JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

PAUL APPELL

Sur l'emploi des équations de Lagrange dans la théorie du choc et des percussions

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 2 (1896), p. 5-20.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1896_5_2__5_0>

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Sur l'emploi des équations de Lagrange dans la théorie du choc et des percussions;

PAR M. PAUL APPELL.

---

1. Dans le *Messenger of Mathematics* (t. IV, 1867), M. Niven a montré comment les équations de Lagrange peuvent être employées utilement pour l'étude des percussions : la même question a été traitée par M. Routh (*Rigid Dynamics,* 1[er] Volume). Mais la méthode suivie par ces auteurs peut être perfectionnée, car les équations qu'ils donnent contiennent encore des percussions de liaison provenant des liaisons nouvelles introduites brusquement au moment du choc. Ces équations ne répondent donc pas entièrement au but poursuivi par Lagrange, qui est d'obtenir des équations ne contenant pas les forces de liaison. Nous allons montrer comment on peut atteindre ce but, en suivant une méthode que nous avons indiquée sommairement dans les *Comptes rendus* (t. CXVI, 1893, p. 1483).

2. Imaginons un système en mouvement dans lequel les liaisons ont lieu *sans frottement*. La manière la plus générale de concevoir un choc ou une percussion sur ce système paraît être la suivante : à un instant donné t_0, on introduit brusquement de nouvelles liaisons dans le système et, en même temps, on supprime brusquement certaines liaisons anciennes. Le mouvement du système est alors troublé; il se produit des percussions entre ses différentes parties, et, dans un intervalle de temps très court $t_1 - t_0$, les vitesses des différents points du système subissent des variations finies, sans que le système change sensiblement de position; en outre, l'action des forces ordinaires telles que la pesanteur peut être regardée comme négligeable pendant l'intervalle de temps $t_1 - t_0$, de sorte que les changements brusques de vitesses survenus dans cet intervalle sont dus uniquement aux percussions qui se produisent sur les différentes parties du système, en vertu des liaisons imposées à ces parties.

Nous ne nous occuperons ici que de la première approximation qui consiste à regarder le système comme immobile pendant le temps très court $t_1 - t_0$ et à regarder comme nulles les actions des forces ordinaires, autres que celles qui produisent les percussions.

Tout d'abord nous ferons une classification des liaisons qui existent au moment où le choc se produit, c'est-à-dire à l'instant t_0. Il est entendu que le choc est terminé et a produit tous ses effets à l'instant t_1, extrêmement rapproché de t_0.

3. Les liaisons qui existent au moment du choc peuvent être de deux espèces : les unes sont persistantes, les autres ne le sont pas. Nous appellerons *persistantes* les liaisons qui, existant au moment du choc, existent encore après, de telle sorte que le déplacement réel qui suit immédiatement le choc soit compatible avec ces liaisons. Au contraire, les liaisons *non persistantes* sont celles qui, existant au moment du choc, n'existent pas après; le déplacement réel qui suit immédiatement le choc n'est pas compatible avec ces liaisons.

D'après cela, les liaisons existant au moment du choc peuvent être classées dans les catégories suivantes, qui s'excluent :

1° Liaisons existant avant, pendant et après le choc;

2° Liaisons existant pendant et après, mais non avant;

3° Liaisons existant avant et pendant, mais non après;

4° Liaisons existant seulement pendant le choc, mais n'existant ni avant ni après.

Les deux premières catégories contiennent des liaisons persistantes, les deux autres des liaisons non persistantes.

Par exemple, dans le pendule balistique, le pendule est mobile autour d'un axe fixe; cette liaison existe avant, pendant et après la percussion; le boulet, primitivement indépendant du pendule, vient brusquement faire corps avec lui; on a ainsi une nouvelle liaison dont la brusque réalisation produit le choc et qui existe pendant et après le choc, mais non avant. Quand deux corps élastiques se choquent, une liaison est brusquement introduite dans le système des deux corps, car leurs surfaces sont venues en contact; les deux corps se séparent ensuite; on a ainsi une liaison existant pendant la percussion, mais n'existant ni avant, ni après. Enfin imaginons deux points reliés par un fil inextensible et lancés en l'air. Supposons qu'on saisisse brusquement l'un des deux points et qu'à ce moment le fil se rompe, alors on voit qu'une liaison a été brusquement introduite d'une façon persistante, car un des points devient et reste fixe; en même temps une liaison, existant avant le choc, n'existe plus après, car le fil s'est rompu; cette liaison rentre dans la troisième catégorie.

4. Occupons-nous maintenant des expressions analytiques de ces diverses liaisons.

1° *Liaisons de la première catégorie.* — Envisageons d'abord les liaisons qui existent avant, pendant et après; en vertu de ces liaisons, la configuration du système dépend de k paramètres, géométriquement indépendants, $q_1, q_2, \ldots, q_k$, et la demi-force vive T est une fonction du second degré des dérivées $q'_1, q'_2, \ldots, q'_k$ par rapport au temps. Dans l'intervalle de temps très court $t_1 - t_0$, que dure le choc, les quantités $q'_1, q'_2, \ldots, q'_k$, qui définissent l'état des vitesses, passent brusquement des valeurs connues $(q'_1)_0, (q'_2)_0, \ldots, (q'_k)_0$, qu'elles possèdent au moment où le choc se produit, à d'autres valeurs $(q'_1)_1$, $(q'_2)_1, \ldots, (q'_k)_1$, tandis que les paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_k$, qui définissent la position, ne changent pas sensiblement de valeurs. Comme nous l'avons dit, nous ne cherchons que la première approximation, qui consiste à regarder l'intervalle $t_1 - t_0$ comme négligeable et à supposer que les q'_ν changent subitement de valeurs sans que les q_ν changent.

2° *Liaisons des deuxième, troisième, quatrième catégories.* — Passons maintenant aux liaisons des trois autres catégories qui viennent s'ajouter à celles que nous venons de considérer.

Nous pouvons toujours supposer que les liaisons de la deuxième catégorie (liaisons ayant lieu pendant et après, mais non avant la percussion) sont exprimées par les relations

$$q_1 = 0, \qquad q_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad q_a = 0 \qquad (a < k);$$

celles de la troisième (existant avant et pendant et non après), par les relations

$$q_{a+1} = 0, \qquad q_{a+2} = 0, \qquad \ldots, \qquad q_b = 0 \qquad (b < k);$$

enfin celles de la quatrième (existant pendant, mais n'existant ni avant, ni après) par les relations

$$q_{b+1} = 0, \qquad q_{b+2} = 0, \qquad \ldots, \qquad q_c = 0 \qquad (c < k).$$

En effet, des liaisons quelconques, imposées au système dont la configuration est définie par les k paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_k$, s'expriment toujours par des relations

$$\begin{gathered}\varphi_1(q_1, q_2, \ldots, q_k) = 0,\\ \varphi_2(q_1, q_2, \ldots, q_k) = 0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \varphi_n(q_1, q_2, \ldots, q_k) = 0 \qquad (n < k).\end{gathered}$$

Si l'on fait un changement de variables en prenant pour nouveaux paramètres, à la place de $q_1, q_2, \ldots, q_n$, les quantités

$$\begin{gathered}p_1 = \varphi_1(q_1, q_2, \ldots, q_k),\\ p_2 = \varphi_2(q_1, q_2, \ldots, q_k),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ p_n = \varphi_n(q_1, q_2, \ldots, q_k),\end{gathered}$$

les nouvelles liaisons imposées au système s'exprimeront évidemment par

$$p_1 = 0, \qquad p_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad p_n = 0.$$

C'est ce choix de variables que nous supposons qu'on ait réalisé.

Il va de soi que si les liaisons d'une catégorie, par exemple de la quatrième, n'existent pas, le nombre entier appelé c est égal à b; si celles de la troisième n'existent pas, $b = a$.

D'après la définition même des catégories de liaisons, les variables $q_1, q_2, \ldots, q_a$ sont différentes de zéro avant le choc, ainsi que leurs dérivées $(q'_1)_0, (q'_2)_0, \ldots, (q'_a)_0$, mais ces variables étant assujetties ensuite à rester nulles pendant et *après* le choc, les valeurs finales $(q'_1)_1, (q'_2)_1, \ldots, (q'_a)_1$ sont *nulles*.

De même les variables $q_{a+1}, \ldots, q_b$ sont nulles avant et pendant, non après : les valeurs initiales de leurs dérivées $(q'_{a+1})_0, \ldots, (q'_b)_0$ sont donc nulles, tandis que les valeurs finales $(q'_{a+1})_1, \ldots, (q'_b)_1$ ne le sont pas.

Enfin, comme $q_{b+1}, \ldots, q_c$ ne sont assujetties à être nulles ni avant ni après, leurs dérivées $q'_{b+1}, q'_{b+2}, \ldots, q'_c$ ne sont nulles ni avant, ni après le choc.

Voici comment on peut former des équations entre ces différentes grandeurs, par la méthode de Lagrange.

5. Pendant l'espace de temps $t_1 - t_0$, nous pouvons regarder les liaisons des trois dernières catégories comme n'existant pas, à condition d'appliquer au système les forces provenant de ces liaisons. Les équations du mouvement sont alors, d'après le principe de d'Alembert et la transformation de Lagrange, résumées par la formule

$$(1) \qquad \sum_{\nu=1}^{\nu=k} \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_\nu}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\nu}\right] \delta q_\nu = \sum_{\nu=1}^{\nu=k} Q_\nu \, \delta q_\nu.$$

Si les δq_ν sont arbitraires, le second membre contient les travaux virtuels des forces provenant des liaisons des trois dernières catégories qui toutes existent pendant le temps $t_1 - t_0$. Mais *nous éliminerons ces dernières forces de liaison en supposant que le déplacement* *virtuel* $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_k$ est compatible avec toutes les liaisons ayant lieu au moment du choc, c'est-à-dire en supposant $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_a, \ldots, \delta q_b, \ldots, \delta q_c$ nuls, les variations $\delta q_{c+1}, \delta q_{c+2}, \ldots, \delta q_k$ étant seules différentes de zéro et arbitraires. L'équation (1) se décompose alors en les $k-c$ suivantes :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha, \qquad (\alpha = c+1, c+2, \ldots, k) \tag{2}$$

où ne figure plus aucune force de liaison.

Comme les variations brusques de vitesses sont produites par les seules forces de liaison, qui sont devenues très grandes pendant le temps très court $t_1 - t_0$, les quantités $Q_{c+1}, Q_{c+2}, \ldots, Q_k$, qui proviennent uniquement des forces ordinaires directement appliquées telles que la pesanteur, restent finies pendant la durée $t_1 - t_0$ du choc; les quantités $\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}$ restent également finies, car les variables q conservent des valeurs déterminées et les q' des valeurs finies. Si donc on multiplie les deux membres de chaque relation (2) par dt, et si l'on intègre dans l'intervalle très petit $t_1 - t_0$, les intégrales provenant de $\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}$ et Q_α sont négligeables, et l'on obtient les équations

$$\left(\frac{\partial T}{\partial q'_\alpha}\right)_1 - \left(\frac{\partial T}{\partial q'_\alpha}\right)_0 = 0 \qquad (\alpha = c+1, c+2, \ldots, k). \tag{3}$$

La notation $\left(\frac{\partial T}{\partial q'_\alpha}\right)_1$ désigne la valeur que prend $\frac{\partial T}{\partial q'_\alpha}$ après le choc, et $\left(\frac{\partial T}{\partial q'_\alpha}\right)_0$ la valeur que possède cette dérivée avant. Dans ces deux valeurs, $q_1, q_2, \ldots, q_k$ sont les mêmes, car le système est regardé comme immobile pendant la durée $t_1 - t_0$ du choc; de sorte que $\left(\frac{\partial T}{\partial q'_\alpha}\right)_1$ et $\left(\frac{\partial T}{\partial q'_\alpha}\right)_0$ ne diffèrent que par les valeurs de $q'_1, q'_2, \ldots, q'_k$ qui passent des déterminations $(q'_1)_0, (q'_2)_0, \ldots, (q'_k)_0$ aux déterminations $(q'_1)_1, (q'_2)_1, \ldots, (q'_k)_1$.

Comme T est du second degré par rapport aux q', les équations (3) sont linéaires et homogènes par rapport aux k différences

$$(q'_\nu)_1 - (q'_\nu)_0.$$

Dans ces équations, $q_1, q_2, \ldots, q_k$ ont les valeurs qui correspondent à la position du système au moment du choc, de sorte que $q_1, q_2, \ldots, q_a, q_{a+1}, \ldots, q_b, q_{b+1}, \ldots, q_c$ sont nuls, $q_{c+1}, \ldots, q_k$ ayant des valeurs connues. Les quantités $(q'_1)_0, (q'_2)_0, \ldots, (q'_k)_0$ sont connues; parmi elles, $(q'_{a+1})_0, (q'_{a+2})_0, \ldots, (q'_b)_0$ sont nulles. Les quantités $(q'_1)_1, (q'_2)_1, \ldots, (q'_k)_1$ sont les inconnues; parmi elles, $(q'_1)_1, (q'_2)_1, \ldots, (q'_a)_1$ sont *nulles*, car les liaisons $q_1 = 0, q_2 = 0, \ldots, q_a = 0$ sont persistantes.

Il reste donc, en définitive, $(k - a)$ inconnues $(q'_{a+1})_1, (q'_{a+2})_1, \ldots, (q'_k)_1$, et l'on a, entre ces inconnues, les $(k - c)$ équations linéaires (3) $(c \geqq a)$.

Le nombre des inconnues est donc en général supérieur à celui des équations. Pour achever de déterminer le problème, il faut faire des hypothèses particulières, tirées de considérations d'élasticité par exemple, sur ce qui se passe après le choc. On a de ce fait un exemple élémentaire en prenant le choc direct de deux corps sphériques et en écartant le cas où les corps sont parfaitement mous; alors la liaison brusquement introduite ne persiste pas après le choc, car les deux sphères se séparent. La Mécanique rationnelle fournit, entre les vitesses des deux sphères après le choc, *une seule équation* exprimant que la vitesse du centre de gravité commun n'a pas changé. On obtient la seconde équation par des considérations d'élasticité : ainsi, en supposant les sphères parfaitement élastiques, on écrit que la force vive totale est la même après et avant le choc. Nous allons traiter quelques exemples par notre méthode, en remarquant que le problème est complètement résolu par les équations (3) toutes les fois que $c = a$, c'est-à-dire que les liaisons des troisième et quatrième catégories n'existent pas, ou, ce qui revient au même, toutes les fois que les liaisons existant au moment du choc sont toutes *persistantes*.

6. *Règle.* — On peut résumer les équations (3) en disant qu'elles expriment la propriété suivante :

Les dérivées partielles de T, *par rapport aux dérivées de ceux des paramètres qui ne sont pas assujettis à s'annuler au moment du choc, ont les mêmes valeurs avant et après le choc.*

7. *Exemple I. — Choc direct de deux sphères.* — Soient deux sphères de rayons R_1 et R_2 et de masses m_1 et m_2 dont les centres se meuvent sur une droite fixe Ox. Les deux sphères sont supposées animées de mouvements de translation. Appelons x_1 et x_2 les abscisses des centres des deux sphères; la position du système dépend des deux paramètres x_1 et x_2; au moment du choc, une nouvelle liaison est brusquement introduite : cette liaison s'exprime par l'équation

$$x_2 - x_1 - R_1 - R_2 = 0,$$

qui signifie que la distance des centres égale la somme des rayons. Pour définir la position du système, nous prendrons les deux paramètres

$$q_1 = x_1, \qquad q_2 = x_2 - x_1 - R_1 - R_2,$$

de manière que la liaison brusquement introduite s'exprime par $q_2 = 0$. On a alors

$$T = \tfrac{1}{2}(m_1 x_1'^2 + m_2 x_2'^2) = \tfrac{1}{2}[m_1 q_1'^2 + m_2(q_1' + q_2')^2].$$

La théorie précédente fournit alors l'équation unique

$$\left(\frac{\partial T}{\partial q_1'}\right)_1 - \left(\frac{\partial T}{\partial q_1'}\right)_0 = 0,$$

car q_1 ne s'annule pas au moment du choc, tandis que la variable q_2 est assujettie à s'annuler. On a, en faisant le calcul,

$$m_1[(q_1')_1 - (q_1')_0] + m_2[(q_1')_1 + (q_2')_1 - (q_1')_0 - (q_2')_0] = 0.$$

C'est là l'équation unique fournie par la théorie. Elle exprime que la somme des projections des quantités de mouvement sur Ox n'a pas varié. Pour achever de déterminer $(q_1')_1$ et $(q_2')_1$, il faut faire des hypothèses.

Si les corps sont parfaitement mous, ils restent au contact. La liaison brusquement introduite est permanente. La variable q_2 reste nulle après le choc; donc, sa dérivée $(q_2')_1$ après le choc est nulle.

Alors

$$(m_1 + m_2)(q'_1)_1 = m_1 (q'_1)_0 + m_2 [(q'_1)_0 + (q'_2)_0],$$

c'est-à-dire, en revenant aux x_1 et x_2,

$$(x'_1)_1 = \frac{m_1(x'_1)_0 + m_2(x'_2)_0}{m_1 + m_2}.$$

8. *Exemple II.* — *Pendule balistique.* — Considérons le plan vertical dans lequel se meut le boulet d'un mouvement de translation, et prenons pour origine la trace de l'axe de suspension sur ce plan. Soient r et α les coordonnées polaires du boulet, θ l'angle d'écart du pendule avec la verticale. La position du système dépend des trois paramètres r, α et θ. Au moment du choc, le boulet fait corps avec le pendule et ne peut plus que tourner avec lui. Donc r devient une constante a et α devient égal à θ.

Nous prendrons comme nouveaux paramètres

$$q_1 = \theta, \qquad q_2 = r - a, \qquad q_3 = \theta - \alpha,$$

de façon que les liaisons brusquement introduites s'expriment par les équations

$$q_2 = 0, \qquad q_3 = 0.$$

On a actuellement, pour la demi-force vive totale du système,

$$\begin{aligned} T &= \tfrac{1}{2}[I\theta'^2 + m(r'^2 + r^2\alpha'^2)] \\ &= \tfrac{1}{2}[I q_1'^2 + m q_2'^2 + m(q_2 + a)^2 (q'_1 - q'_3)^2], \end{aligned}$$

où I est le moment d'inertie du pendule par rapport à l'axe de suspension et par suite $I\theta'^2$ la force vive du pendule.

Les liaisons introduites s'exprimant par $q_2 = 0$, $q_3 = 0$, il y a une seule équation à écrire, celle qui se rapporte à la variable q_1, qui n'est pas assujettie à s'annuler au moment du choc,

$$\left(\frac{\partial T}{\partial q'_1}\right)_1 - \left(\frac{\partial T}{\partial q'_1}\right)_0 = 0.$$

Cette équation est

$$I[(q'_1)_1 - (q'_1)_0] + m(q_2 + a)^2[(q'_1)_1 - (q'_3)_1 - (q'_1)_0 + (q'_3)_0] = 0.$$

Mais comme les liaisons introduites sont persistantes, q_2 et q_3 sont et restent nuls, et l'on a $(q'_2)_1 = 0$, $(q'_3)_1 = 0$; le pendule partant du repos, θ'_0, c'est-à-dire $(q'_1)_0$, est nul aussi. On a donc

$$(I + ma^2)(q'_1)_1 + ma^2(q'_3)_0 = 0.$$

Revenant aux variables θ et α, on a

$$(I + ma^2)(\theta')_1 - ma^2(\alpha')_0 = 0,$$

équation qui donne la vitesse angulaire finale $(\theta')_1$ du pendule, la quantité $a(\alpha')_0$ étant connue : c'est la composante de la vitesse du boulet m perpendiculaire au rayon Om au moment du choc.

Exemple III. — Un disque circulaire homogène de masse M et de rayon R se meut dans un plan vertical xOy; à un instant t_0, il heurte l'axe fixe Ox et ne peut plus que rouler sur cet axe. Déterminer sa vitesse après le choc.

La position du système avant le choc dépend de trois paramètres, les coordonnées x et y du centre du disque et l'angle θ dont il a tourné dans le sens négatif de Oy vers Ox. Au moment du choc, deux liaisons nouvelles sont introduites :

1° Le disque reste en contact avec Ox, donc on a

$$y = R.$$

2° Il roule sur Ox, donc on a $x = R\theta$, en choisissant convenablement la position de l'origine. Nous prendrons comme paramètres

$$q_1 = x, \qquad q_2 = y - R, \qquad q_3 = x - R\theta,$$

de sorte que les liaisons introduites s'expriment par $q_2 = 0$, $q_3 = 0$. On a

$$T = \frac{M}{2}(k^2\theta'^2 + x'^2 + y'^2),$$

Mk^2 désignant le moment d'inertie du disque par rapport au centre. Avec les nouveaux paramètres

$$T = \frac{M}{2}\left[k^2\frac{(q'_1 - q'_3)^2}{R^2} + q'^2_1 + q'^2_2\right].$$

Le seul paramètre que les liaisons nouvelles n'assujettissent pas à être nul est q_1 ; on a donc l'équation unique

$$\left(\frac{\partial T}{\partial q'_1}\right)_1 - \left(\frac{\partial T}{\partial q'_1}\right)_0 = 0$$

ou

$$\frac{k^2}{R^2}[(q'_1)_1 - (q'_3)_1 - (q'_1)_0 + (q'_3)_0] + (q'_1)_1 - (q'_1)_0 = 0.$$

Mais q_3 reste nul, $(q'_3)_1$ est donc nul et l'on a, en revenant aux anciennes variables x, y, θ et distinguant par les indices 0 et 1 les valeurs initiales et finales de x', y', θ',

$$\frac{k^2}{R^2}(x'_1 - R\theta'_0) + x'_1 - x'_0 = 0,$$
$$x'_1 = \frac{R^2 x'_0 + k^2 R\theta'_0}{k^2 + R^2}.$$

Cette formule donne la vitesse finale du centre dans le mouvement de roulement.

Par exemple si le mouvement au moment du choc est tel que

$$Rx'_0 + k^2\theta'_0 = 0,$$

le disque s'arrête.

9. *Théorème de Carnot.* — Depuis plusieurs années j'ai adopté, dans mon enseignement à la Faculté des Sciences, l'énoncé suivant du théorème de Carnot envisagé dans sa plus grande généralité [1].

Si dans un système dont les liaisons sont réalisées sans frotte-

---

[1] *Voir* les feuilles de mon *Cours de Mécanique rationnelle*, rédigé par MM. Abraham et Delassus, 1888 (Hermann), p. 423 et suiv., ou mon *Traité de Mécanique*.

ment, on introduit brusquement de nouvelles liaisons PERSISTANTES, *la force vive perdue est égale à la force vive qui serait due aux vitesses perdues.*

Je me propose de tirer ce théorème des équations générales établies plus haut.

Supposons, comme plus haut, que la configuration du système dépend des k paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_k$. A l'instant t_0 on introduit des liaisons nouvelles

$$q_1 = 0, \qquad q_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad q_a = 0 \qquad (a < k),$$

toutes persistantes. Alors les deux dernières catégories de liaisons n'existent pas; les nombres appelés b et c sont égaux à a.

Les équations (3) deviennent

$$(4) \qquad \left(\frac{\partial T}{\partial q'_\alpha}\right)_1 - \left(\frac{\partial T}{\partial q'_\alpha}\right)_0 = 0$$
$$(\alpha = a+1, a+2, \ldots, k).$$

La force vive $2T$ est une forme quadratique de $q'_1, q'_2, \ldots, q'_k$,

$$2T = \varphi(q'_1, q'_2, \ldots, q'_k) = \Sigma a_{ij} q'_i q'_j.$$

La force vive perdue est

$$\begin{aligned} 2(T_0 - T_1) = \; & \varphi[(q'_1)_0, (q'_2)_0, \ldots, (q'_k)_0] \\ & - \varphi[(q'_1)_1, (q'_2)_1, \ldots, (q'_k)_1]. \end{aligned}$$

D'autre part, la force vive qui serait due aux vitesses perdues est

$$2T' = \varphi(p_1, p_2, \ldots, p_k) = \Sigma a_{ij} p_i p_j,$$

en faisant pour abréger

$$p_\nu = (q'_\nu)_0 - (q'_\nu)_1 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, k).$$

C'est ce qu'on voit en partant des expressions des coordonnées d'un point du système en fonction de $q_1, q_2, \ldots, q_k$,

$$x = f(q_1, q_2, \ldots, q_k),$$
$$y = \psi(q_1, q_2, \ldots, q_k),$$
$$z = \chi(q_1, q_2, \ldots, q_k).$$

Les projections x', y', z' de la vitesse du point étant

$$x' = \frac{\partial f}{\partial q_1} q'_1 + \frac{\partial f}{\partial q_2} q'_2 + \ldots, \qquad y' = \frac{\partial \psi}{\partial q_1} q'_1 + \ldots, \qquad z' = \frac{\partial \chi}{\partial q_1} q'_1 + \ldots,$$

on a

$$2\mathrm{T} = \Sigma m (x'^2 + y'^2 + z'^2).$$

Les projections x'_0, y'_0, z'_0 de la vitesse v_0 avant le choc s'obtiennent en donnant aux q'_ν les valeurs $(q'_\nu)_0$; les projections x'_1, y'_1, z'_1 de la vitesse v_1 après le choc, s'obtiennent en donnant aux q'_ν les valeurs $(q'_\nu)_1$: les projections de la vitesse perdue w sont donc

$$x'_0 - x'_1 = \frac{\partial f}{\partial q_1} p_1 + \frac{\partial f}{\partial q_2} p_2 + \ldots,$$
$$y'_0 - y'_1 = \frac{\partial \psi}{\partial q_1} p_1 + \ldots,$$
$$z'_0 - z'_1 = \frac{\partial \chi}{\partial q_1} p_1 + \ldots.$$

La force vive qui serait due aux vitesses perdues

$$2\mathrm{T}' = \Sigma m [(x'_0 - x'_1)^2 + (y'_0 - y'_1)^2 + (z'_0 - z'_1)^2]$$

se déduit donc de l'expression générale $2\mathrm{T}$ de la force vive en y remplaçant $q'_1, q'_2, \ldots, q'_k$ par $p_1, p_2, \ldots, p_k$.

L'expression de $2\mathrm{T}'$ étant ainsi trouvée, remarquons, en vue de la suite, que l'on a identiquement

$$\frac{\partial \mathrm{T}'}{\partial p_\nu} = \left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_\nu}\right)_0 - \left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_\nu}\right)_1; \tag{5}$$

cela résulte immédiatement de ce que les dérivées figurant dans cette relation sont linéaires; en effet,

$$\begin{aligned}\frac{\partial T'}{\partial p_\nu} &= a_{\nu 1} p_1 + a_{\nu 2} p_2 + \ldots \\ &= a_{\nu 1}(q'_1)_0 + a_{\nu 2}(q'_2)_0 + \ldots - a_{\nu 1}(q'_1)_1 - a_{\nu 2}(q'_2)_1 - \ldots,\end{aligned}$$

ce qui est précisément l'identité (5).

Ceci posé, et en vertu du théorème des fonctions homogènes, on a

$$2(T_0 - T_1) = \sum_{\nu=1}^{\nu=k} (q'_\nu)_0 \left(\frac{\partial T}{\partial q'_\nu}\right)_0 - \sum_{\nu=1}^{\nu=k} (q'_\nu)_1 \left(\frac{\partial T}{\partial q'_\nu}\right)_1,$$

ou encore, en ajoutant et retranchant la somme,

$$\Sigma (q'_\nu)_1 \left(\frac{\partial T}{\partial q'_\nu}\right)_0,$$

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} 2(T_0 - T_1) = &\sum_{\nu=1}^{\nu=k} [(q'_\nu)_0 - (q'_\nu)_1] \left(\frac{\partial T}{\partial q'_\nu}\right)_0 \\ &- \sum_{\nu=1}^{\nu=k} (q'_\nu)_1 \left[\left(\frac{\partial T}{\partial q'_\nu}\right)_1 - \left(\frac{\partial T}{\partial q'_\nu}\right)_0\right].\end{aligned}\right.$$

Pour simplifier cette expression remarquons que la première somme, qui peut s'écrire

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=k} p_\nu \left(\frac{\partial T}{\partial q'_\nu}\right)_0,$$

est, d'après une propriété bien connue des formes quadratiques, symétrique par rapport aux variables $p_1, p_2, \ldots, p_k$ et $(q'_1)_0, (q'_2)_0, \ldots, (q'_k)_0$. On peut donc l'écrire

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=k} (q'_\nu)_0 \frac{\partial T'}{\partial p_\nu}.$$

La deuxième somme figurant dans (6) est évidemment, d'après l'identité (5),

$$-\sum_{\nu=1}^{\nu=k} (q'_\nu)_1 \frac{\partial T'}{\partial p_\nu}.$$

Mais dans ces sommes tous les termes $\frac{\partial T'}{\partial p_\nu}$ dont l'indice ν surpasse a sont nuls d'après les équations du problème (4). On a donc enfin, pour la force vive perdue, l'expression

$$(7) \qquad 2(T_0 - T_1) = \sum_{\nu=1}^{\nu=a} (q'_\nu)_0 \frac{\partial T'}{\partial p_\nu} + \sum_{\nu=1}^{\nu=a} (q'_\nu)_1 \frac{\partial T'}{\partial p_\nu}.$$

Quant à la force vive $2T'$ due aux vitesses perdues, elle peut s'écrire, en vertu du théorème des fonctions homogènes,

$$2T' = \sum_{\nu=1}^{\nu=k} p_\nu \frac{\partial T'}{\partial p_\nu}.$$

Dans cette somme les termes $\frac{\partial T'}{\partial p_\nu}$ où ν est supérieur à a sont nuls; on a donc, en remplaçant p_ν par sa valeur $(q'_\nu)_0 - (q'_\nu)_1$,

$$(8) \qquad 2T' = \sum_{\nu=1}^{\nu=a} (q'_\nu)_0 \frac{\partial T'}{\partial p_\nu} - \sum_{\nu=1}^{\nu=a} (q'_\nu)_1 \frac{\partial T'}{\partial p_\nu}.$$

On voit que la quantité $2(T_0 - T_1)$ est en général différente de $2T'$; mais si, comme nous le supposons, les liaisons introduites brusquement au moment du choc sont toutes *persistantes*, les paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_a$ restent nuls après le choc, leurs dérivées

$$(q'_1)_1, \quad (q'_2)_1, \quad \ldots, \quad (q'_a)_1$$

sont *nulles* et dans chacune des expressions (7) et (8) la dernière somme est nulle.

On a donc alors

$$2(T_0 - T_1) = 2T',$$

ce qui démontre le théorème de Carnot sous sa forme générale.