

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

G. KOENIGS

Sur un théorème de Kronecker

Journal de mathématiques pures et appliquées 5^e série, tome 2 (1896), p. 41-49.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1896_5_2_41_0

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

*Sur un théorème de Kronecker;***PAR M. G. ROENIGS.**

1. Soient F_1, F_2, F_3 trois fonctions de x, y, z finies, continues et uniformes dans une région de l'espace dont nous conviendrons de ne pas sortir.

Posons

$$X = \begin{vmatrix} F_1 & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ F_2 & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ F_3 & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{vmatrix} = \left\| F_i, \frac{\partial F_i}{\partial y}, \frac{\partial F_i}{\partial z} \right\|$$

et pareillement

$$Y = \left\| F_i, \frac{\partial F_i}{\partial z}, \frac{\partial F_i}{\partial x} \right\|, \quad Z = \left\| F_i, \frac{\partial F_i}{\partial x}, \frac{\partial F_i}{\partial y} \right\|.$$

Considérons le système d'équations différentielles

$$(1) \quad \frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}.$$

Les intégrales du système (1) vérifient l'équation

$$(2) \quad \mathfrak{A}(\theta) = X \frac{\partial \theta}{\partial x} + Y \frac{\partial \theta}{\partial y} + Z \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0.$$

Or $\mathfrak{A}(\theta)$ peut s'écrire

$$(3) \quad \mathfrak{A}(\theta) = F_1 \frac{D(\theta, F_2, F_3)}{D(x, y, z)} + F_2 \frac{D(\theta, F_3, F_1)}{D(x, y, z)} + F_3 \frac{D(\theta, F_1, F_2)}{D(x, y, z)},$$

en adoptant la notation connue pour les déterminants fonctionnels.

Si l'on pose, pour abrégé, $\Delta = \frac{D(F_1, F_2, F_3)}{D(x, y, z)}$, on trouve, en faisant $\theta = F_1, F_2$ ou F_3 , dans l'équation (3), la relation

$$(4) \quad \mathfrak{A}(F_i) = \Delta F_i$$

ou encore

$$(5) \quad \mathfrak{A}(\log F_i) - \Delta = 0.$$

Désignons maintenant par M un multiplicateur, au sens de Jacobi, du système d'équations (1). La fonction M vérifie l'équation

$$\frac{\partial(MX)}{\partial x} + \frac{\partial(MY)}{\partial y} + \frac{\partial(MZ)}{\partial z} = 0$$

ou

$$\mathfrak{A}(\log M) + \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0.$$

L'expression de X permet de calculer très facilement $\frac{\partial X}{\partial x}$; on trouve

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \Delta + \left\| F_i, \frac{\partial^2 F_i}{\partial x \partial y}, \frac{\partial F_i}{\partial z} \right\| + \left\| F_i, \frac{\partial F_i}{\partial y}, \frac{\partial^2 F_i}{\partial y \partial x} \right\|,$$

et de même

$$\frac{\partial Y}{\partial y} = \Delta + \left\| F_i, \frac{\partial^2 F_i}{\partial y \partial z}, \frac{\partial F_i}{\partial x} \right\| + \left\| F_i, \frac{\partial F_i}{\partial z}, \frac{\partial^2 F_i}{\partial x \partial y} \right\|,$$

$$\frac{\partial Z}{\partial z} = \Delta + \left\| F_i, \frac{\partial^2 F_i}{\partial z \partial x}, \frac{\partial F_i}{\partial y} \right\| + \left\| F_i, \frac{\partial F_i}{\partial x}, \frac{\partial^2 F_i}{\partial y \partial z} \right\|,$$

d'où résulte par addition

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 3\Delta.$$

L'équation du multiplicateur s'écrit donc

$$(6) \quad \mathfrak{A}(\log M) + 3\Delta = 0.$$

Si l'on rapproche cette équation de l'équation (5) on voit que $\frac{1}{F_1^3}, \frac{1}{F_2^3}, \frac{1}{F_3^3}$ sont trois multiplicateurs.

Mais le quotient de deux multiplicateurs est une intégrale; en conséquence $\frac{F_2}{F_1}, \frac{F_3}{F_1}$ sont deux intégrales, et l'on en conclut que l'intégrale générale a cette expression $\varphi\left(\frac{F_2}{F_1}, \frac{F_3}{F_1}\right)$, car on ne suppose pas qu'il existe une relation entre F_1, F_2 et F_3 .

D'un autre côté, on déduit tout multiplicateur de l'un d'eux en le multipliant par l'intégrale générale. Dès lors

$$\frac{1}{F_1^3} \varphi\left(\frac{F_2}{F_1}, \frac{F_3}{F_1}\right)$$

est l'expression générale du multiplicateur.

On voit donc que tout multiplicateur du système (1) est une fonction homogène de degré -3 de F_1, F_2, F_3 et réciproquement toute fonction de cette nature est un multiplicateur.

Prenons en particulier, pour le multiplicateur M , la forme que voici :

$$M_0 = \frac{1}{(F_1^2 + F_2^2 + F_3^2)^{\frac{3}{2}}};$$

de la relation

$$\frac{\partial(M_0 X)}{\partial x} + \frac{\partial(M_0 Y)}{\partial y} + \frac{\partial(M_0 Z)}{\partial z} = 0,$$

on conclut que l'intégrale de surface

$$I = \int \int M_0 (X dy dz + Y dz dx + Z dx dy)$$

ne dépend que du contour ou qu'elle est nulle suivant toute surface fermée S ne contenant dans son intérieur aucun point de discontinuité.

Les seuls points de discontinuité sont ceux qui annulent $\frac{1}{M_0}$, c'est-à-dire qui rendent F_1, F_2, F_3 nuls. Supposons qu'à l'intérieur de S il y ait p de ces points qui rendent positif le déterminant $\frac{D(F_1, F_2, F_3)}{D(x, y, z)}$ et n qui le rendent négatif; l'intégrale I a alors pour valeur

$$I = 4\pi(p - n);$$

tel est le théorème de Kronecker (¹).

2. Mais la méthode même que nous venons de suivre nous montre la possibilité d'étendre la proposition de Kronecker en prenant au lieu de M_0 d'autres multiplicateurs.

Prenons, par exemple, pour multiplicateur l'expression $\frac{1}{\Omega^2}$, où Ω désigne une forme quadratique de F_1, F_2, F_3 définie et positive, en sorte que Ω ne s'annule qu'avec F_1, F_2, F_3 . Désignons par ω le discriminant de la forme Ω . On obtient une première extension de la proposition de Kronecker sous la forme suivante :

L'intégrale de surface

$$I = \int \int \frac{Xdydz + Ydzdx + Zdx dy}{\Omega^{\frac{3}{2}}},$$

prise suivant une surface fermée S , a pour valeur

$$4\pi \frac{p - n}{\sqrt{\omega}},$$

où ω est le discriminant de Ω , p le nombre des points intérieurs à S qui annulent F_1, F_2, F_3 en rendant $\frac{D(F_1, F_2, F_3)}{D(x, y, z)}$ positif et n le nombre de ceux de ces mêmes points qui rendent $\frac{D(F_1, F_2, F_3)}{D(x, y, z)}$ négatif.

La démonstration est des plus faciles.

(¹). Voir le *Traité* de M. ÉMILE PICARD, t. I, p. 123.

Puisque Ω est une forme définie positive, on ramènera Ω à la forme

$$\Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \Phi_3^2$$

par la substitution linéaire

$$F_1 = a\Phi_1 + b\Phi_2 + c\Phi_3,$$

$$F_2 = a'\Phi_1 + b'\Phi_2 + c'\Phi_3,$$

$$F_3 = a''\Phi_1 + b''\Phi_2 + c''\Phi_3.$$

Désignons par x, y, z les déterminants analogues à X, Y, Z , mais où Φ_1, Φ_2, Φ_3 remplacent F_1, F_2, F_3 ; désignons enfin par ρ le déterminant

$$\rho = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}.$$

On a

$$X = \rho x, \quad Y = \rho y, \quad Z = \rho z,$$

$$\frac{D(F_1, F_2, F_3)}{D(x, y, z)} = \rho \frac{D(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)}{D(x, y, z)}.$$

Enfin, puisque ι est le discriminant de la forme $\Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \Phi_3^2$ et ω celui de la forme Ω , on a

$$\rho^2 \omega = \iota,$$

d'où

$$\rho = \pm \frac{\iota}{\sqrt{\omega}}.$$

Si $\rho = \frac{\iota}{\sqrt{\omega}}$, on a

$$\begin{aligned} I &= \iiint \frac{X dy dz + Y dz dx + Z dx dy}{\Omega^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\iota}{\sqrt{\omega}} \iiint \frac{x dy dz + y dz dx + z dx dy}{(\Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \Phi_3^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

D'après le théorème de Kronecker, on a

$$\iiint \frac{x dy dz + y dz dx + z dx dy}{(\Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \Phi_3^2)^{\frac{3}{2}}} = (p - n)4\pi,$$

où p est le nombre des points qui annulent Φ_1, Φ_2, Φ_3 (ou F_1, F_2, F_3) en rendant $\frac{D(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)}{D(x, y, z)}$ [ou $\frac{D(F_1, F_2, F_3)}{D(x, y, z)}$ qui est de même signe] positif et n le nombre de ceux de ces points qui donnent, au contraire, un résultat négatif.

On a donc bien dans ce cas

$$I = 4\pi \frac{p - n}{\sqrt{\omega}}.$$

Si maintenant $\rho = -\frac{1}{\sqrt{\omega}}, \frac{D(F_1, F_2, F_3)}{D(x, y, z)}$ et $\frac{D(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)}{D(x, y, z)}$ sont de signes contraires. Soient p le nombre des points intérieurs à la surface S d'intégration qui rendent $\frac{D(F_1, F_2, F_3)}{D(x, y, z)}$ positif et n le nombre de ceux qui rendent ce déterminant négatif. On aura, eu égard à l'interversion des signes quand on passe des F_i aux Φ_i ,

$$I_0 = \iint \frac{\mathfrak{X} dy dz + \mathfrak{Y} dz dx + \mathfrak{Z} dx dy}{(\Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \Phi_3^2)^{\frac{3}{2}}} = (n - p) \times 4\pi;$$

et l'on a ici

$$I = \rho I_0 = -\frac{I_0}{\sqrt{\omega}} = 4\pi \frac{p - n}{\sqrt{\omega}},$$

comme dans le premier cas.

3. Nous allons maintenant traiter le cas général et nous serons amené à un résultat tout à fait analogue.

Soit P une fonction de F_1, F_2, F_3 , homogène et du degré 3 d'homogénéité. Nous considérons l'intégrale

$$I = \iint \frac{X dy dz + Y dz dx + Z dx dy}{P},$$

prise suivant une surface fermée S , à l'intérieur de laquelle P ne s'annule qu'avec F_1, F_2, F_3 , sans qu'en aucun de ces points le déterminant fonctionnel $\frac{D(F_1, F_2, F_3)}{D(x, y, z)}$ s'annule.

Pour p de ces points ce déterminant sera positif, pour n autres négatif.

L'intégrale I sera la somme des $p + n$ intégrales prises chacune suivant une très petite surface fermée entourant chacune un des points précédents.

Soit un de ces points que nous pouvons supposer être à l'origine des coordonnées; on aura dans le voisinage de ce point

$$F_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 z + \dots,$$

$$F_2 = a_2 x + b_2 y + c_2 z + \dots,$$

$$F_3 = a_3 x + b_3 y + c_3 z + \dots,$$

les termes non écrits étant d'ordre supérieur au premier. On a de plus

$$a_i = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x} \right)_0, \quad b_i = \left(\frac{\partial F_i}{\partial y} \right)_0, \quad c_i = \left(\frac{\partial F_i}{\partial z} \right)_0,$$

en sorte que le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

n'est autre que le déterminant $\frac{D(F_1, F_2, F_3)}{D(x, y, z)}$ pour les valeurs particulières $x = y = z = 0$.

Le calcul de X, Y, Z donne alors, en s'en tenant aux termes du premier ordre, approximation qui se justifie aisément (*voir* PICARD, *Traité d'Analyse*, p. 125),

$$X = \Delta \cdot x, \quad Y = \Delta \cdot y, \quad Z = \Delta \cdot z,$$

tandis que l'on a

$$P = P(a_1 x + b_1 y + c_1 z, a_2 x + b_2 y + c_2 z, a_3 x + b_3 y + c_3 z),$$

et l'intégrale de surface autour du point considéré s'écrira

$$I_1 = \Delta \iint \frac{x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy}{P(a_1 x + b_1 y + c_1 z, a_2 x + b_2 y + c_2 z, a_3 x + b_3 y + c_3 z)}.$$

Si l'on choisissait, par exemple, une petite sphère de rayon très petit r , l'intégrale s'écrirait, $d\sigma$ étant l'élément superficiel de la sphère

$$I_1 = \Delta \iint \frac{r \, d\sigma}{P}.$$

Comme $\iint \frac{r \, d\sigma}{P}$ a une valeur essentiellement positive, on voit que I_1 aura le signe de Δ .

Pour calculer l'intégrale double nous ferons le changement de variables

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = x',$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = y',$$

$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = z';$$

on trouve aisément que l'intégrale

$$\iint \frac{x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy}{P(a_1 x + \dots, a_2 x + \dots, a_3 x + \dots)},$$

qui est positive comme nous venons de le voir, se change en

$$\iint \frac{x' \, dy' \, dz' + y' \, dx' \, dz' + z' \, dx' \, dy'}{\Delta P(x', y', z')},$$

en sorte que la valeur absolue de I_1 est l'intégrale

$$\iint \frac{x' \, dy' \, dz' + y' \, dx' \, dz' + z' \, dx' \, dy'}{P(x', y', z')},$$

effectuée suivant une surface fermée, par exemple une sphère entourant le point $x' = y' = z' = 0$. Plaçons en ce point le centre de la sphère; posons $x' = \rho \sin \theta \cos \varphi$, $y' = \rho \sin \theta \sin \varphi$, $z' = \rho \cos \theta$, l'inté-

grale devient

$$\iint \frac{\sin \theta d d \varphi}{P(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)} = \alpha;$$

car ρ disparaît parce que P est homogène et du degré 3 d'homogénéité. Donc enfin I , est égal à $\pm \alpha$ selon que Δ est positif ou négatif.

Conséquemment, l'intégrale I , relative à la surface S qui comprend p points à déterminant positif et n à déterminant négatif, aura pour expression

$$\alpha(p - n).$$

Telle est la généralisation du théorème de Kronecker, qu'il serait du reste aisé d'étendre au cas de plus de trois variables.

Quant à α , c'est une intégrale définie qu'il serait peut-être intéressant d'étudier comme fonction des coefficients qui figurent dans P .

La présente Note répond, comme on voit, à certains *desiderata* que laissait subsister le théorème de Kronecker et que M. Émile Picard avait formulés à la fin de sa démonstration (*Traité d'Analyse*, t. I, p. 127). Plus récemment, dans les *Comptes rendus* et dans le Tome III de son *Traité*, M. Picard a introduit une modification importante qui permet d'évaluer le nombre exact des racines comprises dans un contour ou dans une surface. Mais les remarques précédentes s'appliquent aussi bien au théorème dû à M. Picard.

