII)} \qquad \left\{
\begin{aligned}
T_1^{(0)} &= K\left(\frac{\partial W_0}{\partial y} + V_1\right),\\
T_2^{(0)} &= K\left(\frac{\partial W_0}{\partial x} + U_1\right).
\end{aligned}
\right.
$$

Cela posé, pour que les séries qui fournissent les expressions des déplacements se limitent, il faut et il suffit, en vertu de (I), (II), (III), n étant un nombre entier, que les six fonctions arbitraires θ_0, θ_1, U_0, U_1, V_0, V_1 satisfassent aux six équations à différences partielles d'ordre $2n$

$$
(5) \qquad \Delta_2^n \theta_0 = 0, \quad \Delta_2^n U_0 = 0, \quad \Delta_2^n V_0 = 0,
$$

$$
(5\ bis) \qquad \Delta_2^n \theta_1 = 0, \quad \Delta_2^n U_1 = 0, \quad \Delta_2^n V_1 = 0.
$$

Si ces six équations sont satisfaites, les séries qui fournissent les expressions des forces élastiques se limitent également, en vertu des formules (VI), comme on le voit, en observant que des formules (5) et (5 *bis*) on tire

$$
(5\ ter) \qquad \left\{
\begin{aligned}
\Delta_2^n\left(\frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial V_0}{\partial y}\right) &= 0,\\
\Delta_2^n\left(\frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{\partial V_0}{\partial x}\right) &= 0,\\
\Delta_2^n\left(\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y}\right) &= 0,\\
\Delta_2^n\left(\frac{\partial U_1}{\partial y} + \frac{\partial V_1}{\partial x}\right) &= 0.
\end{aligned}
\right.
$$

D'autre part, on demande que les pressions sur les deux bases du cylindre soient nulles. La pression par unité de surface, sur un élément superficiel parallèle aux bases ou perpendiculaire à l'axe des z, a pour composantes

$$
N_3, \quad T_1, \quad T_2;
$$

il faut donc que ces trois fonctions s'annulent pour $z = +\varepsilon$ et $z = -\varepsilon$, le plan moyen du cylindre, dont la hauteur 2ε est ici de grandeur quelconque, étant pris pour plan des xy, ce qui donne, en vertu des expressions (4), les six équations

$$\sum_j N_3^{2j}\frac{\varepsilon^{2j}}{2j!} \pm \sum_j N_3^{2j+1}\frac{\varepsilon^{2j+1}}{(2j+1)!} = 0,$$
$$\sum_j T_1^{2j}\frac{\varepsilon^{2j}}{2j!} \pm \sum_j T_1^{2j+1}\frac{\varepsilon^{2j+1}}{(2j+1)!} = 0,$$
$$\sum_j T_2^{2j}\frac{\varepsilon^{2j}}{2j!} \pm \sum T_2^{2j+1}\frac{\varepsilon^{2j+1}}{(2j+1)!} = 0.$$

Soit

$$\sum_j N_3^{2j}\frac{\varepsilon^{2j}}{2j!} = 0, \quad \sum_j N_3^{2j+1}\frac{\varepsilon^{2j}}{2j+1!} = 0,$$
$$\sum T_1^{2j}\frac{\varepsilon^{2j}}{2j!} = 0, \quad \sum T_1^{2j+1}\frac{\varepsilon^{2j}}{2j+1!} = 0,$$
$$\sum T_2^{2j}\frac{\varepsilon^{2j}}{2j!} = 0, \quad \sum T_2^{2j+1}\frac{\varepsilon^{2j}}{2j+1!} = 0.$$

Remplaçant les $N^{(i)}$ et les $T^{(i)}$ par leurs valeurs (VI), il vient, en désignant par $\sum\limits_0$ ou $\sum\limits_1$ des sommes relatives aux valeurs entières de j, suivant qu'elles comprennent ou non la valeur $j = 0$,

$$(6)\left\{\begin{aligned}
&\sum_0 (-1)^j \left\{[1+k-j(2k+1)]\,\Delta_2^j\,\Theta_0 - \Delta_2^j\left(\frac{\partial U_0}{\partial x}+\frac{\partial V_0}{\partial y}\right)\right\}\frac{\varepsilon^{2j}}{2j!} = 0,\\
&\sum_1 (-1)^j \left\{-2[1+k-j(2k+1)]\frac{\partial\Delta_2^{j-1}\Theta_0}{\partial x}\right.\\
&\qquad\left. + \frac{\partial\Delta_2^{j-1}\left(\dfrac{\partial U_0}{\partial x}+\dfrac{\partial V_0}{\partial y}\right)}{\partial x} + \Delta_2^j U_0\right\}\frac{\varepsilon^{2j-1}}{2j-1!} = 0,\\
&\sum_1 (-1)^j \left\{-2[1+k-j(2k+1)]\frac{\partial\Delta_2^{j-1}\Theta_0}{\partial y}\right.\\
&\qquad\left. + \frac{\partial\Delta_2^{j-1}\left(\dfrac{\partial U_0}{\partial x}+\dfrac{\partial V_0}{\partial y}\right)}{\partial y} + \Delta_2^j V_0\right\}\frac{\varepsilon^{2j-1}}{2j-1!} = 0.
\end{aligned}\right.$$

$$
(6\ bis)\left\{
\begin{aligned}
&\sum_{0}(-1)^j\left\{[1+k-j(2k+1)]\Delta_2^j\,\theta_1-\Delta_2^j\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}+\frac{\partial V_1}{\partial y}\right)\right\}\frac{\varepsilon^{2j+1}}{2j+1!}=0,\\
&\frac{dW_0}{dx}+U_1+\sum_{1}(-1)^j\left(\left\{-2[1+k-j(2k+1)]\right\}\frac{\partial\Delta_2^{j-1}\theta_1}{\partial x}\right.\\
&\qquad\left.+\frac{\partial\Delta_2^{j-1}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}+\frac{\partial V_1}{\partial y}\right)}{\partial x}+\Delta_2^j U_1\right)\frac{\varepsilon^{2j}}{2j!}=0,\\
&\frac{dW_0}{dy}+V_1+\sum_{1}(-1)^j\left(\left\{-2[1+k-j(2k+1)]\right\}\frac{\partial\Delta_2^{j-1}\theta_1}{dy}\right.\\
&\qquad\left.+\frac{\partial\Delta_2^{j-1}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}+\frac{\partial V_1}{dy}\right)}{dy}+\Delta_2^j V_1\right)\frac{\varepsilon^{2j}}{2j!}=0.
\end{aligned}\right.
$$

Ces équations, en vertu de (5), (5 *bis*), (5 *ter*), comprennent un nombre limité de termes, et sont aux différences partielles d'ordre $2n$ au plus.

Ainsi, pour que toutes les séries se limitent et qu'en même temps les conditions à la surface relatives aux deux bases du cylindre soient remplies, il faut et il suffit que les sept fonctions θ_0, θ_1 ; U_0, U_1 ; V_0, V_1 ; W_0 satisfassent simultanément aux *treize* équations à différences partielles (V), (5), (5 *bis*), (6), (6 *bis*), dont deux d'ordre $2n$ ou d'ordre moindre, et une du second ordre.

Cherchons donc les conditions pour que ces treize équations puissent avoir une solution commune.

On voit de suite qu'elles se dédoublent et que les trois fonctions θ_0, U_0, V_0 doivent satisfaire simultanément aux six équations (5) et (6) et les quatre fonctions θ_1, U_1, V_1, W_0 aux sept équations (V), (5 *bis*) et (6 *bis*). Occupons-nous d'abord des premières.

Ajoutons les deux dernières (6) après les avoir différenciées par rapport à x et à y, en observant que

$$\Delta_2^j=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\Delta_2^{j-1}:$$

$$\sum_{0}(-1)^j\left\{[1+k-j(2k+1)]\Delta_2^j\theta_0-\Delta_2^j\left(\frac{\partial U_0}{\partial x}+\frac{\partial V_0}{\partial y}\right)\right\}\frac{\varepsilon^{2j-1}}{2j-1!}=0.$$

Prenons maintenant $(n-2)$ fois de suite les Δ_2 de cette équation, en observant que

$$\Delta_2^{j+1} = \Delta_2^j . \Delta_2^1;$$

à cause des deux équations

$$(e) \qquad \Delta_2^n \theta_1 = 0, \quad \Delta_2^n \left(\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y}\right) = 0,$$

l'équation obtenue se réduira au seul terme répondant à $j = 1$, et divisé par ε; elle deviendra

$$k \Delta_2^{n-1} \theta_0 + \Delta_2^{n-1} \left(\frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial V_0}{\partial y}\right) = 0.$$

Prenons maintenant $(n-1)$ fois de suite les Δ_2 de la première (6), elle se réduira de même à son premier terme, celui qui correspond à $j = 0$, et donnera

$$(1 + k) \Delta_2^{n-1} \theta_0 - \Delta_2^{n-1} \left(\frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial V_0}{\partial y}\right) = 0.$$

Les deux dernières équations, linéaires et homogènes par rapport aux quantités $\Delta_2^{n-1} \theta_0$, $\Delta_2^{n-1} \left(\frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial V_0}{\partial y}\right)$ et ayant nécessairement leur déterminant différent de zéro, donnent

$$\Delta_2^{n-1} \theta_0 = 0, \quad \Delta_2^{n-1} \left(\frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial V_0}{\partial y}\right) = 0.$$

Observons d'ailleurs que, pour déduire ce dernier résultat des équations (6), nous nous sommes appuyé uniquement sur les deux relations (e). Ainsi, de ce que ces relations (e) sont satisfaites pour l'entier n, nous en déduisons qu'elles le sont nécessairement pour $n-1$; de là nous déduisons de même qu'elles le sont pour $n-2$, et ainsi de suite jusqu'à $n = 1$.

Ainsi, pour que les six équations à différences partielles (5) et (6) puissent être compatibles, il est nécessaire que l'on ait

$$(e') \qquad \Delta_2 \theta^0 = 0, \quad \Delta_2 \left(\frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial V_0}{\partial y}\right) = 0.$$

Mais alors la première (e') est satisfaite d'elle-même, la première (6) se réduit à son premier terme et donne entre les deux fonctions Θ_0 et $\frac{\partial U_0}{\partial x}+\frac{\partial V_0}{\partial y}$ la relation finie

$$\frac{\partial U_0}{\partial x}+\frac{\partial V_0}{\partial y}=(k+1)\Theta_0,$$

en sorte que la dernière (e') est une conséquence de la première. En résumé, les équations (5) et (6) se réduisent à

$$\Delta_2\Theta_0=0,\qquad \Delta_2^n\Theta_0=0,\qquad \Delta_2^n V_0=0,$$

$$\frac{\partial U_0}{\partial x}+\frac{\partial V_0}{\partial y}=(k+1)\Theta_0,$$

$$\sum_1(-1)^j\Delta_2^j U_0\frac{\varepsilon^{2j-2}}{2j-1!}=(3k+1)\frac{\partial\Theta_0}{\partial x},$$

$$\sum_1(-1)^j\Delta_2^j V_0\frac{\varepsilon^{2j-2}}{2j-1!}=(3k+1)\frac{\partial\Theta_0}{\partial y}.$$

Maintenant, je dis que ces équations sont incompatibles si n est supérieur à 2. En effet, si n est supérieur à 2 et qu'on prenne $n-2$ fois les Δ_2 des deux dernières équations, les seconds membres disparaîtront en vertu de l'équation

$$\Delta_2\Theta_0=\Delta_2^1\Theta_0=0;$$

et les premiers se réduisent à leurs premiers termes et deviennent

$$\Delta_2^{n-1}U_0=0,\qquad \Delta_2^{n-1}V_0=0.$$

Ainsi, si $n>2$, de ce que les Δ_2^n de ces deux fonctions sont nulles, on déduit que les Δ_2^{n-1} le sont également; de même, si $n-1>2$, on conclura que les Δ_2^{n-2} le sont, et ainsi de suite, en sorte qu'il faut nécessairement que les Δ_2^2 le soient, c'est-à-dire que dans les équations ci-dessus on ait $n=2$.

Alors elles deviennent

$$\Delta_2^2\,\theta_0 = 0, \quad \Delta_2^2\,U_0 = 0, \quad \Delta_2^2\,V_0 = 0,$$

$$(\text{VIII}) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial U_0}{\partial x} + \dfrac{\partial V_0}{\partial y} = (k+1)\,\theta_0, \\ (3k+1)\dfrac{\partial \theta_0}{\partial x} + \Delta_2 U_0 = 0, \\ (3k+1)\dfrac{\partial \theta_0}{\partial y} + \Delta_2 V_0 = 0. \end{cases}$$

Maintenant il n'est pas difficile de voir que les trois premières sont des conséquences des trois dernières, en sorte que ce sont celles-ci qui fournissent les valeurs les plus générales possibles des trois fonctions U_0, V_0, θ_0, satisfaisant aux conditions voulues et toutes les solutions de ce système de trois équations y satisfont; on pourrait le vérifier directement, comme nous le ferons pour les équations analogues, mais un peu plus compliquées (IX), de la page 248.

Passons maintenant aux sept équations (V), (5 *bis*) et (6 *bis*) qui doivent être satisfaites simultanément par les quatre fonctions W_0, θ_1, U_1, V_1.

En ajoutant les deux dernières (6 *bis*) différenciées par rapport à x et à y et ayant égard à (V) qui permet d'éliminer la fonction W_0 du résultat, il vient, toutes réductions faites,

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} - (k+1)\,\theta_1 + \sum_1 (-1)^j \\ \times \left\{ -[1 + k - j(2k+1)]\,\Delta_2^j\,\theta_1 + \Delta_2^j\left(\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y}\right)\right\}\frac{\varepsilon^{2j}}{2j!} = 0.$$

Cette équation peut s'écrire plus simplement

$$\sum_0 (-1)^j \left\{ -[1 + k - j(2k+1)]\,\Delta_2^j\,\theta_1 + \Delta_2^j\left(\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y}\right)\right\}\frac{\varepsilon^{2j}}{2j!} = 0.$$

Si l'on prend $n-1$ fois de suite les Δ_2, elle se réduit, à cause de

$$\Delta_2^n\,\theta_1 = 0, \quad \Delta_2^n\left(\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y}\right) = 0,$$

à

$$(g)\qquad -(1+k)\,\Delta_2^{n-1}\Theta_1+\Delta_2^{n-1}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}+\frac{\partial V_1}{\partial y}\right)=0.$$

Si l'on faisait la même opération sur la première (6 *bis*), on obtiendrait la même équation.

Prenons $n-2$ fois de suite les Δ_2 de l'avant-dernière, elle se réduira à ses deux premiers termes

$$-(1+k)\,\Delta_2^{n-2}\Theta_1+\Delta_2^{n-2}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}+\frac{\partial V_1}{\partial y}\right)-\left[k\Delta_2^{n-1}\Theta_1+\Delta_2^{n-1}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}+\frac{\partial V_1}{\partial y}\right)\right]\frac{\varepsilon^2}{3}=0.$$

Faisons la même opération sur la première (6 *bis*), il viendra, en divisant par ε,

$$(1+k)\,\Delta_2^{n-2}\Theta_1-\Delta_2^{n-2}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}+\frac{\partial V_1}{\partial y}\right)+\left[k\Delta_2^{n-1}\Theta_1+\Delta_2^{n-1}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}+\frac{\partial V_1}{\partial y}\right)\right]\frac{\varepsilon^2}{3}=0.$$

Ajoutant membre à membre, et supprimant le facteur $\left(\frac{\varepsilon^2}{2}-\frac{\varepsilon^2}{3}\right)$:

$$k\Delta_2^{n-1}\Theta_1+\Delta_2^{n-1}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}+\frac{\partial V_1}{\partial y}\right)=0.$$

Cette équation, combinée avec celle (g), donne

$$\Delta_2^{n-1}\Theta_1=0,\qquad \Delta_2^{n-1}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}+\frac{\partial V_1}{\partial y}\right)=0.$$

Ainsi, de ce que les Δ_2^n de ces deux fonctions sont nulles, nous en déduisons que les Δ_2^{n-1} jouissent de la même propriété; d'où nous concluons, comme nous l'avons fait plus haut pour les fonctions Θ_1 et $\frac{\partial U_1}{\partial x}+\frac{\partial V_1}{\partial y}$,

$$\Delta_2\Theta_1=0,\quad \Delta_2\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}+\frac{\partial V_1}{\partial y}\right)=0.$$

Par suite, la première (6 *bis*) se réduit à

$$\frac{\partial U_1}{\partial x}+\frac{\partial V_1}{\partial y}=(k+1)\,\Theta_1,$$

qui rend inutile l'une des deux précédentes, par exemple, la seconde.

Ainsi, les six équations (5 *bis*) et (6 *bis*) se réduisent à

$$
(h)\quad\left\{
\begin{aligned}
&\Delta_2\theta_1 = 0, \quad \Delta_2^n U_1 = 0, \quad \Delta_2^n V_1 = 0,\\
&\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} = (1+k)\theta_1,\\
&\frac{dW_1}{\partial x} + U_1 - (3k+1)\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial\theta_1}{\partial x} + \sum_1 (-1)^j \Delta_2^j U_1 \frac{\varepsilon^{2j}}{2j!} = 0,\\
&\frac{\partial W_1}{\partial y} + V_1 - (3k+1)\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial\theta_1}{\partial y} + \sum_1 (-1)^j \Delta_2^j V_1 \frac{\varepsilon^{2j}}{2j!} = 0,
\end{aligned}
\right.
$$

auxquelles il faut adjoindre celle qui définit W_0,

$$\Delta_2 W_0 = \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} - (2k+2)\theta_1,$$

ou encore, à cause de la relation entre θ_1 et $\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y}$,

$$\Delta_2 W_0 + (1+k)\theta_1 = 0.$$

De ces équations on tire d'abord une conséquence importante; à cause de $\Delta_2\theta_1 = 0$, la dernière donne

$$\Delta_2^2 W_0 = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^4 W_0}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 W_0}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W_0}{\partial y^4} = 0.$$

C'est précisément, en faisant abstraction des forces telles que la pesanteur, l'équation trouvée par Lagrange et tous ses successeurs dans le cas des plaques minces. Mais ici cette équation a un caractère tout autre, puisqu'elle est rigoureuse et non approchée et qu'elle s'applique, quelles que soient la forme et les dimensions du corps cylindrique que l'on considère, à toute solution des équations de l'élasticité jouissant de la propriété d'être algébrique et entière relativement à la coordonnée parallèle aux génératrices du cylindre, et satisfaisant en outre à la condition que les pressions soient nulles sur ses deux bases.

Je dis maintenant que les sept équations (V) ne peuvent être compatibles si n est supérieur à 3. En effet, supposons $n > 3$ et prenons les Δ_2^{n-1} de la cinquième et de la sixième; tous les termes des sommes $\sum_1$

disparaîtront en vertu de $\Delta_2^n U_1 = 0$, $\Delta_2^n V_1 = 0$; les termes contenant la fonction θ_1 disparaîtront également, puisque $\Delta_2 \theta_1 = 0$, et par suite aussi $\Delta_2^{n-1} \theta_1$, ($n - 1$ étant supérieur à 1) et $\Delta_2^{n-1} \frac{\partial \theta_1}{\partial x}$, $\Delta_2^{n-1} \frac{\partial \theta_1}{\partial y}$; enfin les termes contenant W_0 disparaissent de même, puisque $\Delta_2^2 W_0$ est nul, et par suite $\Delta_2^{n-1} W_0$, $n - 1$ étant, par hypothèse, > 2.

Il restera donc

$$\Delta_2^{n-1} U_1 = 0, \quad \Delta_2^{n-1} V_1 = 0.$$

Ainsi, tant que le nombre n est supposé > 3, de ce que les Δ_2^n des deux fonctions U_1 et V_1 sont nuls, on conclut que leurs Δ_2^{n-1} le sont; donc il faut que leurs Δ_2^3 le soient, c'est-à-dire que les équations que nous étudions exigent, comme condition de compatibilité, que n soit au plus 3; pour $n = 3$ elles deviennent

$$\Delta_2 \theta_1 = 0, \qquad \Delta_2^3 U_1 = 0, \qquad \Delta_2^3 V_1 = 0.$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} = (1 + k)\theta_1,$$

$$\frac{\partial W_0}{\partial x} + U_1 - (3k + 1)\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial \theta_1}{\partial x} - \Delta_2 U_1 \frac{\varepsilon^2}{2} + \Delta_2^2 U_1 \frac{\varepsilon^4}{24} = 0,$$

$$\frac{\partial W_0}{\partial y} + V_1 - (3k + 1)\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial \theta_1}{\partial y} - \Delta_2 V_1 \frac{\varepsilon^2}{2} + \Delta_2^2 V_1 \frac{\varepsilon^4}{24} = 0,$$

$$\Delta_2 W_0 + (1 + k)\theta_1 = 0.$$

Mais, en prenant deux fois de suite les Δ_2 de la cinquième et de la sixième, on obtient

$$\Delta_2^2 U_1 = 0, \quad \Delta_2^2 V_1 = 0,$$

qui entraînent la seconde et la troisième et permettent de supprimer les derniers termes de la cinquième et de la sixième.

Reprenant une fois les Δ_2 de celles-ci, et observant que

$$\Delta_2 \frac{\partial W_0}{\partial x} = \frac{\partial \Delta_2 W_0}{\partial x},$$

$$\Delta_2 \frac{\partial W_0}{\partial y} = \frac{\partial \Delta_2 W_0}{\partial y}$$

ou, en vertu de la dernière des sept,

$$\Delta_2 \frac{\partial W_0}{\partial x} = -(1+k)\frac{\partial \theta_1}{\partial x},$$

$$\Delta_2 \frac{\partial W_0}{\partial y} = -(1+k)\frac{\partial \theta_1}{\partial y},$$

il vient

$$-(1+k)\frac{\partial \theta_1}{\partial x} + \Delta_2 U_1 = 0,$$

$$-(1+k)\frac{\partial \theta_1}{\partial y} + \Delta_2 V_1 = 0.$$

Par suite, les sept équations à satisfaire pourront s'écrire

$$\Delta_2 \theta_1 = 0, \quad \Delta_2^2 U_1 = 0, \quad \Delta_2^2 V_1 = 0;$$

puis

$$\text{(IX)} \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} = (1+k)\theta_1, \\ &\frac{\partial W_0}{\partial x} + U_1 - (2k+1)\varepsilon^2 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} = 0, \\ &\frac{\partial W_0}{\partial y} + V_1 - (2k+1)\varepsilon^2 \frac{\partial \theta_1}{\partial y} = 0, \\ &\Delta_2 W_0 + (1+k)\theta_1 = 0. \end{aligned}\right.$$

Mais je dis maintenant que les quatre dernières entraînent les trois premières, qu'on pourra, par suite, supprimer. Soit, en effet, θ_1, U_1, V_1, W_0 une solution quelconque des quatre équations (IX).

Ajoutons la seconde et la troisième respectivement différentiées par rapport à x et à y, en ayant égard à la première et à la dernière, on voit qu'il viendra simplement

$$-(2k+1)\varepsilon^2 \Delta_2 \theta_1 = 0 \quad \text{ou} \quad \Delta_2 \theta_1 = 0,$$

c'est-à-dire que la première des trois équations surabondantes est vérifiée. Par suite, la dernière (IX) donne $\Delta_2^2 W_0$, et de là résulte que, si l'on prend deux fois de suite les Δ_2 de la seconde et de la troisième (IX), on trouve la seconde et la troisième des deux équations surabondantes.

Ainsi les quatre fonctions θ_1, U_1, V_1, W_0 les plus générales possible, susceptibles de satisfaire aux conditions posées, sont les intégrales générales des quatre équations (IX), et réciproquement toute solution de ces quatre équations (IX) satisfait aux conditions voulues.

En résumé : 1° les sept fonctions θ_0, U_0, V_0; θ_1, U_1, V_1; W_0 doivent satisfaire aux sept équations à différences partielles (VIII) et (IX); 2° de ces équations résulte que les Δ_2 des deux fonctions θ_0, θ_1 sont nulles et que les Δ_2^2 des cinq autres fonctions sont nulles; par suite, les formules (II), (III) et (IV) montrent que, pour $j > 1$, U_{2j}, U_{2j+1}; V_{2j}, V_{2j+1}; W_{2j-1}, W_{2j} sont nulles et que les fonctions $\theta_{2j}, \theta_{2j+1}$ le sont pour j différent de zéro.

Donc les expressions des composantes u, v, w du déplacement et de la dilatation cubique se réduisent nécessairement à

$$\begin{aligned}
u &= U_0 + U_1 z + U_2 \frac{z^2}{2} + U_3 \frac{z^3}{6},\\
v &= V_0 + V_1 z + V_2 \frac{z^2}{2} + V_3 \frac{z^3}{6},\\
w &= W_0 + W_1 z + W_2 \frac{z^2}{2} + W_3 \frac{z^3}{6},\\
\theta &= \theta_0 + \theta_1 z.
\end{aligned}$$

ou, par les formules (II), (III), (IV), (V), et en ayant égard à (VIII) et (IX), à

$$(\mathrm{X})\quad \left\{\begin{aligned}
\theta &= \theta_0 - \frac{\Delta_2 W_0}{k+1} z,\\
u &= U_0 - \left(\frac{\partial W_0}{\partial x} + \frac{(2k+1)}{k+1}\varepsilon^2 \frac{\partial \Delta_2 W_0}{\partial x}\right) z\\
&\qquad + k\frac{\partial \theta_0}{\partial x}\frac{z^2}{2} + \frac{(3k+2)}{k+1}\frac{\partial \Delta_2 W_0}{\partial x}\frac{z^3}{6},\\
v &= V_0 - \left(\frac{\partial W_0}{\partial y} + \frac{(2k+1)}{k+1}\varepsilon^2 \frac{\partial \Delta_2 W_0}{\partial y}\right) z\\
&\qquad + k\frac{\partial \theta_0}{\partial y}\frac{z^2}{2} + \frac{(3k+2)}{k+1}\frac{\partial \Delta_2 W_0}{\partial y}\frac{z^3}{6},\\
w &= W_0 - k\theta_0 z + \frac{k}{k+1}\Delta_2 W_0 \frac{z^2}{2}.
\end{aligned}\right.$$

Il en résulte pour les forces élastiques, soit directement au moyen des formules (2), soit au moyen des formules (4) et (VI),

$$
\text{(XI)}\left\{
\begin{aligned}
N_1 &= 2K\Big[k\theta_0 + \frac{\partial U_0}{\partial x} - \Big(\frac{k}{k+1}\Delta_2 W_0 + \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} + \frac{2k+1}{k+1}\varepsilon^2\frac{\partial^2 \Delta_2 W_0}{\partial x^2}\Big)z \\
&\qquad + k\frac{\partial^2 \Theta_0}{\partial x^2}\frac{z^2}{2} + \frac{3k+2}{k+1}\frac{\partial^2 \Delta_2 W_0}{\partial x^2}\frac{z^3}{6}\Big],\\
N_2 &= 2K\Big[k\theta_0 + \frac{\partial V_0}{\partial y} - \Big(\frac{k+1}{k}\Delta_2 W_0 + \frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2} + \frac{2k+1}{k+1}\varepsilon^2\frac{\partial^2 \Delta_2 W_0}{\partial y^2}\Big)z \\
&\qquad + k\frac{\partial^2 \Theta_0}{\partial y^2}\frac{z^2}{2} + \frac{3k+2}{k+1}\frac{\partial^2 \Delta_2 W_0}{\partial y^2}\frac{z^3}{6}\Big],\\
T_3 &= K\Big[\frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{\partial V_0}{\partial x} - 2\Big(\frac{\partial^2 W_0}{\partial x\,\partial y} + \frac{2k+1}{k+1}\varepsilon^2\frac{\partial^2 \Delta_2 W_0}{\partial x\,\partial y}\Big)z \\
&\qquad + 2k\frac{\partial^2 \Theta_0}{\partial x\,\partial y}\frac{z^2}{2} + \frac{3k+2}{k+1}\frac{\partial^2 \Delta_2 W_0}{\partial x\,\partial y}\frac{z^3}{6}\Big],\\
N_3 &= 0, \quad T_1 = -K\frac{2k+1}{k+1}\frac{\partial \Delta_2 W_0}{\partial y}(\varepsilon^2 - z^2),\\
T_2 &= -K\frac{2k+1}{k+1}\frac{\partial \Delta_2 W_0}{\partial x}(\varepsilon^2 - z^2).
\end{aligned}
\right.
$$

Telles sont les expressions algébriques, relativement à z, *les plus générales possible*, susceptibles de représenter les déplacements et les forces élastiques dans un cylindre, sur les bases duquel n'agissent pas de pressions. Il résulte des trois dernières formules que la pression normale sur tout élément plan parallèle aux bases est nécessairement nulle, et la pression totale sur de tels éléments est nécessairement une fonction du second degré par rapport à z.

Si l'on suppose, en particulier, $\Delta_2 W_0 =$ const., on aura en tous les points du cylindre

$$N_3 = 0, \quad T_1 = 0, \quad T_2 = 0.$$

Ce cas particulier a été étudié directement par Clebsch.

Voyons maintenant quelles pressions doivent être exercées sur la surface latérale du cylindre pour que la solution fournie par les équations (VIII), (IX), (X), (XI) satisfasse aux conditions à remplir le long de cette surface.

Soient X, Y, Z trois fonctions données de x, y, z, représentant les composantes parallèlement aux axes de la pression exercée au point (x, y, z) de la surface latérale; soit α l'angle de la normale à cette surface avec l'axe des x; on devra avoir, en tous les points de cette surface,

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} &N_1 \cos\alpha + T_3 \sin\alpha = X,\\ &T_3 \cos\alpha + N_2 \sin\alpha = Y,\\ &T_2 \cos\alpha + T_1 \sin\alpha = Z.\end{aligned}\right.$$

Comme les fonctions N_1, N_2 et T_3 sont du troisième degré en z, on voit qu'il faudra qu'il en soit de même des fonctions X et Y; d'autre part, les deux fonctions T_2 et T_1 contenant le facteur $(\varepsilon^2 - z^2)$, il devra en être de même de celle de Z. Ainsi il est d'abord nécessaire que les trois fonctions données X, Y, Z soient de la forme

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} &X = X'_0 + X'_1 z + X'_2 \frac{z^2}{2} + X'_3 \frac{z^3}{6},\\ &Y = Y'_0 + Y'_1 z + Y'_2 \frac{z^2}{2} + Y'_3 \frac{z^3}{6},\\ &Z = Z'_0 (\varepsilon^2 - z^2).\end{aligned}\right.$$

Mais on comprend que cela ne suffise pas et que les fonctions X'_0, X'_1, ... ne doivent pas pouvoir être toutes données arbitrairement; et, en effet, les fonctions X, Y, Z ayant la forme (9), pour que les conditions à la surface (8) soient satisfaites, on devra avoir séparément, à cause de (XI) :

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} &\left(k\Theta_0 + \frac{\partial U_0}{\partial x}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{\partial V_0}{\partial x}\right)\sin\alpha = \frac{X'_0}{2K},\\ &\frac{\partial^2 \Theta_0}{\partial x^2}\cos\alpha + \frac{\partial^2 \Theta_0}{\partial x \partial y}\sin\alpha = \frac{X_2}{2Kk},\\ &\left(\frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{\partial V_0}{\partial x}\right)\cos\alpha + \left(k\Theta_0 + \frac{\partial V_0}{\partial y}\right)\sin\alpha = \frac{Y'_0}{2K},\\ &\frac{\partial^2 \Theta_0}{\partial x \partial y}\cos\alpha + \frac{\partial^2 \Theta_0}{\partial y^2}\sin\alpha = \frac{Y'_2}{2Kk},\end{aligned}\right.$$

$$
(11)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\left(\frac{k}{k+1}\Delta_2 W_0 + \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} + \frac{2k+1}{k+1}\varepsilon^2\frac{\partial^2\Delta_2 W_0}{\partial x^2}\right)\cos\alpha \\
&\qquad + \left(\frac{\partial^2 W_0}{\partial x\,\partial y} + \frac{2k+1}{k+1}\varepsilon^2\frac{\partial^2\Delta_2 W_0}{\partial x\,\partial y}\right)\sin\alpha = \frac{-X'_1}{2K}, \\
&\frac{\partial^2\Delta_2 W_0}{\partial x^2}\cos\alpha + \frac{\partial^2\Delta_2 W_0}{\partial x\,\partial y}\sin\alpha = \frac{X'_3(k+1)}{2K(3k+2)}, \\
&\left(\frac{\partial^2 W_0}{\partial x\,\partial y} + \frac{2k+1}{k+1}\varepsilon^2\frac{\partial^2\Delta_2 W_0}{\partial x\,\partial y}\right)\cos\alpha \\
&\quad + \left(\frac{k}{k+1}\Delta_2 W_0 + \frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2} + \frac{2k+1}{k+1}\varepsilon^2\frac{\partial^2\Delta_2 W_0}{\partial y^2}\right)\sin\alpha = \frac{-Y'_1}{2K}, \\
&\frac{\partial^2\Delta_2 W_0}{\partial x\,\partial y}\cos\alpha + \frac{\partial^2\Delta_2 W_0}{\partial y^2}\sin\alpha = \frac{Y'_3(k+1)}{2K(3k+2)}, \\
&\frac{\partial\Delta_2 W_0}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial\Delta_2 W_1}{\partial y}\sin\alpha = \frac{-Z'_0(k+1)}{K(2k+1)}.
\end{aligned}
\right.
$$

Ainsi il faut : 1° que les trois fonctions U_0, V_0, θ_0 satisfassent en tous les points d'une section droite du cylindre aux trois équations à différences partielles (VIII) et sur le périmètre de la section aux quatre conditions (10); 2° que la fonction W_0 satisfasse, en tous les points de la section du cylindre, à l'équation aux différences partielles du quatrième ordre

$$\Delta_2^2 W_0 = 0,$$

et aux cinq conditions sur le pourtour (11).

Cherchons, d'après cela, combien, parmi les fonctions données X'_0, $X_1, \ldots$, peuvent l'être arbitrairement.

Les équations (VIII) sont de même forme que celles que l'on obtient en étudiant le problème du plan élastique, sur le périmètre duquel n'agiraient que des forces situées dans le plan lui-même, de sorte qu'en se déplaçant il conserverait sa forme plane. Les conditions au pourtour seraient la première et la troisième (10), où X'_0, Y'_0 seraient les fonctions arbitrairement données; or on sait que le problème est déterminé par ces conditions, c'est-à-dire que les deux fonctions U_0, V_0 sont déterminées aux constantes près qui définissent la position de la figure plane considérée, et la fonction θ_0 est entièrement déterminée. De là résulte : 1° que les fonctions X'_0, Y'_0 peuvent être données arbitrairement, 2° *mais qu'alors les deux fonctions* X'_2, Y'_2 *sont entièrement déterminées*.

Pour la fonction W_0, elle satisfait à

$$\Delta_2 \Delta_2 W_0 = 0.$$

Or, il résulte d'un théorème connu, qu'une fonction $\Delta_2 W_0$ assujettie à satisfaire à cette équation et à la dernière condition (11) est déterminée à une constante près; en sorte qu'en satisfaisant à cette condition où Z'_0 est arbitrairement donné, on trouvera

$$\Delta_2 W_0 = f(x, y) + C, \tag{12}$$

f étant une fonction parfaitement déterminée et C une constante arbitraire. Il résulte de là que les dérivées de $\Delta_2 W_0$ sont entièrement déterminées et, par suite, en vertu de la seconde et de l'avant-dernière (11), les fonctions X'_3 Y'_3 le sont aussi.

Reste à satisfaire à la première et à la troisième (11), qui peuvent s'écrire, en ayant égard à la seconde et à la quatrième,

$$\left(\frac{k}{k+1}\Delta_2 W_0 + \frac{\partial W_0}{\partial x^2}\right)\cos\alpha + \frac{\partial_2 W_0}{\partial x \partial y}\sin\alpha = \frac{-X'_1 - \epsilon^2 \dfrac{2k+1}{3k+2} X'_3}{2K},$$

$$\frac{\partial^2 W_0}{\partial x \partial y}\cos\alpha + \left(\frac{k}{k+1}\Delta_2 W_0 + \frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2}\right)\sin\alpha = \frac{-Y'_1 - \epsilon^2 \dfrac{2k+1}{3k+2} Y'_3}{2K},$$

ou, en portant dans ces équations la valeur trouvée pour $\Delta_2 W_0$,

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2}\cos\alpha + \frac{\partial^2 W_0}{\partial x \partial y}\sin\alpha \\ &\quad = \frac{-X'_1 - \epsilon^2 \dfrac{2k+1}{3k+2} X'_3}{2K} - \frac{k\cos\alpha}{k+1} f(x,y) - \frac{k}{k+1} C\cos\alpha, \\ &\frac{\partial^2 W_0}{\partial x \partial y}\cos\alpha + \frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2}\sin\alpha \\ &\quad = \frac{-Y'_1 - \epsilon^2 \dfrac{2k+1}{3k+2} Y'_3}{2K} - \frac{k\sin\alpha}{k+1} f(x,y) - \frac{k}{k+1} C\sin\alpha. \end{aligned}\right. \tag{13}$$

On peut déterminer la fonction W_0 de façon qu'elle satisfasse à l'équation (12) et à la première des conditions (13) où X'_1 est donné arbitrairement.

Si l'on pose, en effet,

$$W_0 = W'_0 + \frac{kC}{k+1}\frac{x^2}{2},$$

la fonction W'_0 devra satisfaire à l'équation

$$(14) \qquad \Delta_2 W'_0 = f(x,y) + \frac{C}{k+1}$$

et à la condition suivante, qui remplace la première (13):

$$\frac{\partial^2 W'_0}{\partial x^2}\cos\alpha + \frac{\partial^2 W'_0}{\partial x\,\partial y}\sin\alpha = M,$$

M étant la somme des deux premiers termes du second membre de la première (13).

En posant

$$\frac{\partial W'_0}{\partial x} = S,$$

la fonction S devra satisfaire à

$$\Delta_2 S = \frac{\partial f}{\partial x}$$

et

$$\frac{\partial S}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial S}{\partial y}\sin\alpha = M,$$

et sera, par suite, définie à une constante près, c'est-à-dire qu'elle sera de la forme

$$S = S_0 + C',$$

S_0 étant une fonction entièrement déterminée, telle que

$$(15) \qquad \Delta_2 S_0 = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Ainsi

$$\frac{\partial W'_0}{\partial x} = S_0 + C',$$

d'où

$$W'_0 = \int_0^x S\,dx + C'x + \varphi(y),$$

$\varphi(y)$ étant une fonction arbitraire. De là on déduit, en ayant égard à (15),

$$\Delta_2 W'_0 = f(x, y) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2},$$

et, à cause de (14),

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{C}{k+1}, \quad \varphi = \frac{C}{k+1}\frac{y^2}{2} + C'x + C''y + C''',$$

C, C′, C″ étant trois constantes arbitraires. Ainsi

$$W'_0 = \int_0^x S_0\,dx + \frac{C}{k+1}\frac{y^2}{2} + C'x + C''y + C'''$$

et

$$W_0 = \int_0^x S_0\,dx + \frac{C}{k+1}\frac{kx^2+y^2}{2} + C'x + C''y + C''',$$

et est déterminé à quatre constantes près.

Si l'on porte cette expression dans la seconde (13), elle devra être satisfaite d'elle-même; la constante C figurera seule dans le résultat; et comme la fonction Y'_3 est entièrement déterminée, comme nous l'avons vu plus haut, il s'ensuit que la fonction Y'_1 l'est elle-même à la constante C près.

Ainsi, en résumé, sur les dix fonctions de x et de y qui entrent dans les expressions (9) des composantes X, Y, Z de la pression sur la surface latérale, on peut s'en donner quatre seulement arbitrairement, à savoir: X'_0, Y'_0, Z'_0; X'_1 [ou Y'_1, comme on le comprend facilement, puisque nous aurions pu satisfaire directement à la seconde (13) au lieu de satisfaire à la première], et alors toutes les autres sont déterminées ou entièrement ou à une constante près.

De là résulte qu'on ne pourra pas se donner arbitrairement la résultante de translation et le couple résultant des pressions agissant le long de chacune des génératrices de la surface latérale du cylindre; car se donner la résultante de translation ou ses trois composantes équivaudrait à se donner arbitrairement trois relations en termes finis entre les dix fonctions X'_0, X'_1, ...; se donner l'axe du couple résultant ou ses deux composantes suivant les axes des x et des y (celle suivant l'axe des z est évidemment nulle), ce serait se donner deux autres relations, soit en tout cinq relations arbitraires, tandis qu'on ne peut s'en donner que quatre. De là résulte ce théorème, qui non-seulement rend très-nettement compte des impossibilités qu'on a rencontrées dans le problème des plaques, mais montre, ce qui est important, que ces impossibilités ne tiennent pas à ce qu'on n'a pas poussé assez loin les calculs d'approximation, qu'on les eût rencontrées si loin qu'on les poussât :

Étant donnés la résultante de translation et le couple résultant d'un système de pressions exercées aux divers points de chacune des génératrices de la surface latérale d'un corps cylindrique, sur la masse et sur les deux bases duquel n'agissent pas de forces, il est, en général, impossible de trouver un mode de répartition de ces pressions tel, que les déplacements et les forces élastiques aux divers points du corps soient exprimables algébriquement par rapport à l'une de leurs coordonnées.

Pour que ce soit possible, il faut qu'entre les composantes de la résultante de translation et celles de l'axe du couple résultant sur chaque génératrice il existe une certaine relation.

On peut énoncer ce théorème encore d'une autre manière. Soient, après la déformation, x', y', z' les coordonnées du point dont les coordonnées primitives étaient x, y, z, de telle sorte que si

$$u = u(x,y,z), \quad v = v(x,y,z), \quad w = w(x,y,z)$$

sont les composantes du déplacement, on ait

$$\begin{aligned} x' &= x + u(x,y,z), \\ y' &= y + v(x,y,z), \\ z' &= z + w(x,y,z). \end{aligned}$$

Pour avoir les équations de la courbe dans laquelle se transforme une droite $x = x_0$, $y = y_0$ primitivement parallèle à l'axe des z ou aux génératrices du cylindre, on devra éliminer z entre les trois équations

$$x' = x_0 + u(x_0, y_0, z), \quad y' = y_0 + v(x_0, y_0, z), \quad z' = z + w(x_0, y_0, z)$$

ou, à cause de la dernière, les deux premières deviennent

$$x' = x_0 + u(x_0, y_0, z' - w),$$
$$y' = y_0 + v(x_0, y_0, z' - w).$$

Et, comme w est extrêmement petit, on peut le négliger devant la quantité finie z' et écrire

$$x' = x_0 + u(x_0, y_0, z'),$$
$$y' = y_0 + v(x_0, y_0, z'),$$

qui représentent les projections de la courbe cherchée sur les plans des xz et des yz.

Si donc u et v sont des fonctions algébriques de degré n, ces projections sont de forme parabolique.

Ainsi on peut encore énoncer ainsi le théorème précédent :

Si l'on se donne arbitrairement la résultante de translation et le couple résultant des pressions exercées aux divers points de chacune des génératrices de la surface latérale d'un corps cylindrique sur la masse et les bases duquel n'agissent pas de forces, il est en général impossible de répartir ces pressions de façon que les droites matérielles parallèles aux génératrices du cylindre se transforment en courbes paraboliques, si élevé qu'on suppose le degré de ces courbes.

Pour que cela soit possible, il faut qu'entre cette résultante de translation et ce couple résultant il existe *une* relation qui soit identiquement satisfaite sur chaque génératrice.

Enfin, si cette relation est satisfaite, les expressions de x', y' seront au plus du troisième degré en z', comme le montrent les équations (X), de sorte qu'on peut encore ajouter cette autre et importante proposition :

Quelles que soient les pressions exercées sur la surface latérale d'un cylindre élastique sur la masse entière et sur les bases duquel n'agissent pas de forces, il est toujours *impossible qu'une droite matérielle parallèle aux génératrices du cylindre se transforme, par la déformation élastique, en une courbe algébrique d'un degré supérieur au troisième.*

III.

Sur un nouveau cas particulier du problème de l'équilibre d'un cylindre élastique.

Il résulte de ce qui précède que, si l'on veut se donner arbitrairement la résultante de translation et le couple résultant des pressions exercées sur chacune des génératrices du cylindre et trouver ensuite un mode de répartition de ces pressions pour lequel le problème de l'équilibre élastique soit *rigoureusement* résolu, il est nécessaire, à la solution particulière qui précède, d'en ajouter une autre; et nous sommes assuré que cette nouvelle solution ne pourra pas être algébrique par rapport à z.

Soit F une fonction de x, y, z, remplissant les deux conditions suivantes : 1° de satisfaire en tous les points du corps cylindrique considéré à l'équation

$$\Delta_2 F = \frac{\partial^2 F}{dx^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{dz^2} = 0;$$

2° De satisfaire sur les deux bases, soit pour $z = \pm \varepsilon$, à l'équation

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 0. \tag{16}$$

Il existe une infinité de fonctions remplissant cette double condition; car, pour que la fonction F fût déterminée, il faudrait encore se donner, comme on le montre dans la théorie de la chaleur, l'expression de F ou de $\frac{\partial F}{\partial n}$ sur la surface latérale (n désignant la normale en un point de cette surface).

Posons

$$u = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad v = \frac{-\partial F}{\partial x}, \quad w = 0, \quad \theta = 0. \tag{17}$$

On vérifiera de suite que les quatre équations à différences partielles (1), qui régissent les quatre fonctions u, v, w, θ, sont satisfaites.

Les expressions correspondantes des forces élastiques sont, en vertu des équations (2),

$$(18)\quad \begin{cases} N_1 = 2K\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, & N_2 = -2K\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \quad T_3 = K\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right), \\ N_3 = 0, & T_1 = -\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}, \quad T_2 = +\dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}. \end{cases}$$

Par suite, en vertu de (16), les pressions sur les deux bases sont nulles. Donc les expressions (18) constituent une nouvelle solution qui, comme la solution algébrique, satisfait aux conditions sur les bases; en ajoutant ces deux solutions, on obtiendra une nouvelle solution, satisfaisant elle-même aux conditions sur les bases et renfermant les arbitraires nécessaires pour que l'on puisse prendre arbitrairement la résultante de translation, et le couple résultant des pressions appliquées sur chaque génératrice. Elle contient même plus d'arbitraires qu'il n'est nécessaire et l'on peut, comme on le verra facilement, particulariser la fonction F d'une infinité de manières. Parmi les formes qu'on peut lui attribuer, prenons celle-ci

$$F = \zeta \sin\frac{\pi z}{2\varepsilon},$$

ζ étant une fonction des deux seules variables x et y satisfaisant à l'équation

$$(19)\qquad \Delta_2\zeta - \frac{\varpi^2}{4\varepsilon^2}\zeta = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} - \frac{\pi^2}{4\varepsilon^2}\zeta = 0.$$

Ce qui donnera $\Delta_2 F = 0$; d'ailleurs, la condition sur les bases est remplie d'elle-même, comme le montrent les trois dernières (18). Ainsi on peut prendre pour ζ toute solution de l'équation à différences partielles ci-dessus.

Si l'on ajoute les expressions (17) et (18) des déplacements et des forces élastiques, après y avoir remplacé F par sa valeur (19), à celles fournies par les équations (X) et (XI), et qu'on pose, pour simplifier

$$u = u' + u'', \quad v = v' + v'', \quad w = w' + w'', \quad \theta = \theta' + \theta'',$$
$$N_i = N'_i + N''_i, \quad T_i = T'_i + T''_i, \quad (i = 1, 2, 3),$$

il viendra

$$
\text{(XII)}\quad\left\{
\begin{aligned}
& u' = \mathrm{U}_0 + k\frac{\partial\Theta_0}{\partial x}\frac{z^2}{2}, \qquad v' = \mathrm{V}_0 + k\frac{\partial\Theta_0}{\partial y}\frac{z^2}{2},\\
& w' = -k\Theta_0 z, \qquad \theta' = \Theta_0,\\
& \mathrm{N}'_1 = 2\mathrm{K}\left(k\Theta_0 + \frac{\partial\mathrm{U}_0}{\partial x} + k\frac{\partial^2\Theta_0}{\partial x^2}\frac{z^2}{2}\right),\\
& \mathrm{N}'_2 = 2\mathrm{K}\left(k\Theta_0 + \frac{\partial\mathrm{V}_0}{\partial y} + k\frac{\partial^2\Theta_0}{\partial y^2}\frac{z^2}{2}\right),\\
& \mathrm{T}'_3 = \mathrm{K}\left(\frac{\partial\mathrm{U}_0}{\partial y} + \frac{\partial\mathrm{V}_0}{\partial x} + 2k\frac{\partial^2\Theta_0}{\partial x\,\partial y}\frac{z^2}{2}\right),\\
& \mathrm{N}'_3 = \mathrm{T}'_1 = \mathrm{T}'_2 = 0;
\end{aligned}\right.
$$

$$
u'' = -\left(\frac{\partial\mathrm{W}_0}{\partial x} + \frac{2k+1}{k+1}\varepsilon^2\frac{\partial\Delta_2\mathrm{W}_0}{\partial x}\right)z + \frac{3k+2}{k+1}\frac{\partial\Delta_2\mathrm{W}_0}{\partial x}\frac{z^3}{6} + \frac{\partial\zeta}{\partial y}\sin\frac{\pi z}{2\varepsilon},
$$

$$
v'' = -\left(\frac{\partial\mathrm{W}_0}{\partial y} + \frac{2k+1}{k+1}\varepsilon^2\frac{\partial\Delta_2\mathrm{W}_0}{\partial y}\right)z + \frac{3k+2}{k+1}\frac{\partial\Delta_2\mathrm{W}_0}{\partial y}\frac{z^3}{6} - \frac{\partial\zeta}{\partial x}\sin\frac{\pi z}{2\varepsilon},
$$

$$
w'' = \mathrm{W}_0 + \frac{k}{k+1}\Delta_2\mathrm{W}_0\frac{z^2}{2};
$$

$$
\text{(XIII)}\quad\left\{
\begin{aligned}
\mathrm{N}''_1 = 2\mathrm{K}\Big[& -\left(\frac{k}{k+1}\Delta_2\mathrm{W}_0 + \frac{\partial^2\mathrm{W}_0}{\partial x^2} + \frac{2k+1}{k+1}\varepsilon^2\frac{\partial^2\Delta_2\mathrm{W}_0}{\partial x^2}\right)z\\
& + \frac{3k+2}{k+1}\frac{\partial^2\Delta_2\mathrm{W}_0}{\partial x^2}\frac{z^3}{6} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}\sin\frac{\pi z}{2\varepsilon}\Big],\\
\mathrm{N}''_2 = 2\mathrm{K}\Big[& -\left(\frac{k}{k+1}\Delta_2\mathrm{W}_0 + \frac{\partial^2\mathrm{W}_0}{\partial y^2} + \frac{2k+1}{k+1}\varepsilon^2\frac{\partial^2\Delta_2\mathrm{W}_0}{\partial y^2}\right)z\\
& + \frac{3k+2}{k+1}\frac{\partial^2\Delta_2\mathrm{W}_0}{\partial y^2}\frac{z^3}{6} - \frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}\sin\frac{\pi z}{2\varepsilon}\Big],\\
\mathrm{T}''_3 = \mathrm{K}\Big[& -2\left(\frac{\partial^2\mathrm{W}_0}{\partial x\,\partial y} + \frac{2k+1}{k+1}\varepsilon^2\frac{\partial^2\Delta_2\mathrm{W}_0}{\partial x\,\partial y}\right)z\\
& + \frac{6k+4}{k+1}\frac{\partial^2\Delta_2\mathrm{W}_0}{\partial x\,\partial y}\frac{z^3}{6} + \left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right)\sin\frac{\pi z}{2\varepsilon}\Big],\\
\mathrm{N}''_3 = 0&,\\
\mathrm{T}''_1 = \mathrm{K}\Big[& -\frac{2k+1}{k+1}\frac{\partial\Delta_2\mathrm{W}_0}{\partial y}(\varepsilon^2 - z^2) - \frac{\pi}{2\varepsilon}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\cos\frac{\pi z}{2\varepsilon}\Big],\\
\mathrm{T}''_2 = \mathrm{K}\Big[& -\frac{2k+1}{k+1}\frac{\partial\Delta_2\mathrm{W}_0}{\partial x}(\varepsilon^2 - z^2) + \frac{\pi}{2\varepsilon}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\cos\frac{\pi z}{2\varepsilon}\Big].
\end{aligned}\right.
$$

Sur la surface latérale, on aurait, en général,

$$
(20) \qquad \begin{cases} N_1 \cos\alpha + T_3 \sin\alpha = X, \\ T_3 \cos\alpha + N_2 \sin\alpha = Y, \\ T_2 \cos\alpha + T_1 \sin\alpha = Z, \end{cases}
$$

X, Y, Z étant des fonctions données. Pour que le problème puisse être résolu rigoureusement, il faut d'abord que X, Y, Z soient de la forme des seconds membres de (9), complétés par trois termes de la forme $X'_{\text{IV}} \sin \frac{\pi z}{2\varepsilon}$, $Y'_{\text{IV}} \sin \frac{\pi z}{2\varepsilon}$, $Z'_{\text{IV}} \cos \frac{\pi z}{2\varepsilon}$; et alors, en répétant la discussion de la fin du § I, on verrait qu'on pourrait prendre ici arbitrairement cinq des douze fonctions X_i, Y_i, Z_i des deux variables x, y entrant dans les expressions de X, Y, Z, à savoir : quatre de celles qui forment les seconds membres de (9) et l'une de celles X'_{IV}, Y'_{IV}, Z'_{IV}; on pourra, par suite, *étant donnés arbitrairement la résultante de translation et le couple résultant des forces extérieures agissant sur chacune des génératrices du cylindre, trouver un mode de répartition de ces forces pour lequel le problème de l'équilibre élastique sera rigoureusement résolu par les formules* (XII) *et* (XIII).

Pour trouver les conditions à la surface qui régissent la résultante de translation et le couple résultant, désignons par X_0, Y_0, Z_0 les projections sur les axes de la résultante de ces forces, et par X_1, Y_1 la somme de leurs moments par rapport à deux axes parallèles aux x et aux y menés par un point de la génératrice que l'on considère, en sorte que

$$
(\text{XIV}) \qquad \begin{cases} X_0 = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} X\,dz, \quad Y_0 = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} Y\,dz, \quad Z_0 = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} Z\,dz, \\ X_1 = -\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} Yz\,dz, \quad Y_1 = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} Xz\,dz. \end{cases}
$$

Les deux premières (20), multipliées par dz et intégrées entre $-\varepsilon$ et $+\varepsilon$, donnent, en remplaçant les N_i et T_i par leurs valeurs (XII) et (XIII),

$$
\text{(XIV)}\quad\left\{
\begin{aligned}
&\left[2\varepsilon\left(k\Theta_0+\frac{\partial U_0}{\partial x}\right)+k\frac{\partial^2\Theta_0}{\partial x^2}\frac{\varepsilon^3}{3}\right]\cos\alpha\\
&\quad+\left[\varepsilon\left(\frac{\partial U_0}{\partial y}+\frac{\partial V_0}{\partial x}\right)+k\frac{\partial\Theta_0}{\partial x\,\partial y}\frac{\varepsilon^3}{3}\right]\sin\alpha=\frac{X_0}{2K},\\
&\left[\varepsilon\left(\frac{\partial U_0}{\partial y}+\frac{\partial V_0}{\partial x}\right)+k\frac{\partial^2\Theta_0}{\partial x\,\partial y}\frac{\varepsilon^3}{3}\right]\cos\alpha\\
&\quad+\left[2\varepsilon\left(k\Theta_0+\frac{\partial V_0}{\partial y}\right)+k\frac{\partial^2\Theta_0}{\partial y^2}\frac{\varepsilon^3}{3}\right]\sin\alpha=\frac{Y_0}{2K};
\end{aligned}\right.
$$

puis la troisième (20), multipliée par dz et les deux premières, multipliées par $z\,dz$ et intégrées, donnent

$$
\text{(XV)}\left\{
\begin{aligned}
&\left[\frac{2(2k+1)}{3(k+1)}\varepsilon^3\frac{\partial\Delta_2 W_0}{\partial x}-\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right]\cos\alpha+\left[\frac{2(2k+1)}{3(k+1)}\varepsilon^3\frac{\partial\Delta_2 W_0}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right]\sin\alpha=\frac{-Z_0}{2K},\\
&\left[-\left(\frac{k}{k+1}\Delta_2 W_0+\frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2}\right)\frac{2\varepsilon^3}{3}-\frac{17k+8}{k+1}\frac{\partial^2\Delta_2 W_0}{\partial x^2}\frac{2\varepsilon^5}{15}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}\frac{8\varepsilon^2}{\pi^2}\right]\cos\alpha\\
&\quad+\left[-\frac{\partial^2 W_0}{\partial x\,\partial y}\frac{2\varepsilon^3}{3}-\frac{17k+8}{k+1}\frac{\partial^2\Delta_2 W_0}{\partial x\,\partial y}\frac{\varepsilon^5}{15}+\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right)\frac{4\varepsilon^2}{\pi^2}\right]\sin\alpha=\frac{Y_1}{2K},\\
&\left[-\frac{\partial^2 W_0}{\partial x\,\partial y}\frac{2\varepsilon^3}{3}-\frac{17k+8}{k+1}\frac{\partial^2\Delta_2 W_0}{\partial x\,\partial y}\frac{\varepsilon^5}{15}+\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right)\frac{4\varepsilon^2}{\pi^2}\right]\cos\alpha\\
&\quad+\left[-\left(\frac{k}{k+1}\Delta_2 W_0+\frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2}\right)\frac{2\varepsilon^3}{3}-\frac{17k+8}{k+1}\frac{\partial^2\Delta_2 W_0}{\partial y^2}\frac{2\varepsilon^5}{15}-\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}\frac{8\varepsilon^2}{\pi^2}\right]\sin\alpha=\frac{-X_1}{2K}.
\end{aligned}\right.
$$

En résumé, le problème à résoudre consiste : 1° à déterminer les trois fonctions U_0, V_0, Θ_0 de façon à satisfaire, en tous les points d'une section droite du cylindre, aux équations à différences partielles (VIII), et, sur le pourtour, aux deux conditions (XIV); 2° à déterminer les deux fonctions W_0 et ζ, de manière que la première satisfasse, dans toute l'étendue de la section droite, à l'équation du quatrième ordre $\Delta_2^2 W_0 = 0$ et la seconde à l'équation du deuxième ordre (19), et que, sur le pourtour, elles satisfassent aux trois conditions (XV).

On voit que le problème se sépare en deux; la recherche des trois fonctions U_0, V_0, Θ_0 et celle des deux fonctions W_0 et ζ constituent deux questions absolument indépendantes.

Si la résultante de translation des forces agissant sur l'une quelconque des génératrices de la surface latérale est dirigée suivant cette génératrice elle-même, c'est-à-dire si $X_0 = 0$, $Y_0 = 0$, on voit qu'on satisfait à toutes les conditions que doivent remplir les fonctions U_0, V_0, θ_0 en faisant $U_0 = 0$, $V_0 = 0$, $\theta_0 = 0$, et, comme le problème de la recherche de ces fonctions est déterminé, il s'ensuit qu'elles sont effectivement nulles.

IV.

Application des résultats qui précèdent aux plaques minces.

Appliquons maintenant les résultats rigoureux qui précèdent aux plaques minces, c'est-à-dire au cas où la hauteur 2ε du cylindre considéré, et, par suite, la coordonnée z, deviennent extrêmement petites.

Les formules (XII) deviennent, en négligeant les quantités de l'ordre de z^2 ou ε^2 devant celles ne contenant pas ces lettres,

$$u' = U_0, \quad v' = V_0, \quad w' = -k\theta_0 z, \quad \theta' = \theta_0,$$
$$N'_1 = 2K\left(k\theta_0 + \frac{\partial U_0}{\partial x}\right), \quad N'_2 = 2K\left(k\theta_0 + \frac{\partial V_0}{\partial y}\right),$$
$$T'_3 = K\left(\frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{\partial V_0}{\partial x}\right).$$

D'ailleurs, les fonctions U_0, V_0, θ_0 doivent satisfaire aux équations (VIII) qui ne changent pas et aux conditions à la surface (XIV) qui se simplifient et deviennent

$$(22\ bis)\quad \begin{cases} 2\left(k\theta_0 + \dfrac{\partial U_0}{\partial x}\right)\cos\alpha + \left(\dfrac{\partial U_0}{\partial y} + \dfrac{\partial V_0}{\partial x}\right)\sin\alpha = \dfrac{X_0}{2K\varepsilon}, \\ \left(\dfrac{\partial U_0}{\partial y} + \dfrac{\partial V_0}{\partial x}\right)\cos\alpha + \left(k\theta_0 + \dfrac{\partial V_0}{\partial y}\right)\sin\alpha = \dfrac{Y_0}{2K\varepsilon}. \end{cases}$$

Ce premier problème, consistant à chercher les trois fonctions U_0, V_0, θ_0, est tout à fait de même nature que celui du plan élastique.

Les formules (XIII) donnent, en négligeant les termes de l'ordre de z^3 ou ε^3 devant ceux du premier ordre en z ou ε,

$$
(23)\quad \left\{
\begin{aligned}
u'' &= -\frac{\partial W_0}{\partial x} z + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \sin \frac{\pi z}{2\varepsilon},\\
v'' &= -\frac{\partial W_0}{\partial x} z - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \sin \frac{\pi z}{2\varepsilon},\\
w'' &= \quad W_0 + \frac{k}{k+1} \Delta_2 W_0 \frac{z^2}{2},\\
N''_1 &= 2K\left[-\left(\frac{k}{k+1}\Delta_2 W_0 + \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2}\right) z + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \sin \frac{\pi z}{2\varepsilon}\right],\\
N''_2 &= 2K\left[-\left(\frac{k}{k+1}\Delta_2 W_0 + \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2}\right) z - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \sin \frac{\pi z}{2\varepsilon}\right],\\
T''_3 &= \quad K\left[-2\frac{\partial^2 W_0}{\partial x \partial y} z + \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\right) \sin \frac{\pi z}{2\varepsilon}\right],\\
N''_3 &= 0,\\
T''_1 &= \quad K\left[-\frac{2k+1}{k+1}\frac{\partial \Delta_2 W_0}{\partial x}(\varepsilon^2 - z^2) - \frac{\pi}{2\varepsilon}\frac{\partial \zeta}{\partial x} \cos \frac{\pi z}{2\varepsilon}\right],\\
T''_2 &= \quad K\left[-\frac{2k+1}{k+1}\frac{\partial \Delta_2 W_0}{\partial x}(\varepsilon^2 - z^2) + \frac{\pi}{2\varepsilon}\frac{\partial \zeta}{\partial y} \cos \frac{\pi z}{2\varepsilon}\right].
\end{aligned}
\right.
$$

D'ailleurs, les fonctions W_0 et ζ satisfont à

$$(24)\qquad \Delta_2^2 W_0 = 0$$

et

$$(25)\qquad \Delta_2 \zeta - \frac{\pi^2}{4\varepsilon^2}\zeta = 0,$$

et aux conditions à la surface (XV).

Dans les deux dernières (XV), on peut négliger le terme en ε^5 devant celui en ε^3; il est d'ailleurs plus commode de remplacer les composantes X_1, Y_1 du couple résultant des forces extérieures parallèlement aux axes de coordonnées par ses composantes $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{N}$ suivant la tangente et la normale à la section droite du cylindre. On aura

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{N} &= \quad X_1 \cos\alpha + Y_1 \sin\alpha,\\
\mathfrak{T} &= -X_1 \sin\alpha + Y_1 \cos\alpha.
\end{aligned}
$$

Par suite, les conditions à la surface deviendront

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned}
&\left[\frac{2(2k+1)}{3(k+1)}\varepsilon^3\frac{\partial\Delta_2 W_0}{\partial x}-\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right]\cos\alpha\\
&\qquad+\left[\frac{2(2k+1)}{3(k+1)}\varepsilon^3\frac{\partial\Delta_2 W_0}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right]\sin\alpha=\frac{-Z_0}{2K},\\
&\left[\frac{\partial^2 W_0}{\partial x\,\partial y}\frac{2\varepsilon^3}{3}-\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}-\frac{\partial\zeta^2}{\partial x^2}\right)\frac{4\varepsilon^2}{\pi^2}\right]\cos 2\alpha\\
&\qquad+\left[\left(\frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2}\right)\frac{\varepsilon^3}{3}+\frac{\partial\zeta^2}{\partial x\,\partial y}\frac{4\varepsilon^2}{\pi^2}\right]\sin 2\alpha=\frac{\mathfrak{M}}{2K},\\
&\left(\frac{1}{2}-\frac{k}{k+1}\right)\frac{2\varepsilon^3}{3}\Delta_2 W_0\\
&\qquad+\left[\left(\frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2}\right)\frac{\varepsilon^3}{3}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}\frac{8\varepsilon^2}{\pi^2}\right]\cos 2\alpha,\\
&\left[-\frac{\partial^2 W_0}{\partial x\,\partial y}\frac{2\varepsilon^3}{3}+\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right)\frac{4\varepsilon^2}{\pi^2}\right]\sin 2\alpha=\frac{\mathfrak{G}}{2K},
\end{aligned}\right.$$

où Z_0 peut être appelé *l'effort tranchant*, $\mathfrak{G}$ *le moment de flexion et* $\mathfrak{M}$ *le moment de torsion.*

On voit, par les expressions u'', v'', w'', qu'une ligne primitivement droite et normale au plan moyen ne reste pas droite et normale à cette surface déformée, mais se transforme en une ligne de forme sinusoïde coupant à angle droit les deux bases déformées de la plaque. Si l'on faisait $\zeta=0$, on retrouverait que ces lignes restent droites et normales à la surface moyenne.

Les équations (23) et (26) ne prennent un sens net que si l'on connaît les grandeurs relatives des fonctions W_0 et ζ. Les équations indéfinies (24) et (25) auxquelles elles satisfont, si elles étaient seules, n'apprendraient rien sur leurs grandeurs respectives; car ces équations ne changent pas si l'on multiplie chacune d'elles par une constante quelconque. Mais de l'équation en ζ on peut déduire des relations de grandeur entre cette fonction et ses dérivées de divers ordres.

Posons

$$x=\frac{2\varepsilon}{\pi}x',\quad y=\frac{2\varepsilon}{\pi}y',$$

l'équation en ζ, qui est

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}=\frac{\pi^2}{4\varepsilon^2}\zeta - o,$$

se transforme en

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y'^2}-\zeta=o.$$

Donc ζ est une fonction de x' et de y', c'est-à-dire de $\frac{\pi x}{2\varepsilon}$ et $\frac{\pi y}{2\varepsilon}$, ou, si l'on veut, de $\frac{x}{\varepsilon}$ et de $\frac{y}{\varepsilon}$. De là, on conclut pour l'une de ses dérivées premières, par exemple celle relative à x,

$$\frac{d\zeta}{dx}=\frac{1}{\varepsilon}\frac{d\zeta}{dx'};$$

et, comme la dérivée $\frac{d\zeta}{dx'}$ est en général de même ordre de grandeur que la fonction elle-même, il s'ensuit que $\frac{d\zeta}{dx}$ sera en général incomparablement plus grand que ζ; de même les dérivées secondes sont multipliées par $\frac{1}{\varepsilon^2}$, et, par suite, sont, en général, incomparablement plus grandes encore.

Cela posé, ce sont les conditions à la surface (26) qui indiquent les grandeurs relatives des deux fonctions W_0 et ζ.

Observons que, d'après le théorème de Poisson, c'est-à-dire si l'on suppose les actions tangentielles développables suivant les puissances de z, l'effort tranchant Z_0 doit être de l'ordre de $\varepsilon^2 W_0$.

Car l'action verticale, par unité de surface, sur un élément superficiel pris sur le cylindre terminant la plaque, s'annule pour $z=\pm\varepsilon$; elle contient donc le facteur (ε^2-z^2) et son intégrale prise de $-\varepsilon$ à $+\varepsilon$, c'est-à-dire Z_0, doit nécessairement contenir ε^2 en facteur.

Mais, si l'on n'admet pas *a priori* la possibilité du développement dont il s'agit, il n'est plus évident ni certain que l'effort tranchant ait ce degré de petitesse, et nous allons voir qu'il peut ne pas l'avoir.

Examinons directement, d'après nos équations, quel doit être le degré de grandeur de la fonction ζ. D'abord, pour $\varepsilon=o$, on a, en vertu de (25), $\zeta=o$; par suite, à cause de la première (26), $Z_0=o$. Ainsi Z_0

est au moins de l'ordre de εW_0; s'il était de cet ordre, il en serait de même des dérivées $\frac{d\zeta}{dx}$, $\frac{d\zeta}{dy}$ d'après la première (26); par suite, les dérivées secondes de ζ seraient en général de l'ordre de W_0, ce qui est évidemment impossible; car, dans les deux dernières (26), tous les termes contenant le facteur ε^3 deviendraient négligeables, et ces deux équations ne pourraient plus être satisfaites en même temps que celle (25).

Donc la fonction Z_0 est au moins de l'ordre de $\varepsilon^2 W_0$; remarquons d'ailleurs que, si elle est de cet ordre, il en sera de même des dérivées $\frac{d\zeta}{dx}$, $\frac{d\zeta}{dy}$, à cause de la première (26); par suite, les dérivées secondes de la fonction ζ seront en général de l'ordre de εW_0, et, comme dans les deux dernières (26) elles sont multipliées par ε^2, elles fournissent des termes comparables à ceux en ε^3 qui entrent déjà dans ces équations.

Ainsi toutes les conditions du problème peuvent parfaitement être remplies, Z_0 étant de l'ordre de ε^2; il n'est pas nécessaire que cette fonction soit de l'ordre ε^3, comme on l'admet implicitement si on la suppose développable suivant les puissances de z.

Si elle est de l'ordre de ε^2, les termes en W_0 peuvent, du moins comme première approximation, être négligés dans la première condition à la surface, ce qui sépare la recherche de la fonction ζ de celle de la fonction W_0 et simplifie beaucoup le problème.

Les derniers termes de l'expression des déplacements u'' et v'' sont alors aussi de l'ordre de ε^2; par conséquent, la forme sinusoïdale qu'affectent les petites lignes primitivement normales au plan moyen ont une flèche *extrêmement petite* et *cependant cette légère courbure donne lieu à un effort tranchant fort considérable.* Cela tient à ce qu'il entre dans nos expressions une fonction du rapport $\frac{z}{\varepsilon}$, rapport fini, quoique z et ε soient des quantités très-petites.

Dans le cas particulier où Z_0 serait de l'ordre de $\varepsilon^3 W_0$ ou d'un ordre plus élevé ou nul (c'est-à-dire si les pressions sur les surfaces latérales étaient normales à cette surface), alors les dérivées $\frac{d\zeta}{dx}$, $\frac{d\zeta}{dy}$ seraient, en vertu de la première (26), de l'ordre de $\varepsilon^3 W_0$; par suite, tous les termes de la première condition à la surface devraient être conservés;

mais dans les deux derniers on pourrait alors négliger les termes provenant de la fonction ζ, ces termes étant en général de l'ordre de ε^4.

La recherche des deux fonctions W_0 et ζ se séparera donc encore; on devra dans ce cas commencer par chercher la fonction W_0 de façon qu'elle satisfasse à l'équation $\Delta_2^2 W_0 = 0$, et aux deux dernières conditions (21) où l'on aura supprimé les termes contenant ζ. Ce problème est possible et déterminé; puis, la fonction W_0 connue, on en portera la valeur dans la première condition à la surface et l'on déterminera la fonction ζ de manière à satisfaire à cette unique condition et à l'équation (24).

V.

Introduction des forces agissant sur la masse de la plaque.

Jusqu'ici nous avons négligé les forces telles que la pesanteur agissant sur la masse entière de la plaque. Pour les introduire sans recommencer tous les calculs, nous emploierons une méthode qui est une sorte de généralisation de la méthode de la variation des constantes arbitraires; reprenons un instant pour les composantes u, v, w des déplacements les expressions (X), en y adjoignant celles (17) où $F = \zeta \sin\frac{\pi z}{2\varepsilon}$; mais supposons que les fonctions U_0, V_0, Θ_0, W_0, ζ soient entièrement indéterminées (c'est-à-dire ne satisfassent plus aux équations qui les régissaient quand on faisait abstraction des forces extérieures agissant sur la masse de la plaque) et cherchons à déterminer, s'il est possible, ces fonctions de manière à satisfaire aux nouvelles équations d'équilibre résultant de l'introduction des forces extérieures, sans cesser de satisfaire à la condition que les pressions sur les deux bases soient nulles.

On observera d'abord que des expressions (X) de u, v, w, θ, et en vertu des formules (2), on déduit pour les pressions N_1, N_2, N_3; T_1, T_2, T_3, les expressions (XI), quelles que soient les fonctions U_0, V_0, W_0, Θ_0, quand bien même elles ne satisfont plus aux équations à différences partielles qui les régissaient avant l'introduction des forces proportionnelles aux masses. Donc, quelles que soient ces fonctions, la pression N_3 sera nulle dans toute l'étendue de la plaque et, en particulier, sur les deux bases, et les pressions T_1 et T_2 le seront également sur les bases.

Maintenant des expressions (17) qui, pour $F = \zeta \sin\frac{\pi z}{2\varepsilon}$, deviennent

$$(27)\qquad u = \frac{d\zeta}{dy}\sin\frac{\pi z}{2\varepsilon},\quad v = -\frac{d\zeta}{dx}\sin\frac{\pi z}{2\varepsilon},\quad w = 0,\quad \theta = 0,$$

on déduit par les formules (2), et cela *quelle que soit* la fonction ζ, pour les forces élastiques les expressions

$$(28)\qquad \left\{\begin{aligned}
N_1 &= 2K\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}\sin\frac{\pi z}{2\varepsilon},\\
N_2 &= -2K\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}\sin\frac{\pi z}{2\varepsilon},\\
T_3 &= K\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right)\sin\frac{\pi z}{2\varepsilon};\\
T_1 &= K\frac{\partial\zeta}{\partial x}\,\frac{\pi}{2\varepsilon}\cos\frac{\pi z}{2\varepsilon},\\
T_2 &= K\frac{\partial\zeta}{\partial y}\,\frac{\pi}{2\varepsilon}\cos\frac{\pi z}{2\varepsilon},\\
N_3 &= 0;
\end{aligned}\right.$$

en sorte que les trois dernières s'annulent également sur les deux bases.

Ainsi, en prenant pour u, v, w la somme des expressions (X) et (27) et laissant entièrement arbitraires toutes les fonctions qui y entrent, on obtiendra pour les forces élastiques la somme des expressions (XI) et (28) et, par suite, on satisfera à la condition d'annuler les pressions sur les deux bases. Reste donc seulement à trouver les nouvelles équations aux dérivées partielles qui régissent les fonctions U_0, V_0, W_0, Θ_0 et ζ par suite de l'introduction des actions telles que la pesanteur. Les formules obtenues sont, aux quantités près de l'ordre de ε^2,

$$(28\ bis)\qquad \left\{\begin{aligned}
\theta &= \Theta_0 - \frac{\Delta_2 W_0}{k+1}z,\\
u &= U_0 - \frac{\partial W_0}{\partial x}z + k\frac{\partial\Theta_0}{\partial x}\,\frac{z^2}{2} + \frac{\partial\zeta}{\partial y}\sin\frac{\pi z}{2\varepsilon},\\
v &= V_0 - \frac{\partial W_0}{\partial y}z + k\frac{\partial\Theta_0}{\partial y}\,\frac{z^2}{2} + \frac{\partial\zeta}{\partial x}\sin\frac{\pi z}{2\varepsilon},\\
w &= W_0 - K\Theta_0 z + \frac{k}{k+1}\Delta_2 W_0\,\frac{z^2}{2}.
\end{aligned}\right.$$

De là on conclut, par les formules (2) et quelles que soient les fonctions indéterminées $\theta_0, U_0, V_0, W_0, \zeta,$

$$(29)\begin{cases} N_1 = 2K\left[k\theta_0 + \dfrac{\partial U_0}{\partial x} - \left(\dfrac{k}{k+1}\Delta_2 W_0 + \dfrac{\partial^2 W_0}{\partial x^2}\right)z + \dfrac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y}\sin\dfrac{\pi z}{2\varepsilon}\right], \\ N_2 = 2K\left[k\theta_0 + \dfrac{\partial V_0}{\partial y} - \left(\dfrac{k}{k+1}\Delta_2 W_0 + \dfrac{\partial^2 W_0}{\partial y^2}\right)z - \dfrac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y}\sin\dfrac{\pi z}{2\varepsilon}\right], \\ T_3 = K\left[\dfrac{\partial U_0}{\partial y} + \dfrac{\partial V_0}{\partial y} - 2\dfrac{\partial^2 W_0}{\partial x\partial y}z + \left(\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} - \dfrac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right)\sin\dfrac{\pi z}{2\varepsilon}\right], \\ N_3 = 0, \\ T_1 = K\left[-\dfrac{2k+1}{k+1}\dfrac{\partial\Delta_2 W_0}{\partial y}\left(\varepsilon^2 - z^2\right) - \dfrac{\pi}{2\varepsilon}\dfrac{\partial\zeta}{\partial x}\cos\dfrac{\pi z}{2\varepsilon}\right], \\ T_2 = K\left[-\dfrac{2k+1}{k+1}\dfrac{\partial\Delta_2 W_0}{\partial x}\left(\varepsilon^2 - z^2\right) + \dfrac{\pi}{2\varepsilon}\dfrac{\partial\zeta}{\partial y}\cos\dfrac{\pi z}{2\varepsilon}\right]. \end{cases}$$

Observons qu'il y a entre u, v, w, θ une relation que l'introduction des forces extérieures ne modifie pas : c'est celle $\theta = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z}$, qui définit la dilatation cubique. Pour qu'elle soit satisfaite par les expressions (28), on vérifiera facilement qu'il faut et il suffit que

$$(30)\qquad (k+1)\theta_0 = \frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial V_0}{\partial y}.$$

Voilà donc une première relation nécessaire entre les fonctions indéterminées qui entrent dans les équations (28) et (29).

Maintenant les équations d'équilibre sont, en appelant X', Y', Z' les composantes, suivant les axes, de la force rapportée à l'unité de volume, agissant en un point quelconque de la plaque,

$$(31)\qquad\begin{cases} \dfrac{\partial N_1}{\partial x} + \dfrac{\partial T_3}{\partial y} + \dfrac{\partial T_2}{\partial z} + X' = 0, \\ \dfrac{\partial T_3}{\partial x} + \dfrac{\partial N_2}{\partial y} + \dfrac{\partial T_1}{\partial z} + Y' = 0, \\ \dfrac{\partial T_2}{\partial x} + \dfrac{\partial T_1}{\partial y} + \dfrac{\partial N_3}{\partial z} + Z' = 0. \end{cases}$$

Soient A_0, B_0, C_0 les projections de la résultante de translation des forces aux composantes X', Y', Z', agissant sur les divers points d'une petite ligne parallèle à l'axe des z, et A_1, B_1 les sommes des moments de ces forces par rapport à des axes parallèles aux x et aux y, menés par le milieu de cette petite ligne, en sorte que

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} &A_0 = \int X' dz, \quad B_0 = \int Y' dz, \quad C_0 = \int Z' dz,\\ &A_1 = -\int Y' z\,dz, \quad B_1 = \int X' z\,dz. \end{aligned}\right.$$

les intégrales étant prises de $-\varepsilon$ à $+\varepsilon$.

Par suite, si l'on multiplie les trois équations ci-dessus par dz et qu'on intègre de $-\varepsilon$ à $+\varepsilon$, en observant que N_3, T_2, T_1 s'annulent pour $z = \pm\varepsilon$, on obtient

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \int N_1 dz}{\partial x} + \frac{\partial \int T_3 dz}{\partial y} + A_0 = 0,\\ &\frac{\partial \int T_3 dz}{\partial x} + \frac{\partial \int N_2 dz}{\partial y} + B_0 = 0,\\ &\frac{\partial \int T_2 dz}{\partial x} + \frac{\partial \int T_1 dz}{\partial y} + C_0 = 0.\\ &\text{En multipliant ensuite les deux premières par } z\,dz\\ &\text{et intégrant entre les limites } -\varepsilon \text{ et } +\varepsilon :\\ &\frac{\partial \int N_1 z\,dz}{\partial x} + \frac{\partial \int T_3 z\,dz}{\partial y} - \int T_2 dz + B_1 = 0,\\ &\frac{\partial \int T_3 z\,dz}{\partial x} + \frac{\partial \int N_2 z\,dz}{\partial y} - \int T_1 dz - A_1 = 0. \end{aligned}\right.$$

Les expressions (29) donnent d'ailleurs

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned} &\int N_1 dz = 4K\varepsilon\left(k\theta_0 + \frac{\partial U_0}{\partial x}\right),\\ &\int N_2 dz = 4K\varepsilon\left(k\theta_0 + \frac{\partial V_0}{\partial y}\right),\\ &\int T_3 dz = 4K\varepsilon\left(\frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{\partial V_0}{\partial x}\right);\\ &\text{puis}\\ &\int N_1 z\,dz = -2K\left(\frac{k}{k+1}\Delta_2 W_0 + \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2}\right)\frac{2\varepsilon^3}{3} + \frac{16K\varepsilon^2}{\varpi^2}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x\,\partial y},\\ &\int N_2 z\,dz = -2K\left(\frac{k}{k+1}\Delta_2 W_0 + \frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2}\right)\frac{2\varepsilon^3}{3} + \frac{16K\varepsilon^2}{\varpi^2}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x\,\partial y},\\ &\int T_3 z\,dz = -2K\left[\frac{\partial^2 W_0}{\partial x\,\partial y}\frac{2\varepsilon^3}{3} + \frac{8K\varepsilon^2}{\varpi^2}\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\right)\right];\\ &\int T_1 dz = -2K\frac{2k+1}{k+1}\frac{\partial \Delta_2 W_0}{\partial y}\frac{2\varepsilon^3}{3} - 2K\frac{\partial \zeta}{\partial x},\\ &\int T_2 dz = -2K\frac{2k+1}{k+1}\frac{\partial \Delta_2 W_0}{\partial x}\frac{2\varepsilon^3}{3} + 2K\frac{\partial \zeta}{\partial y}. \end{aligned}\right.$$

Si l'on porte ces valeurs dans les deux premières équations (33), il vient

$$(35)\quad \begin{cases} (2k+1)\dfrac{\partial\theta_0}{\partial x} + \Delta_2 U_0 + \dfrac{A_0}{2K\varepsilon} = 0, \\ (2k+1)\dfrac{\partial\theta_0}{\partial y} + \Delta_2 V_0 + \dfrac{B_0}{2K\varepsilon} = 0, \\ \text{à laquelle il faut joindre celle (30) :} \\ \dfrac{\partial U_0}{\partial x} + \dfrac{\partial V_0}{\partial y} = (k+1)\theta_0. \end{cases}$$

Les trois fonctions U_0, V_0, θ_0 doivent satisfaire en tous les points de la plaque à ces trois équations (qui se réduisent à celles précédemment trouvées, lorsque $A_0 = 0$, $B_0 = 0$), et en outre, sur le contour de la plaque, aux deux conditions (XIV) qui ne changent pas, les expressions des pressions N_i et T_i ayant conservé la même forme qu'avant l'introduction des forces extérieures.

Si l'on porte les intégrales ci-dessus dans la troisième équation (33), elle devient

$$(36)\quad \Delta_2^2 W_0 = \frac{3(k+1)}{4K(2k+1)}\frac{1}{\varepsilon^3}C_0.$$

Enfin, si on les porte dans les deux dernières, elles deviennent après réduction

$$(37)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\left(\Delta_2\zeta - \dfrac{\pi^2}{4\varepsilon^2}\zeta\right)}{\partial y} + \dfrac{\pi^2}{8K}\dfrac{1}{\varepsilon^2}B_1 = 0, \\ \dfrac{\partial\left(\Delta_2\zeta - \dfrac{\pi^2}{4\varepsilon^2}\zeta\right)}{\partial x} + \dfrac{\pi^2}{8K}\dfrac{1}{\varepsilon^2}A_1 = 0. \end{cases}$$

Pour que ces deux équations soient compatibles, il faut que les deux fonctions données A_1 et B_1 satisfassent à la condition

$$(38)\quad \frac{\partial B_1}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} = 0.$$

Cette restriction n'a aucun inconvénient au point de vue des applications; car A_1 et B_1 sont habituellement nuls; si on ne rencontre pas cette restriction dans les théories existantes, c'est uniquement parce que dans ces théories on ne satisfait pas à toutes les équations du problème.

Si l'on pose

$$B_1 = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad A_1 = \frac{\partial F}{\partial x},$$

F étant une fonction donnée, les deux équations se réduisent à

$$(39) \qquad \Delta_2 \zeta - \frac{\pi^2}{4\varepsilon^2}\zeta + \frac{\pi^2}{8K}\frac{1}{\varepsilon^2}F = 0.$$

Les deux fonctions W_0 et ζ doivent satisfaire en tous les points de la plaque aux deux équations (36) et (39), se réduisant à celles précédemment trouvées si l'on fait abstraction des forces extérieures, et, sur le pourtour, aux conditions (XV) qui ne changent pas, les expressions des pressions n'ayant pas changé de forme par suite de l'introduction des forces extérieures.

Équations des mouvements vibratoires d'une plaque élastique.

Maintenant que nous avons les équations complètes de l'équilibre, le principe de d'Alembert permet d'en déduire les équations des mouvements vibratoires.

Il faut, dans les équations (34), remplacer respectivement X', Y', Z' par

$$X' - \delta \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad Y' - \delta \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad Z' - \delta \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

δ étant la densité de la matière qui forme la plaque.

Par suite, les équations (32) montrent qu'on devra remplacer A_0, B_0, C_0, A_1, B_1, respectivement par

$$A_0 - \delta \int \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dz, \quad B_0 - \delta \int \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} dz, \quad C_0 - \delta \int \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dz,$$
$$A_1 + \delta \int z \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} dz, \quad B_1 - \delta \int z \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dz,$$

les $\int$ étant toujours prises de $-\varepsilon$ à $+\varepsilon$.

Or les expressions (28) donnent

$$\int u\,dz = 2\varepsilon U_0, \quad \int v\,dz = 2\varepsilon V_0, \quad \int w\,dz = 2\varepsilon W_0,$$

en négligeant, dans cette dernière, le terme en ε^3.

Puis

$$\int uz\,dz = -\frac{\partial W_0}{\partial x}\frac{2\varepsilon^3}{3} + \frac{8\varepsilon^2}{\pi^2}\frac{\partial \zeta}{\partial y},$$

$$\int vz\,dz = -\frac{\partial W_0}{\partial y}\frac{2\varepsilon^3}{3} - \frac{8\varepsilon^2}{\pi^2}\frac{\partial \zeta}{\partial y}.$$

Par suite, en observant que $\int \frac{d^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\int$, il faut remplacer A_0, B_0, C_0, A_1, B_1 par

$$A_0 - 2\delta\varepsilon\frac{\partial^2 U_0}{\partial t^2}, \quad B_0 - 2\delta\varepsilon\frac{\partial^2 V_0}{\partial t^2}, \quad C_0 - 2\delta\varepsilon\frac{\partial^2 W_0}{\partial t^2},$$

$$A_1 - \frac{2\delta\varepsilon^3}{3}\frac{\partial^3 W_0}{\partial y\,\partial t^2} - \frac{8\delta\varepsilon^2}{\pi^2}\frac{\partial^3 \zeta}{\partial x\,\partial t^2},$$

$$B_1 + \frac{2\delta\varepsilon^3}{3}\frac{\partial^3 W_2}{\partial x\,\partial t^2} - \frac{8\delta\varepsilon^2}{\pi^2}\frac{\partial^3 \zeta}{\partial y\,\partial t^2}.$$

Les équations (28) deviennent ainsi

$$(40)\qquad \begin{cases} (2k+1)\dfrac{\partial \Theta_0}{\partial x} + \Delta_2 U_0 - \dfrac{\delta}{K}\dfrac{\partial^2 U_0}{\partial t^2} + \dfrac{A_0}{2K\varepsilon} = 0, \\ (2k+1)\dfrac{\partial \Theta_0}{\partial y} + \Delta_2 V_0 - \dfrac{\delta}{K}\dfrac{\partial^2 V_0}{\partial t^2} + \dfrac{B_0}{2K\varepsilon} = 0, \\ \dfrac{\partial U_0}{\partial y} + \dfrac{\partial V_0}{\partial x} = (k+1)\Theta_0, \end{cases}$$

avec les conditions à la surface (XIV) et, en outre, les conditions initiales consistant en ce que pour $t = 0$, U_0, V_0 et $\frac{\partial U_0}{\partial t}$, $\frac{\partial V_0}{\partial t}$ doivent être égales à des fonctions arbitrairement données de x et de y.

Les équations (36) deviennent

$$(41)\qquad \Delta_2 W_0 + \frac{3\delta(k+1)}{2K(2k+1)}\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - \frac{3(k+1)}{4K(2k+1)}\frac{1}{\varepsilon^3}C_0 = 0.$$

Quant aux équations (37) elles deviennent, dans le cas du mouvement,

$$\frac{\partial\left(\Delta^2\zeta - \frac{\pi^2}{4\varepsilon^2}\zeta\right)}{\partial y} + \frac{\pi^2\zeta\varepsilon}{12\mathrm{K}}\frac{\partial^2 \mathrm{W}_0}{\partial x\,\partial t^2} - \frac{\delta}{\mathrm{K}}\frac{\partial^3\zeta}{\partial y\,\partial t^2} + \frac{\pi^2}{8\mathrm{K}}\frac{1}{\varepsilon^2}\mathrm{B} = 0,$$

$$\frac{\partial\left(\Delta_2\zeta - \frac{\pi^2}{4\varepsilon^2}\zeta\right)}{\partial x} - \frac{\pi^2\zeta\varepsilon}{12\mathrm{K}}\frac{\partial^2 \mathrm{W}_0}{\partial y\,\partial t^2} - \frac{\delta}{\mathrm{K}}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial t^2} + \frac{\pi^2}{8\mathrm{K}}\frac{1}{\varepsilon^2}\mathrm{A} = 0,$$

toujours avec les trois conditions à la surface (XV) que les deux fonctions W_0 et ζ devront remplir; en outre, elles devront ici satisfaire aux conditions initiales, consistant en ce que, pour $t=0$, W_0 et $\frac{\partial \mathrm{W}_0}{\partial t}$ sont des fonctions données de x et y dans toute l'étendue du plan moyen.

Je dis que les seconds et troisièmes termes des deux dernières équations en ζ sont négligeables.

En effet, nous avons vu que les dérivées $\frac{\partial\zeta}{\partial x}, \frac{\partial\zeta}{\partial y}$ sont au moins de l'ordre de $\varepsilon^2 \mathrm{W}_0$; donc les troisièmes termes sont négligeables devant les seconds; mais ceux-ci sont eux-mêmes négligeables devant les premiers : car, en vertu de l'équation (41), $\frac{1}{\mathrm{K}}\frac{\partial^2 \mathrm{W}_0}{\partial t^2}$ est de l'ordre de $\varepsilon^2 \Delta_2^2 \mathrm{W}_0$ ou de l'ordre de $\varepsilon^2 \mathrm{W}_0$: donc les seconds termes des dernières équations sont de l'ordre de $\varepsilon^3 \mathrm{W}_0$. Or les dérivées $\frac{\partial\zeta}{\partial x}, \frac{\partial\zeta}{\partial y}$ étant, en vertu de la première des conditions à la surface (XV), au plus de ce même ordre, les premiers termes des dernières équations sont au plus de l'ordre de $\varepsilon \mathrm{W}_0$.

Ainsi on peut réduire ces deux équations à ce qu'elles sont dans le cas de l'équilibre, en sorte que, la condition (38) étant supposée remplie, la fonction ζ satisfait, dans le cas du mouvement comme dans celui de l'équilibre, à l'équation (39).

Transformation des équations en coordonnées curvilignes.

Pour compléter cette théorie et résumer les diverses équations obtenues, transformons-les en coordonnées curvilignes, ce qui est utile dans la plupart des applications.

Soient ρ et ρ_1 les paramètres de deux systèmes de cylindres orthogonaux, dont les génératrices sont parallèles à l'axe des z, en sorte qu'un point quelconque de la plaque soit défini par les trois coordonnées ρ, ρ_1, z; soit

$$ds^2 = \frac{d\rho^2}{h^2} + \frac{d\rho_1^2}{h_1^2} + dz^2 \tag{42}$$

le carré de l'élément linéaire dans l'espace exprimé au moyen de ces coordonnées. Coupons ces cylindres par le plan moyen de la plaque qui est le plan des xy et regardons ρ et ρ_1 comme les paramètres des deux systèmes de courbes orthogonales contenus dans ce plan.

Par un point quelconque A du plan moyen, menons les normales AN, AN_1 à ces courbes et désignons maintenant par u, v et w les projections du déplacement du point A sur les trois lignes AN, AN_1, AZ, cette dernière étant parallèle à l'axe des z; prenons pour un instant ces trois lignes pour axes *fixes* de coordonnées. Alors les formules qui précèdent seront applicables.

Mais, F étant une fonction quelconque de x et y, si on la considère comme exprimée en ρ et ρ_1, on a, comme on sait, les formules de transformation

$$\frac{\partial F}{\partial x} = h\frac{\partial F}{\partial \rho}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = h_1\frac{\partial F}{\partial \rho_1}. \tag{k}$$

Donc les formules (X) deviennent, en considérant $\Theta_0, U_0, V_0, W_0, \zeta$ comme fonctions des coordonnées curvilignes ρ et ρ_1

$$\left\{\begin{aligned} \theta &= \Theta_0 - \frac{\Delta_2 W_0}{k+1} z, \\ u &= U_0 - h\frac{\partial W_0}{\partial \rho} z + kh\frac{\partial \Theta_0}{\partial \rho}\frac{z^2}{2} + h_1\frac{\partial \zeta}{\partial \rho_1}\sin\frac{\pi z}{2\varepsilon}, \\ v &= V_0 - h_1\frac{\partial W_0}{\partial \rho_1} z + kh\frac{\partial \Theta_0}{\partial \rho_1}\frac{z^2}{2} + h\frac{\partial \zeta}{\partial \rho_1}\sin\frac{\pi z}{2\varepsilon}, \\ w &= W_0 - k\Theta_0 z + \frac{k}{k+1}\Delta_2 W_0 \frac{z^2}{2}. \end{aligned}\right. \tag{43}$$

Il faut seulement transformer en coordonnées curvilignes les équations à différences partielles auxquelles satisfont les cinq fonctions des variables ρ et ρ_1 qui entrent dans les expressions ci-dessus, ainsi que les conditions à la surface et les expressions des forces élastiques.

Les équations (40) sont exactement de même forme que les équations générales de l'élasticité, mais avec cette simplification qu'elles sont à deux variables seulement. On les transformera donc facilement suivant les procédés de Lamé ou celui que j'ai donné au *Bulletin* de M. Darboux, ou tout autre. En introduisant, à titre d'inconnue auxiliaire, le double de la rotation moyenne

$$(k') \qquad \frac{\partial U_0}{\partial y} - \frac{\partial V_0}{\partial x} = \Omega,$$

on a identiquement, en vertu de la dernière (40),

$$\Delta_2 U_0 = \frac{\partial \Omega}{\partial y} + (k+1)\frac{\partial \Theta_0}{\partial x},$$

$$\Delta_2 V_0 = -\frac{\partial \Omega}{\partial x} + (k+1)\frac{\partial \Theta_0}{\partial y};$$

par suite, les équations (40) donnent

$$(3k+2)\frac{\partial \Theta_0}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial y} + \frac{A_0}{2K\varepsilon} = \frac{\delta}{K}\frac{\partial^2 U_0}{\partial t^2},$$

$$(3k+2)\frac{\partial \Theta_0}{\partial y} - \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{B_0}{2K\varepsilon} = \frac{\delta}{K}\frac{\partial^2 V_0}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial V_0}{\partial y} = (k+1)\Theta_0,$$

A_0, B_0 étant les projections sur les axes AN, AN_1 de la résultante de translation des forces extérieures appliquées le long de la petite ligne verticale passant par le point A.

Les deux premières se transforment immédiatement par la formule (k); la dernière, ainsi que l'équation (k'), se transforment sans difficulté, et il vient

$$(44)\quad \begin{cases} (3k+2)h\dfrac{\partial\Theta_0}{\partial\rho} - h_1\dfrac{\partial\Omega}{\partial\rho_1} + \dfrac{A_0}{2K\varepsilon} = \dfrac{\delta}{K}\dfrac{\partial^2 U_0}{\partial t^2}, \\ (3k+2)h_1\dfrac{\partial\Theta_0}{\partial\rho_1} - h\dfrac{\partial\Omega}{\partial\rho} + \dfrac{B_0}{2K\varepsilon} = \dfrac{\delta}{K}\dfrac{\partial^2 V_0}{\partial t^2}, \\ \Omega = hh_1\left(\dfrac{\partial\dfrac{u}{h}}{\partial\rho_1} - \dfrac{\partial\dfrac{v}{h_1}}{\partial\rho}\right), \\ (k+1)\Theta_0 = hh_1\left(\dfrac{\partial\dfrac{u}{h_1}}{\partial\rho} + \dfrac{\partial\dfrac{v}{h}}{\partial\rho_1}\right), \end{cases}$$

définissant les quatre fonctions u_0, v_0, θ_0, Ω.

Quant aux deux fonctions W_0 et ζ, elles satisfont toujours aux équations (41) et (39), soit

$$(45)\qquad \Delta_2 W_0 - \frac{3(k+1)}{4K(2k+1)}\frac{1}{\varepsilon^3}C_0 + \frac{3\delta(k+1)}{2K(2k+1)}\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2 W_0}{\partial t^2} = 0,$$

$$(46)\qquad \Delta_2\zeta = \frac{\pi^2}{4\varepsilon^2}\zeta + \frac{\pi^2}{8K}\frac{1}{\varepsilon^2}F = 0,$$

en posant, comme précédemment,

$$(46\,bis)\qquad A_1 = h\frac{\partial F}{\partial\rho},\quad B_1 = h_1\frac{\partial F}{\partial\rho_1},$$

C_0 désignant la composante parallèle à l'axe des z de la résultante de translation des forces extérieures agissant aux divers points de la petite ligne parallèle à cet axe, passant par le point A et A_1, B_1 les sommes des moments de ces mêmes forces par rapport aux deux lignes AN, AN_1.

Pour se servir de ces équations, il suffit de se rappeler qu'en coordonnées curvilignes ρ et ρ_1, on a

$$(47)\qquad \Delta_2 = hh_1\left(\frac{\partial\dfrac{h}{h_1}\dfrac{\partial}{\partial\rho}}{\partial\rho} + \frac{\partial\dfrac{h_1}{h}\dfrac{\partial}{\partial\rho_1}}{\partial\rho_1}\right),$$

et que, d'ailleurs,

$$\Delta_2^2 = \Delta_2\Delta_2.$$

Maintenant, connaissant les valeurs (43) des composantes u, v, w du déplacement, les composantes des pressions N_i et T_i parallèles aux axes AN_1, AN_2, AZ, ces pressions étant considérées comme des fonctions des coordonnées ρ et ρ_1, z, sont, soit d'après les formules générales de Lamé (*Coordonnées curvilignes*, § CLII), soit en les cherchant directement, ce qui n'est pas difficile,

$$
(48)\left\{
\begin{aligned}
N_1 &= 2K\Bigg[k\theta_0 + h\frac{\partial U_0}{\partial\rho} - \frac{h_1}{h}\frac{\partial h}{\partial\rho_1}V_0 \\
&\qquad + \left(\frac{-k}{k+1}\Delta_2 W_0 + \frac{h_1^2}{h}\frac{\partial h}{\partial\rho_1}\frac{\partial W_0}{\partial\rho_1} - h\frac{\partial h}{\partial\rho}\frac{\partial W_0}{\partial\rho} - h^2\frac{\partial^2 W_0}{\partial\rho^2}\right)z \\
&\qquad\qquad + \left(h_1\frac{\partial h}{\partial\rho_1}\frac{\partial\zeta}{\partial\rho} + h\frac{\partial h_1}{\partial\rho}\frac{\partial\zeta}{\partial\rho_1} + hh_1\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho\,\partial\rho}\right)\sin\frac{\pi z}{2\varepsilon}\Bigg],\\
N_2 &= 2K\Bigg[k\theta_0 + h_1\frac{\partial V_0}{\partial\rho_1} - \frac{h}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial\rho}U_0 \\
&\qquad + \left(\frac{-k}{k+1}\Delta_2 W_0 + \frac{h^2}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial\rho}\frac{\partial W_0}{\partial\rho} - h_1\frac{\partial h_1}{\partial\rho_1}\frac{\partial W_0}{\partial\rho_1} + h^2\frac{\partial^2 W_0}{\partial\rho_1^2}\right)z \\
&\qquad\qquad - \left(h_1\frac{\partial h}{\partial\rho_1}\frac{\partial\zeta}{\partial\rho} + h\frac{\partial h_1}{\partial\rho}\frac{\partial\zeta}{\partial\rho_1} + hh_1\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho\,\partial\rho_1}\right)\sin\frac{\pi z}{2\varepsilon}\Bigg],\\
T_3 &= K\Bigg[h_1\frac{\partial U_0}{\partial\rho_1} + h\frac{\partial V_0}{\partial\rho} + \frac{h_1}{h}\frac{\partial h}{\partial\rho_1}U_0 + \frac{h}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial\rho}V_0 \\
&\qquad - 2\left(h_1\frac{\partial h}{\partial\rho_1}\frac{\partial W_0}{\partial\rho} + h\frac{\partial h_1}{\partial\rho}\frac{\partial W_0}{\partial\rho_1} + hh_1\frac{\partial^2 W_0}{\partial\rho\,\partial\rho_1}\right)z \\
&\qquad\qquad + \left(\frac{h_1}{h}\frac{\partial hh_1\frac{\partial\zeta}{\partial\rho_1}}{\partial\rho_1} - \frac{h}{h_1}\frac{\partial hh_1\frac{\partial\zeta}{\partial\rho}}{\partial\rho}\right)\sin\frac{\pi z}{2\varepsilon}\Bigg],\\
T_1 &= K - \left[\frac{2k+1}{k+1}h_1\frac{\partial\Delta_2 W_0}{\partial\rho_1}(\varepsilon^2 - z^2) - \frac{\pi}{2\varepsilon}h\frac{\partial\zeta}{\partial\rho}\cos\frac{\pi z}{2\varepsilon}\right],\\
T_2 &= K\left[-\frac{2k+1}{k+1}h\frac{\partial\Delta_2 W_0}{\partial\rho}(\varepsilon^2 - z^2) + \frac{\pi}{2\varepsilon}h_1\frac{\partial\zeta}{\partial\rho_1}\cos\frac{\pi z}{2\varepsilon}\right],\\
N_3 &= 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Conditions au pourtour.

1° *Plaque libre.* — Supposons que le pourtour soit une courbe $\rho = \rho_0$ et soient $\mathfrak{X}_0$, $\mathfrak{Y}_0$, Z_0 les projections sur les axes AN, AN_1, AZ de la résultante de translation des pressions extérieures agissant sur la génératrice du cylindre qui termine la plaque passant par le point A, et $\mathcal{C}$ et $\mathcal{M}$ la somme des moments de ces pressions par rapport aux axes AN et AN_1; on devra avoir les cinq conditions à la surface.

Pour $\rho = \rho_0$,

$$\int N_1\,dz = \mathcal{A}_0, \quad \int T_3\,dz = \mathcal{B}_0, \quad \int T_2\,dz = Z_0,$$
$$\int N_1 z\,dz = \mathcal{C}, \qquad \int T_3\,dz = +\,\mathcal{M},$$

ou bien

$$(49) \qquad \left\{ \begin{aligned} & k\theta_0 + h\frac{\partial U_0}{\partial \rho} - \frac{h_1}{h}\frac{\partial h}{\partial \rho_1}V_0 = \frac{\mathcal{A}_0}{4K\varepsilon}, \\ & h_1\frac{\partial U_0}{\partial \rho} + h\frac{\partial V_0}{\partial \rho} + \frac{h_1}{h}\frac{\partial h}{\partial \rho_1}U_0 + \frac{h}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial \rho}V = \mathcal{B}, \end{aligned} \right.$$

$$(50) \qquad \left\{ \begin{aligned} & -\frac{2k+1}{k+1}\,\frac{2\varepsilon^3}{3}\,h\frac{\partial \Delta_2 W_0}{\partial \rho} + h_1\frac{\partial \zeta}{\partial \rho_1} = \frac{Z_0}{2K}, \\ & \left(-\frac{k}{k+1}\Delta_2 W_0 + \frac{h_1^2}{h}\frac{\partial h}{\partial \rho_1}\frac{\partial W_0}{\partial \rho_1} - h\frac{\partial h}{\partial \rho}\frac{\partial W_0}{\partial \rho} - h^2\frac{\partial^2 W_0}{\partial \rho^2}\right)\frac{2\varepsilon^3}{3} \\ & \qquad + \frac{8\varepsilon^2}{\pi^2}\left(h_1\frac{\partial h}{\partial \rho_1}\frac{\partial \zeta}{\partial \rho} + h\frac{\partial h_1}{\partial \rho}\frac{\partial \zeta}{\partial \rho_1} + hh_1\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho\,\partial \rho_1}\right) = \frac{\mathcal{C}}{2K}, \\ & -\left(h_1\frac{\partial h}{\partial \rho_1}\frac{\partial W_0}{\partial \rho} + h\frac{\partial h_1}{\partial \rho}\frac{\partial W_0}{\partial \rho_1} + hh_1\frac{\partial^2 W_0}{\partial \rho\,\partial \rho_1}\right)\frac{4\varepsilon^3}{3} \\ & \qquad + \frac{2\varepsilon^2}{\pi^2}\left(\frac{h_1}{h}\,\frac{\partial hh_1\frac{\partial \zeta}{\partial \rho_1}}{\partial \rho_1} - \frac{h}{h_1}\,\frac{\partial hh_1\frac{\partial \zeta}{\partial \rho}}{\partial \rho}\right) = \frac{\mathcal{M}}{K}. \end{aligned} \right.$$

En résumé, les fonctions U_0, V_0, θ_0, Ω doivent satisfaire aux quatre équations à différences partielles (44) et aux conditions à la surface (49); les deux fonctions W_0 et ζ, aux équations (45) et (46) et aux trois conditions à la surface (50) (et en outre toutes ces fonctions satisfaisant à des conditions initiales dans le cas du mouvement).

Si la plaque n'est pas libre, si elle est appuyée sur tout son pourtour, la première des conditions (50) est remplacée par celle-ci :

$$(51) \qquad W_0 = 0,$$

et la première équation (50) détermine alors l'*effort tranchant inconnu* Z_0 qui s'exerce sur le pourtour de la plaque.

Si la plaque est encastrée, les deux premières conditions (50) sont remplacées par celles-ci :

$$W_0 = 0, \quad \frac{\partial W_0}{\partial \rho} = 0, \tag{52}$$

et les deux premières équations (50) fourniront alors les valeurs du moment fléchissant et de l'effort tranchant sur le pourtour.

On voit que la dernière condition (50) subsiste dans tous les cas : c'est celle relative au moment de la torsion. Poisson, dans ses applications, ne s'en occupait pas; ainsi, dans le cas de la plaque encastrée, il se bornait à considérer pour toutes conditions à la surface celles (52); c'est là ce qui fait qu'il ne s'est pas aperçu de l'impossibilité du problème d'Analyse auquel il était arrivé.

VI.

Application à l'équilibre et au mouvement des plaques circulaires.

Nous allons appliquer la théorie générale qui précède à l'équilibre et au mouvement d'une plaque circulaire.

Occupons-nous d'abord de l'équilibre.

1° *Équilibre d'une plaque libre.* — Soit en premier lieu une plaque entièrement libre sur le pourtour de laquelle sont appliqués des couples situés dans les plans méridiens du cylindre qui termine la plaque; ces couples varient d'ailleurs d'une manière quelconque, continue ou discontinue, d'un plan méridien à l'autre. On fait abstraction des forces, telles que la pesanteur, agissant sur la masse entière de la plaque et l'on demande de trouver la forme qu'elle prendra et les forces élastiques qui se développeront en chaque point.

Prenons, pour définir les divers points de la plaque, un système de coordonnées semi-polaires ayant pour axe l'axe de la plaque. Soient r, α, z les coordonnées d'un point de la plaque, en sorte que le carré de l'élément linéaire de l'espace sera

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\alpha^2 + dz^2;$$

par suite, si l'on fait $\rho = r$, $\rho_1 = \alpha$, il vient

$$h = 1, \quad h_1 = \frac{1}{r}.$$

Les cinq fonctions A_0, B_0, C_0, A_1, B_1 qui dépendent des forces agissant sur la masse entière de la plaque, sont ici nulles; il en est de même des quatre fonctions $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{B}_0$, Z_0, $\mathcal{M}$. Il ne reste que celle $\mathcal{E}$, qui est une fonction donnée continue ou discontinue de α.

Il résulte de là qu'on satisfait à toutes les conditions (44) et (49), en posant

$$\Theta_0 = U_0 = V_0 = \Omega = 0,$$

ce qui signifie que la tension du plan moyen de la plaque est nulle, chose facile à prévoir.

Il reste donc seulement à trouver les deux fonctions W_0 et ζ, qui forment, en effet, les véritables inconnues de tout problème sur les plaques, les quatre autres fonctions donnant lieu à une recherche séparée qui appartient à l'étude de la membrane élastique.

On a ici

$$(53) \qquad \Delta_2 = \frac{1}{r}\,\frac{\partial r \dfrac{\partial}{\partial r}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}.$$

Si donc on pose

$$(54) \qquad \Delta_2 W_0 = \frac{1}{r}\,\frac{\partial r \dfrac{\partial W_0}{\partial r}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 W_0}{\partial \alpha^2} = S,$$

il viendra

$$(55) \qquad \frac{\partial r \dfrac{\partial S}{\partial r}}{\partial r} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha^2} = 0.$$

D'ailleurs la fonction ζ doit satisfaire à

$$(56) \qquad \frac{1}{r}\,\frac{\partial r \dfrac{\partial \zeta}{\partial r}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \alpha^2} - \frac{\pi^2}{4\varepsilon^2}\zeta = 0.$$

Enfin les trois conditions à la surface sont, pour $r = r_0$, la plaque étant libre et de rayon $r = r_0$,

$$(57)\qquad \left\{\begin{aligned} & -\frac{2k+1}{k+1}\frac{2\varepsilon^3}{3}\frac{\partial\Delta_2 W_0}{\partial r} + \frac{1}{r_0}\frac{\partial\zeta}{\partial\alpha} = 0, \\ & \frac{k}{k+1}S + \frac{\partial^2 W_0}{\partial r^2} = \frac{-3\mathfrak{G}}{4K\varepsilon^3}, \\ & \frac{1}{r_0}\frac{\partial W_0}{\partial\alpha} - \frac{\partial^2 W_0}{\partial r\,\partial\alpha} = 0, \end{aligned}\right.$$

$\mathfrak{G}$ étant une fonction donnée de α, continue ou discontinue.

Dans les deux dernières on a négligé les termes en ζ qui, en vertu de la première, sont négligeables, comme il résulte de la discussion de la fin du § IV.

On satisfait à l'équation (55) en posant

$$(58)\qquad S = Ar^n(A\sin n\alpha + B\cos n\alpha),$$

n étant un nombre entier, A et B des constantes arbitraires; puis à l'équation (54) en prenant

$$(59)\quad W_0 = \left[\frac{A}{4(n+1)}r^{n+2} + A'r^n\right]\sin n\alpha + \left[\frac{B}{4(n+1)}r^{n+2} + B'r^n\right]\cos n\alpha,$$

A′ et B′ étant deux nouvelles constantes arbitraires.

Enfin on satisfait à l'équation en ζ par la solution particulière

$$(60)\qquad \zeta = R(C\sin n\alpha + D\cos n\alpha),$$

R étant une fonction de la seule variable r satisfaisant à l'équation différentielle

$$(61)\qquad \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial R}{\partial r} - \left(\frac{n^2}{r^2} + \frac{\pi^2}{4\varepsilon^2}\right)R = 0.$$

Et si l'on pose

$$x = \frac{\pi}{2\varepsilon}r,$$

$$(61\ bis)\qquad \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial R}{\partial x} - \left(\frac{n^2}{x^2} + 1\right)R = 0,$$

dont une solution particulière est la fonction de Bessel d'ordre n, qu'on peut représenter, soit sous la forme d'une intégrale définie, soit sous la forme de la série

$$(62)\qquad R = \frac{x^n}{2.4\ldots 2n}\left[1 + \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2.4(2n+2)(2n+4)} + \ldots\right],$$

ou

$$(62\,bis)\qquad R = \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^n \frac{r^n}{2.4\ldots 2n}\left[1 + \frac{\left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 r^2}{2(2n+2)} + \frac{\left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^4 r^4}{2.4(2n+2)(2n+4)} + \ldots\right].$$

Maintenant, la troisième des conditions à la surface donne, entre les constantes qui entrent dans l'expression de W_0, les relations

$$\frac{A r_0^2}{4} + (n-1)A' = 0, \quad \frac{B r_0^2}{4} + (n-1)B' = 0$$

ou

$$A' = -\frac{A r_0^2}{4(n+1)}, \quad B' = -\frac{B r_0^2}{4(n+1)}.$$

La première des conditions à la surface donne de même, en désignant par R_0 la valeur de la fonction R pour $r = r_0$, les deux relations

$$C = \frac{2k+1}{k+1}\,\frac{2\varepsilon^3}{3}\,\frac{r_0^n}{R_0}B, \quad D = -\frac{2k+1}{k+1}\,\frac{2\varepsilon^3}{3}\,\frac{r_0^n}{R_0}A;$$

par suite, les solutions particulières obtenues prennent la formé

$$(63)\qquad \begin{cases} S = r^n(A\sin n\alpha + B\cos n\alpha), \\ W_0 = \dfrac{r^n}{4}\left(\dfrac{r^2}{n+1} - \dfrac{r_0^2}{n-1}\right)(A\sin n\alpha + B\cos n\alpha), \\ \zeta = \dfrac{2k+1}{k+1}\,\dfrac{2\varepsilon^3}{3}\,r_0^n\,\dfrac{R}{R_0}(B\sin n\alpha - A\cos n\alpha). \end{cases}$$

Si l'on prend la somme de toutes les expressions répondant à tous les nombres entiers n, on aura encore une solution satisfaisant à toutes les conditions du problème, sauf la seconde (57). On devra donc déterminer les constantes A et B, de façon que cette condition soit remplie, ce qui donne, après quelques réductions,

$$\sum_n r_0^n \left(\mathrm{A}\sin n\alpha + \mathrm{B}\cos n\alpha\right) = \frac{3(k+1)\varpi}{2(3k+1)\mathrm{K}\varepsilon^3}.$$

Cette équation devant avoir lieu pour les valeurs de α comprises entre zéro et 2π, on en tire

$$(64)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{A} &= \frac{3(k+1)}{2(3k+1)\mathrm{K}\varepsilon^3}\,\frac{1}{\pi r_0^n}\int_0^{2\pi}\varpi\sin n\alpha\, d\alpha,\\ \mathrm{B} &= \frac{3(k+1)}{2(3k+1)\mathrm{K}\varepsilon^3}\,\frac{1}{\pi r_0^n}\int_0^{2\pi}\varpi\cos n\alpha\, d\alpha, \end{aligned}\right.$$

en ayant soin, comme on sait, de multiplier par $\frac{1}{2}$ la valeur donnée par cette formule, pour B, dans le terme relatif à $n = 0$.

Et l'on aura finalement

$$(65)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{S} &= \sum_n r^n(\mathrm{A}\sin n\alpha + \mathrm{B}\cos n\alpha),\\ \mathrm{W}_0 &= \sum_n \frac{r^n}{4}\left(\frac{r^2}{n+1} - \frac{r_0^2}{n-1}\right)(\mathrm{A}\sin n\alpha + \mathrm{B}\cos n\alpha),\\ \zeta &= \frac{2k+1}{k+1}\,\frac{2\varepsilon^3}{3}\sum_n r_0^n\,\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}_0}(\mathrm{B}\sin n\alpha - \mathrm{A}\cos n\alpha). \end{aligned}\right.$$

Si les couples sont symétriquement distribués par rapport au diamètre pris pour axe polaire, la fonction ϖ aura la même valeur pour les valeurs α et $2\pi - \alpha$; par suite, on aura $\mathrm{A} = 0$.

$$(65\ bis)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{B} &= \frac{3(k+1)}{(3k+1)\mathrm{K}\varepsilon^3}\,\frac{1}{\pi r_0^n}\int_0^{\pi}\varpi\cos n\alpha\, d\alpha,\\ \mathrm{S} &= \sum_n \mathrm{B} r^n\cos n\alpha,\\ \mathrm{W}_0 &= \sum_n \mathrm{B}\frac{r^n}{4}\left(\frac{r^2}{n+1} - \frac{r_0^2}{n-1}\right)\cos n\alpha,\\ \zeta &= \frac{2k+1}{k+1}\,\frac{2\varepsilon^3}{3}\sum_n \mathrm{B} r_0^n\,\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}_0}\sin n\alpha. \end{aligned}\right.$$

Les formules (43) et (48) donnent d'ailleurs les déplacements et les forces élastiques en tout point de la plaque, une fois connues les fonctions W_0 et ζ.

Les formules qui précèdent paraissent au premier abord conduire à une absurdité. En effet, le terme des sommes Σ, répondant à $n = 1$, paraît devoir rendre W_0 infini. Pour que cela n'ait pas lieu, il faut que les valeurs des coefficients A et B répondant à $n = 1$ soient nulles. Or c'est ce qui arrive nécessairement; car, pour $n = 1$, les formules (64) montrent que les coefficients A et B contiennent les facteurs

$$\int_0^{2\pi} \varpi \sin\alpha d\alpha, \quad \int_0^{2\pi} \varpi \cos\alpha d\alpha.$$

Or il faut que ces deux intégrales soient nulles pour que tous les couples agissant sur le pourtour de la plaque se fassent équilibre; les équations

$$\int_0^{2\pi} \varpi \sin\alpha d\alpha = 0, \quad \int_0^{2\pi} \varpi \cos\alpha d\alpha = 0$$

sont précisément les conditions nécessaires et suffisantes pour cet équilibre.

Supposons ces conditions remplies, en sorte que pour $n = 1$ les coefficients A et B sont nuls; le terme en $r^{n+2} = r^3$ de l'expression de W_0 sera donc lui-même nul pour $n = 1$; mais le terme en $r_0^2 r^n = r_0 r$ ne le sera pas, puisqu'il contient $n = 1$ en dénominateur, en sorte que les rapports $\frac{A}{n-1}$ et $\frac{B}{n-1}$ demeurent indéterminés et ce terme de W_0 sera

$$W'_0 = r(A_1 \sin\alpha + B_1 \cos\alpha),$$

A_1 et B_1 étant deux constantes entièrement arbitraires.

Il est facile, en effet, de vérifier directement qu'en ajoutant un tel terme à l'expression de W_0, quelles que soient les constantes A_1 et B_1, on ne cessera de satisfaire ni à l'équation à différences partielles qui régit cette fonction, ni aux trois conditions à la surface.

Cela s'explique facilement en observant que, si l'on pose $r\cos\alpha = x$,

$r \sin\alpha = y$, l'équation ci-dessus est

$$W'_0 = A'x + B'y :$$

W'_0 est donc l'ordonnée d'un plan ; donc, ajouter à la fonction W_0 l'expression W'_0, cela équivaut à déplacer le plan moyen de la plaque et, par suite, la plaque tout entière dans l'espace, comme un système invariable, ce qui ne développe pas de forces élastiques. On peut donc supposer $A_1 = 0$, $B_1 = 0$, c'est-à-dire qu'on peut supposer dans la série qui exprime W_0 le terme relatif à $n = 1$ nul. Cela revient simplement à définir la position de la plaque dans l'espace.

Supposons qu'il agisse sur la plaque deux couples seulement, égaux et opposés, placés aux deux extrémités d'un diamètre, et prenons l'axe polaire à partir duquel est compté l'angle α perpendiculaire à ce diamètre.

Nous rentrons dans le cas de symétrie indiqué par les formules (65 *bis*). La fonction ϖ est, dans ce cas, telle, qu'elle s'annule pour toutes les valeurs de α autres que celles de $\alpha = \pm\frac{\pi}{2}$; d'ailleurs si l'on pose $\int_0^{2\varpi} \varpi\, d\alpha = \Gamma$, Γ étant une constante donnée, on aura, par suite,

$$B = \frac{3(k+1)}{(3k+1)K\varepsilon^3} \frac{\Gamma}{\pi r_0^n} \cos\frac{n\pi}{2}.$$

Donc B est nul pour n impair, et en posant $n = 2i$, on aura

$$B = (-1)^i \frac{3(k+1)}{(3k+1)K\varepsilon^3} \frac{\Gamma}{\pi r_0^{2i}};$$

par suite

$$S = \frac{3(k+1)}{\pi(3k+1)K\varepsilon^3} \sum_i (-1)^i \left(\frac{r}{r_0}\right)^{2i} \cos 2i\alpha,$$

$$W_0 = \frac{3(k+1)\Gamma}{\pi(3k+1)K\varepsilon^3} \sum_i (-1)^i \left(\frac{r}{r_0}\right)^{2i} \left(\frac{r^2}{2i+1} - \frac{r_0^2}{2i-1}\right) \cos 2i\alpha,$$

$$\zeta = \frac{(2k+1)\Gamma}{\pi(3k+1)K} \sum_i (-1)^i r_0^{2i} \frac{R}{R_0} \sin 2i\alpha.$$

En s'arrêtant aux deux premiers termes de ces séries, on reconnaîtrait facilement les lois approchées du déplacement de la plaque, dans ce cas particulier; d'où, par la superposition des effets des forces élastiques, on passerait facilement à tous les cas où les couples sont symétriquement répartis de part et d'autre de l'axe de la plaque.

Si l'on suppose que les couples sont uniformément répartis sur le pourtour de la plaque, c'est-à-dire que $\mathfrak{C}$ soit indépendant de α, il est facile de voir qu'il en sera de même de W_0 et de ζ; le problème se résout en termes finis, c'est-à-dire qu'on en aura la solution rigoureuse en prenant dans les séries le seul terme répondant à $n = 0$, ce qui donne, en particulier pour ζ,

$$\zeta = \frac{2k+1}{k+1}\frac{2\varepsilon^3}{3} r_0^n \frac{R}{R_0} A.$$

Mais, en vertu de la formule (64), on a, pour $n = 0$, $A = 0$. Ainsi donc, dans le cas de symétrie tout autour du centre, la fonction additionnelle disparaît et l'on retrouve les formules données par Poisson, lesquelles se trouvent dans ce cas particulier, le seul que Poisson ait traité, satisfaire à toutes les conditions du problème, bien que ses formules générales n'y satisfassent pas.

Cela tient à ce que la troisième des conditions à la surface (57) se trouve remplie d'elle-même lorsque W_0 est indépendant de α et que cette fonction n'a ainsi plus à satisfaire qu'à deux conditions, ce qui est possible. En d'autres termes, nous avons dit que, pour que le problème d'Analyse auquel parvient Poisson soit possible, il faut qu'entre les forces extérieures agissant sur la plaque il existe une certaine condition. Le cas de la plaque circulaire uniformément chargée, soit sur sa masse, soit sur son pourtour, est un de ceux où cette condition se trouve satisfaite; mais, dès que la charge devient dissymétrique, il n'en est plus ainsi, et notre fonction ζ, en général, s'introduira.

Nous trouverons plus loin un cas beaucoup plus étendu où cette fonction n'apparaît pas, où, par suite, la théorie de Poisson ne se trouve pas en défaut : c'est celui des plaques encastrées sur leur pourtour, quelles que soient les charges.

Équilibre de la plaque circulaire appuyée sur son pourtour.

Supposons maintenant une plaque circulaire appuyée sur son contour moyen; supposons d'ailleurs qu'aucune force ne s'exerce sur sa surface latérale et que sur sa masse entière s'exercent, normalement au plan moyen, des forces données, continues ou discontinues.

Les équations indéfinies du problème sont, dans ce cas,

$$(66)\qquad \begin{cases} \Delta_2^2 W_0 - \dfrac{3(k+1)}{4K(2k+1)} \dfrac{C_0}{\varepsilon^3} = 0, \\ \Delta_2 \zeta - \dfrac{\pi^2}{4\varepsilon^2} \zeta = 0, \end{cases}$$

C_0 étant une fonction arbitrairement donnée, continue ou discontinue des deux variables r et α; pour $r = r_0$, on a la condition $W_0 = 0$, remplaçant la première (50); les deux dernières (50) deviennent, en y faisant $\rho = r$, $\rho_1 = \alpha$, $h = 1$, $h_1 = \frac{1}{r}$,

$$(67)\qquad \begin{cases} -\left(\dfrac{k}{k+1}\Delta_2 W_0 + \dfrac{\partial^2 W_0}{\partial r^2}\right) + \dfrac{12}{\pi^2\varepsilon}\left(-\dfrac{1}{r_0^2}\dfrac{\partial\zeta}{\partial\alpha} + \dfrac{1}{r_0}\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial r\,\partial\alpha}\right) = 0, \\ \left(\dfrac{1}{r_0^2}\dfrac{\partial W_0}{\partial\alpha} - \dfrac{1}{r_0}\dfrac{\partial^2 W_0}{\partial r\,\partial\alpha}\right) + \dfrac{3}{2\pi^2\varepsilon}\left(\dfrac{1}{r_0^2}\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial\alpha^2} - \dfrac{\partial^2\zeta}{r^2} + \dfrac{1}{r_0}\dfrac{\partial\zeta}{\partial r}\right) = 0. \end{cases}$$

En posant, comme précédemment,

$$(68)\qquad \Delta_2 W_0 = S,$$

on aura

$$(68\ bis)\qquad \Delta_2 S + \frac{3(k+1)}{4K(2k+1)}\frac{C_0}{\varepsilon^3} = 0.$$

Posons, de plus,

$$(69)\qquad \frac{3(k+1)}{4K(2k+1)}\frac{C_0}{\varepsilon^3} = \sum_{n=0} P_n \cos n\alpha + Q_n \sin n\alpha,$$

P_n et Q_n étant des fonctions de r définies par les équations

$$(70)\quad P_n = \frac{3(k+1)}{4K(2k+1)}\int_0^{2\pi} C_0 \cos n\alpha\, d\alpha,\quad Q_n = \frac{3(k+1)}{4K(2k+1)}\int_0^{2\pi} C_0 \sin n\alpha\, d\alpha.$$

On satisfera à l'équation (68) en posant

$$S = R'_{n=0} + \sum_{n=1}^{n=\infty}(R'\cos n\alpha + R''\sin n\alpha),$$

pourvu que les fonctions R′ et R″ satisfassent aux équations différentielles

$$(71)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial r \dfrac{\partial R'}{\partial r}}{\partial r} - \dfrac{n^2}{r^2}R' - P_n = 0, \\[2ex] \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial r \dfrac{\partial R''}{\partial r}}{\partial r} - \dfrac{n^2}{r^2}R'' - Q_n = 0. \end{cases}$$

Pour toutes les valeurs de n différentes de zéro, on conclut de là, en posant, pour abréger,

$$(72)\quad \begin{cases} P' = \dfrac{1}{2n}\left(2C_0 r^n \displaystyle\int_0^r \frac{P_n dr}{r^{n-1}} - r^{-n}\int_0^r P_n r^{n+1} dr\right), \\[2ex] Q' = \dfrac{1}{2n}\left(2C_0 r^n \displaystyle\int_0^r \frac{Q_n dr}{r^{n-1}} - r^{-n}\int_0^r Q_0 r^{n+1} dr\right), \end{cases}$$

$$(73)\quad R' = P' + A r^n,\quad R'' = Q' + B r^n.$$

Pour $n = 0$, on trouve facilement, A_0 étant une constante arbitraire,

$$(74)\quad R' = A_0 - \int_0^r P_{n=0}\log\frac{r}{r_0}\,dr + \log\frac{r}{r_0}\int_0^r P_{n=0}\, r\, dr = R'_{n=0};$$

par suite

$$(75)\quad S = R'_{n=0} + \sum_{n=1}^{n=\infty}[(P' + A r^n)\cos n\alpha + (Q' + B r^n)\sin n\alpha].$$

En remplaçant S par sa valeur dans l'équation (68 *bis*) et posant

$$(76)\quad \left\{\begin{aligned} P'' &= \frac{1}{2n} C_0 r^n \int_0^r \frac{P' dr}{r^{n-1}} - r^{-n} \int_0^r P r^{n+1} dr, \\ Q'' &= \frac{1}{2n} C_0 r^n \int_0^r \frac{Q' dr}{r^{n-1}} - r^{-n} \int_0^r Q r^{n+1} dr, \end{aligned}\right.$$

on peut vérifier qu'on satisfera à cette équation par l'expression

$$(77)\quad \left\{\begin{aligned} W_0 = w_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \Big\{ & \left[P'' + \frac{A r^{n+2}}{4(n+1)} + A' r^n\right] \cos n\alpha \\ & + \left[Q'' \frac{B r^{n+2}}{4(n+1)} + B' r^n\right] \sin n\alpha \Big\}, \end{aligned}\right.$$

où A' et B' désignent deux nouvelles séries de constantes arbitraires, et

$$(78)\quad \left\{\begin{aligned} w_0 = A_0 \frac{r^2}{4} + f - \frac{1}{4} \Big[& r^2 \left(1 - \log \frac{r}{r_0}\right) \int_0^r P_{n=0} r\, dr - \left(1 + \log \frac{r}{r_0}\right) \\ & \times \int_0^r P_{n=0} r^3 dr + r^2 \int_0^r P_{n=0} r \log \frac{r}{r_0} dr \\ & + \int_0^r P_{n=0} r^3 \log \frac{r}{r_0} dr \Big] \end{aligned}\right.$$

étant une nouvelle constante arbitraire qui représente la flèche que prend la plaque, c'est-à-dire la valeur de la fonction W_0 répondant à $r = 0$.

On satisfera à la condition $W_0 = 0$ sur le pourtour en exprimant que, pour $r = r_0$, chaque terme du second membre de (77) s'annule séparément, ce qui donne d'abord

$$(79)\quad \left\{\begin{aligned} A_0 \frac{r_0^2}{4} + f - \frac{1}{4} \Big(& r_0^2 \int_0^r P_{n=0} r\, dr - \int_0^r P_{n=0} r^3 dr \\ & + r_0^2 \int_0^r P_{n=0} r \log \frac{r}{r_0} dr + \int_0^r P_{n=0} r^3 \log \frac{r}{r_0} dr \Big) = 0. \end{aligned}\right.$$

Puis P''_0 et Q''_0 désignant les valeurs des fonctions P'' et Q'' répondant à $r = r_0$,

$$(80)\qquad \left\{\begin{aligned} &P''_0 + \frac{A r_0^{n+2}}{4(n+1)} + A' r_0^n = 0,\\ &Q''_0 + \frac{B r_0^{n+2}}{4(n+1)} + B' r_0^n = 0.\end{aligned}\right.$$

De là on déduit

$$(81)\qquad \left\{\begin{aligned} f = \frac{1}{4}\Big(&A_0 r_0^2 + r_0^2 \int_0^{r_0} P_{n=0}\, r\,dr - \int_0^{r_0} P_{n=0}\, r^3\,dr\\ &+ r_0^2 \int_0^{r_0} P_{n=0}\, r \log\frac{r}{r_0}\, dr + \int_0^{r_0} P_{n=0}\, r^3 \log\frac{r}{r_0}\, dr\Big),\end{aligned}\right.$$

$$(82)\qquad \left\{\begin{aligned} w_0 = \frac{1}{4}\Big[&A_0(r^2 - r_0^2) - r^2\left(1 - \log\frac{r}{r_0}\right)\int_0^r P r\,dr + \left(1 + \log\frac{r}{r_0}\right)\\ &\times \int_0^r P r^3\,dr - r^2 \int_0^r P r \log\frac{r}{r_0}\,dr\\ &- \int_0^r P r^3 \log\frac{r}{r_0}\,dr + r_0^2 \int_0^r P \zeta\,dr - \int_0^r P r^3\,dr\Big],\end{aligned}\right.$$

$$(83)\qquad A' = -\frac{A r_0^2}{4(n+1)} - P''_0 r_0^{-n}, \quad B' = -\frac{B r_0^{n+2}}{4(n+1)} - Q''_0.$$

$$(84)\qquad \left\{\begin{aligned} W_0 = w_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty}\Big\{&\Big[P'' - P''_0 r_0^{-n} r^n + \frac{A r^n}{4(n+1)}(r^2 - r_0^2)\Big]\cos n\alpha\\ &+ \Big[Q'' - Q''_0 r_0^{-n} r^n + \frac{B r^n}{4(n+1)}(r^2 - r_0^2)\Big]\Big\}\sin n\alpha.\end{aligned}\right.$$

Quant à la fonction ζ, on peut prendre, comme dans le précédent problème,

$$\zeta = \sum_n R\,(D\cos n\alpha + C\sin n\alpha),$$

R désignant la série (62 *bis*).

Il reste à satisfaire aux deux conditions (67).

On y satisfera évidemment si chacun des termes des deux séries W_0 et ζ y satisfait, ce qui nous donnera d'abord, pour $n = 0$, les deux équations

$$\left(\frac{k}{k+1}\,R'_{n=0} + \frac{\partial^2 W_0}{\partial r^2}\right)_0 = 0,$$

$$\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\,\frac{\partial \zeta}{\partial r}\right)_0 = 0,$$

ou bien

$$(85)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{1}{2} + \frac{k}{k+1}\right) - A_0 + \int_0^{r_0} P_{n=0}\, r \log\frac{r}{r_0}\, dr \\ &\quad + \frac{1}{4}\int_0^{r_0} P_{n=0}\, r\,dr + \frac{1}{4r^2}\int_0^{r_0} P_{n=0}\, r^3\, dr = 0, \\ &D_0 = 0, \end{aligned}\right.$$

où D_0 désigne la valeur du coefficient D répondant à $n = 0$.

Puis, pour les valeurs de n, autres que $n = 0$,

$$(86)\quad \left\{\begin{aligned} &r_0^n\left[\frac{-k}{k+1} + \frac{2n+1}{2(n+1)}\right]A + \frac{12n}{\pi^2\varepsilon}\left[\frac{-R_0}{r_0^2} + \frac{1}{r_0}\left(\frac{\partial R}{\partial r}\right)_0\right]C \\ &\qquad - \frac{kP'_0}{k-1} + \left(\frac{\partial^2 P''_0}{\partial r^2}\right)_0 + n(n-1)P''_0\, r_0^{-2} = 0, \\ &\frac{n r_0^{n+1}}{2(n+1)}A + \frac{3r_0}{2\pi^2\varepsilon}\left[\frac{-n^2}{r_0^2}R_0 - \left(\frac{\partial^2 R}{\partial r^2}\right)_0\right. \\ &\qquad \left. - \frac{1}{r_0}\left(\frac{\partial R}{\partial r}\right)_0\right]C + \left(\frac{\partial P''}{\partial r}\right)_0 - \frac{nP''_0}{r_0} = 0; \end{aligned}\right.$$

$$(86\ bis)\quad \left\{\begin{aligned} &r_0^n\left[\frac{-k}{k+1} + \frac{2n+1}{2(n+1)}\right]B - \frac{12n}{\pi^2\varepsilon}\left[-\frac{R_0}{r_0^2} + \frac{1}{r_0}\left(\frac{\partial R}{\partial r}\right)_0\right]D \\ &\qquad - \frac{kQ'_0}{k+1} + \left(\frac{\partial^2 Q''}{\partial r^2}\right)_0 + n(n-1)\,Q''_0\, r_0^2 = 0, \\ &\frac{-n r_0^{n+1}}{2(n+1)}B + \frac{3r_0}{2\pi^2\varepsilon}\left[\frac{-n^2}{r_0^2}R_0 - \left(\frac{\partial^2 R}{\partial r^2}\right)_0\right. \\ &\qquad \left. - \frac{1}{r_0}\left(\frac{\partial R}{\partial r}\right)_0\right]D + \left(\frac{\partial Q''}{\partial r}\right)_0 - \frac{nQ''_0}{r_0} = 0, \end{aligned}\right.$$

où l'indice zéro indique les valeurs des fonctions qu'il affecte, répondant à $r = r_0$.

Les quatre dernières équations donnent les valeurs des quatre séries de coefficients A, B, C, D, pour toutes les valeurs de n autres que $n = 0$.

Les deux précédentes donnent les valeurs de A_0 et de D_0 pour $n = 0$, en sorte que toutes les constantes sont déterminées. En éliminant A_0 entre les équations (81) et (85), on trouve la flèche

$$(87)\quad \left\{ \begin{aligned} f = \frac{7k+3}{8(3k+1)}\left(-\int_0^{r_0} P_{n=0} r^2 dr + r_0^2 \int_0^{r_0} P_{n=0} r\, dr\right) \\ + \frac{1}{4}\left(\int_0^{r_0} P_{n=0} r^3 \log\frac{r}{r_0}\, dr\right). \end{aligned} \right.$$

Appliquons la formule qui donne la flèche, au cas d'une charge isolée Π s'exerçant sur le diamètre pris pour axe polaire, à une distance $r = x_0$ du centre de la plaque. Comme nous avons appelé C_0 la charge par mètre superficiel, on a

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{r_0} C_0 r\, dr\, d\alpha = \Pi \quad \text{ou} \quad \int_0^{r_0} r\, dr \int_0^{2\pi} C_0\, d\alpha = \Pi,$$

et la fonction C_0 n'a ici de valeur sensible que pour $r = x_0$, $\alpha = 0$. D'ailleurs les équations (70) donnent

$$P_{n=0} = \frac{3(k+1)}{4K(2k+1)\varepsilon^3}\int_0^{2\pi} C_0\, d\alpha;$$

par suite

$$\Pi = \frac{4K(2k+1)\varepsilon^3}{3(k+1)}\int_0^{r_0} P_{n=0} r\, dr.$$

Or, de (87) on tire, en observant que $P_{n=0}$ n'a ici de valeur appréciable que pour $r = x_0$,

$$f = \left[\frac{7k+3}{8(3k+1)}(r_0^2 - x_0^2) + \frac{x_0^2}{4}\log\frac{x_0}{r_0}\right]\int_0^{r_0} P_{n=0} r\, dr,$$

ou

$$f = \frac{3(k+1)}{16K(2k+1)\varepsilon^3}\,\Pi\left[\frac{7k+3}{2(3k+1)}(r_0^2 - x_0^2) + x_0^2 \log\frac{x_0}{r_0}\right].$$

Le fait, qu'on peut ainsi trouver la flèche au centre en termes finis, quelle que soit la distribution des charges, est très-intéressant.

Observons que $P_n = 0$ ne dépend pas de toutes les charges C_0, mais seulement de l'expression

$$\int_0^{2\pi} C_0 \, d\alpha,$$

comme le montrent les formules (70). Si donc on ne change pas cette dernière intégrale, la fonction $P_{n=0}$ ne changera pas, ni, par suite, la flèche f. Or, si nous considérons les charges C_0 agissant tout le long d'un cylindre de rayon r, concentrique à la plaque, l'intégrale ci-dessus exprimera leur résultante; cela signifie donc que, si l'on modifie, d'une manière quelconque, la distribution des charges sur la plaque, pourvu que la résultante de toutes celles qui agissent à une même distance r de l'axe ne change pas, la flèche elle-même ne changera pas. En d'autres termes, on a ce théorème :

La flèche au centre d'une plaque circulaire appuyée sur son pourtour ne change pas si l'on vient à modifier arbitrairement les charges que supporte la plaque, pourvu qu'on conserve la résultante de toutes celles qui agissent à égale distance de son centre.

En terminant, observons encore que, si la charge était symétriquement distribuée autour du centre de la plaque, il est clair que le plan moyen déformé deviendrait une surface de révolution.

Pour déduire ce cas particulier traité par Poisson de nos formules, il suffit de réduire chaque série à son premier terme, celui répondant à $n = 0$. Et, comme on a $D_0 = 0$, on voit que la fonction ζ disparaîtra dans ce cas; en d'autres termes, on retrouve alors les formules de Poisson, comme cela s'est produit aussi dans le cas analogue de la plaque libre et pour les mêmes raisons.

Équilibre d'une plaque circulaire encastrée.

Le cas de l'encastrement se traite exactement de la même manière. L'expression (84) de W_0 convient ; elle satisfait à la condition que, sur tout le pourtour, $W_0 = 0$. Mais ici il faut en outre que $\frac{\partial W_0}{\partial r} = 0$, ce qui donne les conditions nécessaires pour déterminer les constantes A, B qui entrent dans l'expression de W_0.

Cette nouvelle équation $\frac{\partial W_0}{\partial r} = 0$ remplace la première (61) du problème précédent ; la troisième subsiste ; mais, à cause de $W_0 = 0$ et $\frac{\partial W_0}{\partial r} = 0$, on a aussi sur le pourtour

$$\frac{\partial W_0}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial^2 W_0}{\partial r\, \partial \alpha} = 0;$$

par suite, la troisième condition se réduit à

$$\frac{1}{r_0} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} + \frac{1}{r_0} \frac{\partial \zeta}{\partial r} = 0,$$

et l'on y satisfait, ainsi qu'à l'équation à différences partielles qui régit ζ, par $\zeta = 0$. Ainsi cette fonction additionnelle disparaît ici, et ce problème ne comporte qu'une seule inconnue et est, à ce point de vue, plus simple que les précédents.

Comme dans le problème de la plaque appuyée, on peut ici trouver en termes finis la grandeur de la flèche au centre : elle ne dépend que du premier terme de W_0, tous les autres disparaissant pour $r = 0$.

Pour trouver la constante A_0 qui entre dans ce terme, nous écrirons que, pour $r = r_0$, $\frac{dW_0}{dr} = 0$, soit

$$A_0 r_0^2 + \frac{1}{2}\left(r_0 \int_0^{r_0} P_{n=0}\, r\, dr - \frac{1}{r_0}\int_0^{r_0} P_{n=0}\, r^3\, dr \right.$$
$$\left. + 2 r_0 \int_0^{r_0} P_{n=0}\, r \log \frac{r}{r_0}\, dr\right) = 0.$$

Par suite, l'équation (87) donne la flèche. Supposons une charge unique Π à la distance $r = x_0$ du centre, en sorte que

$$\int_0^{r_0} P_{n=0}\, r\, dr = \frac{-3(k+1)\Pi}{4K(2k+1)\varepsilon^3},$$

et que P_n n'ait d'ailleurs de valeur sensible que pour $x = x_0$.

Alors l'équation ci-dessus devient

$$A_0 r_0^2 = \frac{3(k+1)\Pi}{8K(2k+1)\varepsilon^3}\left(r_0^2 - x_0^2 + 2r_0^2 \log\frac{x_0}{r_0}\right).$$

D'autre part la formule (87) donne, en désignant ici la flèche f par f',

$$f' = -\frac{1}{4}A_0 r_0^2 + \frac{3(k+1)\Pi}{16K(2k+1)\varepsilon^3}\left(r_0^2 - x_0^2 + r_0^2 \log\frac{x_0}{r_0} + x_0^2 \log\frac{x_0}{r_0}\right);$$

d'où

$$f' = \frac{3(k+1)\Pi}{12K(2k+1)\varepsilon^3}\left[\frac{1}{2}(r_0 - x_0^2) + x_0^2 \log\frac{x_0}{r_0}\right].$$

Pour $x_0 = 0$, on voit que le rapport entre les flèches f' et f répondant à l'encastrement et au simple appui est

$$\frac{f'}{f} = \frac{7k+3}{4(3k+1)}, \quad \text{pour} \quad k = \frac{1}{2}, \quad \frac{f'}{f} = \frac{13}{20}.$$

Le théorème établi relativement à la flèche d'une plaque appuyée subsiste ici.

Pour calculer, soit dans ce problème, soit dans le précédent, les fonctions W_0 et ζ et par suite les déplacements et les forces élastiques en tout point de la plaque, dans le cas de la force isolée, lequel, en vertu du principe de la superposition des effets des forces élastiques, comprend tous les autres, il faut se rappeler que, i étant un nombre quelconque, on a, quel que soit n,

$$\int_0^{r_0} P_n r^i dr = 0,$$

ou

$$\int_0^{r_0} P_n r^i dr = x_0^{i-1}\int_0^{r_0} P_n r\,dr = x_0^{i-1}\int_0^{r_0} P_{n=0}\, r\,dr = -\frac{3(k+1)}{4K(2k+1)\varepsilon^3}\Pi,$$

suivant que r est inférieur ou supérieur à x_0.

Mouvements vibratoires d'une plaque circulaire libre.

Passons maintenant au mouvement d'une plaque circulaire.

Les équations du mouvement d'une plaque circulaire libre sont, en posant, pour abréger,

$$\frac{2}{3}\frac{2k+1}{k+1}\varepsilon^2\frac{K}{\delta}=a^2, \tag{88}$$

$$\frac{d^2 W_0}{dt^2}+a^2\Delta_2^2 W_0=0, \tag{89}$$

$$\frac{4\varepsilon^2}{\pi^2}\Delta^2\zeta-\zeta^2=0, \tag{90}$$

avec les conditions à la surface pareilles à celles (57) où la pression extérieure $\mathfrak{E}$ est supposée nulle, soit, pour $r=r_0$,

$$\left\{\begin{aligned} &-\frac{2k+1}{k+1}\frac{2\varepsilon^2}{3}\frac{\partial\Delta_2 W_0}{\partial r}+\frac{1}{r_0}\frac{\partial\zeta}{\partial\alpha}=0,\\ &\frac{k}{k+1}\Delta_2 W_0+\frac{\partial^2 W_0}{\partial r^2}=0,\\ &\frac{1}{r_0}\frac{\partial W_0}{\partial\alpha}+\frac{\partial^2 W_0}{\partial r\,\partial\alpha}=0. \end{aligned}\right. \tag{91}$$

Enfin, pour $t=0$,

$$W_0=F(r,\alpha),\quad \frac{\partial W_0}{\partial t}=f(r,\alpha). \tag{92}$$

Pour la recherche de W_0, on peut procéder comme l'a fait Kirchhoff.

Cherchons d'abord une solution simple de W_0 qui satisfasse aux deux dernières conditions à la surface. Pour cela posons

$$W_0=R_{n,\lambda}\cos n\alpha\,(A\cos\lambda^2 at+A'\sin\lambda^2 at), \tag{93}$$

où n est un nombre entier, λ^2 un nombre indéterminé et $R_{n,\lambda}$ une fonction indéterminée de r contenant les deux constantes n et λ.

Nous tirons de là

$$(94)\quad \begin{cases} \Delta_2 W_0 = \left(\dfrac{\partial^2 R_{n,\lambda}}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial R_{n,\lambda}}{\partial r} - \dfrac{n^2}{r^2} R_{n,\lambda}\right) \\ \qquad \times \cos n\alpha (A\cos\lambda^2 at + A'\sin\lambda^2 at). \end{cases}$$

Si l'on pose

$$(95)\quad \frac{\partial^2 R_{n,\lambda}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial R_{n,\lambda}}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} R_{n,\lambda} = \delta R_{n,\lambda},$$

$$(96)\quad \Delta^2 W_0 = \delta R_{n,\lambda} \cos n\alpha (A\cos\lambda^2 at + A'\sin\lambda^2 at),$$

et

$$\Delta_2^2 W_0 = \delta.\delta R_{n,\lambda} \cos n\alpha (A\cos\lambda^2 at + A'\sin\lambda_2 at),$$

$$\frac{\partial^2 W_0}{\partial t^2} = -\lambda^4 a^2 R_{n,\lambda} \cos n\alpha (A\cos\lambda^2 at + A'\sin\lambda^2 at).$$

On satisfera donc à l'équation (89) si la fonction $R_{n,\lambda}$ satisfait à l'équation différentielle du quatrième ordre

$$(97)\quad \delta.\delta R_{n,\lambda} - \lambda^4 R_{n,\lambda} = 0.$$

Si l'on pose

$$\delta R_{n,\lambda} = \lambda^2 S,$$

il vient

$$\delta S = \lambda^2 R_{n,\lambda};$$

d'où, en observant que le δ d'une somme est égal à la somme des δ de ses parties,

$$(98)\quad \begin{cases} \delta(R_{n,\lambda} + S) = \lambda^2 (R_{n,\lambda} + S), \\ \delta(R_{n,\lambda} - S) = -\lambda^2 (R_{n,\lambda} - S). \end{cases}$$

Posons

$$(99)\quad \begin{cases} R' = \dfrac{\lambda^n r^n}{2.4\ldots 2n}\left[1 + \dfrac{\lambda^2 r^2}{2(2n+2)} + \dfrac{\lambda^4 r^4}{2.4(2n+2)(2n+4)} + \ldots\right], \\ R'' = \dfrac{\lambda^n r^n}{2.4\ldots 2n}\left[1 - \dfrac{\lambda^2 r^2}{2(2n+2)} + \dfrac{\lambda^4 r^4}{2.4(2n+2)(2n+4)} - \ldots\right]. \end{cases}$$

On satisfera aux deux équations différentielles ci-dessus, en faisant

$$R_{n,\lambda} + S = 2B'R',$$
$$R_{n,\lambda} - S = 2B''R'',$$

B′ et B″ étant deux constantes indéterminées ; d'où

$$R_{n,\lambda} = B'R' + B''R'', \tag{100}$$

$$S = B'R' - B''R'' = \frac{1}{\lambda^2}\,\delta R_{n,\lambda}. \tag{100 bis}$$

Maintenant les deux dernières conditions à la surface deviennent, si l'on remplace W_0 par sa valeur (93), pour $r = r_0$,

$$\frac{k}{k+1}\,\delta R_{n,\lambda} + \frac{\partial^2 R_{n,\lambda}}{\partial r^2} = 0,$$
$$\frac{R_{n,\lambda}}{r} + \frac{\partial R_{n,\lambda}}{\partial r} = 0,$$

ou bien

$$\left[\frac{k}{k+1}\lambda^2 R'_0 + \left(\frac{\partial^2 R'}{\partial r_0^2}\right)\right] B' + \left[-\frac{k}{k+1}\lambda^2 R''_0 + \left(\frac{\partial^2 R''}{\partial r_0^2}\right)\right] B'' = 0,$$
$$\left(\frac{R'_0}{r_0} + \frac{\partial R'}{\partial r}\right)_0 B' + \left[\frac{R''_0}{r_0} + \left(\frac{\partial R''}{\partial r}\right)_0\right] B'' = 0.$$

Si l'on élimine le rapport $\frac{B'}{B''}$,

$$\left\{\begin{aligned} &\left[\frac{k}{k+1}\lambda^2 R'_0 + \left(\frac{\partial^2 R'}{\partial r}\right)_0\right]\left[\frac{R''_0}{r_0} + \left(\frac{\partial R''}{\partial r}\right)_0\right] \\ &\quad - \left[-\frac{k}{k+1}\lambda R''_0 + \left(\frac{\partial r R''}{\partial r^2}\right)_0\right]\left[\frac{R'_0}{r_0} + \left(\frac{\partial R'}{\partial r}\right)_0\right] = 0, \end{aligned}\right. \tag{101}$$

équation en λ dont les racines fournissent les valeurs qu'il faut adopter pour cette quantité, pour chaque valeur de l'entier n. Ces racines sont toutes réelles en vertu d'une formule bien connue que nous utiliserons plus loin.

La dernière équation donne ensuite

$$\frac{B'}{\frac{R''_0}{r} + \left(\frac{\partial R''}{\partial r}\right)_0} = - \frac{B''}{\left[\frac{R'_0}{r_0} + \left(\frac{\partial R'}{\partial r}\right)_0\right]}.$$

Nous pouvons, sans diminuer la généralité de l'expression de W_0, prendre ces deux rapports égaux à l'unité, en sorte que

$$B' = \frac{R''_0}{r_0} + \left(\frac{\partial R''}{\partial r}\right)_0,$$

$$B'' = - \left[\frac{R'_0}{r_0} + \left(\frac{\partial R'}{\partial r}\right)_0\right],$$

et, par suite

$$R_{n,\lambda} = \left[\frac{R''_0}{r_0} + \left(\frac{\partial R''}{\partial r}\right)_0\right] R' - \left[\frac{R'_0}{r_0} + \left(\frac{\partial R'}{\partial r}\right)_0\right] R'',$$

fonction complétement déterminée.

Nous satisfaisons encore aux deux dernières conditions (91) et à l'équation différentielle (89) en prenant pour W_0 la somme d'un nombre infini de termes analogues au second membre de (93) et se rapportant à toutes les valeurs entières de n et à toutes les racines λ de l'équation (101), soit

$$W_0 = \sum_{n,\lambda} R_{n,\lambda} \cos n\alpha \,(A \cos \lambda^2 at + A' \sin \lambda^2 at). \tag{102}$$

Il faut enfin satisfaire aux conditions initiales, ce qui donne

$$\sum_{n,\lambda} A R_{n,\lambda} \cos n\alpha = F(r, \alpha),$$

$$\sum_{n,\lambda} \lambda^2 A' R_{n,\lambda} \cos n\alpha = \frac{r}{a} f(r, \alpha),$$

qui doivent avoir lieu de $\alpha = 0$ à $\alpha = 2\pi$ et de $r = 0$ à $r = r_0$. On démontre, d'après des formules connues, que, pour deux valeurs différentes de λ, on a

$$\int_0^{r_0} R_{n,\lambda} R_{n,\lambda'} r^2 \, dr = 0.$$

Par suite, on tire de ces équations pour les coefficients restant à déterminer

$$(103)\quad \left\{\begin{aligned} A &= \frac{\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi} R_{n,\lambda} F(r,\alpha)\cos n\alpha\, r\,dr\,d\alpha}{\pi\int_0^{r_0} R_{n,\lambda}^2 r^2\,dr},\\ A' &= \frac{1}{\lambda^2 a\pi}\,\frac{\int_0^{r_0}\int_1^{2\pi} R_{n,\lambda} f(r,\alpha)\cos n\alpha\, r\,dr\,d\alpha}{\pi\int_0^{r_0} R_{n,\lambda}^2 r^2\,dr}, \end{aligned}\right.$$

en sorte que W_0 est complétement déterminé.

En désignant, comme précédemment, par R la série (62 *bis*), on satisfera à l'équation (90) en posant

$$(103\,bis)\qquad \zeta = \sum_{n,\lambda} \mathrm{MR}\sin n\alpha(\mathrm{A}\cos\lambda^2 at + \mathrm{A}'\sin\lambda^2 at),$$

où l'on doit observer que R ne contient que la constante n et non celle λ. A et A' sont les constantes définies par les équations (103) et M des constantes indéterminées. La première condition (91), la seule non encore remplie, donnera pour définir le coefficient M

$$\frac{n\mathrm{R}_0}{r_0}\mathrm{M} - \frac{2k+1}{k+1}\,\frac{2\varepsilon^3}{3}(\partial \mathrm{R}_{n,\lambda})_0 = 0,$$

ou, en vertu de (95),

$$\mathrm{M} = \frac{2k+1}{k+1}\,\frac{2\varepsilon^3}{3}\,\frac{\lambda^2 r_0}{n\mathrm{R}_0}\left[\frac{2\mathrm{R}'_0\mathrm{R}''_0}{r_0} + \mathrm{R}'_0\left(\frac{\partial \mathrm{R}''}{\partial r}\right)_0 + \mathrm{R}''_0\left(\frac{\partial \mathrm{R}'}{\partial r}\right)_0\right].$$

Mouvements vibratoires dans une plaque appuyée sur son pourtour.

Les conditions à la surface sont ici

$$W_0 = 0,$$

et celles (67)

$$(104)\quad \begin{cases} -\left(\frac{k}{k+1}\Delta_2 W_0 + \frac{\partial^2 W_0}{\partial r^2}\right) + \frac{12}{\pi^2\varepsilon}\left(\frac{1}{r_0^2}\frac{\partial\zeta}{\partial\alpha} + \frac{1}{r_0}\frac{\partial^2\zeta}{\partial r\partial\alpha}\right) = 0, \\ \frac{1}{r_0^2}\frac{\partial W_0}{\partial\alpha} - \frac{1}{r_0}\frac{\partial^2 W_0}{\partial r\partial\alpha} + \frac{3}{2\pi^2\varepsilon}\left(\frac{1}{r_0^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial\alpha^2} - \frac{\partial^2\zeta}{\partial r^2} + \frac{1}{r_0}\frac{\partial\zeta}{\partial r}\right) = 0. \end{cases}$$

On peut toujours prendre pour W_0 l'expression (102), où $R_{n,\lambda}$ a la forme (100), et pour valeur correspondante de ζ le terme correspondant de la série qui forme le second membre de (103 *bis*), soit

$$\zeta = \mathrm{MR}\sin n\alpha(\mathrm{A}\cos\lambda^2 at + \mathrm{A}'\sin\lambda^2 at).$$

Si l'on porte ces expressions dans les trois conditions à la surface, elles deviennent

$$\mathrm{B}'\mathrm{R}'_0 + \mathrm{B}''\mathrm{B}''_0 = 0,$$

$$-\left[\frac{k}{k+1}\lambda^2\mathrm{R}'_0 + \left(\frac{\partial^2\mathrm{R}'}{\partial r^2}\right)_0\right]\mathrm{B}' + \left[\frac{\zeta k}{k+1}\lambda^2\mathrm{R}''_0\left(\frac{\partial^2\mathrm{R}''}{\partial r^2}\right)_0\right]\mathrm{B}''$$
$$+\frac{12n}{\pi^2\varepsilon}\left[\frac{-\mathrm{R}_0}{r_0^2} + \frac{1}{r_0}\left(\frac{\partial\mathrm{R}}{\partial r}\right)_0\right]\mathrm{M} = 0,$$

$$\frac{n\left(\frac{\partial\mathrm{R}'}{\partial r}\right)_0}{r_0}\mathrm{B}' + \frac{n\left(\frac{\partial\mathrm{R}''}{\partial r}\right)_0}{r_0}\mathrm{B}'' + \frac{3}{2\pi^2\varepsilon}\left[\frac{-n^2}{r_0^2}\mathrm{R}_0 - \left(\frac{\partial^2\mathrm{R}}{\partial r^2}\right)_0 + \frac{1}{r_0}\left(\frac{\partial\mathrm{R}}{\partial r}\right)_0\right]\mathrm{M} = 0.$$

Si, entre ces trois équations homogènes par rapport à B', B'', M, on élimine ces trois constantes, on obtiendra une équation en λ^2 dont les racines fourniront les valeurs à adopter pour cette constante.

Les trois équations se réduiront alors à deux, par exemple la première et la dernière; de la première on déduit

$$\frac{\mathrm{B}'}{\mathrm{R}''_0} = -\frac{\mathrm{B}''}{\mathrm{R}'_0},$$

et l'on peut prendre simplement

$$\mathrm{B}' = \mathrm{R}''_0, \quad \mathrm{B}'' = -\mathrm{R}'_0.$$

Par suite, la dernière donne la valeur de M; ces trois séries de constantes sont ainsi entièrement déterminées.

En prenant ensuite pour W_0 et ζ les séries complètes, telles que (102) et (103 *bis*), il ne restera plus que les constantes A et A' à déterminer, ce qui se fera comme dans le cas précédent.

On voit que, pour $n=0$, $M=0$, ce qui montre que ζ n'a pas de terme correspondant à $n=0$; et si l'état initial de la plaque était symétrique tout autour du centre, c'est-à-dire indépendant de α, il en serait de même pendant toute la durée du mouvement; les séries se réduiraient chacune au terme correspondant à $n=0$; par suite, la fonction ζ ne s'introduirait pas, et les formules données par Poisson, dans ce cas particulier, le seul qu'il ait traité, se trouveraient être exactes. Cela tient aux mêmes raisons que dans le cas de l'équilibre.

Cherchons la flèche f au centre. On l'obtiendra en faisant, dans l'expression de W_0, $r=0$.

Mais, pour $r=0$, on a $R_{n,\lambda}=0$, pour toutes les valeurs de n autres que $n=0$, comme cela résulte de l'expression (100) de $R_{n,\lambda}$ et de ce que les fonctions R' et R'', qui sont des séries (62 *bis*), s'annulent pour $r=0$, sauf lorsque $n=0$.

Donc, dans la double somme $\sum\limits_{n,\lambda}$ qui fournit la valeur générale W_0, tous les termes relatifs à n disparaissent, sauf ceux relatifs à $n=0$, et l'expression de la flèche est fournie par une somme simple $\sum$ relative aux différentes valeurs de λ, à savoir

$$f=\sum_{\lambda} R_{0,\lambda}(A\cos\lambda^2 at + A'\sin\lambda^2 at),$$

ou

$$A=\frac{\displaystyle\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi} R_{0,\lambda}F(r,\alpha)\,r\,\partial r\,\partial\alpha}{\displaystyle\pi\int_0^{r_0} R_{0,\lambda}^2 r^2\,\partial r},$$

$$A'=\frac{\displaystyle\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi} R_{0,\lambda}\,f(r,\alpha)\,r\,\partial r\,\partial\alpha}{\displaystyle\pi\int_0^{r_0} R_{0,\lambda}^2 r^2\,\partial r}.$$

Posons

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(r,\alpha)\,d\alpha = \Phi(r),$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r,\alpha)\,d\alpha = \varphi(r),$$

en sorte que Φ et φ représentent respectivement les déplacements *moyens* et les vitesses *moyennes* imprimés à l'instant initial aux points du plan moyen situés sur la circonférence de rayon r.

On aura alors

$$A = 2\,\frac{\int_0^{r_0} R_{0,\lambda}\,\Phi(r)\,r\,dr}{\int_0^{r_0} R_{0,\lambda}^2\,r\,dr},$$

$$A' = 2\,\frac{\int_0^{r_0} R_{0,\lambda}\,\varphi(r)\,r\,dr}{\int_0^{r_0} R_{0,\lambda}^2\,r\,dr}.$$

On voit que A et A′ et par suite la flèche f ne dépendent pas du déplacement initial $F(r,\alpha)$ et de la vitesse initiale $f(r,\alpha)$ de chaque point de la plaque, mais seulement du déplacement initial moyen $\Phi(r)$ et de la vitesse initiale moyenne $\varphi(r)$. Ainsi on a ce théorème analogue à celui trouvé dans le problème de l'équilibre de la plaque appuyée.

Lorsqu'une plaque circulaire appuyée sur son pourtour est en mouvement vibratoire, le mouvement de son centre ne dépend pas de la position et de la vitesse initiale de chacun de ses points, mais seulement des positions et vitesses initiales moyennes des points placés sur chacun des cylindres concentriques à la plaque.

Mouvements vibratoires de la plaque circulaire encastrée sur son pourtour.

Si la plaque est encastrée sur son pourtour, les trois conditions à la surface sont

$$W_0 = 0, \quad \frac{\partial W_0}{\partial r} = 0,$$

et la dernière (104) qui, en vertu des deux précédentes, se réduit à

$$\frac{1}{r_0^2}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} + \frac{1}{r_0}\frac{\partial \zeta}{\partial r} = 0.$$

Il résulte de là que la fonction ζ est ici nulle. On satisfait, en effet, à la dernière condition et à l'équation à différences partielles relative à ζ par $\zeta = 0$.

Le problème ne comporte donc ici qu'une inconnue comme dans le cas de la plaque encastrée en équilibre.

En adoptant toujours pour W_0 l'expression simple (93) où $R_{n,\lambda}$ est représenté par la somme (100), les deux conditions à remplir par la fonction W_0 sont

$$B'R'_0 + B''R''_0 = 0,$$

$$B'\left(\frac{\partial R'}{\partial r}\right)_0 + B''\left(\frac{\partial R''}{\partial r}\right)_0 = 0;$$

d'où, pour l'équation en λ^2,

$$R'_0\left(\frac{\partial R''}{\partial r}\right)_0 - R''_0\left(\frac{\partial R'}{\partial r}\right)_0 = 0;$$

on peut prendre

$$B' = R''_0, \quad B'' = -R'_0,$$

en sorte que $R_{n,\lambda}$ sera entièrement déterminé. La recherche des coefficients A′ et A″ se fera comme précédemment, et le théorème que nous avons établi sur le mouvement du centre de la plaque appuyée se trouve également vrai ici.