

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

H. PADÉ

Sur la généralisation des fractions continues algébriques

Journal de mathématiques pures et appliquées 4^e série, tome 10 (1894), p. 291-329.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1894_4_10_291_0

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

*Sur la généralisation des fractions continues algébriques;***PAR M. H. PADÉ,**Docteur ès Sciences mathématiques,
Professeur au lycée de Lille.

INTRODUCTION.

M. Hermite s'est, dans un travail récemment paru ⁽¹⁾, occupé de la généralisation des fractions continues algébriques. La question est de déterminer les polynomes X_1, X_2, \dots, X_n , de degrés $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$, qui satisfont à l'équation

$$S_1 X_1 + S_2 X_2 + \dots + S_n X_n = S x^{\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n + n - 1},$$

S_1, S_2, \dots, S_n étant des séries entières données, et S une série également entière. Ou plutôt, il s'agit d'obtenir un algorithme qui permette le calcul de proche en proche de ces systèmes de n polynomes, et qui soit analogue à l'algorithme par lequel le numérateur et le dénominateur d'une réduite d'une fraction continue se déduisent des numérateurs et dénominateurs des réduites précédentes. D'élégantes considérations, empruntées au Calcul intégral, conduisent l'éminent géomètre « à un nouveau mode de calcul, entièrement différent de l'algorithme

⁽¹⁾ *Sur la généralisation des fractions continues algébriques* (*Annali di Matematica pura ed applicata*, 2^e série, t. XXI, p. 289-308).

élémentaire de la théorie des fractions continues ». Ce nouveau mode de calcul repose sur la considération des systèmes de *polynomes associés*.

La première Partie de notre travail est consacrée à une exposition de la méthode de M. Hermite, mais en prenant un point de départ absolument différent. Dans le cas de deux séries S_1 et S_2 , la méthode des polynomes associés repose, en effet, sur deux lois de récurrence que, avec un certain nombre d'autres, nous avons rencontrées dans un travail antérieur (¹). Une induction facile conduit immédiatement aux lois analogues pour le cas de trois ou d'un plus grand nombre de séries. La possibilité de ramener le cas de n séries, si l'un des degrés $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ est nul, au cas de $n - 1$, que M. Hermite établit quand les séries sont des exponentielles et dont il fait ensuite usage dans le cas de trois séries quelconques, trouve sa lumineuse et complète interprétation dans l'annexion au tableau fondamental, relatif au système des n séries, des n tableaux relatifs aux systèmes de $n - 1$ séries qui se déduisent du premier système.

Dans la seconde Partie, nous faisons l'extension complète, au cas de trois séries, de la théorie des fractions continues simples. Les qualités de l'algorithme qui généralise le calcul des réduites de ce groupe de fractions continues s'aperçoivent immédiatement, et, sans recourir à d'autres considérations que celles, excessivement simples, qui nous ont déjà servi autrefois, nous obtenons aisément la loi générale de formation des suites qui donnent naissance à cet algorithme; tous les modes de calcul des systèmes de polynomes *le plus entièrement analogues* à l'algorithme élémentaire de la théorie des fractions continues en découlent. Nous étudions ensuite plus complètement ceux de ces modes qui sont réguliers et qui généralisent le calcul des réduites des fractions continues régulières; ce sont de beaucoup les plus importants et ceux qui donnent, pour le calcul effectif des polynomes, les méthodes les plus simples. Nous terminons par un aperçu de

(¹) *Sur la représentation approchée d'une fonction par des fractions rationnelles* (Thèse de Doctorat; Gauthier-Villars, 1892). Dans le cours de ce second travail, nous renvoyons à plusieurs reprises à celui-là; nous l'indiquons par le mot *thèse*.

ce que deviennent ces différents résultats dans le cas général de n séries.



PREMIÈRE PARTIE.

LA MÉTHODE DES POLYNOMES ASSOCIÉS.



I. — CAS DE DEUX SÉRIES.

1. Soient S_1 et S_2 deux séries entières ayant un terme constant différent de zéro. Si l'on se propose de déterminer deux polynômes X_1 et X_2 , dont les degrés soient respectivement μ_1 et μ_2 , et tels que l'on ait

$$S_1 X_1 + S_2 X_2 = S x^{\mu_1 + \mu_2 + 1},$$

S désignant une nouvelle série entière de même nature que S_1 et S_2 , le problème est, en général, possible, et un seul système de polynômes satisfait à la question.

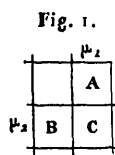
Il peut arriver, dans des cas particuliers, qu'il n'existe pas de tels polynômes; mais nous laisserons de côté ces cas d'où naissent, comme on sait, de grandes difficultés. La méthode de calcul par les polynômes associés n'est pas alors applicable. Ils ne peuvent se présenter, d'ailleurs, que lorsque les coefficients des séries S_1 et S_2 satisfont à certaines relations; nous supposons donc que ces coefficients demeurent arbitraires; à chaque couple de valeurs (μ_1, μ_2) correspond alors sûrement un couple de polynômes, et les degrés de ces polynômes sont effectivement égaux à μ_1 et μ_2 .

Nous plaçons ces différents couples de polynômes dans les cases d'un Tableau à double entrée $T(x, y)$, dont les files parallèles au côté y correspondent à une même valeur de μ_1 , et celles parallèles au côté x à une même valeur de μ_2 . La *direction principale* du Tableau est la direction qui fait des angles égaux avec les côtés x et y . Les droites

perpendiculaires à cette direction, qui passent par les centres des cases, sont les *droites d'égale approximation*; si l'on numérote ces droites, dans l'ordre où elles se présentent, à partir de celle qui est la plus proche du sommet du Tableau, en donnant à celle-ci le numéro 0, à la suivante le numéro 1, etc., toutes les cases dont les centres sont sur la droite dont le numéro est k , correspondent à une même approximation, dont l'ordre est $k + 1$.

2. Soient P et P' , Q et Q' , P_1 et P'_1 trois couples de polynomes placés dans des cases que j'appellerai A , B , C .

Si la disposition relative de ces trois cases est celle-ci :

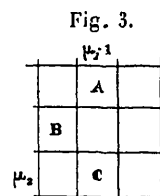
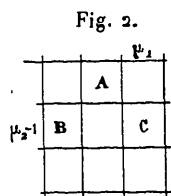


on sait (*Thèse*, n° 62) que l'on a

$$\begin{aligned} P\alpha + Q\beta &= P_1, \\ P'\alpha + Q'\beta &= P'_1, \end{aligned}$$

α et β désignant deux constantes.

Si la disposition relative des trois cases est l'une ou l'autre de celles-ci :



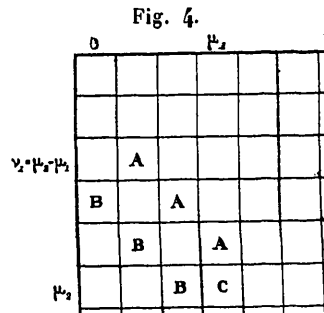
des relations de même forme ont lieu, mais, dans le premier cas, α est un binome du premier degré à terme constant différent de zéro, et β une constante, tandis que, dans le second cas, α est une constante et β un binome du premier degré à terme constant différent de zéro.

Soit maintenant à calculer les polynomes X_1, X_2 de la case (μ_1, μ_2) . Regardons cette case comme la case C de la *fig. 1*; alors, si l'on sup-

pose connus les polynomes qui sont dans les cases A et B, la détermination, qui, comme nous allons le montrer, est immédiate, des constantes α et β , nous donnera X_1 et X_2 en fonction de ces polynomes. Ainsi le calcul des polynomes de la case (μ_1, μ_2) se trouve dépendre de celui des polynomes des cases $(\mu_1, \mu_2 - 1)$, $(\mu_1 - 1, \mu_2)$.

Mais, si l'on suppose que la première de ces deux cases soit la case C de la *fig.* 2, et que la seconde soit la case C de la *fig.* 3, on voit que le calcul de leurs polynomes dépend à son tour du calcul des polynomes des deux cases $(\mu_1 - 1, \mu_2 - 2)$, $(\mu_1 - 2, \mu_2 - 1)$ qui ont exactement la même disposition relative.

Le calcul des polynomes de ces deux cases dépendra alors de même de celui des polynomes des cases $(\mu_1 - 2, \mu_2 - 3)$, $(\mu_1 - 3, \mu_2 - 2)$, et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'une des cases de l'un des couples successifs ainsi obtenus soit contiguë au bord du Tableau $T(x, y)$. On a ainsi la figure que voici :



Partant donc des polynomes du premier couple de cases A, B, on calculera d'abord le binome α et la constante β qui donnent les polynomes de la case A du second couple A, B, et la constante α et le binome β qui donnent les polynomes de la case B de ce couple; on passera ensuite, par la même méthode, aux polynomes du troisième couple A, B, puis à ceux du quatrième, et ainsi de suite. Quand on aura obtenu les polynomes du dernier couple A, B, on déterminera les deux constantes α et β qui permettront enfin de calculer les polynomes X_1 et X_2 de la case C.

Telle est, pour le cas de deux séries, la méthode des polynomes associés de M. Hermite.

3. Nous avons dit que le calcul des éléments α , β , dans chaque cas,

était immédiat. Soit, par exemple, à passer des cases $(\mu_1, \mu_2 - 1)$, $(\mu_1 - 1, \mu_2)$ à la case (μ_1, μ_2) . Les couples de polynomes étant P, P' ; Q, Q' et X_1, X_2 , on a

$$\begin{aligned} S_1 P + S_2 P' &= S'_1 x^{\mu_1 + \mu_2}, \\ S_1 Q + S_2 Q' &= S'_2 x^{\mu_1 + \mu_2}, \\ S_1 X_1 + S_2 X_2 &= \Sigma x^{\mu_1 + \mu_2 + 1}, \end{aligned}$$

S'_1, S'_2 et Σ désignant des séries à terme constant différent de zéro. Dans ce cas, α et β sont des constantes, et l'on a

$$\begin{aligned} P\alpha + Q\beta &= X_1, \\ P'\alpha + Q'\beta &= X_2. \end{aligned}$$

Multiplions la première de ces relations par S_1 , la seconde par S_2 , et ajoutons membre à membre, on obtient simplement

$$S'_1 \alpha + S'_2 \beta = \Sigma x,$$

et le rapport des constantes α et β est déterminé par la condition que le terme en x fasse défaut dans le premier membre.

La même méthode est évidemment applicable aux autres cas.

4. Il nous reste à montrer comment se fait le calcul des polynomes des cases A, B qui forment le couple initial, le calcul du premier système de polynomes associés.

Si, pour fixer les idées, nous supposons $\mu_2 > \mu_1$, la case B est contiguë au côté y du Tableau $T(x, y)$ (*fig. 4*).

Posons $\mu_2 - \mu_1 = \nu_1$, en sorte que les polynomes à calculer, que nous désignerons par P_1, P'_1 et Q_1, Q'_1 soient respectivement de degrés $1, \nu_1$ et $0, \nu_1 + 1$. Diminuons ces nombres d'une unité; on obtient $0, \nu_1 - 1$ et $-1, \nu_1$, et ceci montre que, si l'on savait déterminer, d'une part, une constante P et un polynome P' de degré $\nu_1 - 1$, satisfaisant à la condition

$$S_1 P + S_2 P' = S'_1 x^{\nu_1};$$

d'autre part, un polynome Q' de degré ν_1 , tel que l'on eût

$$S_1 o + S_2 Q' = S_2' x^{\nu_1},$$

les deux couples de polynomes P_1, P_1' et Q_1, Q_1' pourraient se déduire des deux couples P, P' et o, Q' par la loi qui permet de passer d'un système de polynomes associés au système suivant.

Or, la détermination des polynomes P, P' et Q' est immédiate. On aura P et P' en prenant arbitrairement la constante P , puis pour $-P'$, les ν_1 premiers termes du développement en série de

$$\frac{S_1 P}{S_2};$$

quant à Q' , ce sera un monome quelconque de degré ν_1 .

Cette méthode est, au fond, celle que M. Hermite emploie à la page 296 de son Mémoire, où m désigne ce que nous avons appelé ν_1 .

5. Le couple de polynomes P, P' que nous venons de déterminer figure dans le Tableau $T(x, y)$, mais le couple o, Q' n'y figure évidemment pas. Ce qui précède conduit à regarder notre Tableau à double entrée $T(x, y)$ comme limité par deux Tableaux à simple entrée $T(x)$ et $T(y)$. Le Tableau $T(x)$ est constitué par les polynomes P qui satisfont à la relation

$$S_1 P = S_1' x^{\mu_1},$$

où μ_1 prend successivement les valeurs $0, 1, 2, \dots$. Ces polynomes ne sont autres que des monomes de degrés $0, 1, 2, \dots$. Ces monomes successifs doivent être regardés comme écrits sur les divisions successives du côté x de $T(x, y)$. Le Tableau $T(y)$ est le Tableau analogue à $T(x)$, mais relatif à la série S_2 ; les monomes qui le composent sont placés sur les divisions du côté y de $T(x, y)$.

Avec cette extension du Tableau $T(x, y)$, le couple o, Q' y figure maintenant, car on peut évidemment regarder comme formant ce couple, le monome qui figure dans la division de $T(y)$ qui correspond au nombre ν_1 . On voit alors que la case où figurent P et P' , et cette division constituent en quelque sorte un nouveau couple de cases A, B

qui peut être pris comme le couple initial de ceux qui conduisent à la case (μ_1, μ_2) .

II. — CAS DE TROIS SÉRIES.

6. Nous nous proposons d'étendre, maintenant, au cas de trois séries la méthode que nous venons d'étudier dans le cas de deux séries seulement. Il s'agit alors de déterminer les trois polynômes X_1, X_2, X_3 , de degrés μ_1, μ_2, μ_3 , qui satisfont à l'équation

$$S_1 X_1 + S_2 X_2 + S_3 X_3 = S x^{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + 2},$$

condition qui les détermine, en général, complètement.

Nous disposerons donc, d'abord, ces systèmes de trois polynômes dans les cases d'un Tableau à triple entrée $T(x, y, z)$, dont les tranches parallèles au plan yz correspondront à une même valeur de μ_1 , celles parallèles au plan zx à une même valeur de μ_2 ; celles, enfin, parallèles au plan xy , à une même valeur de μ_3 .

La direction qui fait des angles égaux avec les trois arêtes du Tableau est la *direction principale*. Toutes les cases qui correspondent à une même approximation ont leurs centres placés dans un même plan P perpendiculaire à la direction principale; et si l'on numérote ces plans, en donnant à celui qui est le plus près du sommet du Tableau le n° 0, au suivant le n° 1, au suivant le n° 2, etc., le plan dont le numéro est k contient tous les systèmes de trois polynômes dont la somme des degrés est k , et correspond, par suite, à l'approximation d'ordre $k + 2$. Ces plans P sont les *plans d'égale approximation*.

7. Considérons les trois cases

$$\begin{aligned} & (m, \quad m' - 1, m'' - 1), \\ & (m - 1, m', \quad m'' - 1), \\ & (m - 1, m' - 1, m''), \end{aligned}$$

qui sont placées dans un même plan P , dont chacune est contiguë

aux deux autres, et qui sont, toutes trois, contiguës à la case

$$(m, m', m'') \quad (').$$

Nous les appellerons, dans l'ordre où nous les avons placées, A, B, C. Elles vont jouer le rôle des couples de cases A, B considérées dans le cas de deux séries.

Soient

$$\begin{array}{ccc} P, & P', & P'', \\ Q, & Q', & Q'', \\ R, & R', & R'' \end{array}$$

les systèmes de trois polynomes qui figurent respectivement dans les cases considérées. Nous allons d'abord montrer comment ils peuvent servir au calcul des polynomes X_1, X_2, X_3 , qui figurent dans la case (m, m', m'') .

On a d'abord les relations

$$\begin{aligned} S_1 P + S_2 P' + S_3 P'' &= S_1' x^{m+m'+m''}, \\ S_1 Q + S_2 Q' + S_3 Q'' &= S_2' x^{m+m'+m''}, \\ S_1 R + S_2 R' + S_3 R'' &= S_3' x^{m+m'+m''}, \\ S_1 X_1 + S_2 X_2 + S_3 X_3 &= \Sigma x^{m+m'+m''+2}. \end{aligned}$$

Par analogie avec le cas précédemment examiné, nous poserons

$$\begin{aligned} P\alpha + Q\beta + R\gamma &= X_1, \\ P'\alpha + Q'\beta + R'\gamma &= X_2, \\ P''\alpha + Q''\beta + R''\gamma &= X_3; \end{aligned}$$

(') Il existe un second système de trois cases qui jouit de toutes les propriétés énoncées; c'est le système

$$\begin{aligned} (m-1, m', m''), \\ (m, m'-1, m''), \\ (m, m', m''-1). \end{aligned}$$

Il pourrait servir tout aussi bien que celui que nous adoptons pour développer les considérations qui vont suivre; mais, comme notre but n'est actuellement que de retrouver les résultats de M. Hermite, nous nous limitons au seul système indiqué.

multiplions ces équations respectivement par S_1, S_2, S_3 et ajoutons membre à membre, on obtient la nouvelle équation

$$S'_1\alpha + S'_2\beta + S'_3\gamma = \Sigma x^2.$$

On déterminera les trois nombres α, β, γ par la condition que, dans le premier membre, ne figure pas de terme constant ni de terme du premier degré en x ; alors X_1, X_2, X_3 seront bien les polynomes de degrés m, m', m'' cherchés.

On voit que, si nous désignons par D la case où figurent ces polynomes, et que si, pour figurer les relations linéaires qui lient les polynomes de quatre cases consécutives A, B, C, D, nous dressions des Tableaux comme nous l'avons fait dans le cas de deux séries (*Thèse*, n° 62), ce sont les trois nombres 0, 0, 0 qu'il faudrait faire figurer, pour la disposition actuelle des quatre cases, dans la case D.

8. Maintenant, au lieu de supposer que la case D soit la case (m, m', m'') , nous allons supposer qu'elle est successivement chacune des trois cases

$$\begin{aligned} &(m + 1, m', m''), \\ &(m, m' + 1, m''), \\ &(m, m', m'' + 1), \end{aligned}$$

qui ne sont autres que les trois cases A, B, C que l'on a déplacées parallèlement à la direction principale, dans le sens qui les éloigne du sommet du Tableau $T(x, y, z)$, jusqu'à ce qu'elles soient venues coïncider avec les trois cases placées d'une façon analogue qui viennent après elles.

Soient

$$\begin{aligned} P_1, & P'_1, P''_1, \\ Q_1, & Q'_1, Q''_1, \\ R_1, & R'_1, R''_1 \end{aligned}$$

les systèmes de trois polynomes qui figurent dans ces nouvelles cases. Occupons-nous d'abord du premier.

Nous poserons

$$P\alpha + Q\beta + R\gamma = P_1,$$

$$P'\alpha + Q'\beta + R'\gamma = P'_1,$$

$$P''\alpha + Q''\beta + R''\gamma = P''_1,$$

et, si l'on tient compte de l'approximation donnée par les polynomes des cases A, B, C, D, qui, pour cette dernière, s'exprime par la relation

$$S_1 P_1 + S_2 P'_1 + S_3 P''_1 = \Sigma, x^{m+m'+m''+3},$$

on en conclut l'équation

$$S'_1 \alpha + S'_2 \beta + S'_3 \gamma = \Sigma, x^3.$$

Les quantités α , β , γ doivent être déterminées de telle sorte que le terme constant et les termes du premier et du second degré disparaissent dans le premier membre, et que, en outre, P_1 , P'_1 , P''_1 aient pour degrés les nombres $m + 1$, m' , m'' . Or, pour cela, il suffit que α soit un binome du premier degré et β et γ des constantes, car on a ainsi les quatre constantes nécessaires, et P_1 , P'_1 , P''_1 ont bien les degrés voulus. Ce sont ainsi les nombres 1, 0, 0 qui devraient être placés, pour la disposition actuelle des cases A, B, C, D, dans cette dernière.

Par analogie, on peut conclure que, si la case D est la seconde ou la troisième des cases considérées, les nombres à adopter sont 0, 1, 0, dans le premier cas, 0, 0, 1 dans le second.

9. Les trois systèmes de polynomes des cases A, B, C sont les polynomes que M. Hermite nomme les polynomes associés d'ordre m , m' , m'' , et la méthode de calcul que nous venons d'obtenir est celle que fait connaître l'éminent géomètre pour passer de ce système de polynomes associés à celui d'ordre $m + 1$, $m' + 1$, $m'' + 1$.

Il est dès lors aisé de voir comment on pourra calculer les polynomes X_1 , X_2 , X_3 de la case (μ_1, μ_2, μ_3) . Ce calcul dépend, comme nous l'avons vu, de celui des polynomes associés d'ordre μ_1 , μ_2 , μ_3 ; celui-ci, du calcul des polynomes associés d'ordre $\mu_1 - 1$, $\mu_2 - 1$,

$\mu_3 - 1$; ce dernier, du calcul des polynomes associés d'ordre immédiatement inférieur, et ainsi de suite. Ceci revient à des déplacements successifs de l'ensemble des cases A, B, C parallèlement à la direction principale, dans le sens qui rapproche du sommet du Tableau $T(x, y, z)$, de façon que cet ensemble vienne coïncider successivement avec tous ceux qui, placés avant lui, ont la même disposition. On peut continuer ces déplacements jusqu'à ce que l'une des cases vienne à être contiguë à l'une des faces du Tableau; une seconde des trois cases est d'ailleurs alors contiguë également à la même face (¹).

10. Supposons, pour fixer les idées, $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \mu_3$; alors, c'est à la face yz que les deux cases deviennent contiguës, et l'on est ramené au calcul des polynomes associés d'ordre

$$1, \quad \mu_2 - \mu_1 + 1, \quad \mu_3 - \mu_1 + 1,$$

ou, en posant $\mu_2 - \mu_1 = \nu_1$, $\mu_3 - \mu_1 = \nu_2$, au calcul des trois systèmes de polynomes de degrés

$$\begin{array}{l} 1, \quad \nu_1, \quad \nu_2, \\ 0, \quad \nu_1 + 1, \quad \nu_2, \\ 0, \quad \nu_1, \quad \nu_2 + 1. \end{array}$$

Diminuons ces degrés d'une unité; on obtient les nombres

$$\begin{array}{l} 0, \quad \nu_1 - 1, \quad \nu_2 - 1, \\ -1, \quad \nu_1, \quad \nu_2 - 1, \\ -1, \quad \nu_1 - 1, \quad \nu_2, \end{array}$$

et l'on voit que, si l'on connaissait trois systèmes de polynomes composés, le premier, d'une constante P, d'un polynome P' de degré

(¹) Ce dernier fait ne se présenterait pas, si l'on faisait usage du système de trois cases indiqué dans la Note précédente (n° 7), et le mode de calcul qui va être employé maintenant devrait être remplacé par un autre qu'il serait facile, mais qu'il est sans intérêt d'imaginer.

$\nu_1 - 1$ et d'un polynome P'' de degré $\nu_2 - 1$, tels que

$$S_1 P + S_2 P' + S_3 P'' = S'_1 x^{\nu_1 + \nu_2};$$

le second, d'un polynome Q' de degré ν_1 et d'un polynome Q'' de degré $\nu_2 - 1$, tels que

$$S_1 Q + S_2 Q' + S_3 Q'' = S'_2 x^{\nu_1 + \nu_2},$$

le troisième, d'un polynome R' de degré $\nu_1 - 1$ et d'un polynome R'' de degré ν_2 , tels que

$$S_1 R + S_2 R' + S_3 R'' = S'_3 x^{\nu_1 + \nu_2},$$

le système

$$\begin{array}{ccc} P, & P', & P'', \\ 0, & Q', & Q'', \\ 0, & R', & R'' \end{array}$$

pourrait être regardé comme un système de polynomes associés, et servir de point de départ au calcul.

Or, les polynomes Q' et Q'' , ainsi que les polynomes R' et R'' peuvent être regardés comme connus, car ce sont des couples de polynomes approchés se rapportant au cas de deux séries S_2 et S_3 seulement. Il ne reste qu'à montrer comment s'obtiennent les polynomes P, P', P'' de degrés $0, \nu_1 - 1, \nu_2 - 1$.

11. Voici l'interprétation de la méthode suivie par M. Hermite.

Nous regardons la face yz du Tableau $T(x, y, z)$, avec les divisions qu'y figurent les faces des cases contiguës, comme un Tableau à double entrée $T(y, z)$, où nous faisons figurer les couples de polynomes qui donnent l'approximation maximum pour les deux séries S_2 et S_3 .

Posons $\nu_1 - 1 = \rho_1, \nu_2 - 1 = \rho_2$. Nous considérons la case de $T(x, y, z)$, qui correspond aux nombres $0, \rho_1, \rho_2 - 1$, et la case de $T(y, z)$, qui correspond aux nombres ρ_1 et ρ_2 . Soient P, P', P'' les polynomes qui figurent dans la première, Q', Q'' ceux qui figurent dans la seconde; au moyen de ces polynomes se calculent aisément ceux de la case $(0, \rho_1, \rho_2)$ que nous désignerons par P_1, P'_1, P''_1 .

On a les relations

$$\begin{aligned} S_1 P + S_2 P' + S_3 P'' &= S'_1 x^{\rho_1 + \rho_2 + 1}, \\ S_2 Q' + S_3 Q'' &= S'_2 x^{\rho_1 + \rho_2 + 1}; \end{aligned}$$

multiplions la seconde par α , et ajoutons membre à membre, on obtient

$$S_1 P + S_2 (P' + \alpha Q') + S_3 (P'' + \alpha Q'') = (S'_1 + \alpha S'_2) x^{\rho_1 + \rho_2 + 1}.$$

Si l'on détermine le nombre α de façon à faire disparaître le terme indépendant de x dans $S'_1 + \alpha S'_2$, l'égalité devient

$$S_1 P_1 + S_2 P'_1 + S_3 P''_1 = \Sigma x^{\rho_1 + \rho_2 + 1},$$

P_1 étant de degré 0, P'_1 de degré ρ_1 , et P''_1 de degré ρ_2 , en sorte que ce sont les polynomes cherchés.

Ainsi, le calcul de ces polynomes dépend de ceux qui correspondent à la case $(0, \rho_1, \rho_2 - 1)$; le calcul de ceux-ci se ramène de même à celui des polynomes de la case $(0, \rho_1, \rho_2 - 2)$, et ainsi de suite; on arrive enfin aux polynomes de la case $(0, \rho_1, 0)$.

Ceux-ci pourraient s'obtenir immédiatement, car, en les désignant par P, P', P'' , on doit avoir

$$S_1 P + S_2 P' + S_3 P'' = S'_1 x^{\rho_1 + 2};$$

on déterminerait les constantes P et P'' par la condition que le développement en série entière de

$$\frac{S_1 P + S_3 P''}{S_2}$$

ne contient pas de terme en $x^{\rho_1 + 1}$ et $-P'$ serait alors le polynome de degré ρ_1 formé par les termes précédents du développement. Cette marche serait analogue à celle suivie dans le cas de deux séries (n° 4), mais M. Hermite fait encore dépendre le calcul de ces polynomes de ceux que, par analogie avec ce qui précède, nous placerions dans le

Tableau à double entrée $T(x, y)$ constitué par la face xy du Tableau $T(x, y, z)$, et relatif aux deux fonctions S_1 et S_2 .

Désignant par P_1, P'_1, P''_1 les polynômes à calculer de la case $(0, \rho_1, 0)$, par (P, P') ceux de la case $(0, \rho_1)$ dans $T(x, y)$, par Q, Q'' ceux de la case $(\rho_1, 0)$ dans $T(y, z)$, on a

$$\begin{aligned} S_1 P + S_2 P' &= S'_1 x^{\rho_1+1}, \\ S_2 Q + S_3 Q'' &= S'_2 x^{\rho_1+1}, \end{aligned}$$

d'où

$$S_1 P + S_2 (P' + \alpha Q') + S_3 \alpha Q'' = (S'_1 + \alpha S'_2) x^{\rho_1+1}.$$

Il suffit de déterminer la constante α de telle sorte que le terme indépendant de x dans $S'_1 + \alpha S'_2$ soit nul, pour que les multiplicateurs de S_1, S_2 et S_3 dans le premier membre deviennent les polynômes demandés P_1, P'_1, P''_1 .

En définitive, la méthode employée pour parvenir aux polynômes de la case $(0, \rho_1, \rho_2)$ consiste à calculer de proche en proche, et en se servant des couples de polynômes qui figurent dans les Tableaux à double entrée $T(x, y), T(y, z)$, les systèmes de polynômes de toute la file de cases placée perpendiculairement au plan xy , partant de ce plan et aboutissant à la case considérée. On aperçoit ainsi bien clairement ce qu'il y a d'arbitraire dans cette marche, comme cela va ressortir avec plus d'évidence encore de la seconde Partie de ce Travail.

SECONDE PARTIE.

EXTENSION, AU CAS DE TROIS SÉRIES, DE LA THÉORIE DES FRACTIONS CONTINUES SIMPLES.

12. Les deux lois particulières de récurrence, qui, dans le cas de deux séries, donnent naissance à la méthode de calcul par les poly-

nomes associés, ne sont pas de celles qui s'offrent dans la théorie des fractions continues simples; elles se présentent seulement quand on généralise la définition de ces fractions, en acceptant que le monome des numérateurs partiels puisse être de degré zéro. J'ai montré (*Thèse*, n° 64) combien cette légère extension de la définition donnait de complication aux résultats, si simples dans le cas de Tableaux uniquement composés de fractions normales, qui se présentent dans la théorie des fractions continues simples.

Il est bien naturel de penser que cette même complication se retrouve quand on passe au cas de trois séries. Aussi, laissant de côté la voie qui conduirait à chercher l'extension, à ce cas, de la théorie des fractions continues simples *généralisées*, où nous retrouverions, parmi d'autres, les trois lois particulières de récurrence sur lesquelles se fonde le calcul par les polynomes associés, allons-nous poursuivre la seule extension de la théorie des fractions continues simples *elles-mêmes*.

I. — LES ALGORITHMES GÉNÉRAUX.

13. Nous considérons trois systèmes de polynomes

$$\begin{array}{ccc} P, & P', & P'', \\ Q, & Q', & Q'', \\ R, & R', & R'', \end{array}$$

correspondant aux cases (p, p', p'') , (q, q', q'') , (r, r', r'') , et nous nous proposons d'abord d'évaluer les degrés extrêmes du déterminant (*Thèse*, n° 51) Δ formé par ces polynomes.

Des relations

$$\begin{aligned} S_1 P + S_2 P' + S_3 P'' &= S'_1 x^{p+p'+p''+2}, \\ S_1 Q + S_2 Q' + S_3 Q'' &= S'_2 x^{q+q'+q''+2}, \\ S_1 R + S_2 R' + S_3 R'' &= S'_3 x^{r+r'+r''+2}, \end{aligned}$$

on déduit

$$\Delta = \frac{\begin{vmatrix} S'_1 x^{p+p'+p''+2} & P' & P'' \\ S'_2 x^{q+q'+q''+2} & Q' & Q'' \\ S'_3 x^{r+r'+r''+2} & R' & R'' \end{vmatrix}}{S_1},$$

et l'on en conclut que le degré du terme de moindre degré dans Δ est égal au plus petit des trois nombres

$$p + p' + p'' + 2, \quad q + q' + q'' + 2, \quad r + r' + r'' + 2.$$

Si, dans Δ , on remplace chaque polynome par son degré, on obtient le déterminant

$$\begin{vmatrix} p & p' & p'' \\ q & q' & q'' \\ r & r' & r'' \end{vmatrix};$$

le degré le plus élevé dans Δ sera la somme la plus élevée obtenue en faisant la somme des facteurs dans chaque terme du développement de ce déterminant.

14. Cherchons, par exemple, les degrés des facteurs α, β, γ des formules de récurrence

$$P\alpha + Q\beta + R\gamma = P_1,$$

$$P'\alpha + Q'\beta + R'\gamma = P'_1,$$

$$P''\alpha + Q''\beta + R''\gamma = P''_1,$$

en supposant que l'on ait affaire aux quatre cases placées suivant la direction principale,

$$\begin{aligned} &(m, m', m''); \quad (m + 1, m' + 1, m'' + 1); \\ &(m + 2, m' + 2, m'' + 2); \quad (m + 3, m' + 3, m'' + 3). \end{aligned}$$

Les degrés extrêmes de Δ sont

$$m + m' + m'' + 2 \quad \text{et} \quad m + m' + m'' + 3;$$

il se réduit donc à un binome.

Si l'on évalue de même les degrés extrêmes des numérateurs de α, β, γ , on trouve

$$m + m' + m'' + 5 \quad \text{et} \quad m + m' + m'' + 6,$$

pour le numérateur de α ;

$$m + m' + m'' + 2 \quad \text{et} \quad m + m' + m'' + 5,$$

pour le numérateur de β ;

$$m + m' + m'' + 2 \quad \text{et} \quad m + m' + m'' + 4,$$

pour le numérateur de γ .

Donc, α , β , γ sont de la forme (1)

$$\alpha = \frac{(a + a'x)x^3}{d + d'x},$$

$$\beta = \frac{b + b'x + b''x^2 + b'''x^3}{d + d'x},$$

$$\gamma = \frac{c + c'x + c''x^2}{d + d'x}.$$

15. Revenons au cas général, et proposons-nous de constituer avec des cases du tableau $T(x, y, z)$ une suite telle que les polynomes de ces cases donnent lieu à des lois de récurrence analogues à celles qu'offrent les termes des réduites successives d'une fraction continue simple. Si l'on désigne, comme dans l'exemple précédent, par α , β , γ les coefficients des formules de récurrence, α devra être (*Thèse*, n° 42) un monome dont le coefficient et le degré soient différents de

(1) M. Hermite a, depuis longtemps, reconnu l'existence de ce diviseur du premier degré $d + d'x$, dans le cas qui nous occupe. Les expressions précédentes de α , β , γ m'ont été communiquées par lui, sans démonstration, dans une lettre datée de Paris, le 13 janvier 1892, et où l'illustre géomètre suppose, toutefois, que les degrés m , m' , m'' sont égaux.

Il n'est pas sans intérêt d'ajouter que c'est la présence de ce diviseur du premier degré qui l'a fait renoncer à s'engager dans une voie si différente de celle des fractions continues, et l'a conduit à exposer, *comme rétablissant l'analogie perdue*, la méthode de calcul par les polynomes associés, rencontrée, d'autre part, dans des questions de Calcul intégral. Les résultats de notre travail montreront que nous ne nous rendons pas à cette dernière opinion de l'illustre maître.

zéro, β et γ devront être des polynomes dont le terme constant soit différent de zéro.

Soient

$$A, B, \dots, K, L, M, N, \dots$$

une telle suite, et

$$(a_1, a_2, a_3); (b_1, b_2, b_3); \dots; \\ (k_1, k_2, k_3); (l_1, l_2, l_3); (m_1, m_2, m_3); (n_1, n_2, n_3); \dots$$

les systèmes de degrés correspondants.

Pour que les coefficients des formules de récurrence soient entiers, il faut d'abord que le déterminant Δ relatif à trois cases consécutives quelconques soit un monome.

En second lieu, Δ étant un monome, et α devant être également un monome dont le degré soit au moins égal à l'unité, la moins avancée des trois cases consécutives K, L, M, doit être moins avancée que la moins avancée des trois cases consécutives suivantes, L, M, N; le degré d'avancement d'une case dans le tableau $T(x, y, z)$ étant caractérisé par le numéro du plan d'égale approximation qui la contient. Il faut pour cela que la case K soit moins avancée que chacune des cases L, M, N, et cette condition suffit. On voit d'ailleurs immédiatement qu'alors β et γ sont nécessairement des polynomes à termes constants différents de zéro, et l'on arrive à cette conclusion :

Les lois de récurrence qui rattachent les uns aux autres les polynomes d'une suite de cases du Tableau $T(x, y, z)$ seront celles qui généralisent la loi de formation des réduites d'une fraction continue simple, si cette suite est composée avec des cases de plus en plus avancées dans le Tableau $T(x, y, z)$, et si le déterminant Δ formé par les polynomes de trois cases consécutives quelconques se réduit à un monome.

16. On devra donc avoir

$$a_1 + a_2 + a_3 < b_1 + b_2 + b_3 < \dots \\ < k_1 + k_2 + k_3 < l_1 + l_2 + l_3 \\ < m_1 + m_2 + m_3 < n_1 + n_2 + n_3 < \dots,$$

et, dans chaque déterminant tel que

$$\begin{vmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{vmatrix},$$

la somme des facteurs d'un terme quelconque ne devra pas dépasser la somme des éléments de la première ligne augmentée de 2.

Si l'on pose

$$\begin{aligned} l_1 - k_1 &= \lambda_1, & m_1 - k_1 &= \mu_1, \\ l_2 - k_2 &= \lambda_2, & m_2 - k_2 &= \mu_2, \\ l_3 - k_3 &= \lambda_3, & m_3 - k_3 &= \mu_3, \end{aligned}$$

les six nombres entiers positifs, négatifs ou nuls $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3$, devront satisfaire aux inégalités suivantes

$$\begin{aligned} 0 &< \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 < \mu_1 + \mu_2 + \mu_3, \\ \lambda_2 + \mu_3 &\leq 2, & \lambda_3 + \mu_1 &\leq 2, & \lambda_1 + \mu_2 &\leq 2, \\ \lambda_3 + \mu_2 &\leq 2, & \lambda_1 + \mu_3 &\leq 2, & \lambda_2 + \mu_1 &\leq 2. \end{aligned}$$

Ce système d'inégalités admet 51 solutions; mais il est évident que toutes ne sont pas nécessairement acceptables : les différences $\mu_1 - \lambda_1, \mu_2 - \lambda_2, \mu_3 - \lambda_3$, égales respectivement aux différences $m_1 - l_1, m_2 - l_2, m_3 - l_3$, jouent, en effet, relativement aux trois systèmes

$$(l_1, l_2, l_3), \quad (m_1, m_2, m_3), \quad (\mu_1, \mu_2, \mu_3),$$

le même rôle que $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ relativement aux systèmes

$$(k_1, k_2, k_3), \quad (l_1, l_2, l_3), \quad (m_1, m_2, m_3);$$

donc, parmi les solutions obtenues, il faut rejeter celles pour lesquelles les différences $\mu_1 - \lambda_1, \mu_2 - \lambda_2, \mu_3 - \lambda_3$ ne constituent pas un des groupes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ qui figurent dans les 51 solutions; pour ces solutions, les inégalités imposées sont bien vérifiées en ce qui concerne les cases K, L, M, mais elles ne peuvent plus l'être en ce qui concerne

les cases L, M, N; la suite ne peut pas être prolongée au delà de la case M.

En excluant ce cas, on est conduit à la suppression des six solutions

$$\begin{aligned} \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 &= -1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 -1 \ 1 -1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \\ \mu_1, \mu_2, \mu_3 &= 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 2 \ 1 \ 2 \ 1 \ 2 \ 1 \ 1 \end{aligned}$$

et il en reste quarante-cinq dont voici le Tableau :

1. $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1.$

1° $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 2.$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 =$	-1	1	1	1	1	-1	1	-1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	
$\mu_1, \mu_2, \mu_3 =$	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1
	1	-1	1	-1	1	1	1	1	-1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1
	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1
	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1
	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1
	-1	0	2	0	2	-1	2	-1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0
	0	0	2	0	2	0	2	0	0	-1	1	2	1	2	-1	2	-1	1	1
	0	-1	2	-1	2	0	2	0	-1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0
	0	0	2	0	2	0	2	0	0	1	-1	2	-1	2	1	2	1	-1	-1
	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0
	0	0	2	0	2	0	2	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0

2° $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 3.$

0	0	1	0	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	0	1	0	0
0	1	2	1	2	0	2	0	1
0	0	1	0	1	0	1	0	0
1	0	2	0	2	1	2	1	0

$$2. \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2.$$

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 3.$$

$$\begin{array}{|cccccccc|} \hline 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Prenons arbitrairement une de ces solutions, et soit

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3,$$

$$\beta_1, \beta_2, \beta_3$$

celle que nous adoptons. Les différences

$$\beta_1 - \alpha_1 = \alpha'_1, \quad \beta_2 - \alpha_2 = \alpha'_2, \quad \beta_3 - \alpha_3 = \alpha'_3$$

figurent une ou plusieurs fois parmi les systèmes de valeurs de $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$; considérons une solution où il en soit ainsi, et soient $\beta'_1, \beta'_2, \beta'_3$ les valeurs de μ_1, μ_2, μ_3 dans cette solution. Du système

$$\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3,$$

$$\beta'_1, \beta'_2, \beta'_3,$$

ainsi déduit du système initial, déduisons, par la même méthode, un troisième système

$$\alpha''_1, \alpha''_2, \alpha''_3,$$

$$\beta''_1, \beta''_2, \beta''_3,$$

et continuons ainsi indéfiniment. Soit maintenant (a_1, a_2, a_3) une case quelconque du Tableau $T(x, y, z)$:

Pour la suite de cases

$$(a_1, a_2, a_3); \quad (a_1 + \alpha_1, a_2 + \alpha_2, a_3 + \alpha_3);$$

$$(a_1 + \alpha_1 + \alpha'_1, a_2 + \alpha_2 + \alpha'_2, a_3 + \alpha_3 + \alpha'_3); \quad \dots,$$

les lois de récurrence généralisent la loi de formation des réduites

d'une fraction continue simple; et réciproquement, toute suite de cases qui jouit de cette propriété est formée comme la suite précédente.

Ainsi se trouve étendu au cas de trois séries S_1, S_2, S_3 le théorème relatif à la multiplicité des fractions continues simples (*Thèse*, nos 52, 55).

17. Nous allons examiner maintenant quels sont les degrés des éléments α, β, γ des formules de récurrence relatives à quatre cases consécutives quelconques, K, L, M, N, de la suite précédente.

Le calcul du degré du monome α est immédiat; il est en effet égal à la différence des degrés des déterminants Δ relatifs aux systèmes de cases K, L, M et L, M, N, déterminants qui se réduisent l'un et l'autre à un monome; il est donc égal à

$$(l_1 + l_2 + l_3 + 2) - (k_1 + k_2 + k_3 + 2) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3,$$

c'est-à-dire, suivant le cas, soit à un soit à deux.

Le degré de β est la différence des degrés des déterminants Δ relatifs aux systèmes de cases K, L, M et K, M, N; celui de γ la différence analogue pour les systèmes de cases K, L, M et K, L, N. Ces différences ne changent pas si nous retranchons aux degrés des trois polynomes de K respectivement k_1, k_2, k_3 , ce qui réduit ces degrés à zéro, et diminuons, en même temps, des mêmes quantités, les polynomes correspondants dans chacune des cases L, M, N. Ceci revient à remplacer les quatre cases K, L, M, N par quatre autres ayant la *même disposition relative*, dont la première soit au sommet du Tableau $T(x, y, z)$.

Ces dispositions relatives sont au nombre de 231, qui se déduisent de 77 d'entre elles par des permutations circulaires effectuées simultanément sur les trois nombres de chaque case, en sorte que, si

$$(0, 0, 0),$$

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3),$$

$$(\mu_1, \mu_2, \mu_3),$$

$$(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$$

est l'une des dispositions relatives, les dispositions

$$\begin{aligned} & (0, 0, 0), & (0, 0, 0), \\ & (\lambda_2, \lambda_3, \lambda_1), & (\lambda_3, \lambda_1, \lambda_2), \\ & (\mu_2, \mu_3, \mu_1), & (\mu_3, \mu_1, \mu_2), \\ & (\nu_2, \nu_3, \nu_1), & (\nu_3, \nu_1, \nu_2) \end{aligned}$$

en sont deux autres : circonstance qui a son origine dans la symétrie ternaire du Tableau $T(x, y, z)$. Il est, en outre, évident que, pour les deux dernières dispositions, les degrés des éléments α, β, γ sont les mêmes respectivement que pour la première, et il suffit, par conséquent, pour évaluer ces degrés, de considérer seulement les 77 dispositions dont il vient d'être question.

Si l'on fait le calcul, on arrive à ce résultat très simple :

Les degrés des éléments α, β, γ des formules de récurrence n'admettent que quatre systèmes de valeurs, à savoir

$$(1, 0, 0); \quad (1, 1, 0); \quad (1, 1, 1); \quad (2, 1, 1).$$

18. Nous donnons ci-contre les 77 dispositions relatives considérées. Elles sont disposées en quatre groupes, toutes les dispositions d'un même groupe correspondant à un même système de valeurs des degrés de α, β, γ . Pour obtenir l'une des dispositions, il suffit de prendre $(0, 0, 0)$ dans la première colonne de l'un des groupes, puis $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3); (\mu_1, \mu_2, \mu_3); (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, respectivement dans la deuxième, la troisième et la quatrième colonne du même groupe, en tenant compte de l'enchaînement figuré par les accolades.

Ces Tableaux sont, pour le cas de trois séries, les analogues de ceux que nous avons fait connaître, avec une autre disposition, dans le cas de deux séries (*Thèse*, n° 53).

Degrés de $\alpha, \beta, \gamma = 1, 0, 0;$

1, 1, 0;

1, 1, 1;

2, 1, 1.

$000 \left\{ \begin{array}{l} -111 \\ 001 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 011 \\ 101 \\ 110 \end{array} \right\} 111$	$000 \left\{ \begin{array}{l} 001 \\ -112 \\ 002 \\ 011 \\ 012 \\ -1-12 \\ 101 \\ 102 \\ 110 \\ 111 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 012 \\ 102 \\ 111 \\ 012 \\ 102 \\ 111 \\ 112 \\ 102 \\ 112 \\ 012 \\ 102 \\ 112 \\ 012 \\ 102 \\ 111 \\ 012 \\ 102 \\ 121 \\ 112 \\ 012 \\ 102 \\ 112 \end{array} \right\}$	$000 \left\{ \begin{array}{l} -102 \\ -111 \\ -120 \\ 002 \\ 001 \\ 101 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 002 \\ 011 \\ 020 \\ 011 \\ 011 \\ 011 \end{array} \right\}$	$000 \left\{ \begin{array}{l} 011 \\ 111 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 022 \\ 112 \\ 121 \\ 122 \\ 202 \\ 211 \\ 212 \\ 220 \\ 221 \end{array} \right\}$
			$\left\{ \begin{array}{l} -113 \\ 003 \\ 012 \\ 013 \\ -1-13 \\ 102 \\ 103 \\ 111 \\ 112 \\ -122 \\ 012 \\ 021 \\ 022 \\ 102 \\ 112 \\ 120 \\ 121 \\ -131 \\ 021 \\ 030 \\ 031 \\ 111 \\ 120 \\ 121 \\ 13-1 \\ 130 \\ -113 \\ 003 \\ 013 \\ -1-13 \\ 103 \\ -122 \\ 021 \\ 022 \\ 120 \\ 121 \\ 13-1 \\ 130 \\ 002 \\ 013 \\ -1-13 \\ 103 \\ -122 \\ 021 \\ 022 \\ 120 \\ 121 \\ 2-12 \\ 201 \\ 202 \\ 210 \\ 211 \end{array} \right\}$

II. — LES ALGORITHMES RÉGULIERS.

19. Nous dirons que le calcul de proche en proche des polynomes d'une suite de cases, comme celles dont nous venons d'obtenir les lois de formation, est *régulier*, si le monome α et les polynomes β et γ conservent chacun le même degré, quel que soit le système de polynomes que l'on calcule au moyen des trois précédents.

Il résulte de cette définition que *quatre types d'algorithmes réguliers seulement sont possibles*; ils correspondraient respectivement aux quatre systèmes différents de valeurs des degrés de α , β , γ dont nous avons reconnu l'existence. Ils constituent la généralisation du calcul des réduites successives des fractions continues régulières (*Thèse*, n° 49).

20. Cherchons d'abord si des algorithmes réguliers existent, pour lesquels les degrés de α , β , γ soient respectivement égaux à 2, 1, 1.

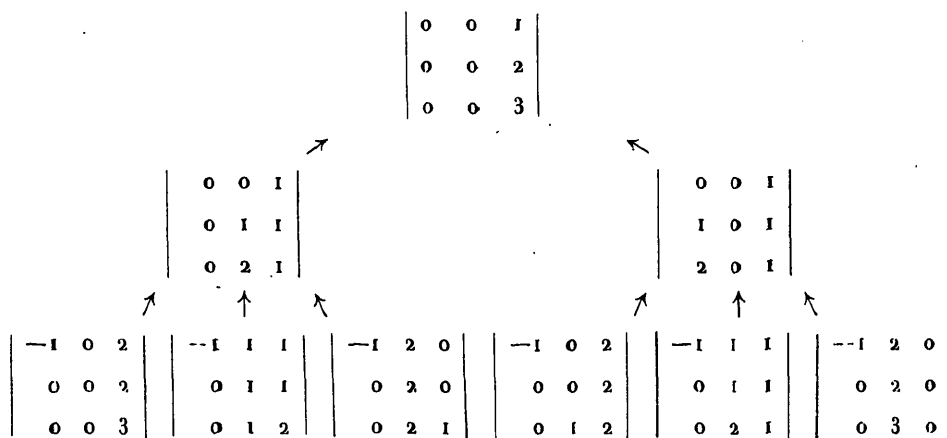
Pour qu'un tel algorithme puisse être obtenu, il faut et il suffit que l'on puisse former une suite de cases telle que quatre cases consécutives quelconques aient l'une des vingt-sept dispositions relatives pour lesquelles α , β et γ ont ces degrés. On voit immédiatement que cela est impossible, puisque, si quatre cases ont une telle disposition relative, la disposition de la troisième relativement à la seconde est caractérisée par les nombres 1, 0, 0 ou 0, 0, 1 ou enfin 0, 1, 0, ce qui n'a lieu dans aucune des vingt-sept dispositions considérées. Nous obtenons donc ce résultat négatif :

Il n'existe aucune suite de cases qui conduise à l'algorithme régulier dans lequel α serait un monome du second degré, et β et γ des binomes du premier degré.

21. Passons aux algorithmes où α , β , γ auraient les degrés 1, 1, 1.

Le nombre des dispositions relatives à considérer est alors beaucoup plus considérable et s'élève à 123; mais, par des considérations analogues à la précédente, on en exclut immédiatement un grand nombre,

et il n'en subsiste que 33, qui se déduisent, par des permutations circulaires, des onze suivantes, où nous avons omis d'écrire, dans chacune d'elles, la première ligne 0, 0, 0.



Imaginons que l'on ait associé à chaque disposition les deux qui s'en déduisent par permutation. On voit alors immédiatement que chacune des trois dispositions de la première ligne donne naissance, par sa répétition, à des suites de cases auxquelles correspond l'algorithme régulier du type considéré. Ces suites constituent les files placées perpendiculairement aux trois faces du Tableau $T(x, y, z)$.

L'algorithme que nous considérons est exactement l'analogie de celui par lequel s'obtiennent les réduites successives de la fraction continue régulière de la première classe et du premier type, et la disposition de cases correspondante est aussi celle des réduites de cette fraction dans le Tableau à double entrée où elles sont figurées.

Si nous considérons maintenant l'une des six dispositions relatives de la seconde ligne du schéma précédent, nous trouvons qu'aucune ne peut s'enchaîner avec elle-même, mais que toutes s'enchaînent, comme l'indiquent les flèches, avec l'une des trois de la ligne précédente. On voit ainsi que chacune de ces dispositions ne peut se présenter qu'une fois au plus, dans le cours d'une suite donnant naissance à l'algorithme régulier, la disposition relative suivante étant alors nécessairement l'une des trois premières, qui ne s'enchaîne plus qu'avec elle-même.

Cette même circonstance se retrouve pour les dix-huit dispositions

de la dernière ligne; comme l'indiquent les flèches, elles ne s'enchaînent qu'avec les dispositions de la ligne précédente; par conséquent, elles ne peuvent se présenter qu'une seule fois dans la suite, et la seconde disposition relative qui vient après l'une d'elles est encore l'une de celles de la première ligne.

Il résulte clairement de ceci que, si l'on considère une suite de cases donnant l'algorithme régulier considéré, dès la troisième des dispositions relatives de quatre cases consécutives, on a sûrement l'une des dispositions de la première ligne, et cette disposition se reproduit ensuite indéfiniment. Nous sommes ainsi conduit à rejeter toutes les dispositions des deux dernières lignes qui ne sauraient donner naissance, par leur répétition, à l'algorithme régulier considéré, et ne peuvent se présenter chacune qu'une seule fois, en étant soit la première, soit la deuxième des dispositions relatives de la suite. Nous restons alors en présence des seules dispositions de la première ligne, et pouvons énoncer ce résultat :

Les seules suites de cases qui conduisent à l'algorithme régulier dans lequel α est un monome du premier degré, et β et γ sont des binomes du premier degré, sont les files de cases placées perpendiculairement aux trois faces du Tableau $T(x, y, z)$.

Cet algorithme généralise celui de la formation des réduites des fractions continues régulières de la première classe et du premier type, réduites qui ont, dans le Tableau à double entrée où elles sont figurées, une disposition analogue à celle des cases dans le Tableau à triple entrée.

22. Nous arrivons aux algorithmes où α, β, γ ont pour degrés respectifs 1, 1, 0. Les considérations précédentes, très simplifiées, d'ailleurs, conduisent au schéma suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \left| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right| & \begin{array}{c} \rightarrow \\ \leftarrow \end{array} & \left| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{array} \right| \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 \left| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right| & & \left| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{array} \right|
 \end{array}$$

Nous supposons toujours associées, à chaque disposition, celles qui s'en déduisent par permutation circulaire des colonnes.

Les six dispositions de la première ligne sont, comme l'indiquent les flèches, associées deux à deux, chaque disposition de l'un des trois couples s'enchaînant avec l'autre disposition du même couple. Chaque couple donne ainsi naissance à un algorithme régulier du type considéré.

Il est aisé de voir la disposition qu'affectent les cases d'une telle suite. Si l'on considère des cases toutes situées dans une même tranche parallèle au plan des yz , que, partant de l'une de ces cases, on passe à la contiguë suivant la face parallèle au plan zx et la plus éloignée de ce plan, que, de celle-ci, on passe à la contiguë suivant la face parallèle au plan xy et la plus éloignée de ce plan, puis, de nouveau, de celle-ci à la contiguë suivant la face parallèle au plan zx et la plus éloignée de ce plan, et ainsi de suite, on aura l'idée de l'une des dispositions considérées; c'est une sorte d'escalier, formé de degrés égaux, et dont la *direction générale* est parallèle à la direction principale du plan yz .

Les deux autres dispositions sont analogues à celle-ci, le plan yz est seulement remplacé par les plans zx et xy .

L'analogie de cet algorithme régulier n'existe pas dans le cas de deux séries seulement; il est, pour ainsi dire, intermédiaire entre les algorithmes qui correspondent aux fractions continues régulières qui, étant de la première classe, appartiennent au premier et au second type de cette classe.

Les mêmes raisons que nous avons déjà invoquées nous conduisent maintenant à rejeter les six dispositions de la dernière ligne de notre schéma, comme impropres à donner seules, par leur répétition, l'algorithme considéré, et comme ne pouvant figurer qu'une seule fois dans toute suite qui donne l'algorithme considéré, au début même de cette suite. Nous avons alors cette proposition :

Les seules suites de cases qui conduisent à l'algorithme régulier dans lequel α est un monome du premier degré, β un binome du premier degré, et γ une constante, sont les files en forme d'escalier dont la direction générale est parallèle à l'une des directions principales des faces du Tableau $\mathbf{T}(x, y, z)$.

Il n'existe pas, dans le cas de deux séries, d'algorithme analogue.

23. Il reste enfin à examiner les algorithmes où α , β , γ auraient respectivement pour degrés 1, 0, 0. Le schéma, analogue aux précédents, est ici simplement

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

La première disposition et les deux qui s'en déduisent par permutations circulaires des colonnes, forment un groupe tel que chacune des dispositions s'enchaîne avec l'une des deux autres, qui s'enchaîne avec la troisième, et celle-ci ramène la première, et ainsi de suite. Les choses se passent de même pour la seconde des dispositions précédentes. On a ainsi deux façons d'engendrer une suite donnant l'algorithme régulier considéré, et il est facile de se rendre compte de la disposition des cases. Partons d'une case; nous passons à la contiguë suivant la face parallèle au plan yz et la plus éloignée de ce plan; de celle-ci nous passons à la contiguë suivant la face parallèle au plan zx et la plus éloignée de ce plan; de celle-ci, à la contiguë suivant la face parallèle au plan xy et la plus éloignée de ce plan, et enfin, partant de cette dernière case, nous recommençons toute la série d'opérations, et ainsi de suite. On obtient, de la sorte, une file affectant une forme hélicoïdale dont la *direction générale* est parallèle à la direction principale du Tableau $T(x, y, z)$. Ce qui distingue les deux modes d'engendrer la suite, c'est le sens de rotation de l'hélice; avec l'un des modes, on s'éloigne du sommet du Tableau en tournant autour d'une parallèle à la direction principale, dans un certain sens; avec l'autre, on s'en éloigne en tournant dans l'autre sens.

Cet algorithme généralise le calcul des réduites des fractions continues régulières de la première classe et du second type; donc :

Les seules suites de cases qui conduisent à l'algorithme régulier dans lequel α est un monome du premier degré, et β et γ sont des constantes, sont les files de forme hélicoïdale dont la direction

générale est parallèle à la direction principale du Tableau à triple entrée.

Cet algorithme généralise le calcul des réduites des fractions continues régulières de la première classe et du second type, réduites qui ont, dans le Tableau à double entrée où elles sont figurées, une disposition analogue à celle des cases dans le Tableau à triple entrée.

24. Il résulte de toute cette étude que, des quatre algorithmes réguliers possibles, trois existent effectivement qui constituent, dans le cas de trois séries S_1, S_2, S_3 , les méthodes de calcul analogues au calcul des réduites des fractions continues régulières de la première classe. On aura remarqué l'extrême simplicité de la disposition des suites de cases qui donnent naissance à chacun d'eux. Si l'on désigne par (x, y, z) les nombres qui définissent une case du Tableau $T(x, y, z)$, le premier algorithme s'obtient en laissant fixes deux des nombres x, y, z et en donnant au troisième des accroissements successifs égaux à l'unité; le deuxième, en laissant fixe l'un des nombres x, y, z et en donnant aux deux autres, alternativement, des accroissements égaux à l'unité; enfin, le troisième, en donnant, successivement, aux nombres x, y, z , pris toujours dans le même ordre, des accroissements égaux à l'unité.

III. — LE CALCUL DU SYSTÈME X_1, X_2, X_3 DE POLYNOMES.

25. Nous nous proposons maintenant de montrer comment, en faisant usage des résultats obtenus, on peut calculer les polynomes X_1, X_2, X_3 qui figurent dans la case (μ_1, μ_2, μ_3) .

Il suffit de se donner une suite de cases, A, B, ..., aboutissant à la case (μ_1, μ_2, μ_3) , et de la nature de celles que nous avons étudiées (n° 16). Si l'on suppose connus les trois premiers systèmes de polynomes, et que l'on veuille calculer les polynomes du système qui vient ensuite, on cherchera quelle est la disposition relative des quatre cases, et, alors, se reportant au Tableau précédemment donné de toutes les dispositions relatives, on y trouvera les degrés qu'ont, dans

le cas actuel, les éléments α , β , γ ; un calcul facile donnera les coefficients de ces éléments, et l'on en déduira les polynômes demandés. On procédera ensuite, par la même méthode, au calcul des polynômes de la cinquième case, au moyen de ceux des trois précédentes, et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on arrive aux polynômes X_1 , X_2 , X_3 .

Le calcul dépend, comme l'on voit, d'abord, de la connaissance des trois premiers systèmes de polynômes, et, en second lieu, du calcul des coefficients des éléments α , β , γ pour chacun des systèmes suivants. Occupons-nous d'abord de ce second point.

26. Un exemple fera comprendre immédiatement la marche à suivre.

Soient les quatre cases

$$(m, m', m''); \quad (m, m', m'' + 1); \\ (m + 1, m' - 1, m'' + 2); \quad (m + 1, m' + 1, m'' + 1),$$

et désignons par

$$P, P', P''; \quad Q, Q', Q''; \quad R, R', R''; \quad P_1, P'_1, P''_1$$

les quatre systèmes correspondants de polynômes. Nous supposons connus les trois premiers de ces systèmes, et nous nous proposons d'obtenir le dernier.

La disposition relative de ces quatre cases, caractérisée par les nombres

$$0, 0, 0; \quad 0, 0, 1; \quad 1, -1, 2; \quad 1, 1, 1,$$

est une de celles pour lesquelles les degrés des éléments α , β , γ sont égaux respectivement à 1, 1 et 0. Nous avons donc quatre coefficients dont il faut déterminer les rapports.

On a d'abord les relations

$$S_1 P + S_2 P' + S_3 P'' = S'_1 x^{m+m'+m''+2}, \\ S_1 Q + S_2 Q' + S_3 Q'' = S'_2 x^{m+m'+m''+3}, \\ S_1 R + S_2 R' + S_3 R'' = S'_3 x^{m+m'+m''+4},$$

qui déterminent les séries S'_1, S'_2, S'_3 , puis

$$S_1 P_1 + S_2 P'_1 + S_3 P''_1 = \Sigma x^{m+n'+m''+5},$$

et enfin

$$P\alpha + Q\beta + R\gamma = P_1,$$

$$P'\alpha + Q'\beta + R'\gamma = P'_1,$$

$$P''\alpha + Q''\beta + R''\gamma = P''_1.$$

Multiplions celles-ci, respectivement, par S_1, S_2, S_3 et ajoutons; on obtient, en vertu des précédentes,

$$\alpha S'_1 + \beta S'_2 x + \gamma S'_3 x^2 = \Sigma x^3.$$

Le premier membre ne renferme pas de terme constant; il faut encore, d'après cette relation même, qu'il n'ait pas de terme du premier, ni de terme du second degré, conditions qui donnent déjà deux équations linéaires entre les coefficients de α, β, γ ; et nous remarquerons que, pour écrire ces équations, il suffit de connaître les deux premiers termes au plus de chacune des séries S'_1, S'_2, S'_3 .

La troisième équation résulte de l'examen des degrés des polynômes P_1, P'_1, P''_1 . On voit immédiatement que P_1 et P'_1 ont, dès maintenant, pour degrés respectifs $m+1$ et $m'+1$; mais, β étant du premier degré et γ étant une constante, les produits $Q''\beta$ et $R''\gamma$ sont, l'un et l'autre, de degré $m''+2$, tandis que P''_1 ne doit être que de degré $m''+1$. On aura la troisième équation en égalant à zéro le coefficient de $x^{m''+2}$ dans $Q''\beta + R''\gamma$.

Les éléments α, β, γ se trouvant ainsi déterminés à un même facteur constant près, on en déduit immédiatement les polynômes P_1, P'_1, P''_1 .

La même méthode de calcul s'applique dans tous les cas.

27. Il est à peine besoin de faire remarquer que le calcul des systèmes successifs d'éléments α, β, γ aura sa plus grande simplicité dans le cas où la suite de cases est une de celles qui donnent naissance à l'un des trois algorithmes réguliers. On sait alors, une fois pour toutes, le nombre des termes des séries S'_1, S'_2, S'_3 que l'on doit calculer, et,

si l'on observe que la série que nous avons appelée Σ n'est autre que la série S'_3 pour le système d'éléments α, β, γ qui vient après celui que l'on calcule, on voit que l'on pourra, en même temps que l'on égale à zéro les coefficients qui doivent être annulés dans l'équation où figure cette série, mettre, chaque fois, en évidence ceux aussi qui doivent servir au calcul suivant.

De cette façon, les calculs pourront être exécutés d'une manière en quelque sorte mécanique, et il serait facile d'énoncer la règle qui en fixe la marche pour chacun des trois algorithmes réguliers; nous ne nous y arrêterons pas.

28. Nous arrivons maintenant à la détermination des trois systèmes de polynômes qui servent de point de départ au calcul.

Nous observerons d'abord qu'il est des systèmes de polynômes du Tableau $T(x, y, z)$ qui s'obtiennent directement sans difficultés. Outre les constantes de la case $(0, 0, 0)$ et les polynômes simples des cases très voisines de celle-là, on peut calculer fort aisément les polynômes de toute case contiguë à deux faces du Tableau; c'est ce que nous avons déjà établi antérieurement (n° 11) et sur quoi nous ne reviendrons pas. Nous remarquerons seulement que la même méthode directe sera encore le plus souvent praticable quand l'un des polynômes est une constante et un second un binôme du premier degré, le troisième étant de degré quelconque.

Quoi qu'il en soit, il suffit de prendre pour cases initiales de la suite trois cases parmi celles dont on peut ainsi calculer facilement les polynômes. Nous signalerons, par exemple, la suite, toujours possible,

$$\begin{aligned} & (0, 0, 0); \quad (0, 0, 1); \quad (0, 0, 2); \quad \dots; \\ & (0, 0, \mu_3); \quad (0, 1, \mu_3); \quad (0, 2, \mu_3); \quad \dots; \\ & (0, \mu_2, \mu_3); \quad (1, \mu_2, \mu_3); \quad \dots; \quad (\mu_1, \mu_2, \mu_3), \end{aligned}$$

composée de trois tronçons donnant un même algorithme régulier, rattachés simplement l'un à l'autre; on pourrait même la faire commencer par la case $(0, 0, \mu_3 - 2)$, puisque, d'après ce qui précède, les polynômes des trois premières cases sont alors directement calculables.

29. Enfin, nous indiquerons encore brièvement comment le Tableau $T(x, y, z)$ peut être *prolongé* au moyen de trois Tableaux à double entrée $T(y, z)$, $T(z, x)$, $T(x, y)$.

Ces Tableaux sont relatifs respectivement aux couples de séries S_2 et S_3 , S_3 et S_1 , S_1 et S_2 . Le Tableau $T(y, z)$ sera regardé comme formé par la face yz de $T(x, y, z)$; sur cette face les cases du Tableau à triple entrée dessinent des carrés, et c'est dans ces carrés que nous supposerons placés les couples de polynômes approchés pour les deux séries S_2 et S_3 , il constitue une sorte de tranche annexée qui correspondrait à la valeur -1 de x . De même $T(z, x)$ et $T(x, y)$ sont constitués par les faces zx et xy de $T(x, y, z)$. Voici comment ces Tableaux annexés peuvent intervenir dans le calcul.

Soient

$$(m, m', m''); \quad (m + \lambda_1, m' + \lambda_2, m'' + \lambda_3);$$

$$(m + \mu_1, m' + \mu_2, m'' + \mu_3); \quad (m + \nu_1, m' + \nu_2, m'' + \nu_3)$$

quatre cases du Tableau $T(x, y, z)$, offrant l'une des dispositions relatives antérieurement obtenues, et supposons que nous fassions le calcul des éléments α , β , γ des formules de récurrence qui donnent les polynômes de la dernière case au moyen de ceux des trois premières. La détermination de ces éléments se fera en égalant à zéro les coefficients de certaines puissances de x , de façon à exprimer que les polynômes cherchés donnent bien l'ordre voulu d'approximation, et que leurs degrés ne dépassent pas respectivement les nombres $m + \nu_1$, $m' + \nu_2$, $m'' + \nu_3$.

Supposons maintenant que l'on donne à l'un des nombres m , m' , m'' , à m , par exemple, des valeurs décroissantes; les quatre cases conservant la même disposition relative, le calcul des éléments α , β , γ , qui ne dépend que de celle-ci, se fera toujours de la même manière. Mais il arrivera que l'un au moins des quatre nombres m , $m + \lambda_1$, $m + \mu_1$, $m + \nu_1$ devienne égal à -1 . Supposons que ce ne soit pas le dernier. Alors la quatrième case est toujours une case du Tableau $T(x, y, z)$, et cependant le calcul de ses polynômes ne peut plus être effectué au moyen de ceux des cases précédentes, car l'une au moins de ces cases n'appartient plus au Tableau. Toutefois, elles appartiennent encore toutes au Tableau *prolongé*; et, en effet, si

nous regardons le polynome qui correspond au degré -1 introduit, comme identiquement nul, et les deux autres polynomes du même système comme le couple de polynomes de $T(y, z)$ qui correspond à leurs degrés, on peut s'assurer que le calcul des éléments α, β, γ peut encore être fait comme précédemment, à la condition, toutefois, que les trois nombres $m, m + \lambda_1, m + \mu_1$ ne soient pas devenus simultanément égaux à -1 . Le système d'égalités sur lesquelles repose le calcul subsiste alors avec toutes les propriétés qui ont été invoquées pour justifier cette méthode de détermination des coefficients de α, β, γ .

Reportons-nous, par exemple, au calcul du n° 26, et supposons que l'on fasse $m' = 0$. Alors la case $(m + 1, m' - 1, m'' + 2)$ n'appartient plus au Tableau $T(x, y, z)$, mais si nous faisons abstraction du nombre intermédiaire -1 , c'est une case du Tableau $T(x, z)$. Nous convenons alors de remplacer R' par zéro, et de prendre pour R et R'' le couple de polynomes de la case $m + 1, m'' + 2$ dans $T(x, z)$. Avec ces conventions, il n'y a qu'à relire le calcul pour s'assurer qu'il subsiste entièrement.

L'interprétation que nous avons donnée (n° 11) de la méthode de calcul de M. Hermite montre l'usage que l'on peut faire, pour le calcul des polynomes de $T(x, y, z)$, des Tableaux annexés à double entrée.

IV. — APERÇU DE LA THÉORIE DANS LE CAS DE n SÉRIES.

50. Les résultats que nous avons obtenus s'étendent, par une induction facile, au cas général où, étant données n séries S_1, S_2, \dots, S_n , on se propose de déterminer les n polynomes X_1, X_2, \dots, X_n , de degrés $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ qui satisfont à l'équation

$$S_1 X_1 + S_2 X_2 + \dots + S_n X_n = S' x^{\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n + n - 1}.$$

Nous imaginons que les différents systèmes de polynomes, qui correspondent aux différents systèmes de degrés, sont disposés dans les cases d'un Tableau à n^{up}^{e} entrée $T(x, y, z, \dots, u, v)$, auquel s'étendent

immédiatement les notions de direction principale et de plan d'égal approximation.

Les degrés extrêmes du déterminant Δ formé par les n^2 polynomes de n cases quelconques du Tableau s'évaluent aisément.

Pour qu'une suite de cases

$$A, B, C, \dots, H, L, \dots$$

donne naissance à l'algorithme qui généralise le calcul des réduites des fractions continues simples, il faut et il suffit que chacune des cases de la suite soit plus avancée dans le Tableau T que celle qui la précède, et que, en outre, dans chaque déterminant formé avec les degrés des polynomes de n cases consécutives quelconques, la somme des facteurs d'un terme quelconque ne surpasse pas la somme des éléments de la première ligne augmentée de $n - 1$.

Si l'on désigne par

$$\begin{aligned} & (0, 0, \dots, 0) \\ & (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \\ & (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) \\ & \dots\dots\dots \\ & (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n) \end{aligned}$$

les n systèmes de nombres qui fixent la *disposition relative* de n cases consécutives de la suite, ces nombres doivent satisfaire aux inégalités

$$\begin{aligned} 0 < \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n < \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n < \dots < \rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_n, \\ \lambda_{i_1} + \mu_{i_2} + \dots + \rho_{i_{n-1}} \leq n - 1, \end{aligned}$$

où i_1, i_2, \dots, i_{n-1} doivent représenter successivement tous les arrangements des n nombres $1, 2, \dots, n$, pris $n - 1$ à $n - 1$.

La résolution de ce système d'inégalités fera connaître, après qu'on aura éliminé les solutions inacceptables, toutes les dispositions relatives possibles. On en conclura la composition de toute suite donnant l'algorithme voulu et les degrés des éléments $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ des formules de récurrence.

31. Désignons par $(x, y, z, \dots, t, u, v)$ les nombres qui définissent la position d'une case dans le Tableau. Si, laissant fixes les $n - 1$ premiers d'entre eux, nous donnons au dernier des accroissements successifs égaux à l'unité, nous obtenons une suite de cases pour laquelle les inégalités précédentes sont vérifiées; à cette suite de cases correspond un algorithme régulier, et le calcul des degrés des éléments $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ montre que tous ces degrés sont égaux à l'unité, en sorte que α est un monome du premier degré, et β, γ, \dots des binomes du premier degré. Ce résultat subsiste quel que soit celui des n nombres que l'on fasse varier, les $n - 1$ autres restant constants; on obtient ainsi n dispositions de cases qui donnent l'algorithme régulier considéré; ce sont les files *perpendiculaires* aux n faces du Tableau.

Si nous laissons fixes $n - 2$ des nombres x, y, z, \dots, u, v et que nous donnions aux deux restants, alternativement, des accroissements égaux à l'unité, nous obtenons encore une suite de cases pour laquelle les inégalités sont vérifiées; à cette suite correspond un second algorithme régulier, dans lequel tous les éléments $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ sont du premier degré, sauf le dernier qui est de degré zéro. Comme on peut prendre arbitrairement les deux nombres variables, il y a $\frac{n(n-1)}{2}$ dispositions de cases qui donnent naissance à l'algorithme régulier considéré.

En laissant fixes $n - 3$ des nombres x, y, \dots, u, v et donnant aux trois restants, toujours pris dans le même ordre, successivement, des accroissements égaux à l'unité, on parviendra à un troisième algorithme régulier où tous les éléments α, β, \dots sont du premier degré, sauf les deux derniers qui sont du degré zéro. Le nombre des dispositions correspondantes est $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$, si l'on ne tient pas compte de l'ordre dans lequel sont pris les nombres variables.

En continuant ainsi, on arrivera à un dernier algorithme régulier donné par la suite de cases obtenue en donnant à tous les nombres x, y, z, \dots, u, v , pris toujours dans le même ordre, successivement, des accroissements égaux à l'unité. Le monome α sera alors du premier degré, et les $n - 1$ éléments β, γ, \dots seront tous des constantes. Si l'on ne tient pas compte de l'ordre dans lequel les accroissements égaux à

l'unité sont donnés aux n nombres, une seule disposition de cases donne l'algorithme considéré.

On a ainsi n algorithmes réguliers, dans lesquels les éléments $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ ont pour degrés :

$1, 1, 1, \dots, 1, 1, 1,$
 $1, 1, 1, \dots, 1, 1, 0,$
 $1, 1, 1, \dots, 1, 0, 0,$
 $\dots\dots\dots$
 $1, 1, 0, \dots, 0, 0, 0,$
 $1, 0, 0, \dots, 0, 0, 0.$

Ils constituent les n types analogues aux deux types de fractions continues régulières de la première classe.

52. On pourra maintenant effectuer le calcul du système de polynomes X_1, X_2, \dots, X_n , en rattachant la case où ils figurent, par une suite de cases de la nature de celles que nous venons de considérer, à un système initial de n cases dont on puisse déterminer, sans difficultés, les systèmes de polynomes; telles sont, par exemple, les cases pour lesquelles tous les nombres x, y, \dots, u, v , sauf un, ou même sauf deux, sont nuls. L'usage des suites qui donnent des algorithmes réguliers rendra le calcul aussi simple qu'il peut l'être. On pourra aussi faire usage des Tableaux à $n - 1^{\text{upl}e}$ entrée

$$T(y, z, \dots, u, v); T(x, z, \dots, u, v); \dots; T(x, y, \dots, u),$$

au nombre de n , et relatifs aux systèmes de séries

$$S_2, S_3, \dots, S_n; S_1, S_3, \dots, S_n; \dots; S_1, S_2, \dots, S_{n-1},$$

que l'on peut annexer au Tableau à $n^{\text{upl}e}$ entrée $T(x, y, z, \dots, u, v)$.

