JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

N. SALTYKOW

Sur les transformations infinitésimales des équations différentielles

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 3 (1897), p. 429-433.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1897_5_3__429_0>

Sur les transformations infinitésimales des équations différentielles;

PAR M. N. SALTYKOW.

---

1. M. S. Lie, l'auteur de la théorie des transformations infinitésimales des équations différentielles, étudie les avantages [1] qui se présentent pour l'intégration des équations différentielles, si les transformations infinitésimales qu'elles admettent sont connues. Dans ma Note je m'occupe du calcul de ces transformations infinitésimales.

2. Il est évident qu'une équation différentielle

$$(1) \qquad dy - X\,dx = 0$$

admet une transformation infinitésimale ξ, ξX [2], où ξ est une fonction arbitraire de x, y. C'est-à-dire ξ, η étant une transformation infinitésimale que l'équation (1) admet, elle admettra de même la transformation

$$0, \qquad z = \xi X - \eta.$$

---

[1] *Math. An.*, Bd, XI, S. 489.
[2] JORDAN, *Cours d'Analyse*, t. III, p. 21.

Il s'ensuit, pour avoir une transformation infinitésimale que notre équation admet, qu'il suffit de calculer la valeur d'une seule fonction z, dont la recherche revient à intégrer une équation différentielle aux dérivées partielles

$$\frac{\partial z}{\partial x} + X\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial X}{\partial y} z.$$

Mais cette égalité montre que $\frac{1}{z}$ est un facteur intégrant de l'équation (1). Ainsi le calcul d'une transformation infinitésimale que l'équation (1) admet et la recherche de son facteur intégrant sont deux problèmes entièrement équivalents.

3. Soit

$$(2) \qquad dx_k - \sum_{h=1}^{m} X_k^h\, dx_h = 0 \qquad (k = m+1, \ldots, m+n).$$

un système d'équations aux différentielles totales, X_k^h étant des fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_{m+n}$. Leurs intégrales satisfont aux équations aux dérivées partielles

$$(3) \qquad X_\varphi^h = \frac{\partial \varphi}{\partial x_h} + \sum_{k=m+1}^{m+n} X_k^h \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, m),$$

formant un système jacobien. Ce système étant jacobien les conditions suivantes doivent avoir lieu

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial X_\nu^h}{\partial x_i} - \dfrac{\partial X_\nu^i}{\partial x_h} + \displaystyle\sum_{p=m+1}^{m+n} \left(X_p^i \frac{\partial X_\nu^h}{\partial x_p} - X_p^h \frac{\partial X_\nu^i}{\partial x_p} \right) = 0 \\ \qquad\qquad (\nu = m+1, \ldots, m+n); \end{array} \right.$$

h, i prenant toutes les valeurs distinctes de 1 à m.

Soient $z_{m+1}, z_{m+2}, \ldots, z_{m+n}$ des fonctions de variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_{m+n}$, l'expression

$$\sum_{\nu=m+1}^{m+n} z_\nu \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu}$$

étant une transformation infinitésimale (¹) que les équations (2) admettent. Les fonctions z satisfont aux conditions (²)

$$(5)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial z_\nu}{\partial x_h} + \sum\limits_{k=m+1}^{m+n} X_k^h \dfrac{\partial z_\nu}{\partial x_k} - Z_\nu^h = 0 \\ (h = 1, 2, \ldots, m;\ \nu = m+1, \ldots, m+n), \end{array} \right.$$

où l'on a posé

$$X_\nu^h = \sum_{l=m+1}^{m+n} z_l \frac{\partial X_\nu^h}{\partial x_l}.$$

Ainsi, pour calculer les n fonctions z, nous avons un système de mn équations (5) aux dérivées partielles qu'il est aisé d'intégrer. En effet, comme je l'ai montré dans ma Note : *Étude sur les intégrales d'un système des équations différentielles aux dérivées partielles de plusieurs fonctions inconnues* (³), l'intégration de ce système revient à intégrer un système

$$(6)\qquad \mathfrak{F}^h f = (X^h + Z^h) f = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, m)$$

aux dérivées partielles, où nous représentons symboliquement par Z^h l'opération

$$Z^h = \sum_{\nu=m+1}^{m+n} Z_\nu^h \frac{\partial}{\partial z_\nu}.$$

4. Il est aisé de voir que le système (6), étant jacobien, admet $2n$ intégrales distinctes. En effet,

$$(\mathfrak{F}^h f, \mathfrak{F}^i f) = (X^h f, X^i f) + (X^h f, Z^i f) + (Z^h f, X^i f) + (Z^h f, Z^i f).$$

(¹) Jordan, *Cours d'Analyse*, t. III, p. 80.
(²) Jordan, *Cours d'Analyse*, t. III, p. 84.
(³) *Journal de Liouville*; 1897.

Mais on a

$$(X^h f, X^i f) = 0,$$

$$(X^h f, Z^i f) + (Z^h f, X^i f) + (Z^h f, Z^i f) = \sum_{\nu=m+1}^{m+n} \sum_{l=m+1}^{m+n} L_{\nu l} z_l \frac{\partial f}{\partial z_\nu},$$

où l'on a posé

$$L_{\nu l} = \frac{\partial^2 X_\nu^h}{\partial x_i \partial x_l} - \frac{\partial^2 X_\nu^i}{\partial x_h \partial x_l} + \sum_{p=m+1}^{m+n} \left(X_p^i \frac{\partial^2 X_\nu^h}{\partial x_p \partial x_l} - X_p^h \frac{\partial^2 X_\nu^i}{\partial x_p \partial x_l} + \frac{\partial X_p^i}{\partial x_l} \frac{\partial X_\nu^h}{\partial x_p} - \frac{\partial X_p^h}{\partial x_l} \frac{\partial X_\nu^i}{\partial x_p} \right).$$

En différentiant les égalités (4) par rapport aux variables x_{m+1}, $x_{m+2}, \ldots, x_{m+n}$, nous avons

$$L_{\nu l} = 0, \qquad \nu = m+1, \ldots, m+n, \qquad l = m+1, \ldots, m+n.$$

Il s'ensuit

$$(\mathfrak{F}^h f, \mathfrak{F}^i f) = 0,$$

le système (6) étant jacobien. Ses intégrales distinctes étant au nombre de $2n$

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{2n},$$

la solution générale des équations (5) est

$$\pi_s(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{2n}) = 0, \qquad s = 1, 2, \ldots, n,$$

π_s étant des fonctions arbitraires distinctes. Mais, comme il est connu, les fonctions φ sont définies par les intégrales du système aux différentielles totales

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} & dx_k - \sum_{h=1}^{m} X_k^h dx_h = 0, \\ & dz_k - \sum_{h=1}^{m} Z_k^h dx_h = 0, \end{aligned} \right\} \quad k = m+1, \ldots, m+n,$$

dont les n premières équations présentent les équations (2).

5. On voit aisément que le problème du calcul des transformations infinitésimales que les équations (2) admettent est déjà résolu chaque fois que l'on peut trouver n solutions des équations (7) distinctes par rapport aux variables z. *Mais évidemment de pareils cas ne se présentent que pour des valeurs exceptionnelles des fonctions* X_k^h.

6. Soit, par exemple,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$$

une équation différentielle, f étant une fonction homogène du degré 1 par rapport à y et à ses dérivées. Remplaçons cette équation par le système simultané

$$\frac{dy}{dx} = y', \qquad \frac{dy'}{dx} = y'', \qquad \ldots, \qquad \frac{dy^{n-1}}{dx} = f.$$

Les équations (7) prennent dans ce cas la forme

$$(8) \quad \begin{cases} dy - y'dx = 0, & dy' - y''dx = 0, & \ldots, & dy^{n-1} - f dx = 0, \\ dz_2 - z_3 dx = 0, & dz_3 - z_4 dx = 0, & \ldots, & dz_{n+1} - Z dx = 0, \end{cases}$$

où l'on a posé

$$Z = \sum_{l=2}^{n+1} z \frac{df}{dy^{l-2}}, \qquad y^0 = y.$$

La fonction f étant homogène, on a

$$\sum_{l=2}^{n+1} y^{l-2} \frac{df}{dy^{l-2}} = f.$$

Il s'ensuit qu'en vertu des n premières équations (8) les n dernières admettent des solutions

$$z_l = y^{l-2}, \qquad l = 2, 3, \ldots, n+1.$$