JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

R. LIOUVILLE

Note au sujet d'un Mémoire de M. Painlevé sur les équations de la Dynamique

Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 10 (1894), p. 287-289.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1894_4_10__287_0>

Note au sujet d'un Mémoire de M. Painlevé *sur les équations de la Dynamique;*

Par M. R. LIOUVILLE.

Dans un travail inséré au dernier Cahier de ce Journal, M. Painlevé publie les résultats qu'il a obtenus sur une question dont nous avons tous deux fait une étude, à l'occasion de recherches plus générales.

Je ne veux nullement ouvrir une discussion nouvelle sur le sujet dont il s'agit, mais je ne puis éviter de présenter une observation touchant un point particulier sur lequel M. Painlevé revient plusieurs fois, les termes dont il se sert laissant croire à une inexactitude que je n'ai pas commise.

La Note que j'ai publiée le 6 avril 1891, dans les *Comptes rendus* de l'Académie, était relative aux cas où *les équations différentielles du mouvement* ne dépendent que de trois paramètres et peuvent correspondre à deux expressions différentes de la force vive.

En citant cette Note, M. Painlevé s'exprime ainsi, à la page 19 de son travail :

« Sur ce problème, M. Liouville avait antérieurement publié deux Notes; dans la première, il déterminait tous les ds^2 à deux ou trois paramètres, tels que le mouvement défini par le système

$$\left[\left(\frac{ds}{dt}\right)^2, Q_i = 0\right]$$

fût défini par un autre système

$$\left[\left(\frac{ds_1}{dt}\right)^2, Q'_i\right] = 0$$

et que, de plus, les discriminants Δ et Δ_1 de ds^2 et ds_1^2 fussent identiques », et M. Painlevé ajoute en note : « d'après ce qui précède, cette seconde condition est inutile, elle est toujours conséquence de la première. »

Plus loin, à la page 89, la même assertion est reproduite.

Elle contient une erreur de fait que la lecture de ma Note du 6 avril 1891 met en évidence. Le second alinéa de cette Note se terminait ainsi :

« Soit

$$(1) \qquad 2T = \alpha^2\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \beta^2\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 + \gamma^2\left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2$$

la force vive du système matériel et cherchons à choisir, pour α, β, γ, des expressions telles que *les équations différentielles du mouvement* puissent être déduites, soit de la forme quadratique précédente, soit d'une seconde forme, où entrent en général les produits $\frac{dx_2}{dt}\frac{dx_3}{dt}, \ldots$ »

On voit que je ne fais aucune mention de l'égalité des discriminants des deux formes, mais j'indique alors la condition que les équations différentielles *du mouvement* devront être les mêmes pour les deux problèmes.

Plus loin (*Comptes rendus*, p. 711), j'ajoute, il est vrai, ceci :

« Il existe des cas où, *les équations des trajectoires* étant données, il ne suffit pas de connaître le discriminant δ^2 de la forme (1) pour en conclure cette forme même. C'est dire que l'on peut choisir α, β, γ de telle manière qu'une seconde forme, *de même discriminant, corresponde aux mêmes trajectoires. Tous les cas de cette espèce* sont donnés par, etc. »

Cette fois, j'astreins les formes quadratiques à être *de même discriminant, mais je cesse d'indiquer la condition que toutes les* *équations différentielles du mouvement devront être les mêmes,* et je me contente de demander, *avec l'identité des discriminants des deux formes, celle des trajectoires.*

Je n'ai donc nullement énoncé une condition superflue, comme le suppose M. Painlevé, mais j'ai énoncé, de deux manières distinctes et dont il est visible que je connaissais l'équivalence, les conditions du problème que je m'étais posé et dont je donnais la solution complète. C'est cette équivalence, retrouvée par M. Painlevé, d'une autre façon, qui fait l'objet de sa double remarque.