JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

A. LIAPOUNOFF

Sur l'instabilité de l'équilibre dans certains cas où la fonction de forces n'est pas un maximum

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 3 (1897), p. 81-94.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1897_5_3__81_0>

Sur l'instabilité de l'équilibre dans certains cas où la fonction de forces n'est pas un maximum;

PAR M. A. LIAPOUNOFF.

1. On sait que la position d'équilibre d'un système matériel est stable si, dans cette position, la fonction de forces est maximum. Quant aux positions d'équilibre pour lesquelles cette dernière condition n'est pas remplie, on les caractérise souvent comme instables, quoique leur instabilité n'ait jamais été démontrée d'une manière générale. Toutefois, pour une classe assez étendue de cas, on peut la démontrer aisément, comme je l'ai fait voir dans mon Ouvrage intitulé *Le problème général de la stabilité du mouvement* (Kharkow, 1892), où j'ai montré que, pour les cas ordinaires de la non-existence du maximum, la proposition de l'instabilité de l'équilibre n'est qu'un corollaire d'un théorème général sur lequel j'avais déjà appelé l'attention dans mon Mémoire *Sur les mouvements permanents d'un corps solide dans un liquide* (Communications de la Société mathématique de Kharkow, 2ᵉ série, t. I, 1888).

Dans cette Note, je me propose d'exposer mon analyse en tant qu'elle se rapporte au théorème de l'instabilité de l'équilibre; mais pour cela je suis obligé de reprendre quelques considérations générales.

2. Soit donné un système d'équations différentielles

$$(1) \qquad \frac{dx_1}{dt} = X_1, \qquad \frac{dx_2}{dt} = X_2, \qquad \ldots, \qquad \frac{dx_n}{dt} = X_n,$$

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ étant des fonctions données des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, fonctions que nous supposerons holomorphes, c'est-à-dire susceptibles d'être représentées par des séries entières en x_i, tant que les modules de ces variables ne surpassent pas une certaine limite. Nous supposerons, de plus, que ces fonctions s'annulent toutes pour

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0,$$

et nous poserons

$$X_i = p_{i1}x_1 + p_{i2}x_2 + \ldots + p_{in}x_n + R_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

R_i ne contenant, dans son développement, que des termes de la seconde dimension et des dimensions plus élevées.

Les p_{ij}, ainsi que les coefficients des développements des R_i, seront supposés de constantes réelles.

Toute solution des équations (1) sera définie par les valeurs initiales des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que nous appellerons $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Vu les problèmes de Mécanique, nous ne considérerons ces solutions que pour des valeurs réelles de t supérieures à sa valeur initiale, pour laquelle nous prendrons la valeur zéro.

Les équations (1) admettent toujours pour solution

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad x_n = 0.$$

Nous dirons que c'est une *solution stable* si, pour tout nombre positif l, quelque petit qu'il soit, on peut assigner un autre nombre positif ε, tel qu'on ait

$$|x_1| < l, \qquad |x_2| < l, \qquad \ldots, \qquad |x_n| < l$$

pour toutes les valeurs positives de t, dès qu'on prend pour $a_1, a_2, \ldots, a_n$

des valeurs réelles quelconques satisfaisant aux inégalités

$$|a_1| < \varepsilon, \quad |a_2| < \varepsilon, \quad \ldots, \quad |a_n| < \varepsilon.$$

Si, au contraire, on peut assigner un nombre fixe l différent de zéro, tel que, si petit que soit le nombre positif ε, on puisse toujours trouver des valeurs réelles de $a_1, a_2, \ldots, a_n$ satisfaisant aux inégalités

$$|a_1| < \varepsilon, \quad |a_2| < \varepsilon, \quad \ldots, \quad |a_n| < \varepsilon$$

et conduisant, pour une valeur positive de t, à une au moins des égalités de la forme

$$|x_i| = l,$$

la solution considérée sera dite instable.

Cette définition posée, on aura la proposition suivante :

Si, parmi les racines de l'équation algébrique

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} p_{11} - \lambda & p_{12} & \ldots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} - \lambda & \ldots & p_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ p_{n1} & p_{n2} & \ldots & p_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

(qui sera dite équation déterminante), *il y en a dont les parties réelles soient positives, la solution*

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad \ldots, \quad x_n = 0$$

est instable.

Cette proposition se déduit presque immédiatement de la considération de certaines solutions des équations (1), solutions appartenant à l'espèce de celles qu'on appelle aujourd'hui, d'après M. Poincaré, *solutions asymptotiques* (1).

(1) Sous certaines conditions, l'existence de ces solutions a été établie dans mon Mémoire *Sur les mouvements permanents d'un corps solide dans un*

Supposons que parmi les racines

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \ldots, \quad \lambda_n$$

de l'équation (2) il s'en trouve dont les parties réelles ne soient pas nulles.

Soient

$$(3) \qquad \lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \ldots, \quad \lambda_k$$

k quelconques d'entre elles, ayant leurs parties réelles de même signe.

Alors, en désignant par

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_k$$

k constantes arbitraires, on aura une solution des équations (1) qui, dans certaines limites, pourra être représentée par des séries ordonnées suivant les puissances entières et positives des quantités

$$(4) \qquad \alpha_1 e^{\lambda_1 t}, \quad \alpha_2 e^{\lambda_2 t}, \quad \ldots, \quad \alpha_k e^{\lambda_k t}$$

dont les coefficients ne dépendront pas des α_i et seront, en général, des fonctions entières et rationnelles de t, ces séries ne contenant point de termes indépendants des quantités (4) et ayant pour termes du premier degré une solution des équations linéaires

$$(5) \qquad \frac{dx_i}{dt} = p_{i1}x_1 + p_{i2}x_2 + \ldots + p_{in}x_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Ces séries seront convergentes et représenteront une solution des équations (1) pour toutes les valeurs de t, qui ne surpassent pas une certaine limite dépendant des α_i, si les parties réelles des racines (3) sont toutes positives. Elles le seront pour toutes les valeurs de t plus

---

liquide. Je n'y ai pas cité la Thèse de M. Poincaré, où l'on trouve des considérations conduisant à ces solutions, puisque je n'en avais pas encore connaissance à l'époque de la publication de mon Mémoire (1888), quoique cette Thèse fût publiée neuf années avant.

grandes qu'une certaine limite, si les parties réelles desdites racines sont toutes négatives.

Le cas où les coefficients de pareilles séries peuvent être constants est particulièrement intéressant.

Tel sera, par exemple, le cas où, les coefficients des termes du premier degré étant constants, les racines (3) sont telles que l'on ne trouve point de racines de l'équation (2) parmi les nombres de la forme

$$m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + \ldots + m_k\lambda_k,$$

qu'on obtient en donnant à m_1, m_2, ..., m_k toutes les valeurs entières positives ou nulles, satisfaisant à l'inégalité

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_k > 1.$$

Si l'on considère les séries correspondant à la supposition $k = 1$, ces conditions pourront évidemment toujours être remplies. Par exemple, dans le cas où l'équation (2) a des racines positives, il n'y aura qu'à prendre pour λ_1 la plus grande de ces racines, en prenant pour les termes du premier degré la solution convenable des équations (5).

Revenons maintenant à notre proposition.

Supposons que l'équation (2) ait des racines positives et que λ soit la plus grande de ces racines.

D'après ce que nous venons de dire, les équations (1) admettront une solution de la forme

$$x_1 = f_1(\alpha e^{\lambda t}), \qquad x_2 = f_2(\alpha e^{\lambda t}), \qquad \ldots, \qquad x_n = f_n(\alpha e^{\lambda t}),$$

où α est une constante arbitraire et où les seconds membres sont des séries procédant suivant les puissances croissantes de l'argument $\alpha e^{\lambda t}$, dont les coefficients sont des constantes indépendantes de α.

Nous supposerons, ce qui est évidemment permis, que tous ces coefficients soient des constantes réelles.

En prenant pour α une constante réelle que nous supposerons, pour fixer les idées, positive, nous aurons ainsi une solution réelle qui sera définie pour toutes les valeurs de t, satisfaisant à une certaine condition de la forme

$$\alpha e^{\lambda t} \leq h,$$

h étant une constante positive, indépendante de α.

Pour cette solution, les valeurs initiales des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, qui seront données par les équations

$$a_1 = f_1(\alpha), \qquad a_2 = f_2(\alpha), \qquad \ldots, \qquad a_n = f_n(\alpha),$$

pourront être faites, par le choix de α, aussi petites, en valeurs absolues, qu'on voudra. Mais, quelque petites qu'elles soient, les variables x_1, $x_2, \ldots, x_n$ atteindront toujours, pour une valeur positive de t,

$$t = \frac{1}{\lambda} \log \frac{h}{\alpha}$$

(nous supposons $\alpha < h$), les valeurs

$$f_1(h), \quad f_2(h), \quad \ldots, \quad f_n(h)$$

qui ne dépendent point de α et ne sont pas nulles toutes à la fois (puisque, dans le cas contraire, les fonctions f_i seraient toutes identiquement nulles).

En nous reportant à la définition donnée plus haut, nous devons donc conclure que la solution

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad x_n = 0$$

est instable.

Nous avons supposé que l'équation (2) ait des racines positives. Or, s'il n'y avait pas de pareilles racines, on prendrait une paire de racines imaginaires conjuguées à parties réelles positives et l'on démontrerait le théorème par des considérations analogues. Mais nous ne nous y arrêterons pas, puisqu'une pareille circonstance ne pourra avoir lieu dans le cas que nous avons en vue.

3. Considérons maintenant un système matériel, assujetti à des liaisons indépendantes du temps t, et supposons que ce système se trouve sous l'influence des forces, dérivant d'une fonction de forces U ne contenant explicitement que les coordonnées.

En supposant que notre système comporte un nombre fini n de degrés de liberté, nous exprimerons toutes les coordonnées au moyen des variables indépendantes réelles

$$q_1, \quad q_2, \quad \ldots, \quad q_n,$$

que nous choisirons de manière à s'annuler dans une certaine position d'équilibre du système, et nous supposerons que la fonction U, ainsi que la force vive du système, étant exprimées au moyen de ces variables, en deviennent des fonctions holomorphes. Nous supposerons, de plus, que la force vive, pour $q_1 = q_2 = \ldots = q_n = 0$, reste une forme quadratique *définie* des dérivées $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n$.

Dans ces suppositions, les équations différentielles du mouvement, qui définissent les variables

$$q_1, \quad q_2, \quad \ldots, \quad q_n, \qquad q'_1 = \frac{dq_1}{dt}, \qquad q'_2 = \frac{dq_2}{dt}, \qquad \ldots, \qquad q'_n = \frac{dq_n}{dt}$$

en fonctions de t, seront susceptibles d'être ramenées à la forme des équations (1).

Nous pourrons donc nous servir du théorème qui vient d'être établi, et si l'on pose

$$U = U_2 + U_3 + U_4 + \ldots,$$

U_m désignant, d'une manière générale, une forme de degré m par rapport aux variables $q_1, q_2, \ldots, q_n$, ce théorème nous conduira à la conclusion suivante :

Si, dans la position d'équilibre, définie par les équations

$$q_1 = 0, \qquad q_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad q_n = 0,$$

la fonction de forces n'est pas un maximum et *que cela se manifeste par cette circonstance que la forme quadratique* U_2 *puisse devenir positive*, c'est une position d'équilibre instable.

En effet, par la théorie des petites oscillations, on sait qu'à la condition indiquée l'équation déterminante admet toujours au moins une racine positive.

On doit donc conclure que la solution

$$q_1 = 0, \quad q_2 = 0, \quad \ldots, \quad q_n = 0,$$
$$q'_1 = 0, \quad q'_2 = 0, \quad \ldots, \quad q'_n = 0$$

des équations différentielles du mouvement est instable.

Or, cela revient à dire que la position d'équilibre considérée est instable, et l'on peut même ajouter que cette instabilité a déjà lieu par rapport aux variables

$$q_1, \quad q_2, \quad \ldots, \quad q_n,$$

c'est-à-dire qu'elle se reconnaît déjà par les valeurs que peuvent prendre ces variables. On s'en assure aisément, en ayant égard à l'équation des forces vives, qui fait voir que l'instabilité ne peut exister par rapport aux vitesses, si elle n'a point lieu par rapport aux coordonnées.

4. Dans mon Ouvrage cité plus haut, j'ai proposé encore une autre méthode pour traiter les questions de stabilité.

Cette méthode, à laquelle j'ai été conduit par l'étude du Mémoire important de M. Poincaré *Sur les courbes définies par les équations différentielles*, consiste dans la recherche de certaines fonctions des variables

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n,$$

dont les dérivées totales, prises par rapport à t en vertu des équations (1), jouissent de certaines propriétés.

La méthode repose sur quelques propositions générales, dont je ne citerai ici que les plus simples, en me restreignant d'ailleurs à celles qui se rapportent aux conditions de l'instabilité.

Dans ce qui suit, j'entendrai par V une fonction réelle des variables réelles

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n$$

uniforme et continue, ainsi que ses dérivées partielles de premier ordre, tant que les x_i ne surpassent pas, en valeurs absolues, une certaine limite, et je supposerai que cette fonction s'annule pour

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0.$$

Pour abréger le langage, je dirai qu'une pareille fonction est de signe invariable, si elle ne change pas de signe pour les valeurs des x_i satisfaisant aux conditions

$$|x_1| \leqq l, \qquad |x_2| \leqq l, \qquad \ldots, \qquad |x_n| \leqq l,$$

l étant une constante positive suffisamment petite. Si, de plus, cette fonction ne peut s'annuler, à ces conditions, que pour

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0,$$

je dirai, comme dans la théorie des formes, que c'est une *fonction définie*.

Cela posé, on aura la proposition suivante :

Si l'on peut trouver une fonction V *dont la dérivée totale par rapport à* t

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} X_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} X_2 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial x_n} X_n = V'$$

soit une fonction définie, la fonction V *étant telle que, par le choix convenable des* x_i, *quelque petites que soient leurs valeurs absolues, on puisse satisfaire à l'inégalité*

$$VV' > 0,$$

la solution

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad x_n = 0$$

des équations (1) *est instable.*

En effet, en supposant, pour fixer les idées, que la fonction V′ soit positive, nous aurons

$$V' > 0$$

pour toutes les valeurs des x_i qui, n'étant pas nulles toutes à la fois, satisfont à certaines conditions de la forme

$$(6) \qquad |x_1| \leqq l, \qquad |x_2| \leqq l, \qquad \ldots, \qquad |x_n| \leqq l,$$

l étant un nombre positif suffisamment petit.

En supposant donc que les valeurs initiales des x_i satisfont à ces conditions, et en désignant par V_0 la valeur initiale de la fonction V, nous aurons

$$(7) \qquad V > V_0$$

pour les valeurs positives de t, tant que les conditions (6) seront remplies.

Par hypothèse, on pourra d'ailleurs toujours satisfaire à l'inégalité

$$V_0 > 0,$$

quelque petits que soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ en valeurs absolues.

Or, si l'on a $V_0 > 0$, et que l'on considère toutes les valeurs des x_i satisfaisant aux conditions (6) et (7), la fonction V', qui est définie, ne pourra devenir inférieure à un nombre positif μ.

Nous aurons donc $V' \geqq \mu$, et par suite

$$V > V_0 + \mu t$$

pour les valeurs positives de t, tant que les conditions (6) seront remplies.

Mais on voit que cela ne peut avoir lieu pour toutes les valeurs positives de t, puisque, sous les conditions (6), l étant assez petit, la fonction V a une limite supérieure. On doit donc conclure qu'il y aura une valeur positive de t, pour laquelle une au moins des égalités

$$|x_i| = l$$

sera remplie, et cela quelque petits que soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ en valeurs absolues, pourvu qu'ils satisfassent à l'inégalité $V_0 > 0$.

Notre proposition est ainsi démontrée.

Nous citerons encore la proposition suivante, qu'on démontrera par des raisonnements analogues :

Si l'on peut trouver une fonction V dont la dérivée totale par rapport à t satisfasse à une égalité de la forme

$$\frac{dV}{dt} = \lambda V + W,$$

où λ est une constante positive et W une fonction de signe invariable, la fonction V étant susceptible de recevoir le signe de W, quelque petits que soient les x_i en valeurs absolues, la solution

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 0, \qquad \dots, \qquad x_n = 0$$

est instable.

5. Pour appliquer la méthode que nous venons d'indiquer à la démonstration de la proposition du n° **2**, on considérera une forme quadratique V satisfaisant à l'équation

$$\sum_{i=1}^{n} (p_{i1}x_1 + p_{i2}x_2 + \ldots + p_{in}x_n)\frac{\partial V}{\partial x_i} = \lambda V + U,$$

λ étant une constante positive et U une forme quadratique donnée, qu'on supposera définie positive.

On s'assure aisément que la fonction V pourra toujours être déterminée de cette manière, pourvu que λ ne soit pas de la forme

$$\lambda_i + \lambda_j,$$

λ_i et λ_j étant des racines quelconques de l'équation (2).

En le supposant, plaçons-nous maintenant dans l'hypothèse que cette équation ait des racines à parties réelles positives, et supposons que λ soit assez petit pour que, parmi les nombres de la forme $\lambda_i - \lambda$, il s'en trouve dont les parties réelles soient positives.

On démontre aisément qu'à cette condition la forme V sera susceptible de recevoir des valeurs positives, et comme, en vertu des équations (1), on a

$$\frac{dV}{dt} = \lambda V + W,$$

où

$$W = U + \sum_{i=1}^{n} R_i \frac{\partial V}{\partial x_i}$$

est une fonction définie positive, on se trouvera dans les conditions de la seconde proposition du numéro précédent.

On arrive ainsi à la conclusion que la solution

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad x_n = 0$$

est instable.

6. Dans le Mémoire *Le problème général de la stabilité du mouvement*, on trouvera beaucoup d'autres applications de la méthode précédente. Ici nous n'en citerons encore qu'une seule, qui se rapporte aux conditions de l'instabilité de l'équilibre.

En nous plaçant dans les suppositions du n° 3, nous aurons, pour la demi-force vive du système, une expression de la forme

$$T = T_0 + T_1,$$

où T_0 désigne une forme quadratique définie positive des quantités $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n$ à coefficients constants et

$$T_1 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} Q_{ij} q'_i q'_j,$$

les Q_{ij} étant des fonctions holomorphes des variables $q_1, q_2, \ldots, q_n$, s'annulant pour

$$q_1 = q_2 = \ldots = q_n = 0.$$

Cela posé, considérons la fonction

$$V = q_1 \frac{\partial T}{\partial q'_1} + q_2 \frac{\partial T}{\partial q'_2} + \ldots + q_n \frac{\partial T}{\partial q'_n}.$$

Les équations différentielles du mouvement étant

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_i} = \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

on aura

$$\frac{dV}{dt} = 2T + \sum_{i=1}^{n} q_i \frac{\partial T_1}{\partial q_i} + 2U_2 + 3U_3 + 4U_4 + \ldots.$$

De là on voit que, la forme U_2 étant définie positive, la dérivée $\frac{dV}{dt}$, comme fonction des variables

$$q_1, \quad q_2, \quad \ldots, \quad q_n, \quad q'_1, \quad q'_2, \quad \ldots, \quad q'_n,$$

le sera aussi, et plus généralement, si l'on a

$$U_2 = 0, \qquad U_3 = 0, \qquad \ldots, \qquad U_{2m-1} = 0,$$

quels que soient $q_1, q_2, \ldots, q_n$, U_{2m} étant une forme définie positive, la dérivée $\frac{dV}{dt}$ sera une fonction définie positive.

Comme la fonction V peut devenir positive, on en conclut, en se reportant à la première proposition du n° **4**, que, les conditions ci-dessus étant remplies, la position d'équilibre

$$q_1 = 0, \qquad q_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad q_n = 0$$

est instable.

7. En résumé, le théorème de l'instabilité de l'équilibre se trouve ainsi démontré pour les deux cas suivants :

1° La non-existence du maximum de la fonction de forces se reconnaît par les termes du second ordre, sans qu'il soit nécessaire de considérer les termes des ordres plus élevés;

2° La fonction de forces, dans la position d'équilibre considérée, est minimum, et ce minimum se reconnaît par les termes de l'ordre le moins élevé qu'on puisse trouver dans le développement de cette fonction.

On voit que le premier de ces cas est celui qui se présente le plus souvent dans les applications.

En employant convenablement la méthode indiquée, on pourra sans doute démontrer le théorème encore pour d'autres cas de la non-existence du maximum. Mais pourra-t-on le démontrer en général?