JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

E. MATHY

Expression des composantes de l'attraction d'un ellipsoïde homogène sur un point extérieur, au moyen des fonctions θ et ζ

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 2 (1896), p. 305-316.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1896_5_2__305_0>

Expression des composantes de l'attraction d'un ellipsoïde homogène sur un point extérieur, au moyen des fonctions θ *et* ζ ;

PAR M. E. MATHY.

I. — Expression par les fonctions θ.

1. Soient a, b, c les demi-axes de l'ellipsoïde et m le point extérieur. Cet ellipsoïde se décompose en couches infiniment minces à surfaces homothétiques à l'ellipsoïde extérieur; désignons par α, β, γ les demi-axes d'une quelconque de ces couches.

Par m, faisons passer une couche homofocale à chacune des précédentes; soient α' β' γ' les demi-axes; $mn = e$ l'épaisseur de cette couche en m et $\mathrm{OQ} = \mathrm{P}'$ la distance du centre O de l'ellipsoïde au plan tangent en m, i le point d'intersection du rayon $\mathrm{O}m$ avec la surface intérieure de la couche passant par m.

Les deux triangles min et $\mathrm{OQ}m$ donnent

$$e = \frac{\mathrm{OQ}.\overline{mi}}{\mathrm{O}\overline{m}} = \frac{\mathrm{P}'d\gamma'}{\gamma'}.$$

Prenant $\frac{\gamma}{\gamma'} = u$ comme variable et désignant par X, Y, Z les composantes de l'attraction, on sait qu'on peut leur donner la forme suivante (¹) :

$$
(1)\qquad \left\{
\begin{aligned}
X &= -3Mm\frac{x}{c^3}\int_0^{\frac{c}{c'}} \frac{u^2\,du}{(1+l^2u^2)^{\frac{1}{2}}(1+l'^2u^2)^{\frac{3}{2}}},\\
Y &= -3Mm\frac{y}{c^3}\int_0^{\frac{c}{c'}} \frac{u^2\,du}{(1+l^2u^2)^{\frac{3}{2}}(1+l'^2u^2)^{\frac{1}{2}}},\\
Z &= -3Mm\frac{z}{c^3}\int_0^{\frac{c}{c'}} \frac{u^2\,du}{(1+l^2u^2)^{\frac{1}{2}}(1+l'^2u^2)^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}
\right.
$$

Ces formules se réduisent à

$$
X = -3Mm\frac{x}{c^3}\frac{d.l'F}{dl'},\qquad Y = -3Mm\frac{y}{c^3}\frac{d.lF}{dl},\qquad Z = -3Mm\frac{z}{c^3}.F,
$$

F représentant l'intégrale

$$
(2)\qquad F = \int_0^{\frac{c}{c'}} \frac{u^2\,du}{(1+l^2u^2)^{\frac{1}{2}}(1+l'^2u^2)^{\frac{1}{2}}}.
$$

Je me propose de rechercher la valeur de F. A cet effet, je pose

$$
l'u = t,
$$

d'où

$$
du = \frac{1}{l'}dt,\qquad lu = \frac{l}{l'}t = \sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}\,t = ht;
$$

h est réel et plus petit que 1, car dans l'ellipsoïde, on peut toujours supposer $a > b > c$.

Cette variable auxiliaire transforme l'expression de F qui devient

$$
(3)\qquad F = \frac{1}{l'^3}\int_0^{\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{c'}} \frac{t^2\,dt}{\sqrt{(1+t^2)(1+h^2t^2)}}.
$$

(¹) *Voir*, par exemple, M. H. Resal, *Mécanique céleste*, 2ᵉ édition, p. 198.

Je fais la substitution

$$(4)\qquad t = \frac{\lambda(v)}{\mu(v)}\ [1],$$

d'où

$$dt = \frac{\lambda'(v)\mu(v) - \mu'(v)\lambda(v)}{\mu^2(v)}dv = \frac{\mu^2(v)\nu(v) + \lambda^2(v)\nu(v)}{\mu^2(v)}dv = \frac{\nu(v)}{\mu^2(v)}dv.$$

Comme (4) conduit à $\mu^2(v) = \frac{1}{1+t^2}$ et $\nu(v) = \sqrt{\frac{1+k'^2t^2}{1+t^2}}$, il vient

$$dt = \sqrt{(1+t^2)(1+k'^2t^2)}\,dv \qquad \text{ou} \qquad dv = \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(1+k'^2t^2)}}.$$

En comparant cette formule à (3), je remarque qu'on obtient, pour le module complémentaire, $k' = h = \sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}$; k vaut $\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}$.

L'intégrale (3) prend la forme

$$(5)\qquad F = \frac{1}{l'^3}\int_0^{\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{c'}} \frac{\lambda^2(v)}{\mu^2(v)}dv.$$

La fonction $\frac{\lambda^2(v)}{\mu^2(v)}$ a pour périodes ω et ω' et possède, dans le parallélogramme des demi-périodes, un seul pôle double $v = \frac{\omega}{2}$; la formule connue de M. Hermite

$$\frac{\lambda^2(v)}{\mu^2(v)} = \frac{1}{k'^2}\left[\frac{\theta_2''(0)}{\theta_2(0)} - D^2\log\theta_2(v)\right]$$

$\left(k'\text{ étant égal à } \frac{l}{l'}\right)$ permet d'écrire, après intégration,

$$(6)\qquad F = \frac{1}{l^2 l'}\left[\frac{\theta_2''(0)}{\theta_2(0)}v - D\log\theta_2(v)\right].$$

La composante Z est donc déterminée en fonction de θ_2.

---

[1] Les notations λ, μ, ν; θ, θ_1, θ_2, θ_3 sont celles de Briot et Bouquet.

Pour obtenir Y, il faut dériver le produit lF par rapport à l, avec cette remarque que v est indépendant de l puisque $\frac{\lambda(v)}{\mu(v)} = l'u$.

Quant à X, comme F est symétrique en l' et l, je suivrai la même règle pour déterminer sa valeur; à la limite supérieure, on aura

$$\frac{\lambda(v)}{\mu(v)} = \frac{\sqrt{b^2-c^2}}{c'}.$$

En remplaçant l et l' par $\frac{(b^2-c^2)^{\frac{1}{2}}}{c}$ et $\frac{(a^2-c^2)^{\frac{1}{2}}}{c}$, il vient les formules suivantes :

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} X &= \frac{3\mathrm{M}mx}{(a^2-c^2)(b^2-c^2)^{\frac{1}{2}}}\left[\frac{\theta_2''(0)}{\theta_2(0)}v - \mathrm{D}\log\theta_2(v)\right]_{v=0}^{\frac{\lambda(v)}{\mu(v)}=\frac{\sqrt{b^2-c^2}}{c'}},\\ Y &= \frac{3\mathrm{M}my}{(a^2-c^2)^{\frac{1}{2}}(b^2-c^2)}\left[\frac{\theta_2''(0)}{\theta_2(0)}v - \mathrm{D}\log\theta_2(v)\right]_{v=0}^{\frac{\lambda(v)}{\mu(v)}=\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{c'}},\\ Z &= -\frac{3\mathrm{M}mz}{(a^2-c^2)^{\frac{1}{2}}(b^2-c^2)}\left[\frac{\theta_2''(0)}{\theta_2(0)}v - \mathrm{D}\log\theta_2(v)\right]_{v=0}^{\frac{\lambda(v)}{\mu(v)}=\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{c'}}. \end{aligned}\right.$$

2. Il est évident qu'on peut obtenir directement X et Y. Si l'on reprend la formule que suppose le calcul précédent $e = \frac{\mathrm{OQ}.\overline{mi}}{\mathrm{O}\overline{m}}$, et qu'au lieu d'égaler cette quantité e à $\frac{\mathrm{P}'d\gamma'}{\gamma'}$, on l'égale à $\frac{\mathrm{P}'d\alpha'}{\alpha'}$, alors, en prenant comme variable $\frac{\alpha}{\alpha'} = u_3$, des calculs semblables à ceux qui ont fourni Z (¹) conduisent à

$$(8)\qquad X = -3\mathrm{M}m\frac{x}{a^3}\int_0^{\frac{\alpha}{\alpha'}} \frac{u_3^2\,du_3}{\left(1-\frac{a^2-b^2}{a^2}u_3^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{a^2-c^2}{a^2}u_3^2\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

(¹) Resal, déjà cité, p. 196.

En vue de l'intégration, soit

$$\frac{a^2-c^2}{a^2}u_3^2 = t_3^2,$$

d'où

$$du_3 = \frac{a}{(a^2-c^2)^{\frac{1}{2}}}dt_3, \qquad \frac{a^2-b^2}{a^2}u_3^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}t_3^2 = k^2 t_3^2,$$

k^2 ayant la même valeur que précédemment.

En ayant égard à ces valeurs, je puis écrire (8) sous la forme

$$(9) \qquad X = -3Mm\frac{x}{(a^2-c^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a'}} \frac{t_3^2\,dt_3}{(1-t_3^2)^{\frac{1}{2}}(1-k^2t_3^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Si $t_3 = \lambda(v_3)$, cette expression devient

$$(10) \qquad X = \frac{-3Mmx}{(a^2-c^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a'}} \lambda^2(v_3)\,dv_3.$$

Or, dans le parallélogramme des demi-périodes, la fonction doublement périodique $\lambda^2(v_3)$ possède un pôle double $\frac{\omega'}{2}$; en vertu du théorème de M. Hermite, on a

$$\lambda^2(v_3) = \frac{1}{k^2}\left[\frac{\theta''(0)}{\theta(0)} - D^2\log\theta(v)\right].$$

Conséquemment, en intégrant et remplaçant k^2 par $\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}$,

$$(11) \quad X = -\frac{3Mx}{(a^2-c^2)^{\frac{1}{2}}(a^2-b^2)}\left[\frac{\theta''(0)}{\theta(0)}v_3 - D\log\theta(v_3)\right]_{v_3=0}^{\lambda(v_3)=\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a'}}.$$

Pour calculer Y, je choisis comme variable $\frac{\beta}{\beta'} = u_2$; ainsi

$$(12) \qquad Y = -\frac{3Mmy}{b^3}\int_0^{\frac{b}{b'}} \frac{u_2^2\,du_2}{\left(1+\frac{a^2-b^2}{b^2}u_2^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{b^2-c^2}{b^2}u_2^2\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Posons encore $\frac{a^2-c^2}{b^2}u_2^2 = t_2^2$; il en résulte

$$du_2 = \frac{b}{(a^2-c^2)^{\frac{1}{2}}}dt_2,$$

$$\frac{a^2-b^2}{b^2}u_2^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}t_2^2 = k^2t_2^2,$$

$$\frac{b^2-c^2}{b^2}u_2^2 = \frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}t_2^2 = k'^2t_2^2,$$

d'où

$$(12') \qquad Y = \frac{-3Mm\gamma}{(a^2-c^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{b}} \frac{t_2^2\,dt_2}{(1+k^2t_2^2)^{\frac{1}{2}}(1-k'^2t_2^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

En faisant $t_2 = \frac{\lambda(v_2)}{\nu(v_2)}$, par des calculs analogues à ceux qui ont servi dans la recherche de Z, on obtient

$$dv_2 = \frac{dt_2}{(1+k^2t_2^2)^{\frac{1}{2}}(1-k'^2t_2^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$Y = -\frac{3Mm\gamma}{(a^2-c^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{b}} \frac{\lambda^2(v_2)}{\nu^2(v_2)}dv_2.$$

La décomposition de $\frac{\lambda^2(v_2)}{\nu^2(v_2)}$ se fait en remarquant que le pôle double est $\frac{\omega+\omega'}{2}$ et que, par suite,

$$\frac{\lambda^2(v_2)}{\nu^2(v_2)} = -\frac{1}{k^2k'^2}\left[\frac{\theta_3''(0)}{\theta_3(0)} - D^2\log\theta_3(v_2)\right],$$

d'où

$$(13) \quad Y = \frac{3Mm\gamma(a^2-c^2)^{\frac{1}{2}}}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}\left[\frac{\theta_3''(0)}{\theta_3(0)}v_2 - D\log\theta_3(v_2)\right]_{v_2=0}^{\frac{\lambda(v_2)}{\nu(v_2)}=\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{b}}.$$

Les variables v_1, v_2, v_3 sont égales aux limites d'intégration; aux limites inférieures, elles sont nulles toutes trois; aux limites supérieures, on a

$$\lambda(v_3) = \frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a'},$$

$$\frac{\lambda(v_2)}{\nu(v_2)} = \frac{\sqrt{a^2-c^2}}{b'},$$

$$\frac{\lambda(v)}{\mu(v)} = \frac{\sqrt{a^2-c^2}}{c'},$$

et ces trois formules se ramènent aux trois suivantes :

$$\lambda(v_3) = \frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a'}, \qquad \lambda(v_2) = \frac{\sqrt{a^2-c^2}}{\sqrt{a^2-b^2+b'^2}}, \qquad \lambda(v) = \frac{\sqrt{a^2-c^2}}{\sqrt{a^2-c^2+c'^2}},$$

qui sont égales à cause de la relation

$$a'^2 - a^2 = b'^2 - b^2 = c'^2 - c^2.$$

On peut rapprocher ces nouvelles formes de X et Y de celle de Z et les écrire comme suit :

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned}
X &= \frac{3Mmx}{(a^2-c^2)(a^2-b^2)}\left[-\frac{\theta''(0)}{\theta(0)}v\sqrt{a^2-c^2} + \sqrt{a^2-c^2}\,D\log\theta(v)\right]_{v=0}^{\lambda(v)=\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a'}},\\
Y &= \frac{3Mmy}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)}\left[-\frac{\theta_3''(0)}{\theta_3(0)}v\sqrt{a^2-c^2} + \sqrt{a^2-c^2}\,D\log\theta_3(v)\right]_{v=0}^{\lambda(v)=\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a'}},\\
Z &= \frac{3Mmz}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}\left[-\frac{\theta_2''(0)}{\theta_2(0)}v\sqrt{a^2-c^2} + \sqrt{a^2-c^2}\,D\log\theta_2(v)\right]_{v=0}^{\lambda(v)=\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a'}}.
\end{aligned}\right.$$

II. — Intégration par les signes p et ζ.

Dans le calcul suivant, les fonctions de M. Weierstrass ont été utilisées pour exprimer la valeur des intégrales précédentes.

Partant de

$$X = -\frac{3Mmx}{a^3}\int_0^{\frac{a}{a'}} \frac{u^2\,du}{\left(1-\frac{a^2-b^2}{a^2}u^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{a^2-c^2}{a^2}u^2\right)^{\frac{1}{2}}},$$

je pose

$$\frac{u^2}{a^2} = \frac{1}{pv - e_3},$$

d'où

$$du = -\frac{1}{2} \frac{a p' v \, dv}{(pv - e_3)^{\frac{3}{2}}},$$

ce qui donne

$$X = \frac{3 M m x}{a^3} \int_0^{a'^2} \frac{a^2}{pv - e_3} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{a^2 - b^2}{pv - e_3}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{a^2 - c^2}{pv - e_3}\right)^{\frac{1}{2}}} \times \frac{a p' v \, dv}{2 (pv - e_3)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{3 M m x}{2} \int_0^{a'^2} \frac{1}{(pv - e_3 - a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} (pv - e_3 + c^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{p' v \, dv}{(pv - e_3)^{\frac{3}{2}}}.$$

La théorie de p conduit à poser

$$e_3 + a^2 - c^2 = e_1, \qquad e_3 + a^2 - b^2 = e_2,$$

puisque

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0, \qquad e_3 = \tfrac{1}{3}(b^2 + c^2 - 2a^2).$$

En remarquant que $p' v = -2\sqrt{(pv - e_1)(pv - e_2)(pv - e_3)}$, X deviendra

$$(15) \qquad X = -3 M m x \int_0^{a'^2} \frac{dv}{pv - e_3}.$$

Cette expression s'intègre en appliquant la formule

$$p(v + \omega_3) - e_3 = \frac{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)}{pv - e_3};$$

alors

(16)

$$X = -\frac{3 M m x}{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)} \int_0^{a'^2} [p(v + \omega_3) - e_3] dv,$$

ou

$$X = \frac{3 M m x}{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)} [\zeta(v + \omega_3) - \eta_3 + e_3 v],$$

ou encore

$$X = \frac{3 M m x}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)} [\zeta(v + \omega_3) - \eta_3 + e_3 v]$$

(v est défini par $pv - e_3 = d'^2$).

Y et Z prennent des formes analogues, en posant $\frac{u^2}{b^2} = \frac{1}{pv - e_2}$ pour le calcul de Y, et $\frac{u^2}{c^2} = \frac{1}{pv - e_1}$ pour celui de Z.

L'expression (16) de X ainsi que celles de Y et Z concordent avec celles que je déduis d'une formule donnée par Halphen [1].

P désignant le potentiel d'un ellipsoïde homogène sur un point extérieur; a_1, a_2, a_3 les carrés des demi-axes de l'ellipsoïde; α, β, γ l'un des trois nombres 1, 2, 3, on a

$$(17)\quad P = 2\pi\sqrt{a_1 a_2 a_3}\left\{ u + \sum_\alpha \frac{x_\alpha^2}{(a_\alpha - a_\beta)(a_\alpha - a_\gamma)}[\zeta(u+\omega_\alpha) - \eta_\alpha + e_\alpha u]\right\},$$

la transcendante u est définie par

$$pu = \tfrac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3) - r_1,$$

r_1 étant la racine négative de $\sum_\alpha \frac{x_\alpha^2}{a_\alpha - s} = 1$.

Je dérive (17) par rapport à x_α et j'obtiens

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dP}{dx_\alpha} = 2\pi\sqrt{a_1 a_2 a_3}\left\{ \frac{du}{dx_\alpha} + \frac{2x_\alpha}{(a_\alpha - a_\beta)(a_\beta - a_\gamma)}[\zeta(u+\omega_\alpha) - \eta_\alpha + e_\alpha u]\right. \\ \left. + \frac{du}{dx_\alpha}\sum_\alpha \frac{x_\alpha^2}{(a_\alpha - a_\beta)(a_\alpha - a_\gamma)}[-p(u+\omega_\alpha) + e_\alpha]\right\}. \end{aligned}\right.$$

Cette valeur se simplifie, car, en remplaçant $p(u+\omega_\alpha) - e_\alpha$ par $\frac{(e_\alpha - e_\beta)(e_\alpha - e_\gamma)}{pu - e_\alpha}$ dans la troisième partie de la somme entre accolades, il vient

$$\begin{aligned} &-\frac{du}{dx_\alpha}\sum_\alpha \frac{x_\alpha^2}{(e_\alpha - e_\beta)(e_\alpha - e_\gamma)}[p(u+\omega_\alpha) - e_\alpha] \\ &= -\frac{du}{dx_\alpha}\sum_\alpha \frac{x_\alpha^2}{pu - e_\alpha} = -\frac{du}{dx_\alpha}, \end{aligned}$$

puisque $\sum_\alpha \frac{x_\alpha^2}{pu - e_\alpha} = 1$ et que $(a_\alpha - a_\beta)(a_\alpha - a_\gamma) = (e_\alpha - e_\beta)(e_\alpha - e_\gamma)$.

---

[1] HALPHEN, *Traité des fonctions elliptiques*, 2e Partie, p. 492.

Cette valeur étant reportée dans (18), on conclut

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dP}{dx_\alpha} &= \frac{4\pi\sqrt{a_1a_2a_3}}{(a_\alpha-a_\beta)(a_\alpha-a_\gamma)}[\zeta(u+\omega_\alpha)-\eta_\alpha+e_\alpha u] \\ &= \frac{3Mx_\alpha}{(a_\alpha-a_\beta)(a_\alpha-a_\gamma)}[\zeta(u+\omega_\alpha)-\eta_\alpha+e_\alpha u]. \end{aligned}\right.$$

M est la masse de l'ellipsoïde.

NOTE. — P a été obtenu par la considération de l'équation des potentiels avec les arguments elliptiques ; je vais établir directement cette question.

On sait que, si x_α est une coordonnée rectiligne, $T=f(x_\alpha)$ satisfait à l'équation des potentiels, si $\sum\limits_\alpha \frac{d^2T}{dx_\alpha^2}=0$. Mais, x_α étant fonction des arguments u, v, w, cette égalité se transforme en

$$(1)\quad \sum_\alpha\left[\frac{d^2T}{du^2}\left(\frac{du}{dx_\alpha}\right)^2+2\frac{d^2T}{du\,dv}\frac{du}{dx_\alpha}\frac{dv}{dx_\alpha}+\ldots+\frac{dT}{dx_\alpha}\frac{d^2u}{dx_\alpha^2}+\ldots\right]=0.$$

Il faut calculer séparément $\left(\frac{du}{dx_\alpha}\right)^2$, $\frac{du}{dx_\alpha}\frac{dv}{dx_\alpha}$, $\frac{d^2u}{dx_\alpha^2}$, s'appuyant sur

$$(2)\qquad x_\alpha^2=\frac{(pu-e_\alpha)(pv-e_\alpha)(pw-e_\alpha)}{(e_\alpha-e_\beta)(e_\alpha-e_\gamma)}.$$

Comme la quantité $\sum\limits_\alpha\frac{x_\alpha^2}{(pu-e_\alpha)^2}$ entre dans ces expressions, j'en cherche la valeur. De (2), je tire

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \sum_\alpha\frac{x_\alpha^2}{(pu-e_\alpha)^2} &= \sum_\alpha\frac{(e_\alpha-pv)(e_\alpha-pw)}{(e_\alpha-e_\beta)(e_\alpha-e_\gamma)}\times\frac{1}{pu-e_\alpha} \\ &= \frac{(pu-pv)(pu-pw)}{(pu-e_\alpha)(pu-e_\beta)(pu-e_\gamma)}=\frac{4(pu-pv)(pu-pw)}{p'u^2}. \end{aligned}\right.$$

L'équation $\sum\limits_\alpha\frac{x_\alpha^2}{pu-e_\alpha}=1$, dérivée par rapport à x_α, donne

$$(3')\qquad \frac{2x_\alpha}{pu-e_\alpha}-p'u\frac{du}{dx_\alpha}\sum_\alpha\frac{x_\alpha^2}{(pu-e_\alpha)^2}=0$$

qui s'écrit, en vertu de (3),

$$(4)\qquad \frac{du}{dx_\alpha} = \frac{x\,p'u}{2(pu - e_\alpha)(pu - pv)(pu - pw)}.$$

Donc,

$$\sum_\alpha \left(\frac{du}{dx_\alpha}\right)^2 = \sum_\alpha \frac{x_\alpha^2}{(pu - e_\alpha)^2} \times \frac{p'u^2}{4(pu - pv)(pu - pw)^2}.$$

A cause de (3), il vient

$$(5)\qquad \sum_\alpha \left(\frac{du}{dx_\alpha}\right)^2 = \frac{1}{(pu - pv)(pu - pw)}.$$

Je reprends la formule (4) pour la multiplier par la valeur analogue $\frac{dv}{dx_\alpha}$, et j'étends le produit aux x_α.

$$\sum_\alpha \frac{du}{dx_\alpha}\frac{dv}{dx_\alpha} = \sum_\alpha \frac{x_\alpha^2}{(pu - e_\alpha)(pv - e_\alpha)}\,\frac{p'u\,p'v}{4\overline{(pu - pv)}^2(pu - pw)(pw - pv)}.$$

Mais $\sum_\alpha \frac{x_\alpha^2}{(pu - e_\alpha)(pv - e_\alpha)} = 0$; donc

$$(6)\qquad \sum_\alpha \frac{du}{dx_\alpha}\frac{dv}{dx_\alpha} = 0.$$

Je dérive l'équation (3′) une seconde fois par rapport à x_α, et j'obtiens

$$\frac{2}{pu - e_\alpha} - \frac{4x_\alpha p'u}{(pu - e_\alpha)^2}\frac{du}{dx_\alpha} - p''u\left(\frac{du}{dx_\alpha}\right)^2 \sum_\alpha \frac{x_\alpha^2}{(pu - e_\alpha)^2}$$
$$+ 2\overline{p'u}^2\left(\frac{du}{dx_\alpha}\right)^2 \sum_\alpha \frac{x_\alpha^2}{(pu - e_\alpha)^3}$$
$$- p'u\frac{d^2u}{dx_\alpha^2}\sum \frac{x_\alpha^2}{(pu - e_\alpha)^2} = 0.$$

Dans la somme relative à x_α, le premier et le troisième terme s'annuleront; en effet, le troisième terme, déduit des valeurs précédentes, est égal à $-\frac{4p''u}{\overline{p'u}^2}$; le premier terme vaut $+\frac{4p''u}{\overline{p'u}^2}$, car

$$\overline{p'u}^2 = 4(pu - e_\alpha)(pu - e_\beta)(pu - e_\gamma)$$

et

$$\mathrm{p}''u = 2[(\mathrm{p}u - e_\alpha)(\mathrm{p}u - e_\beta) + \ldots].$$

Le deuxième et le quatrième terme se réduisent à o également; en effet, si je substitue à $\frac{du}{dx_\alpha}$ sa valeur donnée par (4), le deuxième terme devient

$$-\frac{4x_\alpha \mathrm{p}'u}{(\mathrm{p}u - e_\alpha)^2}\frac{du}{dx_\alpha} = -\frac{2x_\alpha^2 \overline{\mathrm{p}'u}^2}{(\mathrm{p}u - e_\alpha)^3(\mathrm{p}u - \mathrm{p}v)(\mathrm{p}u - \mathrm{p}w)},$$

et en sommant, on obtient

$$\frac{-2\mathrm{p}'u^2}{(\mathrm{p}u - \mathrm{p}v)(\mathrm{p}u - \mathrm{p}w)}\sum_\alpha \frac{x_\alpha^2}{(\mathrm{p}u - e_\alpha)^3},$$

et à cause de (5)

$$-2\overline{\mathrm{p}'u}^2 \sum_\alpha \left(\frac{du}{dx_\alpha}\right)^2 \sum_\alpha \frac{x^2{}_\alpha}{(\mathrm{p}u - e_\alpha)^3},$$

qui est bien égal et de signe contraire au quatrième terme qui figurera dans la somme.

Finalement,

$$\sum_\alpha \frac{d^2u}{dx_\alpha^2} = 0,$$

et (1) se transforme en

$$\frac{d^2\mathrm{T}}{du^2}(\mathrm{p}v - \mathrm{p}w) + \frac{d^2\mathrm{T}}{dv^2}(\mathrm{p}w - \mathrm{p}u) + \frac{d^2\mathrm{T}}{dw^2}(\mathrm{p}u - \mathrm{p}v) = 0,$$

qui est l'équation des potentiels.