JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

O. TERQUEM

Notes historiques, 1°. sur la locution: diviser une droite en moyenne et extrême raison; 2°. sur la méthode des polygones réguliers isopérimètres. Et observations sur quelques théorèmes de M. Chasles

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 3 (1838), p. 97-101.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1838_1_3__97_0>

Notes historiques, 1°. sur la locution : diviser une droite en moyenne et extrême raison ; 2°. sur la méthode des polygones réguliers isopérimètres. Et observations sur quelques théorèmes de M. Chasles ;

Par M. O. TERQUEM.

I. Euclide, au livre II, prop. 1, prob. 2, propose et résout le problème suivant, en ces termes. « Partager une droite de sorte que le carré du grand segment soit équivalent au rectangle du petit segment et de la ligne entière » ; ce qui est fort clair. Mais au livre VII on trouve cette définition ; c'est la troisième : *ἄκρον καὶ μέσον λόγον εὐθεῖα τεθμῆσθαι λέγεται ὅταν ᾖ ὡς ἡ ὅλον πρὸς τὸ μεῖζον τμῆμα, οὕτω το μεῖζον πρὸς τὸν ἔλασσον*; mot à mot : une droite est dite être divisée en extrême et moyenne raison, lorsque la (droite) entière est au plus grand segment, comme ce plus grand segment est au plus petit. Dans le même livre, Euclide résout de nouveau le problème cité (prop. 30, prob. 10), mais en se servant des termes employés dans la définition. Il est évident que notre locution française est une traduction *littérale* de la locution grecque ; mais est-ce une traduction *fidèle ?* Il est permis d'en douter, puisqu'elle ne présente aucun sens intelligible, même en omettant, comme fait M. Vincent, le mot *raison.* Zamberti le Vénitien, dans son interprétation latine d'Euclide (réimprimée avec l'ouvrage d'Orontius Finaeus, en 1544), donne cette explication : *per extremam et mediam rationem, hoc est, per extremos et medios* terminos, *rationum similitudinem constituentes*, ce qui est déjà plus clair. Mais le vrai sens me paraît avoir été donné par Lorentz, qui a publié, en 1781, une excellente traduction allemande d'Euclide. Voici comment il traduit la troisième définition du VI^e livre : *Eine gerade linie ist nach stetiger proportion geschnitten, wenn die ganze linie*, etc. ; c'est-à-dire une droite est divisée en *pro-*

portion continue, lorsque la ligne entière est au grand segment, etc. Cette version rend *fidèlement* l'idée du géomètre grec, et c'est ainsi que le problème devrait être énoncé dans nos traités élémentaires. Comme le principal emploi de ce problème consiste à trouver le côté du décagone régulier ayant un rayon donné, on pourrait aussi se servir de cette expression : *diviser une droite décagonalement ;* ce qui présente un avantage mnémonique. Cette façon de parler est même admissible pour tous les polygones réguliers.

II. J. Schwab, mort à Nancy en 1813, a publié dans la même année et dans la même ville, des éléments de géométrie avec un *nouveau* moyen d'approcher plus promptement du rapport de la circonférence au diamètre. Ce moyen est fort ingénieux, et repose sur le théorème suivant très facile à démontrer. R et r étant le rayon et l'apothème d'un polygone régulier, R′ et r' les mêmes lignes dans le polygone régulier isopérimètre d'un nombre de côtés double, on a ces deux relations

$$2r' = \mathrm{R} + r, \quad \mathrm{R}'^2 = \mathrm{R}r';$$

pour avoir r' et R′, il suffit donc de prendre une moyenne arithmétique et une moyenne géométrique; cette dernière opération revient sensiblement à la première, lorsque les deux quantités diffèrent peu. On a donc ici le moyen d'obtenir des polygones isopérimètres, dont les rayons et les apothèmes s'appprochent indéfiniment du rayon de la circonférence isopérimètre. Mais en 1813, ce moyen n'était plus *nouveau ;* car il appartient à Descartes, ainsi qu'on peut s'en assurer en consultant un mémoire d'Euler, inséré dans les *Novi comm. Petrop.*, tom. VIII, p. 157. Ce mémoire débute ainsi :

« In excerptis ex manuscriptis Cartesii paucis quidem verbis refertur constructio quædam geometrica promptissime ad circuli veram dimensionem appropinquans, sed quæ sive Cartesius ipse eam invenerit, sive ab alio habuerit communicatam, accutissimum inventoris ingenium, illo præsertim tempore, luculenta declarat. Qui deinceps hoc idem argumentum pertractarunt, quantum quidem memini, nullam hujus eximiæ constructionis mentionem faciunt, ut periculum sit ne tandem penitus oblivione obruatur. » (*V.* aussi les *OEuvres de Descartes* publ. par Vict. Cousin, t. XI, p. 442).

Malgré cet avertissement d'Euler, donné en 1763, la *belle* construction a été si complétement oubliée que Schwab a dû la retrouver en 1813. Le moyen de Descartes consiste précisément à calculer les apothèmes d'une suite de polygones réguliers isopérimètres, et dont le nombre de côtés croît en raison double. La démonstration n'est pas jointe à la construction ; mais Euler y supplée facilement, et, selon sa manière, il déduit analytiquement de cette construction des séries trigonométriques qui n'ont plus un grand intérêt. Le mémoire est terminé par cet ingénieux scolie. Si l'on porte sur une même droite les longueurs AB, AC, AD, AE, etc, apothèmes de polygones réguliers isopérimètres de 4, 8, 16, 32 côtés, etc.... et qu'en B, C, D, E... on élève des perpendiculaires B*b*, C*c*, D*d*, E*e*... égales aux demi-côtés de ces polygones, les points *b*, *c*, *d*, *e*... appartiennent à une même quadratrice dont l'intersection avec la ligne des apothèmes détermine le rayon d'une circonférence égale au périmètre donné. On sait que les anciens se sont servis de la quadratrice pour carrer le cercle et par conséquent aussi pour rectifier la circonférence.

III. La jolie démonstration géométrique que M. Chasles donne d'une intégrale définie, dans le n° de janvier 1838 de ce Journal, paraît susceptible d'une abréviation, à partir de cette équation

$$\Sigma \frac{d\mu}{ds} d\omega = \Sigma \frac{p}{\mu} d\,\omega = \frac{1}{\mu} \Sigma p d\omega \text{ (page 12).}$$

Il est évident que $\Sigma p d\omega$ est le triple du volume de l'ellipsoïde; on a donc de suite

$$\Sigma \frac{d\mu}{ds} d\omega = 4\pi \sqrt{\mu^2 - b^2}.\sqrt{\mu^2 - c^2}.$$

L'auteur parvient à la même conclusion (page 13).

En considérant sur une sphère le lieu géométrique du point dont la somme ou la différence des distances à deux foyers pris sur la sphère soit constante, les distances étant mesurées par des arcs de grand cercle, on obtient une courbe elliptico-sphérique, ou hyperbolico-sphérique, et il est évident que si les deux courbes sont confocales, elles se coupent orthogonalement. (*Fuss. novi comm. Petrop.* t. XII, ann. 1774, page 196.) Les rayons de la sphère, qui passent par les foyers, sont les lignes focales des cônes du second degré dont parle M. Chasles à la page 15 du n° cité.

Les courbes sphériques jouissent de propriétés remarquables. Soit une corde inscrite dans une surface du second degré, et O un point fixe pris sur cette corde et qui la divise en deux segments additifs ou soustractifs. Soit m^2 le produit des deux segments: par le point O passent une infinité de cordes, pour lesquelles m est une quantité constante. Le système de ces cordes forme un cône du second degré, rencontrant la surface suivant une courbe sphérique. Le centre de la sphère et le point O sont sur une droite perpendiculaire au plan polaire du point O. Si par un point I pris sur la surface, on mène un cône parallèle au précédent, il coupera la surface aussi suivant une courbe sphérique, dont le centre est sur la normale au point I. Menons un plan *conjugué* au point I, c'est-à-dire, un plan parallèle à celui qui est tangent en I; ce plan conjugué coupera la surface suivant une conique; prenons le point fixe O sur un axe principal de cette conique et pour m^2 le rectangle des segments de cet axe; alors le cône y relatif, devient évidemment tangent au plan conjugué, et si par le point I on conçoit un cône parallèle, il aura même plan tangent que la surface, qu'il rencontre suivant une courbe sphérique dont le centre est le centre de courbure de la surface au point I. Comme la conique dont il a été question a deux axes principaux, on aura aussi au point I deux centres de courbures. Les parallèles à ces axes principaux menées par le point I donnent les directions des deux lignes de courbures, comme l'a déjà fait voir M. Dupin dans ses excellents Développements de Géométrie auxquels on doit tant de découvertes qui ont été faites depuis, dans la science de l'espace en général, et dans celle des surfaces du second degré en particulier.

IV. M. Chasles, qui cultive avec tant de succès cette dernière partie, vient d'introduire dans la théorie des coniques la considération des *axes conjugués relatifs à un point fixe* (oct. 1837, tome II, p. 390). Il déduit cette théorie, de celle de la perspective; ce qui la rend *intuitive*, but principal de l'auteur; toutefois, il est facile d'établir cette théorie sur des principes purement analytiques. En effet, soit l'équation générale à six termes d'une conique à axes quelconques:

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0:$$

$y = px$, $y = qx$ étant les équations des deux droites passant par l'origine, pour que ces droites soient conjuguées relativement à cette origine, on doit avoir la relation

$$lpq + n(p + q) + l' = 0; \quad \text{où} \quad \begin{aligned} l &= D^2 - 4AF, \\ l' &= E^2 - 4CF, \\ n &= DE - 2BF. \end{aligned}$$

Si les axes des coordonnées sont conjugués relativement à l'origine, on a $n = 0$ *et vice versa.* Si l'on a $l = l'$ et $n = l \cos\gamma$, γ étant l'angle des axes, alors l'origine est un foyer; et la relation ci-dessus montre que dans ce cas tous les axes conjugués au foyer sont rectangulaires, propriété connue; pour que deux diamètres soient conjugués relativement au centre, l'on doit avoir $D = E = 0$ et $n = 0$, donc $B = 0$; par conséquent, les diamètres sont conjugués aussi dans le sens ordinaire de ce mot. Ainsi les diamètres conjugués ordinaires sont un cas particulier des axes conjugués en général. Il est facile de transformer et de généraliser analytiquement les propriétés connues du cas ordinaire pour les adapter au cas général. Je supprime cette généralisation, dans la crainte de dépasser l'espace que l'on peut m'accorder dans ce Journal.