JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

GEORGES HUMBERT

Quelques propriétés des arcs des courbes algébriques, planes ou gauches

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 1 (1895), p. 181-218.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1895_5_1__181_0>

Quelques propriétés des arcs des courbes algébriques, planes ou gauches;

PAR M. GEORGES HUMBERT.

1. Le but du présent Mémoire est de montrer que, sur une courbe algébrique quelconque, on peut toujours, d'une infinité de manières, déterminer un certain nombre d'arcs dont la somme algébrique s'exprime par des fonctions rationnelles : dans un travail publié au LVII^e Cahier du *Journal de l'École Polytechnique* j'avais esquissé l'étude de la même question, mais les résultats que j'obtenais étaient très incomplets et, sur certains points de détail, peu précis; ils étaient d'ailleurs limités aux courbes planes.

Le Mémoire actuel comprend trois Parties. Dans la première, on établit une formule qui donne la somme des arcs interceptés sur une courbe, gauche ou plane, par des surfaces convenablement choisies et l'on montre, par la discussion de la formule, que cette somme est, en général, rationnelle et ne peut devenir logarithmique que pour certaines courbes particulières.

La seconde Partie est consacrée à des applications générales de la formule fondamentale; on y étudie spécialement les cas où les arcs introduits sont susceptibles d'une définition géométrique simple et l'on examine, avec quelque détail dans cet ordre d'idées, les propriétés des courbes planes.

Le travail se termine, dans la troisième Partie, par des applications aux coniques et à des courbes particulières des troisième et quatrième ordres.

2. Soit $\mathcal{C}$ une courbe, intersection totale ou partielle de deux surfaces algébriques

$$f(X, Y, Z) = 0, \qquad \varphi(X, Y, Z) = 0,$$

d'ordres m et p. On suppose que $\mathcal{C}$ n'est multiple sur aucune des deux surfaces et que celles-ci ne se touchent pas tout le long de $\mathcal{C}$. L'arc de la courbe, dans un système d'axes rectangulaires, est représenté par l'intégrale

$$\int \frac{dX}{A} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

en posant, pour abréger,

$$A = f'_Y \varphi'_Z - f'_Z \varphi'_Y, \qquad B = f'_Z \varphi'_X - f'_X \varphi'_Z, \qquad C = f'_X \varphi'_Y - f'_Y \varphi'_X.$$

A cause du radical qui figure sous le signe $\int$, l'intégrale n'est pas (sauf pour certaines courbes particulières, dites *de direction*) une intégrale abélienne appartenant à la courbe $\mathcal{C}$; il en résulte que la somme des arcs interceptés sur $\mathcal{C}$ par deux surfaces quelconques, de même degré, n'est pas une fonction rationnelle et logarithmique des paramètres de ces deux surfaces.

On peut toutefois choisir les surfaces sécantes de manière que cette condition soit réalisée.

Soient, en effet, F et Φ deux polynomes quelconques en X, Y, Z, dont les coefficients dépendent rationnellement de paramètres $u, v, \ldots$, que nous supposerons en nombre égal à deux pour abréger l'écriture; considérons les surfaces $\mathcal{S}$, représentées par l'équation

$$(1) \quad \mathcal{S} = F^2(X, Y, Z, u, v) - \Phi^2(X, Y, Z, u, v)(A^2 + B^2 + C^2) = 0,$$

et cherchons à évaluer la somme algébrique des arcs compris sur $\mathcal{C}$ entre deux surfaces $\mathcal{S}$, correspondant aux valeurs u, v et $u + du$, $v + dv$ des paramètres.

En vertu de la relation (1), cette somme sera

$$\sum \frac{dX}{A} \frac{F}{\Phi} \quad \text{ou} \quad du \sum \left(\frac{\partial X}{\partial u}\right) \frac{F}{A\Phi} + dv \sum \left(\frac{\partial X}{\partial v}\right) \frac{F}{A\Phi},$$

les sommes étant étendues aux points communs à la courbe $\mathfrak{C}$ et à la surface (1). Il est clair, d'ailleurs, puisque le radical a disparu, que les deux dernières sommes, qui sont des fonctions symétriques de ces points, sont des fonctions rationnelles de u et de v [ainsi que des coefficients des surfaces $f = 0$, $\varphi = 0$, en général ([1])]; soient $\psi(u, v)$ et $\chi(u, v)$ ces deux fonctions : la somme des arcs compris sur $\mathfrak{C}$ entre les surfaces $\mathfrak{F}$ qui correspondent aux valeurs u_0, v_0 et u, v des paramètres a pour valeur

$$(2) \qquad \int_{u_0}^{u} \psi(u, v)\, du + \int_{v_0}^{v} \chi(u_0, v)\, dv,$$

et s'exprime dès lors (théorème d'Abel) en fonction rationnelle et logarithmique de u, v.

3. Nous allons maintenant indiquer une formule simple pour calculer l'intégrale (2), et nous arriverons ainsi à ce résultat remarquable que, en général, *les logarithmes disparaissent* dans cette intégrale, de sorte que la somme des arcs considérés est une fonction rationnelle des paramètres u, v, c'est-à-dire des coefficients des polynomes F et Φ.

Nous nous appuierons à cet effet sur une formule établie par nous au Tome V (4[e] série) de ce Journal (p. 86), et que nous allons rappeler.

Soit $\mathfrak{C}$ une courbe gauche; X, Y, Z étant les coordonnées d'un de ses points, nous passerons aux coordonnées homogènes en posant

$$X = \frac{x}{t}, \qquad Y = \frac{y}{t}, \qquad Z = \frac{z}{t}.$$

([1]) La somme des valeurs que prend une fonction rationnelle aux points communs à une surface quelconque et à une courbe $\mathfrak{C}$, intersection partielle de deux surfaces $f = 0$, $\varphi = 0$, est rationnelle en fonction des coefficients de ces dernières, lorsque la projection de $\mathfrak{C}$ sur un plan quelconque a ses coefficients rationnels en fonction de ceux de f et de φ.

On supposera que x, y, z, t sont exprimés en fonction holomorphe d'une variable, λ, et l'on désignera par x', x'', ..., t', t'', ... les dérivées successives de ces fonctions par rapport à λ.

Considérons maintenant une différentielle abélienne appartenant à $\mathfrak{C}$,

$$\frac{Q}{R}d\left(\frac{x}{t}\right),$$

Q et R étant deux polynomes homogènes et de même ordre, en x, y, z, t. Si l'on désigne par $\mathfrak{F}(x, y, z, t, U) = 0$ l'équation d'une famille de surfaces dont l'équation dépend rationnellement d'un paramètre, U, on a la formule

$$\sum \frac{Q}{R}\frac{d}{dU}\left(\frac{x}{t}\right) = \sum r. \tag{3}$$

Dans le premier membre, la somme s'étend aux points communs à la courbe $\mathfrak{C}$ et à la surface $\mathfrak{F} = 0$; $d\left(\frac{x}{t}\right)$ désigne l'accroissement de la coordonnée $\left(\frac{x}{t}\right)$ d'un de ces points, quand on passe de la surface $\mathfrak{F}(x, y, z, t, U) = 0$ à la surface $\mathfrak{F}(x, y, z, t, U + dU) = 0$; dans le second membre Σr désigne la somme des résidus, *par rapport aux zéros de* R *et de* t, de la fonction de la variable λ,

$$\Theta(\lambda) = \frac{Q}{R}\frac{\mathfrak{F}'_U}{\mathfrak{F}}\frac{x't - xt'}{t^2} \quad (^1).$$

Ces résidus se calculent d'ailleurs sans qu'il soit nécessaire de connaître l'expression de x, y, z, t en fonction de λ; ils dépendent des éléments géométriques de la courbe $\mathfrak{C}$ aux points où elle est coupée par les surfaces $R = 0$, $t = 0$.

4. Pour appliquer la formule (3) au cas qui nous occupe, supposons d'abord que, dans l'équation des surfaces sécantes,

$$F^2 - \Phi^2(A^2 + B^2 + C^2) = 0,$$

(1) Cette formule s'applique même si Q et R contiennent le paramètre U.

Φ dépende seul d'un paramètre, u; les coefficients de F sont alors supposés constants. Considérons, le long de $\mathfrak{C}$, la différentielle abélienne

$$\frac{dX}{A}\frac{F}{\Phi} \quad \text{ou} \quad \frac{F}{A\Phi}d\left(\frac{x}{t}\right);$$

on a, d'après la formule (3),

$$\sum \frac{F}{A\Phi}\frac{d}{du}\left(\frac{x}{t}\right)=\sum r,$$

la somme du premier membre s'étendant aux points communs à la courbe $\mathfrak{C}$ et à la surface $\mathfrak{F}$:

$$(4) \quad \mathfrak{F}(x,y,z,t,u)=F^2(x,y,z,t)-\Phi^2(x,y,z,t,u)[A^2+B^2+C^2]$$

et Σr désignant la somme des résidus, par rapport aux zéros de $\Phi A t^2$, de la fonction

$$\Theta(\lambda)=-\frac{F}{A\Phi}\frac{x't-xt'}{t^2}\cdot\frac{2\Phi\Phi'_u}{\mathfrak{F}}(A^2+B^2+C^2),$$

où x, y, z, t sont remplacés par leurs valeurs en fonction du paramètre λ, le long de la courbe $\mathfrak{C}$.

D'après tout ce qui précède, la somme algébrique des arcs compris sur $\mathfrak{C}$ entre les surfaces (4), qui correspondent aux valeurs u_0 et u du paramètre, a pour valeur

$$\int_{u_0}^{u} du(\Sigma r),$$

et tout revient ainsi à calculer les résidus r.

5. Observons d'abord que les zéros de Φ ne rendent pas $\Theta(\lambda)$ infini, puisque le facteur Φ peut être supprimé aux deux membres de la fonction $\Theta(\lambda)$, qui s'écrit

$$(5) \quad \Theta(\lambda)=-2\frac{F}{A}\frac{x't-xt'}{t^2}\frac{\Phi'_u}{F^2-\Phi^2(A^2+B^2+C^2)}(A^2+B^2+C^2).$$

On n'a donc à calculer que les résidus de cette fonction qui correspondent à des zéros de A ou de t. Soient λ_0 un de ces zéros, r_0 le résidu correspondant.

La quantité λ_0 étant indépendante de u, l'expression

$$\int_{u_0}^{u} r_0\, du$$

est évidemment le résidu, pour $\lambda = \lambda_0$, de la fonction de λ

$$\int_{u_0}^{u} \Theta(\lambda, u)\, du,$$

intégrale dans le calcul de laquelle λ est regardé comme une quantité indépendante de u. Or on a, d'après la forme (5),

$$\int \Theta(\lambda, u)\, du = \frac{x't - xt'}{t^2}\,\frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{A}\log\left(\frac{F - \Phi\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{F + \Phi\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right).$$

D'ailleurs A, B, C sont proportionnels aux cosinus directeurs de la tangente en un point de $\mathfrak{C}$; donc

$$(5\ bis)\qquad \frac{A}{x't - xt'} = \frac{B}{y't - yt'} = \frac{C}{z't - zt'},$$

et la fonction précédente, que nous désignerons par $\mathfrak{R}(\lambda, u)$, s'écrit

$$(6)\quad \mathfrak{R}(\lambda, u) = \frac{1}{t^2}\sqrt{(x't - xt')^2 + (y't - yt')^2 + (z't - zt')^2}\,\log\frac{F - \Phi\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{F + \Phi\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

L'intégrale qui donne la somme des arcs cherchés, c'est-à-dire

$$\int_{u_0}^{u} du(\Sigma r),$$

est donc égale à la somme des résidus, par rapport aux zéros de A et de t, de la fonction

$$\mathfrak{R}(\lambda, u) - \mathfrak{R}(\lambda, u_0);$$

comme d'ailleurs $\mathfrak{A}$ ne devient pas infini quand A s'annule, les seuls résidus à considérer sont ceux qui correspondent aux zéros de t [1].

6. Supposons maintenant que Φ ne contienne pas de paramètre variable, mais que F dépende d'un paramètre ρ.

L'élément d'arc de $\mathfrak{C}$ peut s'écrire

$$ds = \frac{dX(A^2+B^2+C^2)}{A\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Pour les points de $\mathfrak{C}$ situés sur la surface

$$(7)\qquad \mathcal{F} = F^2(X, Y, Z, \rho) - \Phi^2(X, Y, Z)(A^2+B^2+C^2) = 0,$$

on a

$$ds = \frac{dX}{AF}(A^2+B^2+C^2)\Phi.$$

Partant alors de cette différentielle rendue homogène en x, y, z, t, on a, comme au n° **4**, la formule

$$\sum \frac{\Phi(A^2+B^2+C^2)}{AF}\frac{d}{d\rho}\left(\frac{x}{t}\right) = \Sigma r,$$

la somme du premier membre s'étendant aux points communs à $\mathfrak{C}$ et à la surface (7), $\mathcal{F}=0$, et Σr désignant la somme des résidus, par rapport aux zéros de FAt^2 de la fonction

$$\theta(\lambda) = \frac{\Phi}{AF}(A^2+B^2+C^2)\frac{\mathcal{F}'_\rho}{\mathcal{F}}\,\frac{x't-xt'}{t^2}$$

ou

$$(8)\qquad \theta(\lambda) = 2\frac{\Phi}{A}\,\frac{x't-xt'}{t^2}\,\frac{F'_\rho}{F^2-\Phi^2(A^2+B^2+C^2)}(A^2+B^2+C^2).$$

Les seuls résidus à considérer sont encore, puisque le facteur F a disparu du dénominateur, ceux qui correspondent aux zéros de A et

---

(1) On pouvait voir directement, en s'appuyant sur les équations (5 *bis*), que $\theta(\lambda)$ reste fini aux points de $\mathfrak{C}$ qui annulent A, à moins que ces points n'annulent t.

de t; si r_0 est un de ces résidus, correspondant à une valeur λ_0 de λ, on voit, comme au nº 5, que l'intégrale

$$\int_{v_0}^{v} r_0\, dv$$

est le résidu, pour $\lambda = \lambda_0$, de la fonction

$$\int_{v_0}^{v} \theta(\lambda, v)\, dv;$$

or on a, d'après (8),

$$\int \theta(\lambda, v)\, dv = \frac{x't - xt'}{t^2} \frac{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}{A} \log \frac{F - \Phi\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}{F + \Phi\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

En désignant par $s(\lambda, v)$ le second membre, la somme des arcs interceptés sur $\mathfrak{C}$ par les surfaces (7), qui correspondent aux valeurs v_0 et v du paramètre, est donc égale à la somme des résidus, par rapport aux zéros de t, de la fonction $s(\lambda, v) - s(\lambda, v_0)$.

D'ailleurs la fonction s a la même forme que la fonction $\mathfrak{R}$.

7. Si maintenant l'on suppose que Φ dépende d'un paramètre u, et F d'un paramètre v, variant simultanément d'une manière quelconque, il est clair que la somme des arcs interceptés sur $\mathfrak{C}$ par deux surfaces du système

$$F^2(x, y, z, t, v) - \Phi^2(x, y, z, t, u)(A^2 + B^2 + C^2) = 0,$$

correspondant aux valeurs u_0, v_0 et u, v des paramètres, sera la somme des résidus, par rapport aux zéros de t, de la fonction de λ

$$\mathfrak{R}(\lambda, u, v) - \mathfrak{R}(\lambda, u_0, v) + s(\lambda, u_0, v) - s(\lambda, u_0, v_0)$$

c'est-à-dire

$$\mathfrak{R}(\lambda, u, v) - \mathfrak{R}(\lambda, u_0, v_0),$$

puisque l'on a

$$\mathfrak{R}(\lambda, u, v) = s(\lambda, u, v).$$

La fonction $\mathcal{R}$ a pour expression :

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}\mathcal{R}(\lambda) &= \frac{1}{t^2}\sqrt{(x't-xt')^2+(y't-yt')^2+(z't-zt')^2}\\ &\quad\times \log\frac{F-\Phi\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{F+\Phi\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.\end{aligned}\right.$$

8. Montrons qu'en général les logarithmes disparaissent dans les résidus de $\mathcal{R}$.

Les résidus à considérer sont ceux qui correspondent aux zéros de t, c'est-à-dire aux points à l'infini sur $\mathcal{C}$.

Plusieurs cas sont à considérer selon la nature de ces points.

1° Le point est un point simple ou multiple, à branches distinctes ou non, mais la courbe n'y touche pas le plan de l'infini. De plus ce point n'est pas sur le cercle isotrope.

Soit λ_0 la valeur du paramètre correspondant au point considéré (ou une de ces valeurs s'il y en a plusieurs); on aura, en posant

$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon,$$

pour des valeurs assez petites de ε,

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{x}{t} &= \frac{\alpha_0}{\varepsilon^p}+\frac{\alpha_1}{\varepsilon^{p-1}}+\ldots+\frac{\alpha_{p-1}}{\varepsilon}+\alpha_p+\alpha_{p+1}\varepsilon+\ldots,\\ \frac{y}{t} &= \frac{\beta_0}{\varepsilon^p}+\ldots,\\ \frac{z}{t} &= \frac{\gamma_0}{\varepsilon^p}+\ldots.\end{aligned}\right.$$

La tangente correspondante de $\mathcal{C}$ n'est pas dans le plan de l'infini, par hypothèse; il faut dès lors que les quantités $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}$; $\beta_0, \ldots, \beta_{p-1}$; $\gamma_0, \ldots, \gamma_{p-1}$ soient respectivement proportionnelles, en sorte qu'on a

$$(9\,bis)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{y}{t} &= \mu\left(\frac{x}{t}\right)+b_0+b_1\varepsilon+\ldots,\\ \frac{z}{t} &= \nu\left(\frac{x}{t}\right)+c_0+c_1\varepsilon+\ldots,\end{aligned}\right.$$

μ et ν étant des constantes. La direction du point considéré à l'infini est $\frac{x}{1} = \frac{y}{\mu} = \frac{z}{\nu}$ et la quantité $1 + \mu^2 + \nu^2$ n'est pas nulle, puisque, en vertu de notre seconde hypothèse, le point n'est pas sur le cercle isotrope.

On déduit des deux équations précédentes, en dérivant par rapport à ε,

$$(9\,ter) \qquad \begin{cases} \dfrac{y't - yt'}{t^2} = \mu \dfrac{x't - xt'}{t^2} + b_1 + \ldots, \\ \dfrac{z't - zt'}{t^2} = \nu \dfrac{x't - xt'}{t^2} + c_1 + \ldots; \end{cases}$$

d'où

$$\begin{aligned} &\frac{1}{t^2}\sqrt{(x't - xt')^2 + (y't - yt')^2 + (z't - zt')^2} \\ &\quad = \frac{x't - xt'}{t^2}\sqrt{1 + \mu^2 + \nu^2 + \eta}, \end{aligned}$$

η étant une quantité s'annulant avec ε, et telle, de plus, que le produit

$$\eta \frac{x't - xt'}{t^2}$$

reste fini pour $\varepsilon = 0$. D'après cela le résidu de $\mathfrak{R}(\lambda)$, pour $\lambda = \lambda_0$, est le même que celui de la fonction

$$(10) \qquad \frac{x't - xt'}{t^2}\sqrt{1 + \mu^2 + \nu^2}\log \frac{F - \Phi\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}{F + \Phi\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Or on a, en dérivant la première des relations (9),

$$(10\,bis) \qquad \frac{x't - xt'}{t^2} = -p\frac{\alpha_0}{\varepsilon^{p+1}} + \ldots - \frac{\alpha_{p-1}}{\varepsilon^2} + \alpha_{p+1} + \ldots,$$

le terme en $\frac{1}{\varepsilon}$ manquant au second membre. Donc, dans le résidu de la fonction (10), le seul terme qui puisse contenir un logarithme disparaît, et il ne reste que des termes rationnels en u et v.

2° Le point à l'infini est sur le cercle isotrope, ou c'est un point de contact de la courbe $\mathfrak{S}$ et du plan de l'infini.

Dans les deux cas, il est clair que $A^2 + B^2 + C^2$ s'annule en ce point; dès lors, dans $\mathcal{R}(\lambda)$, le terme logarithmique

$$\log \frac{F - \Phi\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}{F + \Phi\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

tend vers $\log \frac{F}{F}$, ou zéro. Les logarithmes disparaissent donc encore dans les résidus. Il ne peut y avoir d'exception que si F s'annule au point considéré, et de telle sorte que l'expression

$$\frac{1}{F}\Phi\sqrt{A^2 + B^2 + C^2},$$

ou son carré

$$(11) \qquad \frac{\Phi^2(A^2 + B^2 + C^2)}{F^2},$$

tende vers une limite finie, non nulle.

9. Voici donc le théorème général qui résulte de ces recherches :

Théorème général. — *Soit $\mathcal{C}$ une courbe algébrique, intersection totale ou partielle de deux surfaces, $f = 0$, $\varphi = 0$, sur aucune desquelles elle n'est multiple et qui ne se touchent pas en tous les points de cette courbe; posons pour abréger*

$$A = f'_y\varphi'_z - f'_z\varphi'_y; \qquad B = f'_z\varphi'_x - f'_x\varphi'_z; \qquad C = f'_x\varphi'_y - f'_y\varphi'_x.$$

On coupe la courbe $\mathcal{C}$ par des surfaces ayant pour équation

$$F^2 - \Phi^2(A^2 + B^2 + C^2) = 0 \qquad \text{ou} \qquad \mathfrak{F} = 0,$$

F *et* Φ *désignant des polynomes quelconques en x, y, z, t; la somme algébrique des arcs compris sur la courbe $\mathcal{C}$ entre deux surfaces de ce système, $\mathfrak{F}_0$ et $\mathfrak{F}_1$, obtenues en faisant suivre une loi de variation quelconque aux coefficients des polynomes* F *et* Φ, *est une fonction rationnelle des valeurs initiales et finales de ces coefficients.*

C'est également une fonction rationnelle des coefficients des deux surfaces $f = 0$, $\varphi = 0$, pourvu toutefois que l'équation de la *projection de $\mathcal{C}$ sur un plan quelconque ait ses coefficients rationnels par rapport à ceux des deux surfaces* (1).

Le théorème précédent *ne peut souffrir d'exception* que si, pour les valeurs les plus générales des coefficients de F et de Φ vérifiant la loi de variation adoptée, les surfaces $F^2 = 0$ et $(A^2 + B^2 + C^2)\Phi^2 = 0$, passent par un même point à l'infini de $\mathcal{C}$, $(x_0, y_0, z_0, 0)$, et de telle sorte que le quotient

$$\frac{\Phi^2(A^2+B^2+C^2)}{F^2} \tag{11}$$

tende vers une limite finie, non nulle, lorsque le point (x, y, z, t) tend vers $(x_0, y_0, z_0, 0)$, en restant sur une des branches de la courbe $\mathcal{C}$ qui passent par ce dernier point.

Il faut de plus, pour que l'exception puisse se présenter, que ce point soit un point du cercle isotrope ou un point de contact de la courbe et du plan de l'infini.

Il n'y a donc jamais d'exception au théorème pour une courbe ne touchant pas le plan de l'infini et ne rencontrant pas le cercle isotrope, quelles que soient d'ailleurs ses singularités à distance finie ou infinie.

Enfin, *dans tous les cas, la somme des arcs considérés dans l'énoncé du théorème général est égale à la somme des résidus, par rapport aux zéros de t, de la fonction*

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\lambda) = \frac{1}{t^2}\sqrt{(x't - xt')^2 + (y't - yt')^2 + (z't - zt')^2} \\ \times \left(\log\frac{F - \Phi\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{F + \Phi\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right)_0^1, \end{aligned}$$

où le logarithme est pris entre les valeurs initiales et finales des coefficients de F *et de* Φ. Dans cette fonction, x, y, z, t sont les

(1) Il ne pourrait en être autrement que si les surfaces $f = 0$, $\varphi = 0$ se coupaient suivant plusieurs courbes appartenant, sur l'une d'elles, à la même série que $\mathcal{C}$. Ce cas exceptionnel se présente par exemple si l'une des surfaces est un cône et l'autre un plan arbitraire passant par son sommet.

coordonnées d'un point de $\mathcal{C}$ supposées exprimées en fonctions d'un paramètre λ.

10. *Remarque.* — Pour connaître avec quel signe chaque arc entre dans la somme du théorème précédent, il suffit de se rappeler que l'élément d'arc a été mis sous la forme

$$ds = \frac{F}{\Phi}\frac{dX}{A},$$

ce qui donne le signe de chaque arc infiniment petit, et par suite de chaque arc ou de chaque portion d'arc fini.

APPLICATIONS GÉNÉRALES.

Courbes gauches.

11. Pour faire des applications du théorème général, nous chercherons des surfaces de la forme $\mathcal{S}$ en relation géométrique simple avec la courbe $\mathcal{C}$, de manière à débarrasser l'expression du théorème de tout terme analytique; les exemples sont d'ailleurs faciles à trouver.

Considérons, sur la courbe $\mathcal{C}(f=0,\ \varphi=0)$ les points où la tangente fait un angle donné, ω, avec une droite fixe, l'axe des X, par exemple; ces points sont sur la surface

$$A^2 - \cos^2\omega(A^2+B^2+C^2)=0. \tag{12}$$

Lorsque $\cos\omega$ varie, les surfaces représentées par cette équation appartiennent au type $\mathcal{S}$, considéré dans le théorème général qui est dès lors applicable; mais il y a lieu ici de pousser les calculs jusqu'au bout.

D'après le n° **4**, si l'on pose $\cos\omega = u$, la somme des arcs compris sur $\mathcal{C}$ entre les surfaces du système (12) qui correspondent aux valeurs u_0 et u du paramètre a pour valeur

$$\int_{u_0}^{u} du(\Sigma r),$$

Σr désignant la somme des résidus, par rapport aux zéros de t, de la fonction

$$\Theta(\lambda) = -2\frac{x't - xt'}{t^2}\,\frac{A^2 + B^2 + C^2}{A^2 - u^2(A^2 + B^2 + C^2)}.$$

Soit λ_0 la valeur de λ qui correspond à un point à l'infini de $\mathfrak{C}$: nous supposerons que la courbe ne touche pas le plan de l'infini en ce point.

Tout d'abord si le plan $x = 0$ passe par le point λ_0, $\frac{x}{t}$ reste fini pour $\lambda = \lambda_0$, en vertu de l'hypothèse précédente; il en est de même de sa dérivée $\frac{x't - xt'}{t^2}$ et, par suite, de la fonction $\Theta(\lambda)$. Le résidu correspondant de cette fonction est donc nul.

Si le plan $x = 0$ ne passe pas par le point λ_0, on a, en posant $\lambda - \lambda_0 = \varepsilon$, d'après (9) et (9 *bis*),

$$\frac{x}{t} = \frac{\alpha_0}{\varepsilon^p} + \frac{\alpha_1}{\varepsilon^{p-1}} + \ldots + \frac{\alpha_{p-1}}{\varepsilon} + \alpha_p + \alpha_{p+1}\varepsilon + \ldots,$$

$$\frac{y}{t} = \mu\frac{x}{t} + b_0 + b_1\varepsilon + \ldots,$$

$$\frac{z}{t} = \nu\frac{x}{t} + c_0 + c_1\varepsilon + \ldots.$$

Pour calculer le résidu de $\Theta(\lambda)$, posons

$$\psi(\lambda) = \frac{A^2 + B^2 + C^2}{A^2} = \frac{(x't - xt')^2 + (y't - yt')^2 + (z't - zt')^2}{(x't - xt')^2}.$$

En vertu des équations qui précèdent et des équations qu'on en déduit par dérivation, on peut écrire

$$\psi(\lambda) = 1 + \mu^2 + \nu^2 + \frac{t^2}{x't - xt'}\rho$$

ou

$$\psi(\lambda) = 1 + \mu^2 + \nu^2 + \varepsilon^{p+1}\sigma,$$

ρ et σ ne devenant pas infinis pour $\varepsilon = 0$; μ et ν sont des constantes.

Cette dernière formule montre que les p premières dérivées de ψ sont nulles pour $\varepsilon = 0$; il en est, par suite, de même évidemment des p premières dérivées de la fonction

$$\frac{A^2 + B^2 + C^2}{A^2 - u^2(A^2 + B^2 + C^2)} \quad \text{ou} \quad \frac{\psi}{1 - u^2\psi}.$$

Il en résulte immédiatement que le résidu, pour $\lambda = \lambda_0$, de la fonction

$$\Theta(\lambda) = -2\frac{x't - xt'}{t^2}\frac{\psi}{1 - u^2\psi}$$

est nul, puisque, d'une part, $\frac{x't - xt'}{t^2}$ est de l'ordre de $\frac{1}{\varepsilon^{p+1}}$, et que, d'autre part, il ne contient pas de terme en $\frac{1}{\varepsilon}$.

On peut donc énoncer ce théorème :

I. *A une courbe algébrique douée de singularités quelconques, mais ne touchant pas le plan de l'infini* (¹), *on mène toutes les tangentes qui font un angle donné avec un axe fixe et l'on fait ensuite varier cet angle : la somme algébrique des arcs parcourus par les points de contact des tangentes est à chaque instant égale à* zéro.

Ce théorème est une extension à l'espace d'une propriété connue dans le plan.

On établirait de même, sans difficulté, que :

II. *Le même théorème subsiste pour une courbe ayant avec le plan de l'infini, en un seul point, un contact de premier ordre, lorsque l'axe fixe est perpendiculaire aux plans (parallèles entre eux) qui touchent la courbe en ce point.*

12. Les points de $\mathfrak{S}$ dont le plan normal touche la sphère de rayon u et de centre fixe $(0, 0, 0, 1)$

$$x^2 + y^2 + z^2 - u^2t^2 = 0$$

sont sur la surface

$$\mathcal{J} = (Ax + By + Cz)^2 - u^2t^2(A^2 + B^2 + C^2)$$

qui est du type $\mathcal{J}$. Pour calculer la somme des arcs compris sur $\mathfrak{S}$ entre deux de ces surfaces, correspondant aux valeurs u_0 et u du rayon, nous calculerons encore directement les résidus, par rapport aux zéros

(¹) C'est-à-dire n'ayant aucune tangente dans le plan de l'infini.

de t, de la fonction (5)

$$\Theta(\lambda) = -2\frac{x't - xt'}{t}\,\frac{(Ax + By + Cz)(A^2 + B^2 + C^2)}{A[(Ax + By + Cz)^2 - u^2t^2(A^2 + B^2 + C^2)]},$$

où A, B, C sont supposés remplacés par leurs valeurs proportionnelles $x't - xt'$, ... Au dénominateur, c'est seulement la première puissance de t qui est en facteur : cette circonstance permet de calculer de suite le résidu de $\Theta(\lambda)$ par rapport à un zéro quelconque, λ_0, de t, même si $\mathfrak{S}$ touche le plan de l'infini au point λ_0.

Si λ_0 est un zéro d'ordre q de t, n'annulant pas (comme on peut toujours l'admettre) x, y et z, dans le terme

$$\frac{x't - xt'}{t},$$

la partie infinie pour $\lambda = \lambda_0$ est $-qx_0\frac{1}{\lambda - \lambda_0}$, et le résidu de $\Theta(\lambda)$ est

$$r_0 = 2qx_0\left\{\frac{(Ax + By + Cz)(A^2 + B^2 + C^2)}{A[(Ax + By + Cz)^2 - u^2t^2(A^2 + B^2 + C^2)]}\right\}_0,$$

la valeur de l'expression entre crochets étant prise pour $\lambda = \lambda_0$. Si maintenant on suppose que, pour $\lambda = \lambda_0$, $x^2 + y^2 + z^2$ n'est pas nul, on voit que les termes de moindre degré en $\lambda - \lambda_0$ sont, au numérateur de cette expression

$$-(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^2 t'^3$$

et au dénominateur

$$-x_0(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^2 t'^3;$$

par suite,

$$r_0 = 2q.$$

La somme des résidus est ainsi égale à $2\Sigma q$, c'est-à-dire à deux fois l'ordre, N, de la courbe $\mathfrak{S}$, si celle-ci n'a pas de point sur le cercle isotrope. Alors la somme des arcs considérés, c'est-à-dire

$$\int_{u_0}^{u} du(\Sigma r),$$

est ici égale à $2N(u - u_0)$.

Ainsi :

III. *A une courbe algébrique, d'ordre* N, *ne rencontrant pas le cercle isotrope et d'ailleurs quelconque, on mène tous les plans normaux qui touchent une même sphère, et l'on fait ensuite varier le rayon de la sphère, son centre demeurant fixe : la somme algébrique des arcs décrits sur la courbe par les points d'incidence des plans normaux est égale à* 2N *fois la variation du rayon de la sphère.*

Si un zéro simple, λ_0, de t (n'annulant pas simultanément x, y, z) est aussi un zéro simple de $x^2+y^2+z^2$, on établit sans difficulté que, pour $\lambda=\lambda_0$, $\Theta(\lambda)$ reste fini; le résidu correspondant est donc nul. Or, pour une courbe n'ayant à l'infini que des points simples ou des points multiples à branches distinctes et ne touchant pas le plan de l'infini, les zéros de t sont tous simples et réciproquement; dire que, en un de ces points, $x^2+y^2+z^2$ s'annule comme t, c'est admettre que la sphère de rayon nul $x^2+y^2+z^2=0$ ne touche pas la courbe au point considéré. Par suite :

IV. *A une courbe algébrique quelconque, d'ordre* N, *n'ayant sur le cercle isotrope que des points simples ou des points multiples à tangentes distinctes et ne touchant en aucun de ces points le plan de l'infini, on mène les plans normaux qui touchent une sphère et l'on fait varier le rayon de celle-ci, son centre demeurant fixe : la somme algébrique des arcs décrits sur la courbe par les points d'incidence des plans normaux est égale à* $2(\mathrm{N}-h)$ *fois la variation du rayon de la sphère,* $2h$ *étant le nombre des points d'intersection de la courbe et du plan de l'infini situés sur le cercle isotrope.*

Il faut de plus, pour que la proposition soit applicable, que les sphères concentriques considérées ne touchent pas toutes la courbe en un ou plusieurs points fixes à l'infini.

13. Menons maintenant ceux des plans normaux à $\mathfrak{C}$ qui touchent une sphère variable, de rayon fixe, dont le centre décrit une droite, l'axe OX, par exemple : les points d'incidence de ces plans sont à l'intersection de $\mathfrak{C}$ et de la surface

$$\mathcal{S} = [A(x - vt) + By + Cz]^2 - R^2 t^2 (A^2 + B^2 + C^2) = 0,$$

v désignant l'abscisse variable du centre de la sphère et R le rayon fixe. Pour évaluer la somme des arcs décrits sur $\mathfrak{C}$ par les points d'incidence quand v varie, on peut partir des formules du n° **6**, puisque v figure seulement dans la fonction que nous avons appelée F; on a ainsi à calculer les résidus, par rapport aux zéros de t, de la fonction

$$\theta(\lambda) = -2R \frac{A^2 + B^2 + C^2}{\mathcal{S}} (x' t - x t').$$

Au dénominateur, t a disparu : les résidus cherchés sont donc nuls, à moins que, pour un zéro, λ_0, de t, $\mathcal{S}$ ne s'annule quel que soit v, de manière que $\theta(\lambda)$ devienne infini. Or, en remplaçant, dans $\theta(\lambda)$, A, B, C par leurs valeurs proportionnelles $x' t - x t'$, ..., on voit que, si pour $\lambda = \lambda_0$, $x^2 + y^2 + z^2$ n'est pas nul, les termes de moindre degré en $\lambda - \lambda_0$ sont au numérateur $2Rx t'^3 (x^2 + y^2 + z^2)$, et au dénominateur $t'^2 (x^2 + y^2 + z^2)$: la fonction $\theta(\lambda)$ reste donc toujours finie pour les zéros de t, et tous les résidus correspondants sont nuls. Donc :

V. *A une courbe algébrique ne rencontrant pas le cercle isotrope et d'ailleurs quelconque, on mène les plans normaux qui touchent une même sphère et l'on fait ensuite varier le centre de la sphère, le rayon demeurant constant : la somme algébrique des arcs décrits sur la courbe par les points d'incidence des plans normaux est à chaque instant égale à zéro.*

De même on voit que :

La proposition précédente s'applique à une courbe n'ayant sur le cercle isotrope que des points simples ou des points multiples à tangentes distinctes, en aucun desquels elle ne touche le plan de l'infini.

14. D'une manière analogue on établit les propositions suivantes :

VI. *A une courbe algébrique d'ordre* N *ne rencontrant pas le cercle isotrope, on mène toutes les sphères orthogonales de rayon donné qui coupent une sphère fixe à angle droit, et l'on fait ensuite varier le rayon donné : la somme algébrique des arcs décrits sur la courbe par les points d'orthogonalité des sphères mobiles est égale à* 4N *fois la variation du rayon.*

En particulier :

VII. *On considère sur la courbe les points pour lesquels la portion de la tangente comprise entre le point de contact et un plan fixe a une longueur donnée, que l'on fait ensuite varier : la somme algébrique des arcs décrits par les points considérés est égale à* 2N *fois la variation de cette longueur.*

15. Dans les applications précédentes, la courbe gauche intervient seule, indépendamment des surfaces qui la déterminent; voici un exemple où ces surfaces jouent un rôle intéressant.

Les points de la courbe $\mathcal{C}(f=0, \varphi=0)$ où les deux surfaces $f=0$, $\varphi=0$ se coupent sous un angle donné ω vérifient l'équation

$$\cos\omega = \frac{f'_x\varphi'_x + f'_y\varphi'_y + f'_z\varphi'_z}{\sqrt{(f'^2_x + f'^2_y + f'^2_z)(\varphi'^2_x + \varphi'^2_y + \varphi'^2_z)}},$$

qu'on peut écrire

$$\mathcal{S} = (f'_x\varphi'_x + f'_y\varphi'_y + f'_z\varphi'_z)^2 - \cot^2\omega(A^2 + B^2 + C^2) = 0.$$

On a encore là, quand ω varie, des surfaces du type $\mathcal{S}$. Donc :

VIII. *Sur la courbe, intersection totale ou complète, mais non multiple, de deux surfaces algébriques, on considère les points où les deux surfaces se coupent sous un angle donné,* ω, *et l'on fait ensuite varier cet angle : la somme algébrique des arcs décrits sur la courbe par les points considérés est une fonction rationnelle de la cotangente de l'angle variable.*

C'est également une fonction rationnelle des coefficients des deux surfaces, dans les conditions spécifiées au n° **9**.

La proposition précédente peut ne pas être vraie pour une courbe rencontrant le cercle isotrope ou tangente au plan de l'infini, lorsque les conditions d'exception énoncées au n° **9** sont vérifiées; la somme des arcs s'exprime alors en fonction rationnelle et logarithmique de $\cot\omega$.

Il est aisé de donner l'expression de la somme des arcs, dans le cas où la courbe $\mathcal{C}$ n'a, à l'infini, que des points simples ou multiples à branches distinctes, non situés sur le cercle isotrope, et en aucun desquels elle ne touche le plan de l'infini. Cette somme, d'après le théorème général du n° **9**, est égale à la somme des résidus, par rapport aux zéros de t, de la fonction

$$\mathfrak{R}(\lambda)=\left[\frac{1}{t^2}\sqrt{(x't-xt')^2+(y't-yt')^2+(z't-zt')^2}\right]\log\frac{F-\cot\omega\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{F+\cot\omega\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

en posant, pour simplifier, $F=f'_x\varphi'_x+f'_y\varphi'_y+f'_z\varphi'_z$.

Par hypothèse, t n'a que des zéros simples, soit λ_0 l'un d'eux. Si l'on pose $\lambda-\lambda_0=\varepsilon$, on sait (n° **8**) que le facteur entre crochets dans $\mathfrak{R}(\lambda)$ ne contient pas de terme en $\frac{1}{\varepsilon}$; le résidu cherché, ρ_0, est ainsi :

$$\rho_0=\frac{1}{t_0'^2}\sqrt{t_0'^2(x_0^2+y_0^2+z_0^2)}\frac{d}{d\lambda_0}\log\frac{F-\cot\omega\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{F+\cot\omega\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

En développant les calculs, on trouve sans difficulté

$$\rho_0=m_0\frac{\cot\omega}{\cot^2\omega-\cot^2\omega_0},$$

ω_0 étant l'angle sous lequel se coupent les deux surfaces au point λ_0, et m_0 un coefficient dont la valeur est

$$m_0=4\frac{x_0}{t_0'}\frac{d}{d\lambda_0}\left(\frac{F}{A}\right),$$

et dont il serait aisé d'écrire l'expression en fonction des coefficients qui figurent dans l'équation de la tangente (asymptote) à $\mathcal{C}$ en ce point.

Ainsi, dans le cas examiné :

La somme des arcs considérés au théorème VIII est, à une constante près, qui dépend de l'angle initial,

$$\sum_i m_i \frac{\cot \omega}{\cot^2 \omega - \cot^2 \omega_i},$$

la somme s'étendant aux points à l'infini sur la courbe, ω_i désignant l'angle des deux surfaces $f = 0$, $\varphi = 0$ en un de ces points, et m_i étant un coefficient indépendant de ω, dont la valeur a été donnée plus haut.

16. Si l'on considère la courbe $\mathfrak{C}$ comme l'intersection de deux cônes, de sommets P et Q, on a, comme cas particulier du théorème VIII, la proposition suivante :

On mène, par chaque tangente d'une courbe gauche $\mathfrak{C}$ les deux plans qui passent respectivement par deux points fixes P *et* Q, *et l'on considère les points de $\mathfrak{C}$ où ces deux plans font un angle donné ω : quand on fait varier ω, les points considérés décrivent sur la courbe des arcs dont la somme algébrique est une fonction rationnelle de* $\cot \omega$.

Si la courbe touche le plan de l'infini, il faut, pour que le théorème s'applique, qu'aucune des tangentes situées dans ce plan ne touche le cercle isotrope ; si la courbe rencontre le cercle isotrope en des points α_i, il faut qu'aucun des plans menés par P (ou Q) et par la tangente en α_i ne touche le même cercle.

Sans insister davantage sur des exemples qu'il serait aisé de multiplier, nous passerons aux propriétés des arcs des courbes planes, en nous bornant aux applications qui sont spéciales à ces courbes.

Courbes planes.

17. Le théorème général du n° 9 peut être mis, dans le cas des courbes planes, sous une forme plus géométrique.

Rappelons d'abord une définition.

On nomme, dans le plan, *courbes de direction*, les courbes, dont l'équation, en coordonnées tangentielles rectangulaires, est de la forme

$$(\mathrm{D}) \qquad (\xi^2+\eta^2)\Phi^2(\xi,\eta)-\mathrm{F}^2(\xi,\eta)=0,$$

F et Φ désignant deux polynomes entiers, et l'équation cartésienne de la droite enveloppée étant

$$\xi \mathrm{X}+\eta \mathrm{Y}+1=0.$$

Le premier membre de l'équation (D) peut d'ailleurs se décomposer en facteurs, dont chacun, égalé à zéro, représente une courbe de direction; dans tout ce qui suit, nous appellerons *courbe de direction* du type (D) la courbe ou l'ensemble des courbes représentées par une équation de la forme (D). C'est ainsi, par exemple, qu'une courbe de direction de classe impaire ne constituera pas à elle seule une courbe du type (D). Cela posé, observons que les points de contact des tangentes communes à la courbe (D) et à une courbe quelconque, $f(x,y,t)=0$, sont à l'intersection de celle-ci et de la courbe

$$\frac{1}{f_t'^2}(f_x'^2+f_y'^2)\Phi^2\left(\frac{f_x'}{f_t'},\frac{f_y'}{f_t'}\right)-\mathrm{F}^2\left(\frac{f_x'}{f_t'},\frac{f_y'}{f_t'}\right)=0$$

qui appartient au type $\mathcal{F}$.

Voici donc la conclusion :

Théorème général. — *La somme algébrique des arcs décrits sur une courbe plane, $\mathcal{C}$, par les points de contact des tangentes communes à cette courbe et à une courbe de direction de classe donnée, du type* (D), *qui varie d'une manière quelconque, est une fonction rationnelle des coefficients de la courbe fixe et de la courbe variable.*

Les cas d'exception, d'après le n° **9**, ne peuvent être que les suivants :

1° La courbe $\mathcal{C}$ et toutes les courbes de direction variables touchent la droite de l'infini;

2° La courbe $\mathfrak{S}$ passe par les points cycliques, et les courbes variables admettent pour foyer un des foyers singuliers de $\mathfrak{S}$ [1].

La somme algébrique des arcs se calculera par la formule générale du n° **9**; si l'on rend homogène l'équation (D) des courbes de direction, en l'écrivant

$$(\xi^2+\eta^2)\Phi^2(\xi,\eta,\zeta)-F^2(\xi,\eta,\zeta)=0,$$

cette somme est égale à la somme des résidus, par rapport aux zéros de t, de la fonction

$$\mathcal{A}(\lambda)=\frac{\sqrt{(x't-xt')^2+(y't-yt')^2}}{t^2}\log\frac{F(f'_x,f'_y,f'_t)-\sqrt{f'^2_x+f'^2_y}\,\Phi(f'_x,f'_y,f'_t)}{F(f'_x,f'_y,f'_t)+\sqrt{f'^2_x+f'^2_y}\,\Phi(f'_x,f'_y,f'_t)},$$

où le logarithme est pris entre les valeurs initiales et finales des coefficients de F et de Φ, et où x, y, t sont les coordonnées d'un point de $\mathfrak{S}$, supposées exprimées en fonction d'un paramètre λ.

18. On peut donner une règle géométrique précise pour le signe à affecter aux arcs du théorème général précédent.

Rappelons d'abord que, sur une courbe de direction, la tangente a un sens déterminé : soit en effet la courbe

$$(\xi^2+\eta^2)\Phi^2(\xi,\eta,\zeta)-F^2(\xi,\eta,\zeta)=0,$$

la tangente

$$\xi X+\eta Y+\zeta=0,$$

fait avec la droite OY, dirigée de O vers Y, un angle θ, tel que

$$\sin\theta=\frac{\eta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}=\pm\frac{\eta\Phi}{F}.$$

Choisissons le signe $+$ dans le second membre; on aura

$$\cos\theta=\cot\theta\sin\theta=-\frac{\xi}{\eta}\sin\theta=-\frac{\xi\Phi}{F}.$$

[1] Les foyers singuliers d'une courbe passant par les points cycliques I et J sont les points d'intersection d'une tangente en I à la courbe avec une tangente en J.

Nous dirons que le sens de la tangente est celui du rayon qui va de l'origine O au point de coordonnées $X = \sin\theta$, $Y = \cos\theta$.

Cela posé, menons les tangentes communes à la courbe $\mathfrak{S}$ et à deux courbes de direction voisines (D_0) et (D); soient m_0 et m deux points de contact voisins sur $\mathfrak{S}$, dont les coordonnées sont X_0, Y_0 (ou en coordonnées homogènes x_0, y_0, t_0) et $X_0 + dX_0$, $Y_0 + dY_0$.

D'après ce qui a été dit au n° **10**, on a, en grandeur et en signe,

$$\operatorname{arc} m_0 m = \frac{dX_0}{f'_{y_0}} \frac{F}{\Phi} (f'_{x_0}, f'_{y_0}, f'_{t_0}).$$

La tangente à $\mathfrak{S}$ au point m_0 est, par hypothèse, une tangente de la courbe (D_0), et son sens, par rapport à cette dernière, est déterminé : si θ_0 est son angle avec la semi-droite OY, on a

$$\sin\theta_0 = \frac{\eta\Phi(\xi, \eta, \zeta)}{F(\xi, \eta, \zeta)} = f'_{y_0} \frac{\Phi}{F} (f'_{x_0}, f'_{y_0}, f'_{t_0}).$$

La droite qui va du point m_0 au point m fait d'ailleurs, avec la semi-droite OY, un angle θ'_0, tel que

$$\sin\theta'_0 = \frac{dX_0}{\Delta s},$$

Δs étant le module de l'arc $m_0 m$. On a ainsi

$$\operatorname{arc} m_0 m = \Delta s \frac{\sin\theta'_0}{\sin\theta_0}.$$

Les quantités $\sin\theta'_0$ et $\sin\theta_0$ sont égales si la droite qui va de m_0 vers m a même direction que la tangente à la courbe de direction (D_0) qui touche $\mathfrak{S}$ au point m_0; elles sont égales et de signe contraire si ces directions sont opposées, et l'arc $m_0 m$ a le signe $+$ ou le signe $-$ suivant l'hypothèse.

Donc enfin :

« Dans la somme algébrique des arcs compris sur $\mathfrak{S}$ entre les points de contact des tangentes qui touchent respectivement deux courbes de direction voisines (D_0) et (D), un arc $m_0 m$ compris entre le point de contact d'une tangente T_0, à la courbe (D_0), et le point de contact voisin d'une tangente à (D), sera pris positivement si le sens de l'arc $m_0 m$ (en allant de m_0 vers m) est le même que celui de la tangente T_0, considérée comme appartenant à la courbe de direction (D_0). Il sera pris négativement dans le cas contraire. »

19. La plus simple des courbes de direction du type (D) est le cercle; donc :

IX. *Les* $2N$ *points de contact des tangentes communes à une courbe algébrique de classe* N *et à un cercle décrivent sur la courbe, lorsque le cercle varie,* $2N$ *arcs dont la somme algébrique est une fonction rationnelle des coefficients de la courbe et du cercle.*

Il faut toutefois que les cercles variables n'aient pas tous pour centre un foyer singulier de la courbe fixe.

La somme des arcs considérés s'évalue simplement si la courbe fixe, $f(x, y, t) = 0$, ou $\mathcal{C}$, n'a à l'infini que des points simples ou des points multiples à tangentes distinctes.

Soient

α, β les coordonnées du centre du cercle;

R son rayon;

α', β', R' les valeurs initiales de ces paramètres;

la somme cherchée est égale (nos **9** et **17**) à la somme des résidus, par rapport aux zéros de t, de la fonction

$$\frac{\sqrt{(x't - xt')^2 + (y't - yt')^2}}{t^2} \log \frac{\alpha f'_x + \beta f'_y + f'_t - R\sqrt{f'^2_x + f'^2_y}}{\alpha f'_x + \beta f'_y + f'_t + R\sqrt{f'^2_x + f'^2_y}},$$

le logarithme étant pris entre les systèmes de valeurs α, β, R et α', β', R'.

Admettons d'abord que la courbe $\mathcal{C}$ ne passe pas par les points cycliques du plan; soit λ_0 un zéro simple de t : pour des valeurs de λ voisines de λ_0 la fonction

$$\frac{1}{t^2}\sqrt{(x't - xt')^2 + (y't - yt')^2}$$

est de la forme (n° **8**)

$$\frac{a}{(\lambda-\lambda_0)^2}+b+c(\lambda-\lambda_0)+\ldots,$$

a, b, ... étant des constantes. Le résidu cherché est donc égal au produit du facteur a par la dérivée du terme logarithmique, prise pour $\lambda=\lambda_0$.

Posons, pour abréger,

$$G=f'_x,\qquad H=f'_y,\qquad K=f'_t,\qquad L=\sqrt{f'^2_x+f'^2_y}$$

et désignons par G', ..., L' les dérivées de ces fonctions pour $\lambda=\lambda_0$. Le résidu est

$$2Ra\frac{\alpha(LG'-L'G)+\beta(LH'-L'H)+LK'-L'K}{(\alpha G+\beta H+K)^2-R^2(G^2+H^2)}.$$

Dans le numérateur de cette expression, les coefficients de α et de β sont nuls. On a vu en effet au n° **11** que la dérivée par rapport à λ de la fonction

$$\psi(\lambda)=\frac{A^2+B^2}{A^2}=\frac{f'^2_x+f'^2_y}{f'^2_y}$$

est nulle pour $\lambda=\lambda_0$. Or ici nous avons

$$\psi(\lambda)=\left(\frac{L}{H}\right)^2$$

et, comme $\frac{L}{H}$ n'est pas nul pour $\lambda=\lambda_0$, on a, pour cette valeur

$$LH'-L'H=0.$$

Le coefficient de β est donc nul, et il en de même de celui de α; si maintenant on observe que la quantité

$$\frac{\alpha G+\beta H+K}{\sqrt{G^2+H^2}}$$

n'est autre chose que la distance du point α, β à la tangente menée à $\mathfrak{C}$ au point λ_0, c'est-à-dire à l'asymptote, on voit que le résidu est de la forme

$$m_0 \frac{R}{R^2 - R_0^2},$$

R_0 étant la distance du point α, β à l'asymptote, et m_0 une quantité qui ne dépend que des éléments de la courbe $\mathfrak{S}$ au point à l'infini considéré.

Par suite la somme des arcs à évaluer est de la forme

$$\sum_i m_i \frac{R}{R^2 - R_i^2},$$

la somme s'étendant aux points à l'infini de la courbe $\mathfrak{S}$, m_i étant un coefficient spécial à chacun de ces points et R_i la distance du centre (α, β) du cercle mobile à l'asymptote correspondante. De plus, on devra retrancher de cette somme une somme analogue, où α, β, R sont remplacés par leurs valeurs initiales α', β', R'.

20. On peut calculer m_i directement.

En effet, au voisinage d'un point ordinaire à l'infini, pour des valeurs très grandes de X, l'équation de la courbe $\mathfrak{S}$ peut s'écrire

$$Y = gX + h + \frac{k}{X} + \frac{l}{X^2} + \ldots,$$

g, h, ... étant des constantes. La tangente au point (X, Y) est, en désignant par X', Y' les coordonnées courantes,

$$Y' = gX' + h + \frac{2k}{X} + \ldots.$$

Supposons que le cercle, de centre α, β et de rayon R, tende à devenir tangent à l'asymptote

$$Y' = gX' + h;$$

un des points de contact (X, Y) des tangentes communes au cercle et à $\mathfrak{S}$ tendra vers l'infini sur celle-ci, et l'on aura

$$R = \frac{-\beta + g\alpha + h + \frac{2k}{X} + \ldots}{\sqrt{1+g^2}}, \qquad R_i = \frac{-\beta + g\alpha + h}{\sqrt{1+g^2}};$$

d'où

$$m_i \frac{R}{R^2 - R_i^2} = \frac{m_i}{4k}\sqrt{1+g^2}\,X + \ldots,$$

les termes négligés dans le second membre ne devenant pas infinis avec X. Par suite, dans l'expression de la somme des arcs décrits sur $\mathfrak{S}$ par les points de contact des tangentes qui touchent le cercle variable, le terme infini sera

$$\frac{m_i}{4k}\sqrt{1+g^2}\,X.$$

D'un autre côté, l'arc limité sur $\mathfrak{S}$ au point X, Y a pour valeur principale, quand ce point s'éloigne à l'infini

$$\int dX\sqrt{1+\left(\frac{dY}{dX}\right)^2} = \int dX\sqrt{1+g^2-\frac{2gk}{X^2}} = X\sqrt{1+g^2}+\ldots,$$

les termes négligés restant finis pour X infini. On a donc

$$\frac{m_i}{4k}\sqrt{1+g^2}\,X = X\sqrt{1+g^2};$$

d'où

$$m_i = 4k.$$

La quantité k ainsi introduite est un *élément géométrique* de la courbe $\mathfrak{S}$, susceptible d'une définition simple. On voit aisément que k est la limite du produit $\delta\rho$, où δ désigne la distance d'un point de la courbe, qui s'éloigne à l'infini, à l'asymptote correspondante, et ρ la distance de ce point à un point fixe (quelconque d'ailleurs) du plan. Cette définition est indépendante du choix des axes de coordonnées.

Donc :

X. *Soit une courbe de classe* N, *ne touchant pas la droite de l'infini et n'ayant à l'infini que des points simples ou des points multiples à tangentes distinctes : les* 2N *points de contact des tangentes communes à cette courbe et à un cercle variable décrivent sur la courbe* 2N *arcs, dont la somme algébrique a pour expression*

$$\sum 4k_i\left(\frac{R}{R^2-R_i^2} - \frac{R'}{R'^2-R_i'^2}\right).$$

La somme s'étend à toutes les asymptotes de la courbe; R *et* R' *désignent les rayons du cercle variable dans ses positions finale et initiale;* R_i *et* R'_i *sont les distances à une même asymptote du centre du cercle final et du centre du cercle initial;* k_i *est l'élément géométrique défini plus haut qui correspond à cette asymptote.*

Si la courbe passe par les points cycliques du plan, le théorème subsiste, car il conduit à une formule parfaitement déterminée : pour une asymptote isotrope, R_i et R'_i deviennent infinis, tandis que k_i garde une valeur finie; le terme correspondant à une branche cyclique est donc nul. En particulier :

La somme algébrique des arcs considérés au théorème X est nulle pour une courbe qui ne coupe la droite de l'infini qu'aux points cycliques.

Il faut toutefois, indépendamment des conditions restrictives du théorème X, que le centre du cercle ne soit pas un foyer singulier de la courbe.

21. *Remarque.* — Pour deux courbes planes ayant une asymptote commune, les quantités k correspondant à cette asymptote sont égales lorsque les deux courbes sont osculatrices entre elles à l'infini. D'ailleurs, pour une asymptote d'inflexion, k_i est nul. Donc :

La somme algébrique des arcs compris sur une courbe plane entre les points de contact des tangentes qui touchent deux cercles ne change pas si l'on substitue à la courbe proposée une quelconque des courbes de même ordre qui lui sont osculatrices en tous ses points à l'infini.

La somme considérée est nulle pour une courbe dont toutes les asymptotes sont inflexionnelles et distinctes.

22. On peut, dans certains cas, simplifier notablement l'énoncé des théorèmes IX et X.

Supposons en effet que le cercle initial soit de rayon nul, et que les points de contact des tangentes menées de son centre à la courbe $\mathfrak{C}$ soient tous réels; soit m un de ces points de contact. Augmentons maintenant le rayon du cercle, le centre demeurant fixe : il est clair que toutes les tangentes communes à $\mathfrak{C}$ et au cercle seront réelles si le rayon est assez petit; deux points de contact de ces tangentes et de $\mathfrak{C}$, n_1 et n_2, seront voisins de m et situés de part et d'autre de ce point. Il suffit d'appliquer la règle du n° **18** pour reconnaître que, dans la somme des arcs compris sur $\mathfrak{C}$ entre les points de contact des tangentes qui touchent le cercle initial et le cercle final, les deux arcs mn_1 et mn_2 sont toujours pris avec le même signe, et peuvent dès lors être remplacés par l'arc $n_1 n_2$.

Par suite :

XI. *Soit une série de cercles concentriques, de rayon croissant de* o *à* R_0, *et tels que toutes les tangentes communes à l'un quelconque d'entre eux et à une courbe algébrique fixe* $\mathfrak{C}$, *de classe* N, *soient réelles : les* 2N *points de contact des tangentes communes à* $\mathfrak{C}$ *et à un de ces cercles, de rayon* R, *peuvent se grouper deux à deux de manière à déterminer, sur la courbe* $\mathfrak{C}$, N *arcs dont la somme algébrique est rationnelle par rapport aux coefficients de la courbe et du cercle.*

Cette somme a pour expression

$$\sum_i 4k_i \frac{R}{R^2 - R_i^2},$$

k_i et R_i ayant la même signification que dans l'énoncé du théorème X [1].

---

(1) J'ai démontré, au LVII^e Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, que cette somme est aussi égale à la somme algébrique des longueurs des tangentes communes au cercle et à la courbe, ces tangentes étant limitées à leurs points de contact.

Plus généralement, il serait aisé d'établir *a priori* que :

Si l'on mène les tangentes communes à une courbe algébrique plane et à un cercle et si l'on fait ensuite varier ce cercle, la somme algébrique des arcs

APPLICATIONS PARTICULIÈRES.

23. Dans le cas des *courbes unicursales*, l'application de la théorie générale peut être simplifiée.

Pour une courbe unicursale $\mathfrak{S}$, d'ordre n, les coordonnées d'un point sont proportionnelles à quatre polynomes d'ordre n, fonctions d'une variable λ, et la différentielle de l'arc est de la forme

$$ds = \frac{\sqrt{P(\lambda)}}{Q(\lambda)}\,d\lambda,$$

P et Q étant des polynomes en λ, dont le premier est d'ordre $4(n-1)$. Ce polynome peut admettre des racines multiples; nous le mettrons sous la forme

$$P(\lambda) = R^2(\lambda)\,V(\lambda),$$

R et V étant des polynomes, dont le second n'a pas de racines multiples. Soit $2h$ le degré de $V(\lambda)$; si l'on désigne par $\Phi(\lambda)$ et $F(\lambda)$ deux polynomes en λ, le degré du second surpassant de h unités celui du premier, les points de la courbe $\mathfrak{S}$, dont les arguments λ vérifient l'équation

$$V(\lambda)\Phi^2(\lambda) - F^2(\lambda) = 0,$$

décrivent sur $\mathfrak{S}$, quand les coefficients des polynomes Φ et F varient d'une manière quelconque, des arcs dont la somme algébrique (n^os **4**, **9**) est égale à la somme des résidus, par rapport aux zéros

---

décrits sur la courbe par les points de contact est égale à la variation de la somme algébrique des longueurs des tangentes communes.

Je n'avais établi cette proposition que dans le cas où les cercles variables sont concentriques.

On pourrait voir également que le même théorème s'applique si l'on substitue au système de cercles un système de courbes de direction n'ayant, comme asymptotes à distance finie, que des asymptotes isotropes; par exemple un système des courbes que Laguerre nomme *hypercycles*. Il faut dans ce dernier cas que $\mathfrak{S}$ ne touche pas la droite de l'infini.

de $t(\lambda)$, de la fonction

$$\mathfrak{R}(\lambda) = \frac{\sqrt{(x't - xt')^2 + (y't - yt')^2 + (z't - zt')^2}}{t^2} \times \log \frac{F(\lambda) - \Phi(\lambda)\sqrt{V}}{F(\lambda) + \Phi(\lambda)\sqrt{V}}.$$

Cette somme est en général rationnelle, et les cas d'exception ne pourront se produire que si, pour un point de $\mathfrak{S}$ situé sur le cercle isotrope ou pour un point de contact de $\mathfrak{S}$ et du plan de l'infini, la fonction $\frac{\Phi^2 V}{F^2}$ a une valeur finie, non nulle.

Voici l'*énoncé géométrique* qu'on peut donner à cette proposition :

« Sur une courbe unicursale, d'ordre n, les points où la tangente est isotrope sont donnés par une équation d'ordre $4(n-1)$; ceux de ces points qui correspondent à des racines d'ordre impair de l'équation seront dits *points critiques* de l'arc de la courbe. »

XII. *Par les $2h$ points critiques de l'arc d'une courbe unicursale $\mathfrak{S}$, on mène les surfaces Σ, de degré donné $2k$, qui touchent la courbe (avec un contact d'ordre impair) en chacun des autres points où elles la rencontrent : deux surfaces quelconques d'ordre $2k$, $\mathfrak{s}_1$ et $\mathfrak{s}_2$, respectivement inscrites à deux surfaces Σ_1 et Σ_2, du système Σ, interceptent sur la courbe $\mathfrak{S}$ des arcs dont la somme algébrique est rationnelle.*

Par surfaces d'ordre $2k$ inscrites à Σ, on entend les surfaces ayant une équation de la forme

$$\Sigma - F^2 = 0,$$

où F est un polynome en x, y, z, t, d'ordre k.

Le théorème s'applique naturellement à deux surfaces $\mathfrak{s}$ inscrites à une même surface Σ.

24. *Cubique gauche générale.* — Il y a, sur une cubique gauche générale, $\mathfrak{S}$, huit points distincts où la tangente est isotrope. Soit

$\Sigma = 0$ l'équation d'un cône du quatrième ordre ayant son sommet en un point quelconque de $\mathcal{C}$, et passant par les huit points précédents : on sait qu'à un cône d'ordre 4 on peut inscrire 63 systèmes de cônes du second ordre, ayant même sommet que le proposé, et touchant celui-ci suivant quatre génératrices. Si $\mathcal{F}_0 = 0$ et $\mathcal{F} = 0$ sont les équations de deux cônes inscrits du même système, on a l'identité

$$\Sigma = \mathcal{F}_0 \mathcal{F} + F^2,$$

$F = 0$ étant l'équation d'un cône du second ordre, de même sommet. Ces propositions résultent de la théorie générale des courbes planes d'ordre 4.

On peut d'ailleurs mettre l'identité précédente sous la forme

$$\Sigma - (F + u\mathcal{F}_0)^2 = \mathcal{F}_0(\mathcal{F} - 2uF - u^2\mathcal{F}_0),$$

u étant un paramètre arbitraire. D'après les définitions du numéro précédent, les surfaces $\mathcal{F}_0(\mathcal{F} - 2uF - u^2\mathcal{F}_0) = 0$ sont inscrites à Σ, et, comme elles comprennent une surface fixe, $\mathcal{F}_0$, on n'a à considérer, pour appliquer le théorème XII, que les arcs décrits sur $\mathcal{C}$ par les points d'intersection de cette courbe avec les cônes

$$\mathcal{F} - 2uF - u^2\mathcal{F}_0 = 0,$$

qui forment un des 63 systèmes de cônes quadriques inscrits à Σ. Par suite :

Étant donnée une cubique gauche, on considère un quelconque des cônes du quatrième ordre, Σ, qui ont leur sommet en un point de la cubique et qui passent par les huit points de cette courbe où la tangente est isotrope. Le cône Σ admet soixante-trois systèmes de cônes du second ordre, de même sommet, qui lui sont inscrits, c'est-à-dire qui le touchent suivant quatre génératrices : deux cônes inscrits d'un même système interceptent sur la cubique gauche quatre arcs dont la somme algébrique est rationnelle.

Ce théorème permet de trouver sur la cubique quatre arcs de somme rationnelle, quand on se donne un de ces arcs et l'origine de chacun des trois autres; on retrouve d'ailleurs les mêmes arcs quel que soit le point de la cubique que l'on prenne pour sommet des cônes.

L'arc dépendant d'une intégrale hyperelliptique de genre 3, on ne peut trouver sur une cubique moins de quatre arcs *mobiles* ayant une somme rationnelle.

La réciproque du théorème précédent est vraie et s'établit aisément : si quatre arcs mobiles d'une cubique gauche ont une somme algébrique exprimable rationnellement, on les obtient par la construction indiquée ([1]).

25. *Cubique gauche parabolique.* — Une cubique qui touche le plan de l'infini est dite parabolique : en ce cas, sur les huit points où la tangente est isotrope, deux sont confondus avec le point de contact du plan de l'infini, et l'arc n'a que six points critiques. On établit, par la méthode du n° **24**, la proposition suivante :

Étant donnée une cubique gauche parabolique, on considère un quelconque des cônes du second ordre qui passent par les six points de la courbe (à distance finie) où la tangente est isotrope : deux plans tangents arbitraires de ce cône interceptent sur la cubique trois arcs dont la somme s'exprime par les fonctions logarithmiques et rationnelles.

26. *Cubique gauche circulaire.* — C'est une cubique qui rencontre en deux points le cercle isotrope. Chacun de ces points compte pour deux dans le nombre des huit points où la tangente est isotrope, l'arc n'a que quatre points critiques :

Étant donnée une cubique gauche circulaire, on considère un

([1]) Une proposition analogue existe pour une courbe unicursale d'ordre quelconque : si l'arc de cette courbe a $2h$ points critiques, on peut, d'après la théorie générale des intégrales hyperelliptiques, déterminer algébriquement sur cette courbe h arcs dont la somme s'exprime par les fonctions rationnelles et logarithmiques. Un de ces arcs et l'origine de chacun des $h-1$ autres peuvent être choisis arbitrairement. Mais le théorème ne paraît pas susceptible d'une interprétation géométrique simple. Dans le cas d'une courbe ne rencontrant pas le cercle isotrope et ne touchant pas le plan de l'infini, la somme des h arcs mobiles est toujours rationnelle.

quelconque des cônes du second ordre qui ont leur sommet en un point de la cubique et qui passent par les quatre points de la courbe (à distance finie) où la tangente est isotrope : deux plans tangents arbitraires de ce cône interceptent sur la cubique deux arcs dont la somme s'exprime par les fonctions logarithmiques et algébriques.

L'arc lui-même s'exprime d'ailleurs par les intégrales elliptiques de première, deuxième et troisième espèces.

On a un théorème identique pour une cubique osculatrice au plan de l'infini.

Si en un point d'une cubique la tangente et le plan osculateur sont isotropes, ce point compte pour deux dans le nombre des points où la tangente est isotrope : le théorème précédent subsiste donc pour une cubique réelle douée de deux de ces points remarquables, mais alors la somme des deux arcs interceptés par deux plans tangents du cône est rationnelle [1].

27. *Cubiques planes.* — Voici deux propositions géométriques sur les arcs de ces courbes; les démonstrations découlent des principes posés plus haut :

Étant donnée une cubique plane générale, on considère une quelconque des courbes du quatrième ordre qui passent par les douze points de contact des tangentes menées à la courbe par les points cycliques du plan : deux coniques arbitraires d'un même système, inscrites à cette quartique, interceptent sur la proposée six arcs, dont la somme algébrique s'exprime en fonction rationnelle des coefficients de la cubique et des deux coniques.

A une cubique circulaire unicursale on peut mener par les points cycliques quatre tangentes ayant leurs points de contact à distance

---

[1] Il est clair que les propositions des nos 24, 25, 26 donnent, sur une cubique gauche, des interprétations du théorème d'addition des intégrales hyperelliptiques de première espèce, de genres 3, 2 et 1. Dans le cas des intégrales de genre 2 (n° 25), on retrouve ainsi l'interprétation donnée par Laguerre (*Bulletin de la Soc. math.*, t. I).

finie, et il existe deux coniques passant par ces quatre points de contact et touchant la cubique en un nouveau point : deux tangentes arbitraires d'une de ces coniques interceptent sur la cubique trois arcs dont la somme s'exprime par les fonctions algébriques et logarithmiques.

28. *Courbes du quatrième ordre.* — Des propositions analogues s'appliquent à certaines courbes du quatrième ordre :

Sur une biquadratique sphérique générale il existe, à distance finie, huit points où la tangente est isotrope, et par lesquels passe une infinité simple de cônes du second ordre : deux plans tangents quelconques de l'un de ces cônes interceptent sur la biquadratique quatre arcs dont la somme s'exprime par les fonctions logarithmiques et algébriques.

Si la biquadratique a un point double A, *le théorème s'applique aux deux arcs interceptés par deux plans tangents de l'un quelconque des cônes du second ordre qui ont leur sommet en* A *et qui passent par les quatre points de la courbe, à distance finie, où la tangente est isotrope.*

On énoncerait sans difficulté des propriétés de même nature pour les courbes planes bicirculaires du quatrième ordre, spécialement pour celles qui ont deux axes de symétrie.

La *lemniscate* est particulièrement intéressante :

Deux coniques quelconques ayant pour foyer le centre d'une lemniscate interceptent sur cette courbe huit arcs dont la somme algébrique est nulle.

Deux tangentes quelconques d'un même cercle, doublement tangent à une lemniscate, interceptent sur cette courbe quatre arcs dont la somme algébrique est nulle.

Si deux arcs de lemniscate sont égaux, les quatre cercles qui passent par le centre et qui touchent respectivement la courbe aux extrémités des deux arcs, sont tangents à un même cercle; et réciproquement.

Cette dernière proposition peut être mise sous une forme plus élégante, et qui semble également nouvelle :

Deux cercles passant par le centre d'une lemniscate interceptent sur cette courbe deux arcs égaux, si leurs centres sont sur une même conique ayant pour foyers les foyers singuliers de la lemniscate.

On a ainsi une construction géométrique simple qui permet de porter sur la lemniscate, à partir d'un point, un arc égal à un arc donné de la courbe.

29. *Coniques.* — L'arc d'une conique générale a (n° **23**) quatre points critiques, qui sont les points de contact des tangentes isotropes; on voit de suite, comme au n° **26**, que :

Étant donnée une conique, deux tangentes quelconques d'une seconde conique, qui passe par les points de contact des tangentes isotropes menées à la première, interceptent sur celle-ci deux arcs dont la différence s'exprime rationnellement.

Si l'on transforme ce résultat par polaires réciproques en prenant pour directrice la première conique, on retrouve le théorème si connu de Graves :

Les polaires, par rapport à une conique, de deux points d'une seconde conique homofocale à la première interceptent sur celle-ci deux arcs, dont la différence s'exprime rationnellement.

En observant que les quatre tangentes menées à une conique par deux points d'une même conique homofocale touchent un cercle, on voit que le théorème de Graves est l'application aux courbes du second ordre de la proposition générale XI (n° **22**), et, calculant pour une conique les coefficients que nous avons appelés k_i, on arrive à ce résultat :

Étant donnée la conique $\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} - 1 = 0$, *rapportée à son centre et à ses axes, on mène les tangentes communes à cette courbe et à un cercle, de centre* α, β *et de rayon* R, *qui lui est extérieur : les* *quatre points de contact sur la conique peuvent se grouper deux à deux, de manière à former deux arcs, dont la différence a pour expression*

$$\frac{8AB(A-B)R\alpha\beta}{[(A-B)R^2-A\beta^2+B\alpha^2]^2+4AB\alpha^2\beta^2}.$$

En passant de l'ellipse à la parabole par le procédé classique, on déduit de là que :

Les quatre points de contact des tangentes communes à une parabole, de paramètre p, et à un cercle extérieur, de rayon R, *peuvent se grouper deux à deux sur la parabole, de manière à former deux arcs, dont la différence est égale à $\frac{8\beta R}{p}$, β désignant la distance du centre du cercle à l'axe de la parabole.*

Appliquant à l'ellipse le théorème III (n° **12**) et raisonnant comme au n° **22**, on établit cette proposition assez simple :

Les huit pieds des normales qu'on peut mener à une ellipse, tangentiellement à un cercle intérieur à la développée de la courbe, se groupent deux à deux de manière à déterminer sur l'ellipse quatre arcs, dont la somme algébrique est égale à quatre fois le rayon du cercle.

Ce théorème, dans le cas particulier où le cercle est concentrique à l'ellipse, donne la propriété connue sous le nom de *théorème de Fagnano.*

Nous n'insisterons pas davantage sur les applications nombreuses qu'on pourrait faire aux coniques de nos propositions générales, et notamment des théorèmes des n^{os} **17** et **23**; ces applications n'offrent aucune difficulté.