JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

O. TERQUEM

Théorèmes sur les Polygones réguliers considérés dans le cercle et l'ellipse

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 3 (1838), p. 477-482.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1838_1_3__477_0>

Théorèmes sur les Polygones réguliers considérés dans le cercle et l'ellipse ;

Par M. O. TERQUEM.

1^er^ Théorème. Si le nombre des côtés d'un polygone inscrit dans un cercle est un nombre premier, le rapport du périmètre de ce polygone au rayon est incommensurable.

Démonstration. Soit n le nombre des côtés d'un polygone régulier inscrit dans un cercle dont le rayon est pris pour unité; soit p le périmètre; on aura

$$p = 2n \sin\frac{2q}{n}, \quad p^2 = 4n^2 \sin^2\frac{2q}{n} = 2n^2\left(1 + \cos\frac{4q}{n}\right).$$

Or, le trinome $x^2 - 2x\cos m.\frac{4q}{n} + 1$, m étant un nombre entier quelconque, est facteur du binome $x^n - 1$, et lorsque n est un nombre premier plus grand que 3, ce facteur est irrationnel (Gauss, *Disquisitiones arithmeticæ,* § 341, p. 599, édit. de 1801; ou Legendre, *Théorie des Nombres*, 2^e^ édit., p. 439); donc $\cos\frac{4q}{n}$ est irrationnel; donc $\sin^2\frac{2q}{n}$ est irrationnel, et à plus forte raison $\sin\frac{2q}{n}$; ainsi p est irrationnel lorsque n est un nombre premier. C. Q. F. D.

Première observation. Pour $n=1$ ou $n=2$, la valeur de $\sin\frac{2q}{n}$ devient rationnelle; ainsi le théorème n'a lieu qu'à partir de $n=3$.

Deuxième observation. On a $\sin^2\frac{2q}{n} + \cos^2\frac{2q}{n} = 1$; donc aussi $\cos^2\frac{2q}{n}$ et par conséquent $\cos\frac{2q}{n}$ est irrationnel. (Euclide, liv. 10, prop. 21, lemme.)

2^e^ Théorème. Le périmètre de tout polygone régulier, l'hexagone excepté, inscrit dans une circonférence, est irrationnel; le rayon est pris pour unité.

Démonstration. Soit n un nombre premier au-dessus de 3; r un nombre entier quelconque, et rn le nombre des côtés du polygone dont p est le périmètre. On a

$$p = 2rn \sin\frac{2q}{rn}, \quad p^2 = 2r^2n^2\left(1 + \cos\frac{4q}{rn}\right).$$

Soit

$$\frac{4q}{rn} = x, \quad \frac{4q}{n} = rx;$$

d'où

$$\cos\frac{4q}{n} = \cos^r x - \frac{r(r-1)}{1.2}\cos^{r-2} x \sin^2 x + \text{etc.}$$

Or $\cos\frac{4q}{n}$ est irrationnel (1[er] théorème); donc $\cos x$ ou $\cos\frac{4q}{rn}$ est irrationnel; donc p est irrationnel. C. Q. F. D.

Observation. On démontre de même que $\cos^2\frac{4q}{rn}$ et $\sin^2\frac{4q}{rn}$ sont irrationnels et aussi $\cos\frac{2q}{rn}$; lorsque $n = 2$, $r = 4$, alors $\cos^2\frac{4q}{rn} = \frac{1}{2}$.

3[e] Théorème. Le périmètre de tout polygone régulier, excepté le carré circonscrit au cercle, est irrationnel; le rayon du cercle est pris pour unité.

Démonstration. Soit, comme dessus, rn le nombre des côtés du polygone circonscrit; son périmètre est égal à $2rn \operatorname{tang}\frac{2q}{rn}$; or $\cos^2\frac{2q}{rn}$ est irrationnel (excepté pour $r = n = 2$); donc $\frac{1}{\cos^2\frac{2q}{rn}}$ ou $1 + \operatorname{tang}^2\frac{2q}{rn}$ est irrationnel; de là on conclut que $\operatorname{tang}\frac{2q}{n}$ est irrationnel. C. Q. F. D.

Première observation. On démontre de même que le carré est le seul polygone régulier inscrit et circonscrit dont l'aire divisée par le carré du rayon, donne un quotient rationnel.

Deuxième observation. On n'est pas en droit de conclure de ces trois théorèmes que la circonférence divisée par le diamètre ou le cercle divisé par le carré du rayon donnent des quotients irrationnels; car l'arc infiniment petit diffère toujours *essentiellement* de sa corde;

l'arc de cercle, même infiniment petit, n'est déterminé que par trois points, tandis que deux suffisent pour déterminer sa corde. De là résulte aussi qu'en mécanique un point matériel qui se meut sur un arc différentiel ne peut être considéré comme se mouvant sur la corde. Toutefois, on peut admettre que le rapport de leurs longueurs est égal à l'unité.

4^e Théorème. Si dans une conique deux segments sont équivalents, les demi-diamètres qui passent par le milieu des cordes sont proportionnels aux flèches, c'est-à-dire aux parties de ces demi-diamètres interceptées entre la corde et l'arc; *et vice versa*.

Démonstration. Ellipse; $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$, $\alpha=$ angles des axes, $A=$ aire de segment formé par la corde $2y$. On a

$$A=ab\sin\alpha \text{ arc}\cos=\frac{x}{a}-xy\sin\alpha;$$

faisons $\quad x=am;\quad$ alors $\;y=b\sqrt{1-m^2}$

et $\quad A=ab\sin\alpha\cos=m-abm\sqrt{1-m^2}.\sin\alpha;$

or, $ab\sin\alpha$ est une quantité constante; donc si m est constant, A l'est aussi.
C. Q. F. D.

Observation. La propriété est évidente, en considérant l'ellipse comme une projection orthogonale du cercle.

Hyperbole : $xy=m^2$, équation d'une hyperbole équilatère;

x', y', x'', y'', coord. des extrémités du segment dont l'aire est A; on a

$$A=\frac{m^2}{2}\left(\frac{x''^2-x'^2}{x'x''}-2\log\frac{x''}{x'}\right);$$ le logarithme est népérien.

Faisons $x''=nx'$, d'où $y''=\frac{y}{n}$, et $A=\frac{m^2}{2}\left(\frac{n^2-1}{n}-2\log n\right)$.

Le diamètre qui passe par le milieu de la corde a pour équation

$$y=\frac{y'}{nx'}x;$$

ce diamètre rencontre la courbe en un point dont les carrés des coordonnées sont

$$\frac{nm^2x'}{y'} \quad\text{et}\quad \frac{m^2y'}{nx'};$$

désignant par d la longueur du demi-diamètre, l'on trouve

$$d^2 = \frac{n^2x'^2 + y'^2}{n};$$

désignant par l la distance du centre au milieu de la corde, on a

$$l^2 = \left(\frac{1+n}{2n}\right)^2 (n^2x'^2 + y'^2); \quad \text{donc} \quad \frac{d^2}{l^2} = \frac{4n}{(1+n)^2}.$$

Ainsi, si $\frac{d}{l}$ est constant, n et par conséquent A sont constants. C. Q. F. D.

Observation. Si l'hyperbole n'est pas équilatère, α étant l'angle des asymptotes, il suffit de remplacer x', x'', m^2 par $x' \sin\alpha$, $x'' \sin\alpha$, $m^2 \sin\alpha$; les raisonnements et les calculs sont les mêmes.

Parabole : $y^2 = px$, $\alpha =$ angle des axes, $2y =$ corde du segment, on a

$$A = \frac{4}{3} x' \sin\alpha \sqrt{px'}.$$

Soient a, b les coordonnées de l'origine relativement aux axes principaux; p' le paramètre par rapport aux mêmes axes; on a

$$p = p' + 4a, \quad \sin^2\alpha = \frac{p'}{p}, \quad \text{de là} \quad A = \frac{3}{4} x' \sqrt{p'x'};$$

donc si x' est constant, A l'est aussi. C. Q. F. T.

Première observation. En partant de l'équation générale...... $y^2 = mx + nx^2$, le calcul intégral fournit une démonstration applicable aux trois coniques.

Deuxième observation. Un trapèze étant inscrit dans une conique, les côtés non parallèles interceptent des segments équivalents.

Définition. Un polygone inscrit dans une ellipse est *régulier*, lorsque les côtés interceptent des segments équivalents.

5^e^. Théorème. Dans tout polygone régulier inscrit dans une ellipse, la somme des carrés des demi-diamètres passant par les sommets du polygone est égale au carré de la corde du cadran elliptique multiplié par la moitié du nombre des côtés.

Démonstration. Soit n le nombre des côtés; a un demi-diamètre passant par un sommet; b le demi-diamètre conjugué à a; l^2 la somme des carrés des demi-diamètres, et $\varphi = \frac{4q}{n}$; il est facile de voir que l'on a

$$\begin{aligned} l^2 = a^2 & [1 + \cos^2\varphi + \cos^2 2\varphi + \cos^2 3\varphi + \ldots \cos^2.(n-1)\varphi] \\ & + b^2 [\sin^2\varphi + \sin^2.2\varphi + \sin^2 3\varphi + \ldots\ldots \sin^2 (n-1)\varphi]. \end{aligned}$$

On sait que les coefficients de a^2 et de b^2 sont égaux chacun à $\frac{n}{2}$; donc

$$l^2 = \frac{n}{2}(a^2 + b^2). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

1er *Corollaire.* A étant l'aire du polygone, on a $A = \frac{1}{2} nab\sin\varphi$: a et b désignent ici, et dans ce qui suit, les demi-axes principaux.

2e *Corollaire.* Soit D^2 la somme des carrés des distances du centre aux milieux des côtés; on trouve

$$D^2 = \frac{n}{2}(a^2 + b^2)\cos^2 \frac{1}{2}\varphi.$$

3e *Corollaire.* Soit S^2 la somme des carrés des côtés du polygone, on trouve

$$S^2 = 2n(a^2 + b^2)\sin^2 \frac{1}{2}\varphi; \text{ d'où } S = 2D \operatorname{tang} \frac{1}{2}\varphi.$$

4e *Corollaire.* Soit P^{-2} la somme des puissances -2 des perpendiculaires abaissées du centre sur les côtés, on trouve

$$P^{-2} = \frac{n(a^2 + b^2)}{a^2b^2(1 + \cos\varphi)} = \frac{n(a^2 + b^2)}{2a^2b^2\cos^2\frac{1}{2}\varphi}.$$

5e *Corollaire.* Soient α, l'angle du premier demi-diamètre avec le second; α', l'angle du second demi-diamètre avec le troisième et ainsi de suite; on aura

$$\cot\alpha + \cot\alpha' + \cot\alpha'' + \ldots \cot\alpha^{(n-1)} = \frac{n(a^2 + b^2)}{2ab}\cot\varphi.$$

En effet, soient d, e deux demi-diamètres consécutifs; α l'angle qu'ils comprennent, et c le côté du polygone auquel ils aboutissent

On a donc

$$c^2 = d^2 + e^2 - 2de\cos\alpha\,; \quad \text{mais} \quad de = \frac{ab\sin\varphi}{\sin\alpha},$$

donc

$$d^2 + e^2 - c^2 = 2ab\sin\varphi\cot\alpha.$$

On a une équation semblable pour chaque côté; ajoutant toutes ces équations, membre à membre, il vient

$$n(a^2 + b^2) - S^2 = 2ab\sin\varphi[\cot.\alpha + \cot\alpha' + \ldots.\cot\alpha^{(n-1)}];$$

mais

$$S^2 = 2n(a^2 + b^2)\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi: \quad \text{donc} \quad \text{etc.}$$

On prouve de même que la somme des cotangentes des angles exterieurs du polygone est une quantité constante égale à $\frac{n(a^2+b^2)}{2ab}\cot\varphi$, comme ci-dessus.

5^e *Corollaire*. En menant par les sommets du polygone des tangentes à l'ellipse, on obtient un polygone régulier circonscrit, que l'on peut considérer comme inscrit dans une seconde ellipse, semblable à la première et semblablement placée. Toutes les formules qu'on vient de trouver sont donc applicables au polygone circonscrit, en remplaçant a et b par $a\,\text{séc}\,\frac{1}{2}\varphi$ et $b\,\text{séc}\,\frac{1}{2}\varphi$.

Première observation. Le centre de l'ellipse est évidemment le centre de gravité de l'aire de tout polygone régulier inscrit ou circonscrit.

Deuxième observation. Le parallélogramme inscrit est le seul polygone régulier dont les propriétés soient consignées dans les traités élémentaires.

Troisième observation. Le périmètre maximum ou minimum, entre tous les polygones réguliers homonymes, appartient à celui qui a un de ses sommets à l'extrémité d'un axe principal. Car ces axes doivent partager ces polygones en parties *égales*. Il est à désirer qu'on ait une démonstration directe de ce théorème: elle est facile lorsque le nombre des côtés est une puissance de deux.