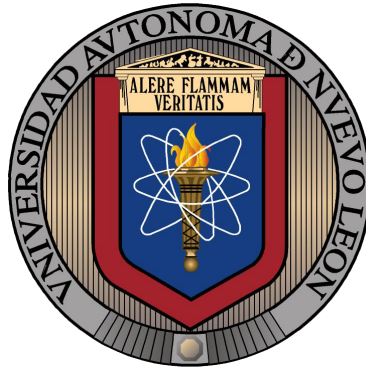


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA



DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UNA ÓRTESIS AUTOMATIZADA PARA  
LA ARTICULACIÓN DE TOBILLO

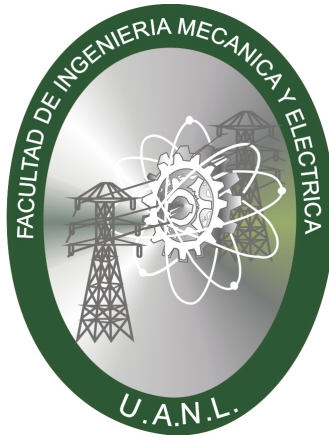
POR

ING. JAFET ESAÚ RÍOS HIGUERA

EN OPCIÓN AL GRADO DE  
MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA ELÉCTRICA

JULIO 2020

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA  
SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UNA ÓRTESIS AUTOMATIZADA PARA  
LA ARTICULACIÓN DE TOBILLO

POR

ING. JAFET ESAÚ RÍOS HIGUERA

EN OPCIÓN AL GRADO DE  
MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA ELÉCTRICA

DIRECTOR DE TESIS  
DR. JUAN ÁNGEL RODRÍGUEZ LIÑÁN

SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, NUEVO LEÓN, MÉXICO

JULIO 2020



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

**Universidad Autónoma de Nuevo León  
Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica  
Subdirección de Estudios de Posgrado**

Los miembros del Comité de Tesis recomendamos que la Tesis “Diseño e implementación de una órtesis automatizada para la articulación de tobillo”, realizada por el alumno Jafet Esaú Ríos Higuera, con número de matrícula 1983192, sea aceptada para su defensa como requisito para obtener el grado de Maestría en Ciencias de la Ingeniería Eléctrica.

El Comité de Tesis

Dr. Juan Ángel Rodríguez Liñán  
Director

Dra. Griselda Quiroz Compeán  
Revisor

Dr. Eliezer Garza González  
Revisor

Vo. Bo.

Dr. Simón Martínez Martínez  
Subdirector de Estudios de Posgrado



051

San Nicolás de los Garza, Nuevo León, septiembre de 2020



# AGRADECIMIENTOS

Agradezco primeramente a Dios por permitirme existir y la oportunidad de caminar en este viaje al cual llamamos vida.

Agradezco a CONACYT por el apoyo económico a lo largo del programa y la posibilidad de llevar a cabo un estudio de posgrado.

Agradezco a la Universidad Autónoma de Nuevo León, especialmente a la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica por brindar tanto la infraestructura, el personal y el conocimiento en estos tipos de programas que fomentan el desarrollo profesional y personal.

Agradezco a mi familia especialmente a mis padres por todo el apoyo incondicional a lo largo de mi crecimiento como profesionista y como ser humano. Gracias a ellos soy una persona productiva y persistente en el cumplimiento de mis metas y sueños.

Agradezco a mi pareja por estar ahí cuando más la necesitaba y motivarme a seguir adelante en tiempos difíciles. Por llenar mis días de dicha y felicidad. Por hacer de mi un mejor hombre y persona.

Muchas gracias al Cuerpo Académico de Tecnología e Innovación por brindarnos el apoyo y asesoría a lo largo del programa.

Agradezco a mi asesor el Dr. Juan Ángel Rodríguez Liñán por compartir sus conocimientos conmigo y brindar su apoyo constante para concluir con los estudios de posgrado.

Muchas gracias a mis compañeros de maestría por hacer de mi estadía en el programa una experiencia gratificante, llena de personas excepcionales y muy buenos momentos de compañerismo.

# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>6</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>7</b>
1.1. Epidemiología de la fractura de tobillo . . . . .	8
1.2. Morfología del tobillo y pie . . . . .	9
1.3. Rehabilitación para fractura de tobillo . . . . .	15
1.4. Estado del arte . . . . .	18
1.5. Definición del problema . . . . .	25
1.6. Hipótesis . . . . .	26
1.7. Objetivos . . . . .	26
1.7.1. Objetivo General . . . . .	26
1.7.2. Objetivos Particulares . . . . .	26
1.8. Metodología . . . . .	27
<b>2. Diseño mecánico de órtesis para tobillo y pie</b>	<b>29</b>
2.1. Diseño CAD de órtesis de tobillo activa . . . . .	30
2.2. Diseño de soporte superior de órtesis . . . . .	30
2.3. Diseño de eslabón 1 órtesis activa . . . . .	32
2.4. Diseño de eslabón 2 de órtesis activa . . . . .	33
2.5. Diseño de eslabón 3 de órtesis activa (base del pie) . . . . .	35
2.6. Ensamble órtesis completo de órtesis activa . . . . .	38
2.7. Diseño CAD de órtesis pasiva . . . . .	39
2.8. Diseño de soporte superior de órtesis pasiva . . . . .	40
2.9. Diseño de eslabón B de órtesis pasiva . . . . .	40
2.10. Diseño de eslabón C de órtesis pasiva . . . . .	41
2.11. Diseño de eslabón D de órtesis pasiva . . . . .	42
2.12. Sistema de medición por resortes de órtesis pasiva . . . . .	43
2.13. Ensamble completo de órtesis pasiva . . . . .	44

<b>3. Modelado matemático</b>	<b>47</b>
3.1. Modelado cinemático . . . . .	48
3.2. Cinemática directa . . . . .	50
3.3. Cinemática inversa . . . . .	53
3.4. Propuesta esquemática del diagrama de órtesis automatizada . . . .	54
3.5. Dinámica de la órtesis . . . . .	54
3.6. Dinámica propuesta del tobillo-pie y dinámica de la carga . . . . .	56
3.7. Dinámica del actuador (Motor DC + Caja de engranaje y Carga) . .	57
3.8. Dinámica acoplada . . . . .	59
<b>4. Esquema de operación y control de la órtesis con interfaz de usuario</b>	<b>61</b>
4.1. Ley de control . . . . .	61
4.2. Estimación de parámetros para motor CD . . . . .	62
4.3. Planeación de trayectorias . . . . .	64
4.4. Diseño de aplicación móvil para interfaz usuario y máquina . . . . .	69
<b>5. Simulación numérica y resultados</b>	<b>77</b>
5.1. Implementación numérica para estimación de parámetros en motor DC . . . . .	78
5.2. Simulación numérica para trayectorias de referencia . . . . .	84
5.3. Generación de trayectorias de seguimiento de forma sinusoidal . . .	84
5.4. Generación de trayectorias de seguimiento de forma trapezoidal . .	87
5.5. Generación de trayectorias de seguimiento de tipo caminata . . . . .	89
5.6. Simulación de seguimiento de trayectorias . . . . .	91
5.7. Simulación numérica para trayectoria de forma sinusoidal . . . . .	93
5.8. Simulación numérica para trayectoria de forma trapezoidal . . . . .	98
5.9. Simulación numérica para trayectoria de forma caminata . . . . .	103

# Resumen

En la actualidad, existen diversos dispositivos capaces de asistir en la rehabilitación de extremidades inferiores que han sufrido alguna lesión, la cual limite parcial o totalmente el movimiento natural del cuerpo. Dentro de esta clasificación es importante hacer énfasis en los dispositivos de rehabilitación para fractura en la articulación de tobillo.

Uno de los principales retos para el diseño de estos dispositivos es lograr no solo el seguimiento de trayectorias articulares asemejando ejercicios de rehabilitación, sino que a su vez sean fáciles de controlar de forma directa o remota. Aunque se han creado ya distintos prototipos que cumplen con la rehabilitación de tobillo, generalmente estos presentan deficiencias tanto en movilidad como en ergonomía, al diseñar dichos artefactos no consideran los tres rangos de movimiento de la articulación tratando de reducir el peso o la complejidad y por su contra parte, al ser considerados disminuye la ergonomía del dispositivo y su portabilidad.

La presente tesis propone el diseño e implementación de una órtesis automatizada para la rehabilitación de tobillo de 3 grados de libertad. La instrumentación electrónica y el uso de un controlador basado en el modelo dinámico permiten el seguimiento de trayectorias articulares en los 3 planos anatómicos del tobillo, aun considerando pacientes de la órtesis con diferentes dimensiones antropométricas.

Las referencias en las trayectorias de movimiento son propuestas tales que satisfagan el rango óptimo de movimiento (ROM) para cada plano anatómico en la articulación de tobillo.

La creación de una interfaz móvil como auxiliar en la configuración paramétrica y funcionamiento de la órtesis es considerada indispensable para la generación de trayectorias de seguimiento articular.

Por último se realiza la validación de funcionamiento del dispositivo al realizar seguimiento a las trayectorias de referencia mediante simulaciones computacionales.

**Palabras clave:** ROM, órtesis automatizada, control por par calculado, diseño mecánico, modelado dinámico, aplicación móvil.

# Capítulo 1

## Introducción

Al sufrir una lesión por fractura en la articulación de tobillo, la movilidad del individuo se ve parcial o totalmente afectada, esto disminuye su autonomía al no poder realizar actividades tan básicas como lo son el caminar, correr, subir escaleras o saltar, mermando así la calidad de vida del individuo. Para poder realizar el proceso de recuperación, el paciente debe someterse a un entrenamiento con ejercicios repetitivos de forma pasiva y activa, los cuales son impartidos por un personal de asistencia médica donde se estimule la recuperación de la movilidad y la fuerza en la articulación afectada. En general este tipo de proceso conlleva una cantidad considerable de tiempo y esfuerzo, tanto de parte del paciente como del personal de asistencia médica. Así mismo, debido a que los ejercicios se realizan de forma manual, la repetibilidad y el cumplimiento de metas de rehabilitación, como rango y velocidad de movilidad o cantidad de repeticiones, son difíciles de garantizar al no tener una medición exacta del movimiento y por lo tanto no tener criterios cuantitativos confiables de referencia.

Por este motivo se ha investigado el diseño y uso de dispositivos de asistencia para una automatización de rehabilitación articular con el fin de disminuir los tiempos de recuperación y aumentar la capacidad neuromuscular en el proceso, además de lograr constancia y repetibilidad en los ejercicios, lo cual podría no lograrse completamente con solo la terapia manual convencional. Estos dispositivos se basan en la aplicación de rutinas de seguimiento articular de forma pasiva tomando como referencia final el rango óptimo de movimiento o rango de movimiento articular (ROM), el cual es la cantidad de grados que un segmento del cuerpo puede moverse en un arco sobre algún plano anatómico. El proceso de recuperación de movimiento en la lesión es paulatino, así mismo los rangos de movimiento en los ejercicios. La aplicación de un ejercicio que exceda las capacidades motrices actuales de la articulación afectada puede generar dolor en el individuo. Partiendo de esto, es de suma importancia que los ejercicios aplicados sean precisos y consideren el rango de movimiento limitado por el dolor.



## 1.1. Epidemiología de la fractura de tobillo

La fractura de tobillo es un padecimiento de gran importancia en las salas de urgencias a nivel global, en países como Gran Bretaña o Estados Unidos, representa hasta al 10% de las visitas que se efectúan en los servicios de urgencias [1]. Según un estudio realizado por Mehta et al. [2], alrededor de 122-184 de cada 100,000 habitantes de Bethesda, MD, EE.UU han sufrido una fractura de tobillo. Este tipo de lesión limita parcialmente la capacidad del individuo en su autonomía y disminuye significativamente su calidad de vida.

De acuerdo con un estudio realizado por L. Domínguez. et al. (2017) [3], de 1127 fracturas registradas en pacientes de  $42.9 \text{ años} \pm 24.3$ , el 15.8% (178 pacientes) correspondían a fractura de tobillo en el Hospital de León, Guanajuato, ver Figura 1.1.

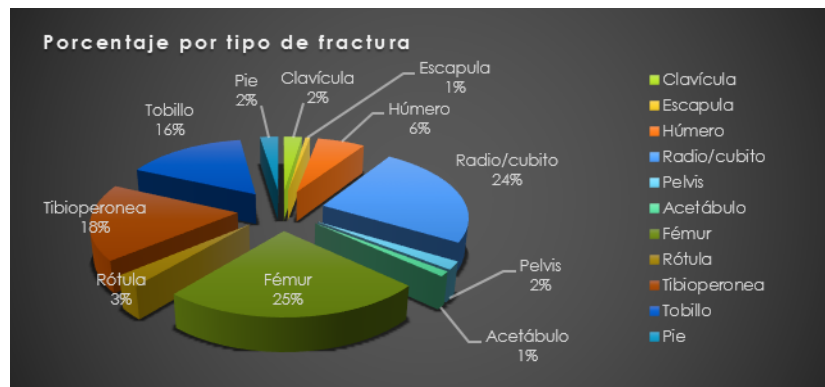


Figura 1.1: Gráfico porcentual por tipo de fractura en el Hospital de León [3].

Por otro lado, M.C. L. García et al. documentaron en [4], un estudio observacional de tipo retrospectivo en el Hospital Central Militar, donde se incluyeron 280 pacientes con 285 fracturas que requirieron manejo quirúrgico. El 34.39% del total de las fracturas registradas correspondían a fractura de tibia, de las cuales el 61% eran correspondientes a la articulación de tobillo lo que equivale a un 20.97% del total de las fracturas registradas, ver Figura 1.2.

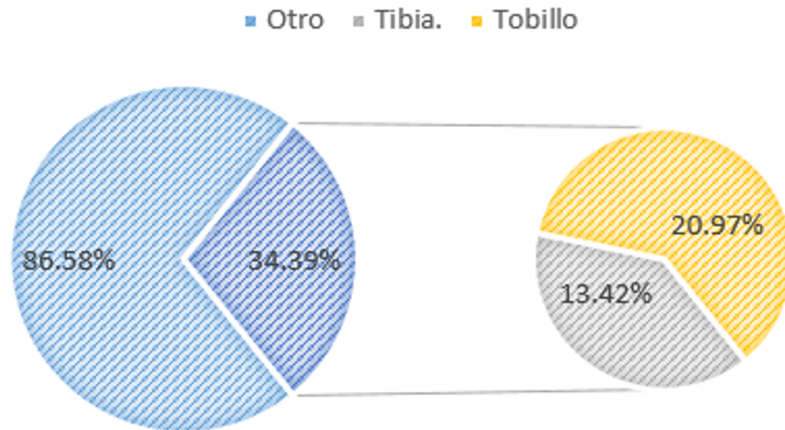


Figura 1.2: Gráfico porcentual correspondiente a fractura de tobillo en una muestra de 280 pacientes en Hospital Central Militar, Ciudad de México, 2013 [4].

Acorde con la guía de práctica clínica [5], contenida en el Catálogo Maestro de Guías de Práctica Clínica del Instituto Mexicano del Seguro Social, la fractura de tobillo está asociado del 75% al 85% de las fracturas tibia junto con peroné. Por otro lado, la fractura de tobillo está entre el 12% al 15% de incidencia en lesiones deportivas [6].

## 1.2. Morfología del tobillo y pie

A grandes rasgos, el término tobillo hace referencia principalmente a la articulación talocrural, dicha articulación está compuesta por la unión de tres huesos: tibia, peroné y astrágalo. A su vez, es importante tener en consideración la articulación tibioperonea, la cual está compuesta por la unión de los huesos tibia con peroné, y a la cual ha sido nombrada como mortaja tibioperonea debido a que su unión forma una cavidad donde embona el astrágalo, esta unión tiene forma trapezoidal donde los extremos limitan con el maléolo interno de la tibia (o medial) y el externo del peroné (o lateral) como se muestra en la Figura 1.3.

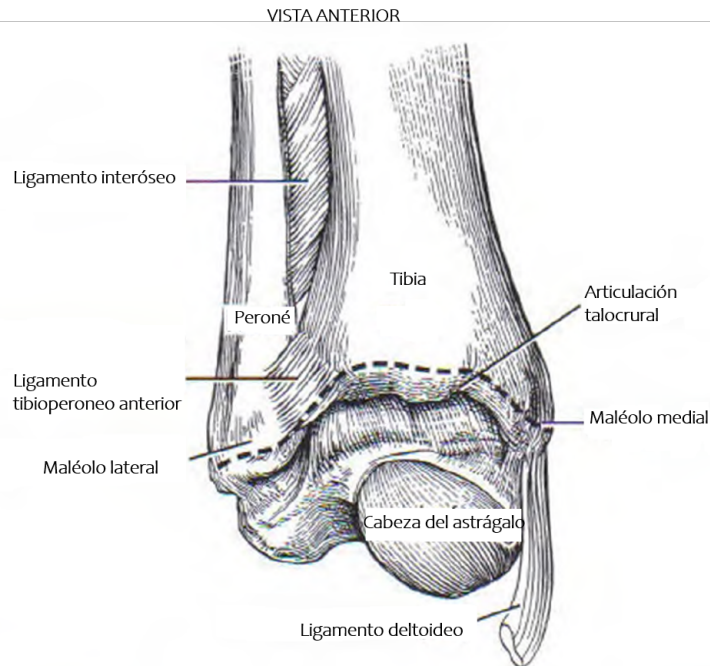


Figura 1.3: Articulación talocrural, se puede observar la mortaja tibioperonea y la ubicación de maleolos [7].

Por otro lado, el pie está dividido en tres secciones principales: retropié, mediopié y antepié (rearfoot, midfoot & forefoot en inglés). El retropié está conformado por la unión del astrágalo con el calcáneo, a esta unión se le conoce como articulación subtalar. Asimismo, el mediopié está conformado por el conjunto de tarsos que se unen al retropié mediante la articulación mediotarsiana o de Chopart. Por último, la unión del antepié con el mediopié se conoce como articulación tarso-metatarsiana o articulación de Lisfranc, dicha articulación es la unión del conjunto de tarsos con los metatarsos que a su vez se encuentran unidos a las falanges [8]. La Figura 1.4 muestra distribución en los huesos que conforman el pie. Además, la Figura 1.5 muestra la unión total de tobillo con pie.

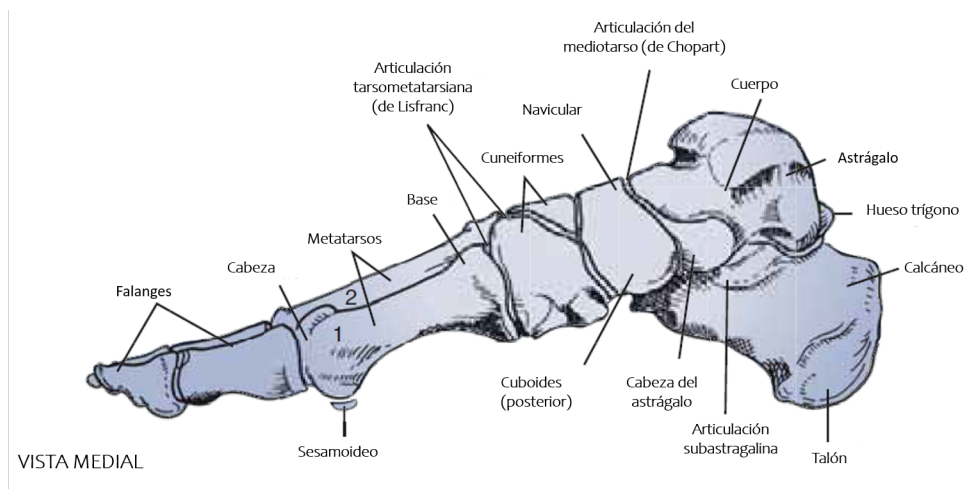


Figura 1.4: Huesos en el pie y ubicación de articulaciones Chopart y Lisfranc [8].

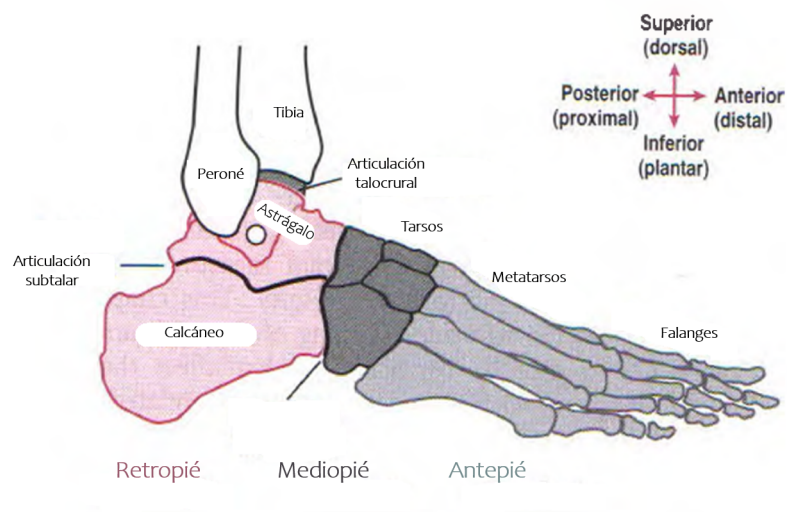


Figura 1.5: Anatomía de tobillo y pie, planos anatómicos y articulaciones principales [7].

Una vez que se tiene una idea básica de la anatomía y fisiología tanto del tobillo como del pie, es importante conocer los movimientos que se presentan en este sistema biomecánico. A sí mismo es importante conocer la ubicación de los ejes sobre los cuales se llevan a cabo dichos movimientos. Primeramente, se hace énfasis en la articulación subtalar, sobre la cual se presentan dos movimientos de supinación y pronación, estos movimientos angulares se llevan a cabo sobre un

eje que atraviesa desde el calcáneo hasta el astrágalo como se muestra en la Figura 1.6. A este eje se le conoce como eje de articulación subtalar. En el gráfico A se muestra el plano sagital o vista lateral del pie, aquí se puede observar que dicho eje se encuentra a 42 grados de la superficie plantar. De igual manera en el gráfico B se muestra el plano transversal o vista superior donde se muestra la orientación del eje a 16 grados del eje medio del pie [8].

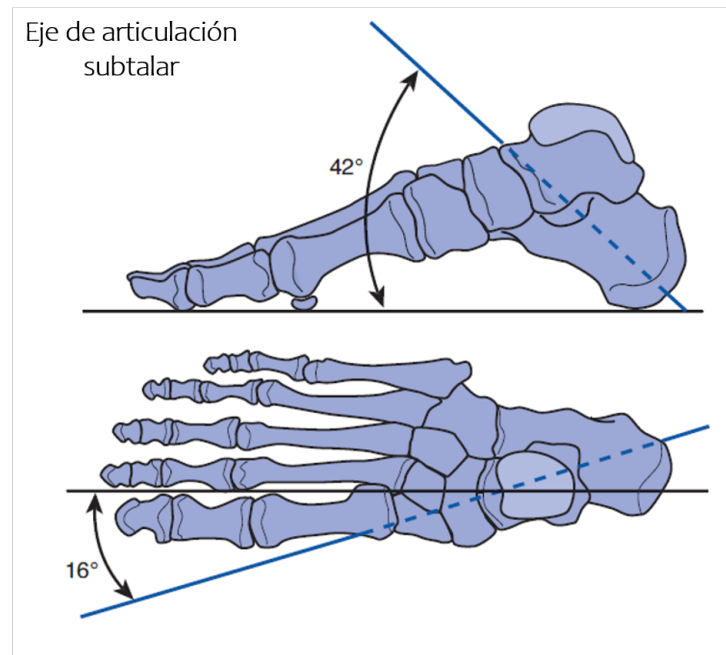


Figura 1.6: Orientación angular del eje de articulación subtalar [8].

En segunda instancia, se hace énfasis en la articulación talocrural (articulación de tobillo) sobre la cual se encuentran tres ejes de rotación como se puede observar en la Figura 1.7. Cada eje cuenta con su respectivo movimiento angular. Primeramente, alrededor del eje lateral medial se llevan a cabo tanto el movimiento de flexión dorsal (dorsiflexión) como el movimiento de flexión plantar, dicho eje está ubicado sobre la línea que atraviesa cada maléolo por el centro y perpendicular al plano sagital, ver Figura 1.8.

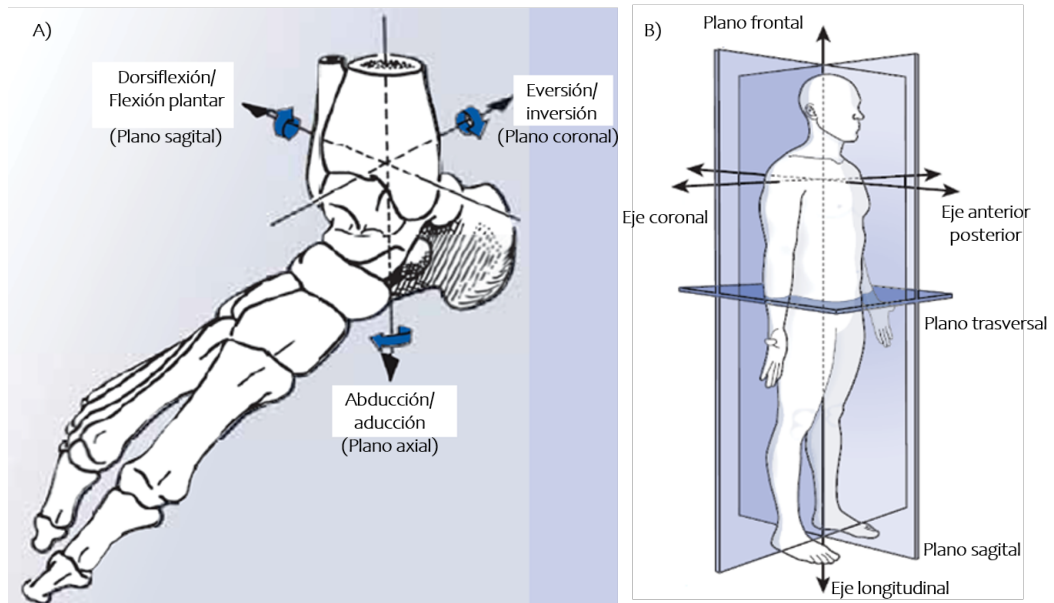


Figura 1.7: A) Ejes de rotación en la articulación de tobillo con sus respectivos movimientos. B) Planos anatómicos del cuerpo [8].

Segundo, al trazar una línea ortogonal al eje lateral medial y al plano frontal, se encuentra el eje anterior-posterior sobre el cual se llevan a cabo tanto el movimiento de eversión como el movimiento de inversión. Tercero y por último, al trazar un eje perpendicular a los ejes anteriores y al plano horizontal o transversal, se encuentra el eje vertical sobre el cual se llevan a cabo los movimientos de abducción y aducción.

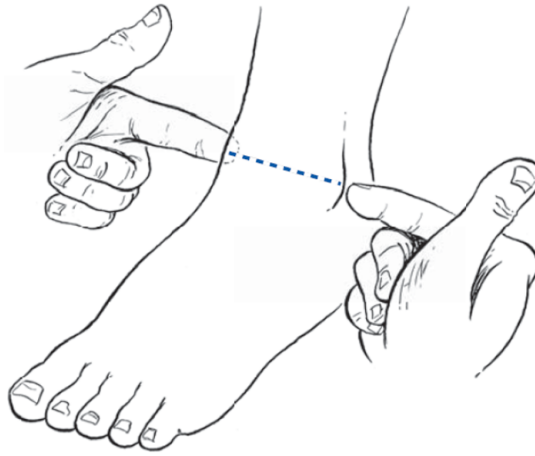


Figura 1.8: Procedimiento para estimación de posición del eje lateral medial [8].

De acuerdo con lo anterior, es correcto decir que los movimientos de supinación y pronación pueden ser replicados mediante la combinación de varios movimientos en el eje del tobillo (talocrural), como se muestra en la Tabla 1 [8].

Tabla 1. Movimientos en el eje subtalar y respectivos movimientos componentes en el eje talocrural [8].

<b>Movimiento</b>	<b>Componentes de movimiento</b>
Supinación	Flexión dorsal Eversión Abducción
Pronación	Flexión plantar Inversión Aducción

La Tabla 2 presenta una comparativa de los movimientos llevados a cabo tanto en el tobillo como en el pie, el plano sobre el que se lleva a cabo cada movimiento y sus respectivos ejes.

Tabla 2. Movimientos del tobillo y pie, componentes y rangos aproximados (grados) de cada uno [7] [9] [10].

<b>Movimiento</b>	<b>Eje de referencia anatómico</b>	<b>ROM (grados)</b>	<b>Plano</b>
Flexión dorsal/ Flexión plantar	Eje lateral medial, ubicado mediante los maléolos (centros)	15° - 20°/ 45° - 55°	Plano sagital
Abducción/ Aducción	Eje vertical	30° - 45°/ 30° - 45°	Plano trasversal
Inversión/ Eversión	Eje anterior-posterior	30° - 35°/ 15° - 20°	Plano frontal
Supinación/ Pronación	Eje de articulación subtalar	60°/ 30°	Plano compuesto

### **1.3. Rehabilitación para fractura de tobillo**

El proceso de rehabilitación de tobillo requiere la reeducación de la marcha en la articulación, este proceso es asistido por personal fisioterapeuta el cual calcula y evalúa las anomalías en la movilidad de la articulación dañada. Una vez identificadas las deficiencias en los rangos de movilidad o molestias al realizar movimientos en el tobillo, ejercicios de rehabilitación tanto de forma pasiva como activa (sin aplicar resistencia y aplicando resistencia respectivamente) son implementados en el paciente mediante el personal de fisioterapia [11]. Dichos ejercicios tienen el fin de recuperar los rangos óptimos de movilidad (ROM) y así lograr que el paciente recupere tanto fuerza, rango de movilidad articular, equilibrio y eficiencia al realizar movimientos naturales como lo son caminar, correr, subir escaleras o saltar, entre otros. Ejemplo de estos ejercicios se pueden observar en las Figuras 1.9 y 1.10.



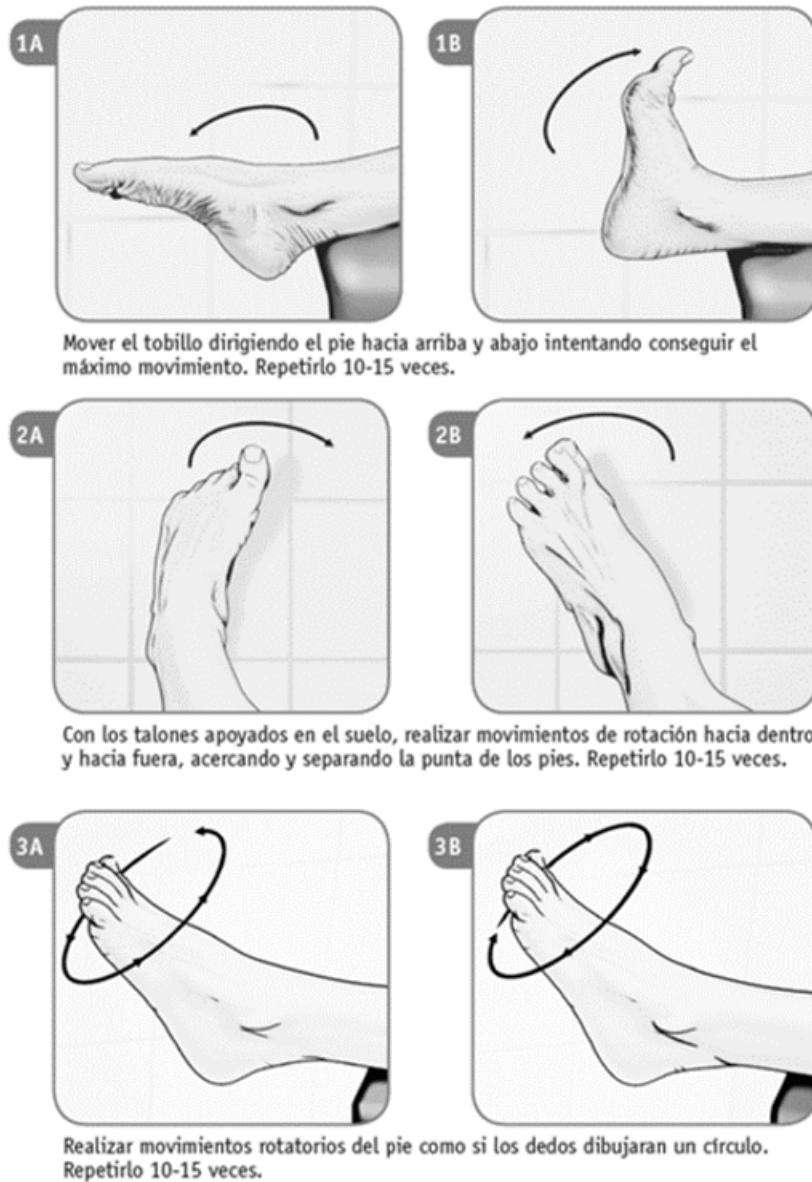


Figura 1.9: Ejemplo 1 de ejercicios para rehabilitación de la articulación de tobillo [12].

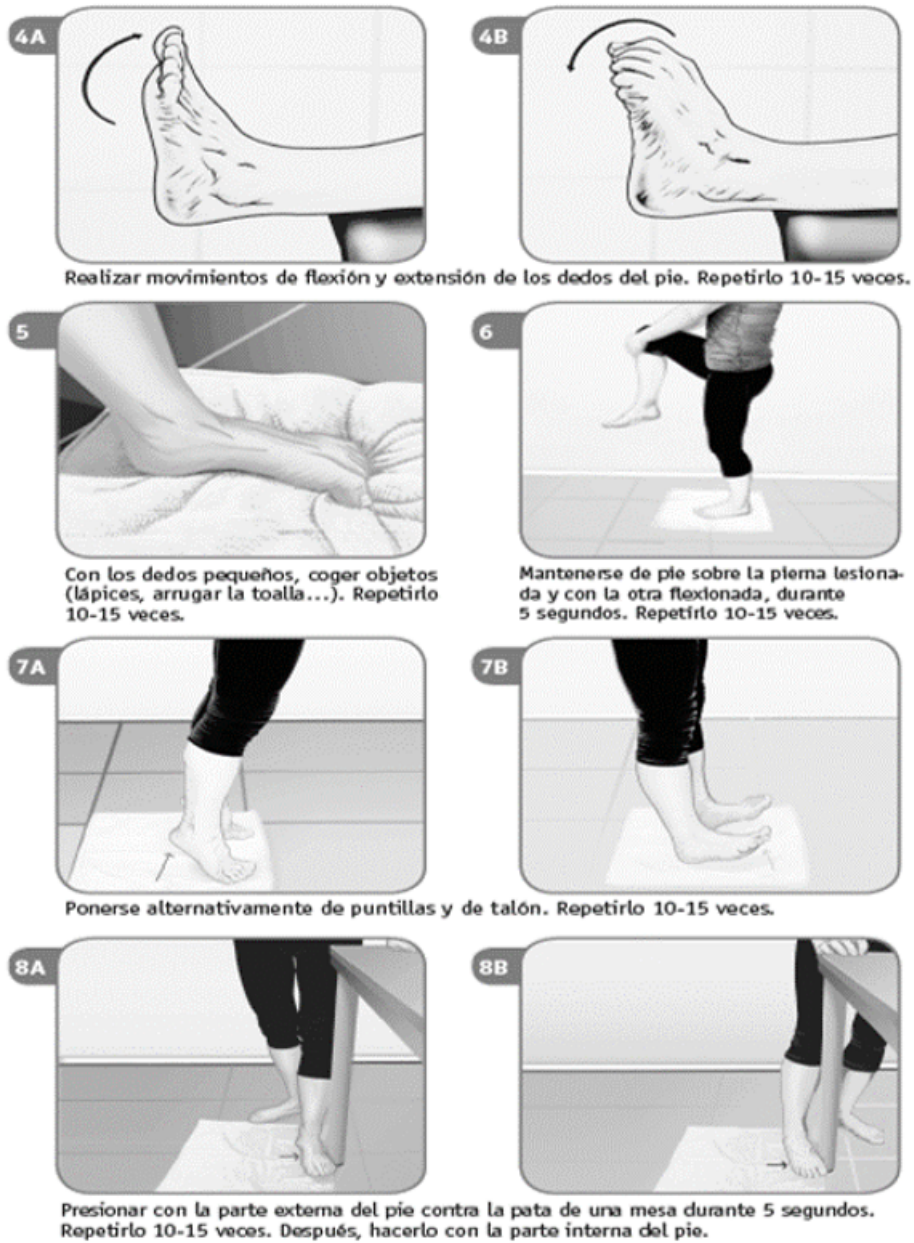


Figura 1.10: Ejemplo 2 de ejercicios para rehabilitación de la articulación de tobillo [12].

## 1.4. Estado del arte

Aunque la creación de mecanismos para la asistencia en la movilidad articular humana tiene origen bastantes décadas en el pasado, el diseño de dispositivos automáticos para la rehabilitación de tobillo es una realidad que data de pocos años atrás hasta la actualidad. Un ejemplo más antiguo de estos dispositivos es la plataforma Stewart, el cual fue inventado en el año 1965 por D. Stewart, este mecanismo articulado posee la cualidad de reproducir movimientos angulares sobre los tres planos cartesianos, está compuesto por dos bases unidas mediante tres o más actuadores prismáticos y cuenta con seis grados de libertad [13]. Debido a las capacidades de movimiento de la plataforma Stewart, este ha sido adaptado para reproducir ejercicios de rehabilitación de tobillo, ejemplo de esto es el dispositivo diseñado en 2006 por Gengqian Liu et al. en [14]. El movimiento de este dispositivo está dado por tres motores acoplados a una base fija, los cuales transmiten el movimiento rotativo mediante tres eslabones rígidos a una plataforma móvil donde el zapato del paciente se coloca en una placa paralela a dicha plataforma. Un sensor de seis grados de libertad está colocado entre la placa del zapato y la plataforma móvil, el cual está eléctricamente conectado al controlador del sistema. Dicho sistema tiene la capacidad de medir la fuerza que el paciente ejerce contra la plataforma y puede reproducir ejercicios tanto de forma pasiva como activa, ver Figura 1.11.



Figura 1.11: 3-RSS/S Robot de rehabilitación de tobillo tipo plataforma Stewart [14].

Aunque en cuestiones de funcionalidad los rehabilitadores de tobillo tipo plataforma Stewart son muy buenos, estos cuentan con rangos de movimiento limitado y generalmente son estructuras de gran peso, los cuales no consideran la ergonomía del pie y son de baja portabilidad. Hablando en materia de exoesqueletos, el diseño de estos dispositivos es un tema que data desde los años 1880 [15], sin embargo es hasta el año 2007 cuando Yoshiyuki Sankai presenta el sistema HAL® (Hybrid Assistive Limb®) un exoesqueleto de asistencia médica con versión para una sola articulación en este caso la de tobillo en [16]. Este dispositivo es capaz de realizar tareas de rehabilitación en la caminata, además cuenta con bastante ergonomía y peso ligero, aumentando así su portabilidad, sin embargo, únicamente cuenta con un movimiento por articulación y para el caso del tobillo solamente cuenta con movimiento de rotación en el plano sagital. Ver Figura 1.12.

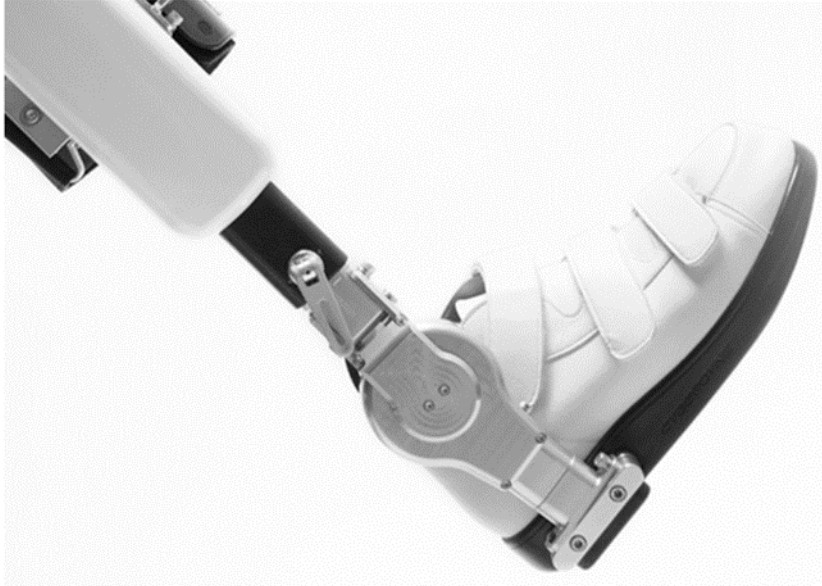


Figura 1.12: Sistema HAL® (Hybrid Assistive Limb®) en articulación de tobillo [16].

En el año 2011, A. Blanco Ortega et al. presentan en [17], el diseño virtual de un dispositivo de rehabilitación de la articulación de tobillo con movimiento en los tres planos anatómicos del este, el cual se presenta en la Figura 1.13. En dicho artículo se diseña un controlador PID para el seguimiento de forma suave de trayectorias planificadas para rehabilitación de tobillo. El diseño mecánico virtual de este dispositivo está basado en máquinas de rehabilitación de tobillo que ya existen de manera comercial, los cuales tienen como fundamento una estructura que utiliza como base el suelo. Este tipo de estructuras pueden llegar a ser bastante ligeras, sin embargo, su diseño demanda una cantidad de volumen considerable, haciéndolas poco cómodas a la hora de su transportación. De igual manera el rango de movimiento articular está limitado al diseño mecánico de este mismo.

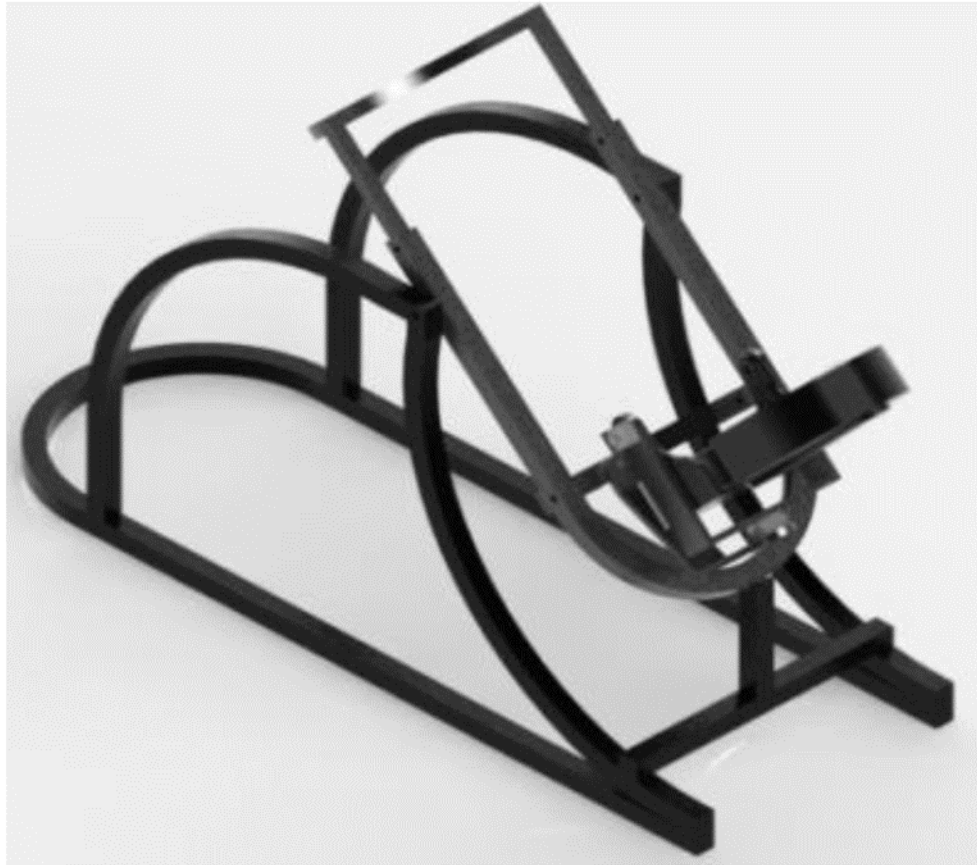


Figura 1.13: Prototipo virtual de rehabilitador de tobillo con 3 GDL (grados de libertad) [17].

El siguiente año, Yang Bai et al. realizaron en [18] el diseño de una órtesis de pie y tobillo, la cual podía realizar movimientos de dorsiflexión y flexión plantar mediante un motor sin escobillas de corriente directa. Aunado a esto, el diseño de dicha órtesis contaba con piezas que podían ser vestidas por el usuario. Sin embargo, el sistema de transmisión de movimiento presentado era bastante complejo, compuesto por engranajes y bandas dentadas para la transmisión y conversión del movimiento angular desde la base del motor hasta el eje de rotación en el tobillo con forme al plano sagital. Para mayor detalle ver Figura 1.14.

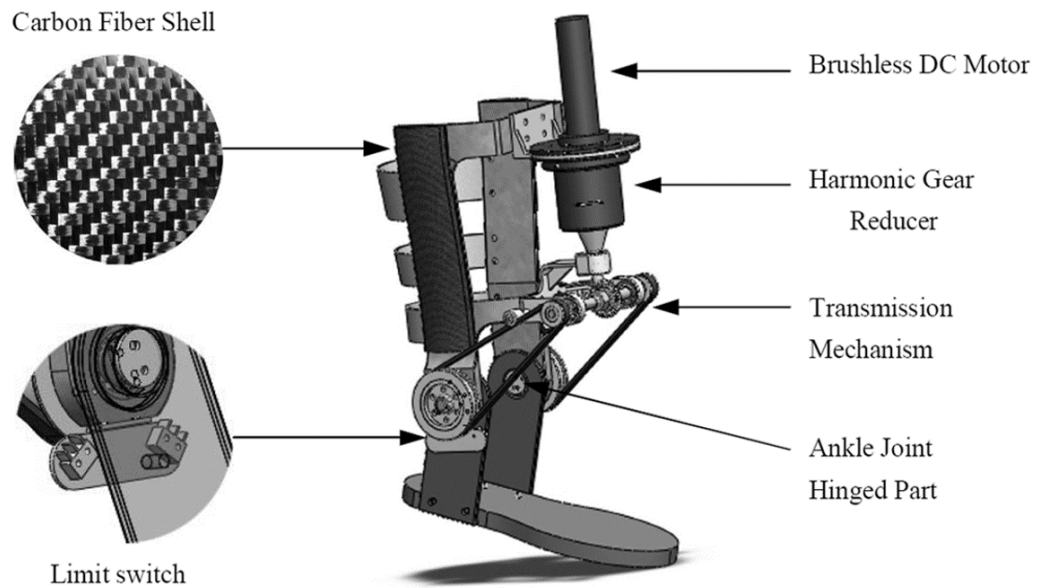


Figura 1.14: Órtesis motorizada de tobillo-pie para rehabilitación tobillo [18].

En el año 2014, Jihoon Kim y Joonbun Bae presentaron en [19] el diseño de un sistema guiado por cable para rehabilitación de tobillo (C-DARS en inglés). Dicho sistema tenía como propósito el poder aplicar el tratamiento de rehabilitación de tobillo a varios usuarios. Pequeñas partes de conexión eran unidas a la órtesis o férula que tenía el paciente. Estas partes a su vez se podían conectar al mecanismo mediante cables los cuales transmitían el movimiento y la fuerza necesaria para el tratamiento, cabe destacar que de igual forma podían ser desacopladas con facilidad. Este sistema únicamente presentaba movimiento angular en el plano sagital del tobillo. Grafico ilustrativo del sistema C-DARS se muestra en la Figura 1.15.

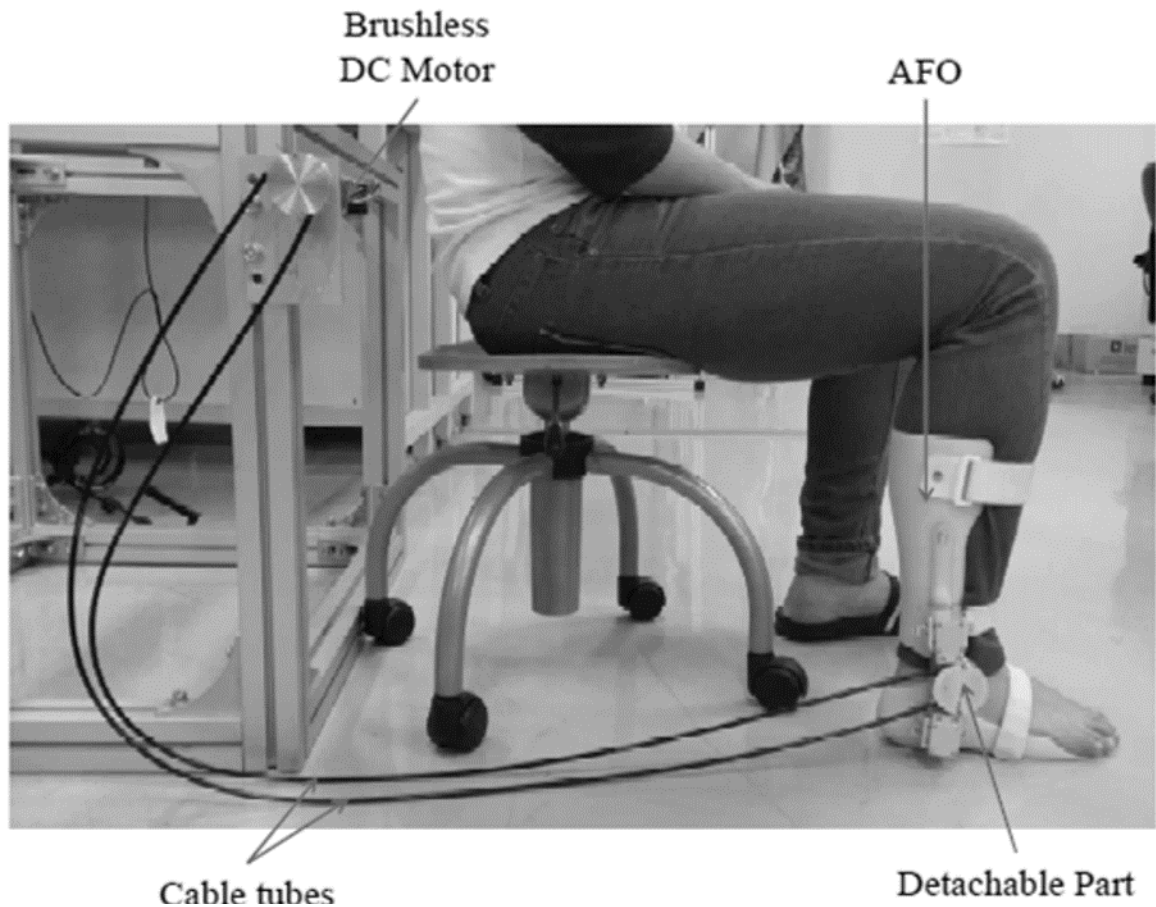


Figura 1.15: Sistema C-DARS para rehabilitación de tobillo con transmisión por cable [19].

Un año más tarde, Zhijiang Lu et al. muestran en [20] el desarrollo de un mecanismo automatizado de rehabilitación para entrenamiento de tobillo con tres grados de libertad. El sistema mencionado en el artículo contaba con 3 GDL y era capaz de realizar tareas de rehabilitación de tobillo tanto de forma activa como de forma pasiva o una combinación de ambas. La movilidad del sistema estaba dado por tres motores de corriente directa sin escobillas situados directamente en los ejes de rotación del tobillo. Gracias a la implementación de sensores tanto de fuerza como codificadores en los motores era posible calcular los movimientos dinámicos del tobillo. Mediante la experimentación en este sistema fue posible obtener un promedio de fuerza ejercida por cada movimiento en el tobillo. A pesar de ser un sistema que presentó un rendimiento alto en cuestión de funcionalidad, el peso del dispositivo es bastante elevado debido a que no fue diseñado para ser un sistema portátil. Para mayor detalle, ver Figura 1.16.



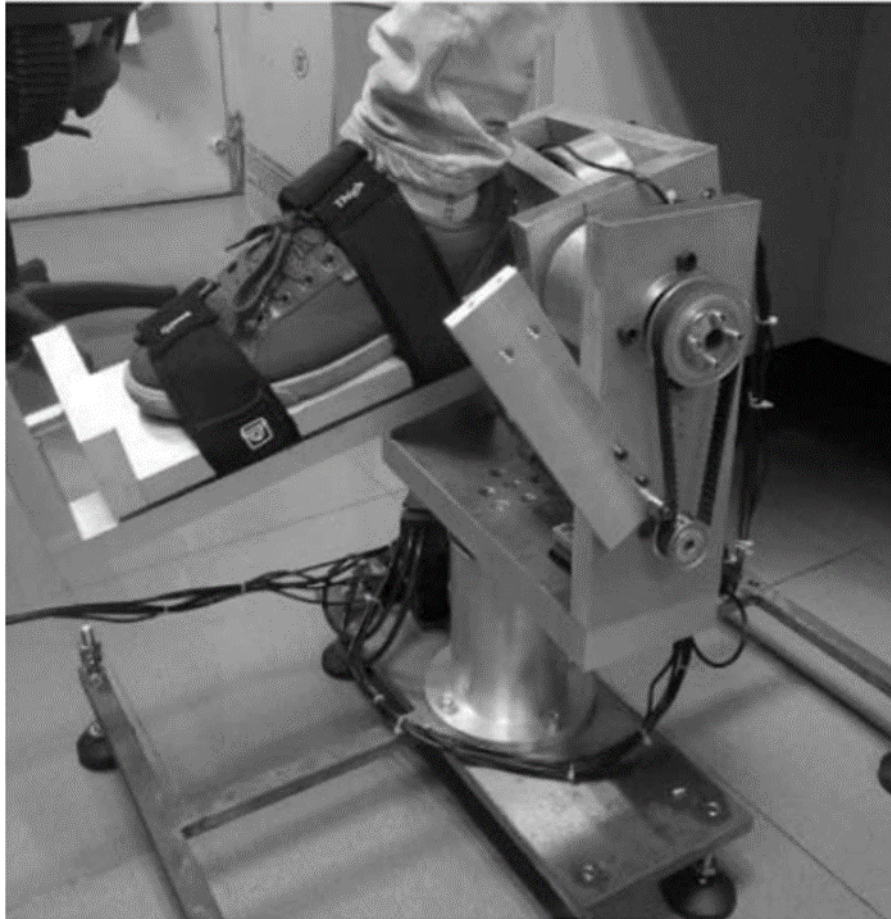


Figura 1.16: Sistema rehabilitador para entrenamiento de tobillo con 3 GDL [20].

Por último en el año 2016, Di Ao et al. presentaron en [21] un sistema robótico de tipo exoesqueleto para asistencia en el movimiento de tobillo. El control del dispositivo estaba basado en el modelo de Hill para musculo-tendón activado mediante señales EMG. Dicho sistema únicamente contaba con un movimiento angular sobre el plano sagital del tobillo como se observa en la Figura 1.17.

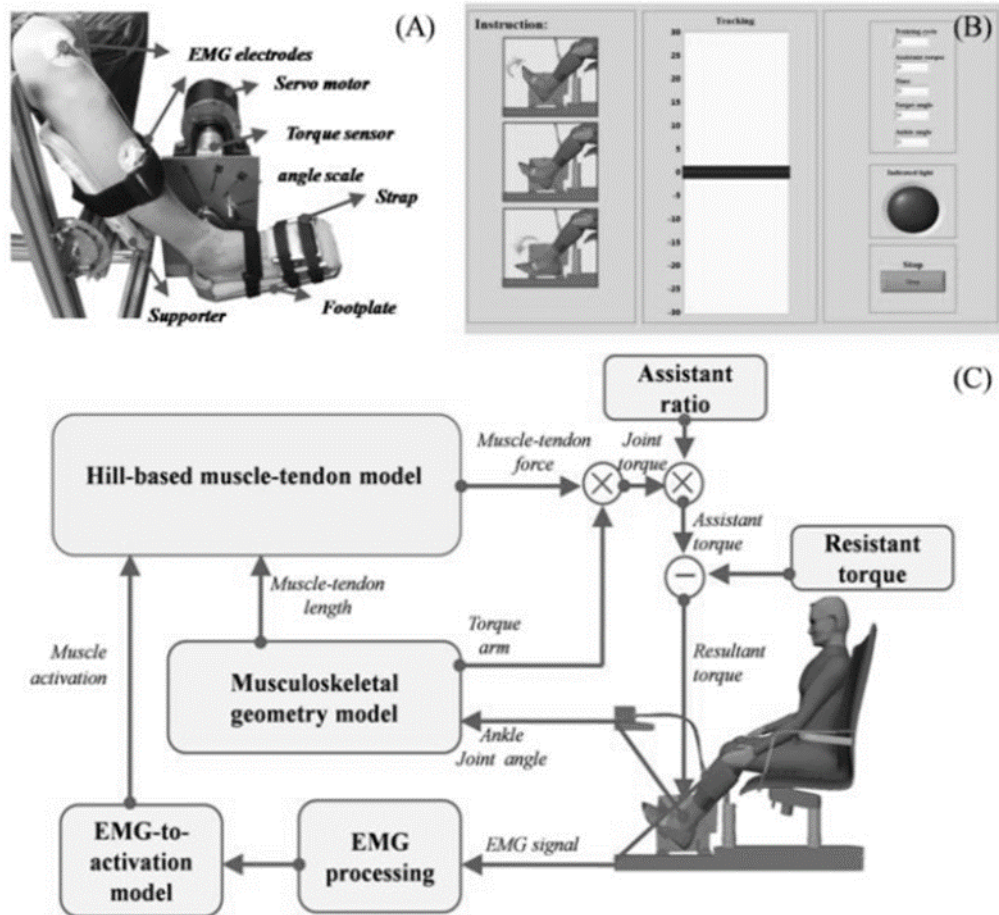


Figura 1.17: Robot exoesqueleto con asistencia eléctrica de tobillo y sistema de control tipo Hill impulsado por EMG y modelos proporcionales [21].

## 1.5. Definición del problema

Al realizar una revisión del estado del arte, se puede apreciar que los diseños de dispositivos para rehabilitación de tobillo actuales no consideran ciertos factores que permitirán un desarrollo más rápido y más completo en la recuperación de las capacidades motrices mediante el tratamiento de rehabilitación de tobillo. Algunos de los sistemas que fueron diseñados para este propósito, aunque suelen ser ligeros y ergonómicos, no contemplan en su totalidad los movimientos principales en la articulación de tobillo, sino que se enfocan únicamente en el movimiento en el plano sagital de este y en una rehabilitación de forma pasiva. Por otro lado sistemas robustos que sí contemplan movimiento angular en los tres planos anatómicos del tobillo y ejercicios de rehabilitación tanto activa

como pasiva, presentan diseños demasiado pesados, de gran volumen, o de poca ergonomía. Dichos diseños no suelen ser realizados con la intención de brindar portabilidad al usuario, siendo generalmente sistemas con base en el suelo, fijos o con sistemas de transmisión de movimiento demasiado complejos.

## **1.6. Hipótesis**

Una órtesis automatizada activa puede reproducir movimientos anatómicos del tobillo en los tres planos anatómicos (sagital, frontal y transversal) con la finalidad de automatizar ejercicios de rehabilitación de fractura de tobillo con un diseño ergonómico y portátil. Así mismo, una versión pasiva modificada de este dispositivo, puede ser capaz de realizar mediciones aproximadas de fuerza de rotación sobre los tres planos anatómicos del tobillo.

## **1.7. Objetivos**

### **1.7.1. Objetivo General**

Lograr el diseño mecánico, instrumentación, control e interacción mediante aplicación móvil de un prototipo de órtesis portátil activa para la articulación de tobillo con movimiento en los tres planos anatómicos y a su vez, realizar el diseño de una versión pasiva de dicha órtesis para la aproximación en la lectura de fuerzas ejercidas por el usuario.

### **1.7.2. Objetivos Particulares**

1. Realizar el diseño mecánico y modelado de prototipos de órtesis de tobillo portátil activa.
2. Realizar el diseño mecánico de una órtesis de tobillo portátil pasiva.
3. Generar las referencias de trayectorias articulares para rehabilitación automatizada en órtesis activa.
4. Seleccionar los actuadores y sensores (instrumentación) para órtesis activa.
5. Diseñar mecanismo para medición de fuerza en órtesis pasiva (sensor mecánico).

6. Diseñar de un sistema electrónico para el control de referencias angulares en ortesis activa.
7. Diseñar una aplicación móvil para interfaz de usuario en órtesis activa.

## **1.8. Metodología**

Para poder lograr los objetivos que se establecieron con anterioridad se propuso el seguimiento de la siguiente metodología:

1. Revisión bibliográfica
2. Análisis de la biomecánica articular del tobillo.
3. Análisis de la cinemática de movimiento mediante el método de Denavit-Hartenberg
4. Análisis del comportamiento de la energía y modelado dinámico del sistema mediante el método Euler-Lagrange.
5. Diseño mecánico de las 2 versiones del prototipo tanto activa como pasiva con software CAD.
6. Selección de actuadores y sensores basados en previo análisis.
7. Selección del controlador para seguimiento de trayectorias de seguimiento propuestas (órtesis activa).
8. Realización de simulaciones de movimiento y consumo de energía mediante MATLAB<sup>®</sup> (órtesis activa).
9. Desarrollo físico de los prototipos haciendo uso de tecnologías de impresión 3D.
10. Implementación electrónica.
11. Realización de experimentos para obtención de errores en tiempo real (órtesis activa).
12. Análisis y discusión de los resultados experimentales.

El resto de este documento se organiza en el siguiente orden para explicar los procedimientos de esta tesis:

En el Capítulo II, se presenta la realización del diseño mecánico haciendo uso de herramientas de modelado mecánico mediante software. Así, como los principales componentes que corresponden a cada eslabón en la estructura de la órtesis y una breve descripción de cada elemento. De igual manera el diseño renderizado de la órtesis. En el Capítulo III se presenta el análisis matemático general, el cual consiste en el análisis cinemático de la órtesis y el tobillo, la dinámica de la órtesis, la propuesta de un modelo dinámico simplificado del pie junto con tobillo y la dinámica del actuador. La planeación de trayectorias de seguimiento, dinámica de actuador y ley de control se presentan en el Capítulo IV, así como el diseño de una aplicación móvil para interacción usuario órtesis. El Capítulo V presenta la realización de simulaciones numéricas y resultados.

## Capítulo 2

# Diseño mecánico de órtesis para tobillo y pie

Para poder realizar un diseño adecuado de una órtesis automatizada de tobillo se propone tomar en cuenta varios aspectos, como satisfacer la función de asistir en ejercicios necesarios para la rehabilitación de la articulación objetivo. Para cumplir con dicha tarea se considera tanto la morfología de la articulación como los movimientos que se llevan a cabo en ésta, es decir, el dispositivo debe de contar con tantos GDL sean necesarios. Segundo, mediante el análisis tanto cinemático como dinámico es posible tener un modelo matemático del dispositivo y poder aproximar un modelo de la articulación, así pues, mediante simulaciones poder tener una idea muy cercana al comportamiento real del sistema. Tercero, en orden de compensar la dinámica de la órtesis tanto como la dinámica de la carga, en este caso haciendo referencia al pie y el tobillo se realiza una selección adecuada de actuadores que cuenten con suficiente par de torsión, capaz de contrarrestar las fuerzas implicadas en el movimiento del sistema y así llevar a cabo la tarea asignada. Por el mismo motivo es de gran importancia realizar un diseño que considere el menor peso posible tanto para disminuir la capacidad de torque requeridos tanto para aumentar la portabilidad del dispositivo, asimismo considerar la resistencia del material y por último pero no menos importante la ergonomía del dispositivo. Si se toman todos los aspectos anteriores en consideración para el diseño de una órtesis para tobillo, es posible crear un dispositivo eficaz, capaz de realizar los ejercicios requeridos para su rehabilitación.

A continuación se muestran las especificaciones para el diseño de una órtesis de tobillo activa:

1. Contar con 3 GDL, uno por cada plano anatómico referente al tobillo.
2. Los ejes de rotación deben estar alineados con los ejes de la articulación de tobillo.

3. Considerar los rangos de movimiento angular requeridos para los ejercicios de rehabilitación y los ROMs de un adulto promedio.
4. El diseño debe poder ajustarse a diferentes medidas tanto de pie como de tobillo.
5. Considerar un peso en la órtesis menor a 2 kg.
6. Utilización de material rígido capaz de soportar el movimiento y el peso del dispositivo como de la carga.
7. Considerar medidas promedio para un pie humano adulto.

## **2.1. Diseño CAD de órtesis de tobillo activa**

Una vez que se definen los requerimientos de diseño para la órtesis de rehabilitación, se realiza el diseño mecánico en consideración de dichas especificaciones. Para esta tesis fue utilizado el software CAD (del inglés, diseño asistido por computadora) SolidWorks<sup>®</sup>. A continuación se muestra un análisis detallado de todas las piezas que componen el sistema.

## **2.2. Diseño de soporte superior de órtesis**

Con el propósito de fijar el prototipo a la extremidad se propone que exista un componente base sobre la cual se realicen los demás movimientos y sirva de ancla. Este componente base, se denomina en este trabajo como eslabón 0 el cual es un ensamble compuesto por la unión de varias piezas. Primeramente se encuentra la pieza P1, sobre la cual se encuentra montado el actuador, el cual corresponde a un motor CD con caja de engranaje y codificador. Sobre la flecha del rotor se encuentra ensamblado una montura de aluminio que a su vez, está fija a P2, engranaje que se encarga de la transmisión del movimiento al siguiente eslabón. En la Tabla 3 se encuentra detallado cada componente con respecto a la Figura 2.1.

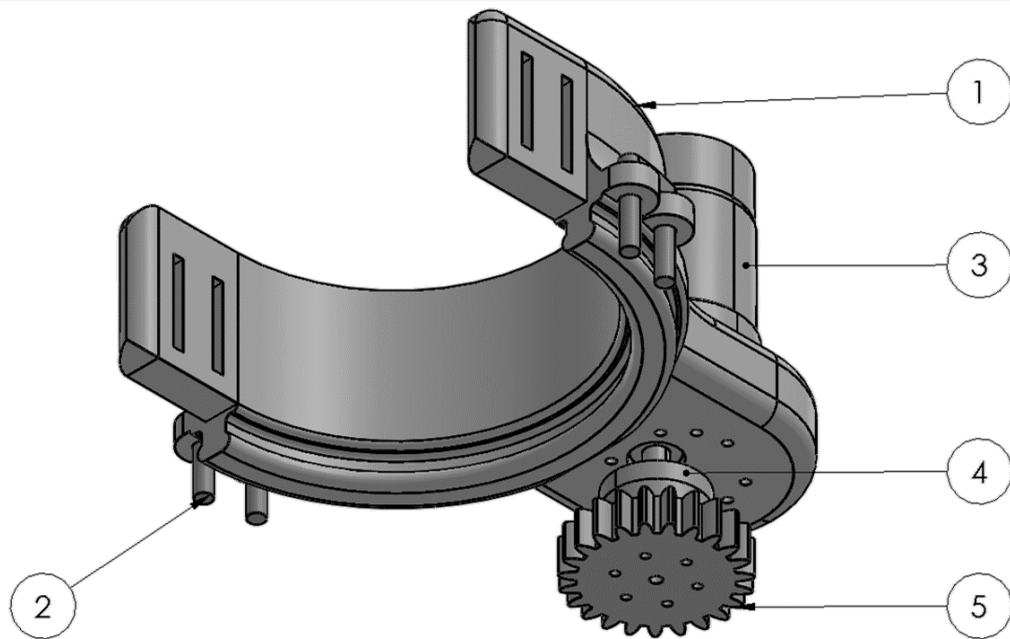


Figura 2.1: Ensamble del eslabón 0 de órtesis activa, origen del movimiento de abducción y aducción.

Tabla 3. Descripción de piezas que conforman eslabón 0.

N.º de elemento	Nombre de pieza	Descripción	Cantidad
1	P1	Pieza soporte de pierna. Empotramiento de actuador (motor CD). Cavity para correas de sujeción. Guía cóncava para movimiento de abducción y aducción.	1
2	Seguro	Pieza anti rotación para fijación de eslabón 0 con eslabón 1.	2
3	Actuador	Motor CD con codificador y caja de engranaje.	1
4	P2	Pieza con forma de engrane para transmisión de movimiento.	1



### 2.3. Diseño de eslabón 1 órtesis activa

El eslabón 1 corresponde al ensamble de cuatro piezas, tres perforadas P3, P4 y P5, y un actuador. Donde P3 es la pieza mediante la cual el eslabón 1 se une al eslabón 0 por medio de una guía cóncava que permite el movimiento de abducción y aducción provocado por el contacto de la pieza P2 con el dentado en la pieza P3. P4 que es un perfil rectangular perforado en forma de codo que recubre tanto a la pieza P3 como a la pieza P5 para ajuste de longitudes en dos direcciones. Cabe destacar que en todo momento P3 forma un ángulo recto con P5 como se observa en la Figura 2.2. Un motor CD se encuentra empotrado en la pieza P5. Dicho motor es el responsable de producir el movimiento angular de inversión y eversión. Para detalle de cada pieza en eslabón 1, ver Tabla 4.

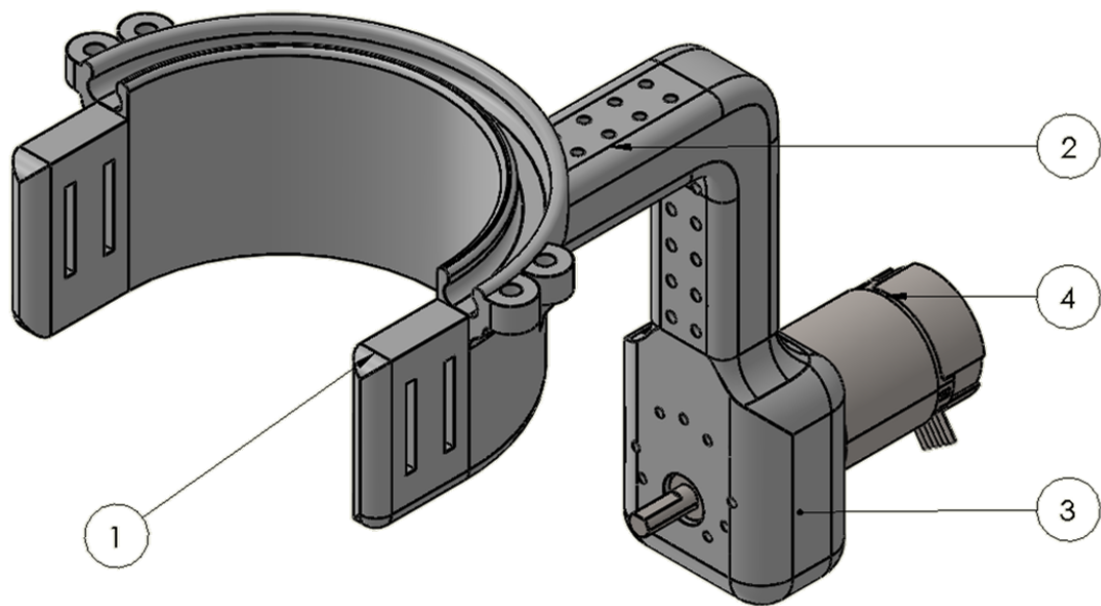


Figura 2.2: Ensamble de eslabón 1, origen del movimiento de inversión y eversión.

Tabla 4. Descripción de piezas que conforman eslabón 1 de órtesis activa.

N.º de elemento	Nombre de pieza	Descripción	Cantidad
1	P3	Pieza guía sobre la cual se realiza el movimiento de rotación abducción y aducción. Esta pieza cuenta con una extensión para unión con las demás piezas del ensamble. Cuenta con perforaciones para ajuste de longitud. Unión con eslabón 0.	1
2	P4	Codo de 90 grados que sirve como unión entre piezas P2 y P3. Cuenta con perforaciones para ajuste de longitudes.	1
3	P5	Pieza extremo del ensamble. Sirve como montura de motor para los movimientos de inversión y eversión. Cuenta con perforaciones para ajuste de longitud y una pestaña perforada para impedir el movimiento de rotación.	1
4	Actuador	Motor CD con codificador y caja de engranaje.	1

## 2.4. Diseño de eslabón 2 de órtesis activa

El eslabón 2 está conformado por el ensamble de cinco piezas, una montura de aluminio, P6, P7, P8 y un motor CD. La pieza P6 contiene una cavidad circular donde embona una montura de aluminio en forma de disco mediante la cual, el motor del eslabón 1 transmite el movimiento de rotación al eslabón 2. Esta pieza cuenta con una pestaña perforada en donde se puede colocar un pasador que impida los movimientos de inversión y eversión. La pieza P7 hace referencia a un perfil rectangular perforado en forma de codo que une a la pieza P6 y P8. Gracias a esta pieza es posible realizar un ajuste de longitudinal. Por último la pieza P8 cuenta con una cavidad para fijación del motor CD. Dicho motor es responsable de ocasionar los movimientos de dorsiflexión y flexión plantar como se observa en la Figura 2.3. Para mayor detalle consultar la Tabla 5.

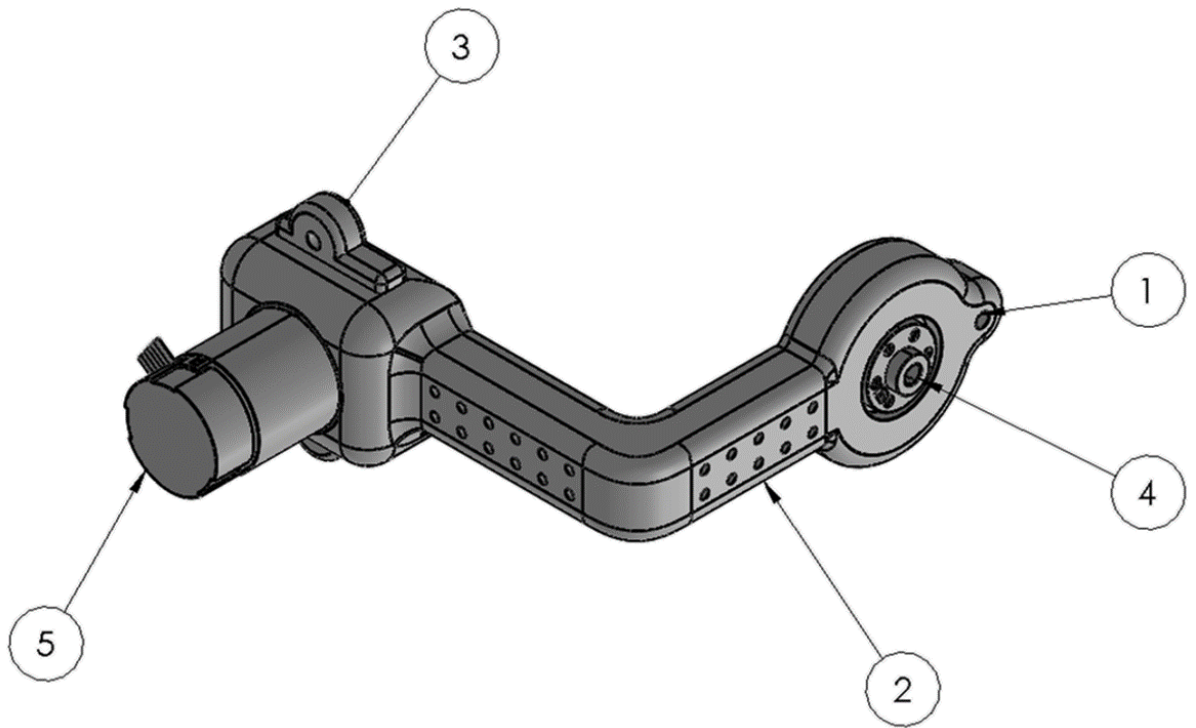


Figura 2.3: Ensamble de eslabón 2 de órtesis activa, origen del movimiento de dorsiflexión y flexión plantar.

Tabla 5. Descripción de piezas que conforman eslabón 2 de órtesis activa.

N.º de elemento	Nombre de pieza	Descripción	Cantidad
1	P6	Pieza de unión con eslabón 1. Contiene cavidad con perforaciones para montura de aluminio. Extensión perforada para ajuste de longitud.	1
2	P7	Codo de 90 grados para unión entre P5 y P6. Contiene perforaciones para ajuste de longitudes.	1
3	P8	Pieza que sirve como soporte de motor CD para el movimiento de dorsiflexión y flexión plantar. Cuenta perforaciones para ajuste de longitud y pestañas perforadas para seguro anti movimiento.	1
4	Montura de aluminio	Montura de aluminio perforada en forma de disco para empotramiento del eje rotor en motor CD.	1
5	Actuador	Motor CD con codificador y caja de engranaje.	1

## 2.5. Diseño de eslabón 3 de órtesis activa (base del pie)

El eslabón 3 consiste en la unión de diez componentes: las piezas P9 -P14, U1-U3 y una montura de aluminio. Este conjunto de piezas conforman la plataforma donde se coloca el pie del usuario, este va fijo mediante el uso de correas de sujeción, las cuales están colocadas mediante ranuras tanto en las piezas P9 y P10 como en las piezas P13 y P14. De esta forma se garantiza que el movimiento de los tres eslabones móviles a los tres ejes de articulación de tobillo. Es posible ajustar las medidas tanto en lo alto, ancho y largo del eslabón 3 para poder ajustar el modelo a diferentes tamaños de pie. Este ajuste es posible a la unión del conjunto de piezas P9-P13 mediante las piezas U1, U2 y U3, las cuales son perfiles rectangulares perforados con separaciones uniformes. Para agregar ergonomía al diseño es necesaria la implementación de una plantilla personalizada a la superficie cóncava sobre la cual va colocado del pie, la cual se puede apreciar en la Figura 2.4.

Para mayor detalle en las piezas que conforman el eslabón 3, consultar la Tabla 6.

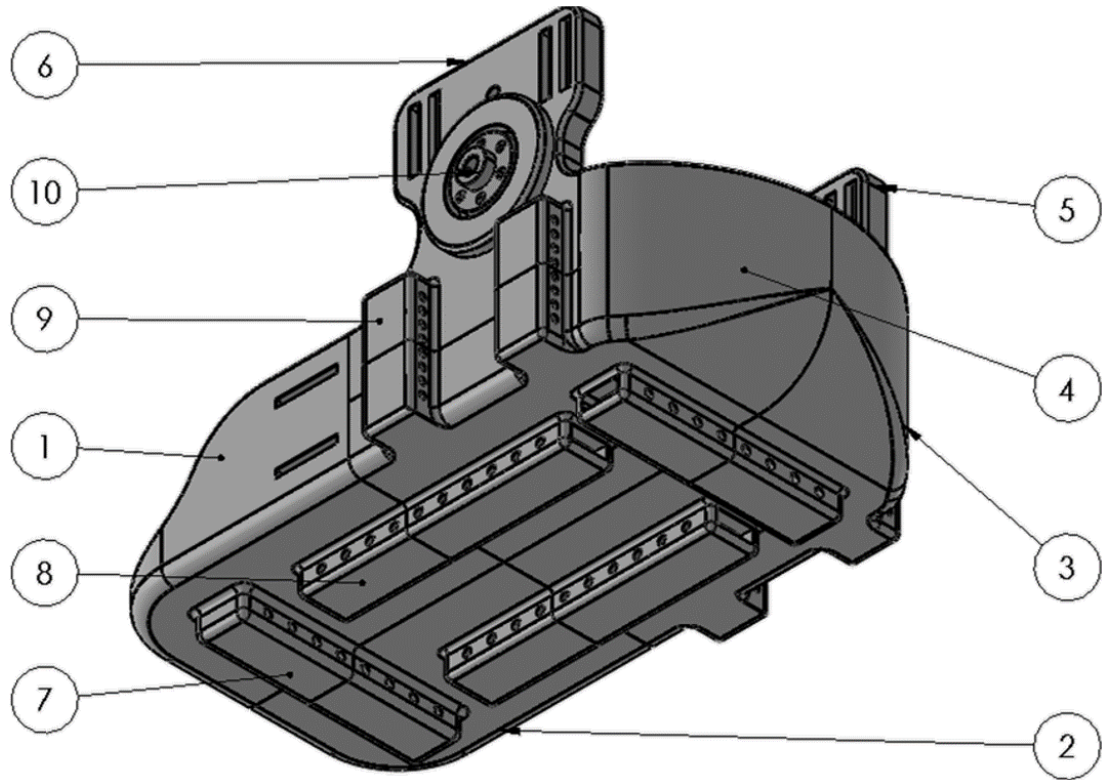


Figura 2.4: Ensamble de eslabón 3, plataforma en cual se asegura el pie del usuario mediante correas y permite la transmisión de los movimientos en los anteriores eslabones a la articulación de tobillo.

Tabla 6. Descripción de piezas que conforman eslabón 3 de órtesis activa.

<b>N.º de elemento</b>	<b>Nombre de pieza</b>	<b>Descripción</b>	<b>Cantidad</b>
1	P9	Pieza frontal izquierda. Cuenta con cavidad perforada para ajuste de longitud en dos direcciones.	1
2	P10	Pieza frontal derecha. Cuenta con cavidad perforada para ajuste de longitud en dos direcciones.	1
3	P11	Pieza posterior derecha. Cuenta con cavidad perforada para ajuste de longitud en dos direcciones.	1
4	P12	Pieza posterior izquierda. Cuenta con cavidad perforada para ajuste de longitud en dos direcciones.	1
5	P13	Pieza superior derecha. Cuenta con cavidad perforada para ajuste de longitud en dos direcciones y montura de aluminio.	1
6	P14	Pieza superior izquierda. Cuenta con cavidad perforada para ajuste de longitud en dos direcciones y montura de aluminio.	1
7	U1	Barra perforada de unión ajustable entre P9 y P10 al igual que P11 y P12.	2
8	U2	Barra perforada de unión ajustable entre P9 y P12 al igual que P10 y P11.	2
9	U3	Barra perforada de unión ajustable entre P11 y P13 al igual que P12 y P14.	4
10	Montura de aluminio	Montura de aluminio perforada en forma de disco para empotramiento del eje rotor en motor CD.	1

## 2.6. Ensamble órtesis completo de órtesis activa

Por último, se procedió a realizar el ensamble de todos los eslabones para formar el modelo completo de la órtesis de tobillo como se puede observar en la Figura 2.5.

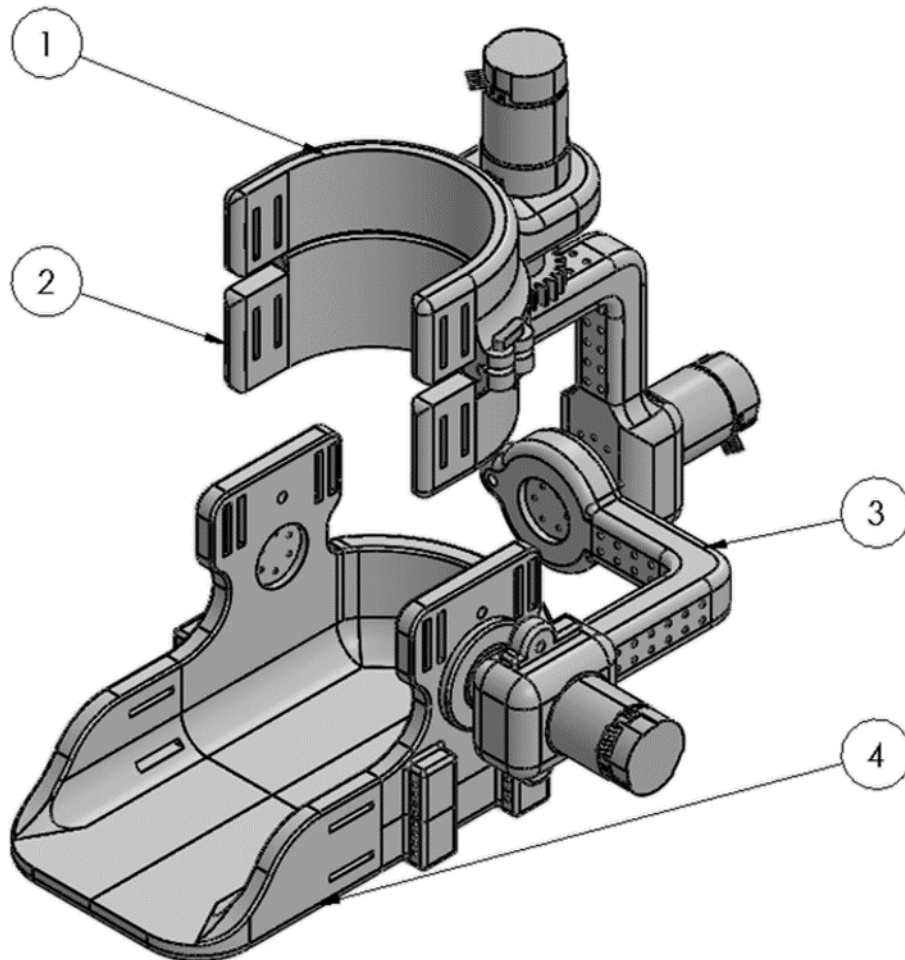


Figura 2.5: Ensamble completo de órtesis de tobillo. 1) Eslabón 0 (soporte de órtesis a pierna). 2) Eslabón 1. 3) Eslabón 2. 4) Eslabón 3 (base del pie).

Una vez terminado el diseño de la órtesis se procedió a realizar una representación gráfica mediante la herramienta de renderizado de SolidWorks® para tener una idea de la apariencia final del prototipo la cual se muestra en la Figura 2.6.

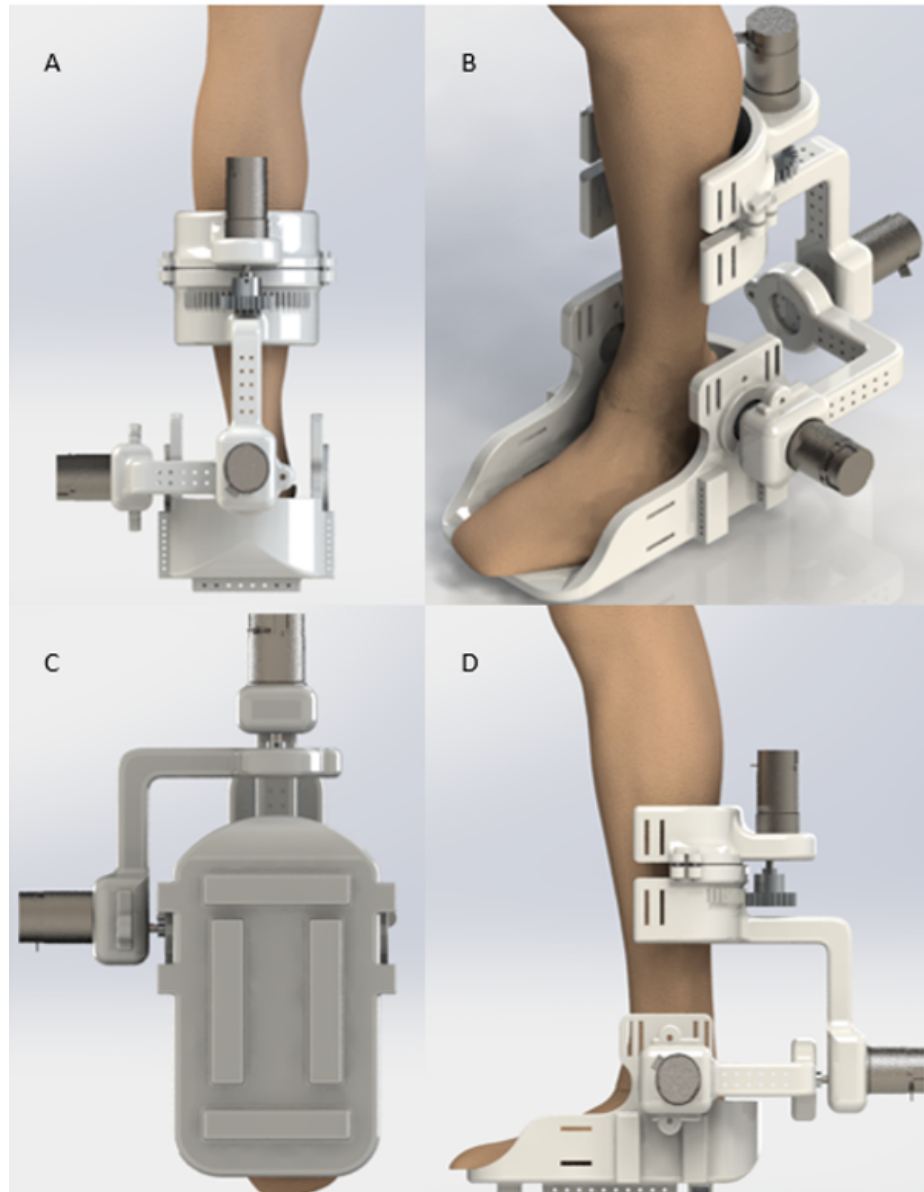


Figura 2.6: Representación gráfica de órtesis de tobillo con tobillo y pie izquierdo. A) Vista posterior, B) Vista isométrica, C) Vista inferior, D) Vista lateral.

## 2.7. Diseño CAD de órtesis pasiva

De la misma forma, se realizó un diseño CAD para el modelo de órtesis pasiva, la cual tiene como propósito la lectura tanto angular como de tiempos en



los movimientos del usuario y la estimación de fuerzas a partir del mecanismo propuesto en base a calculo de deformación elástica en resortes.

## 2.8. Diseño de soporte superior de órtesis pasiva

Análogamente al diseño de órtesis activa, se diseñó un componente para el modelo de órtesis pasiva que tenga la función de fijar el dispositivo a la extremidad del usuario. Dicho componente se denomina en este trabajo como eslabón A. Este eslabón A, cuenta con un sistema de dos resortes alrededor de la pierna para medición alrededor del eje vertical y un engrane sedimentado que transmite el movimiento al encoder. El diseño de este componente se muestra en la Figura 2.7.

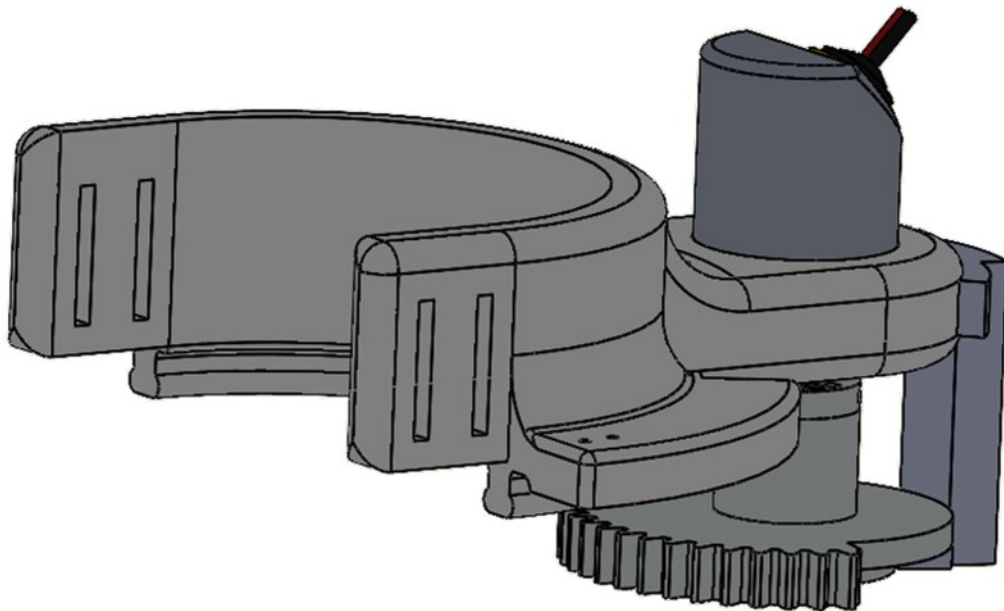


Figura 2.7: Eslabón A de órtesis pasiva el cual tiene como función soportar el dispositivo y la lectura en el eje vertical.

## 2.9. Diseño de eslabón B de órtesis pasiva

El siguiente componente es el eslabon B. Dicho eslabón cuenta con una guía sobre la cual se montan los resortes que restringen el movimiento del eslabón A y a su vez cuenta con dentado para transmisión de movimientos de abducción y

aducción. Formando una escuadra, se encuentra empotrado el encoder rotativo para la lectura sobre el eje anterior-posterior y una caja donde van ubicados los resortes que limitan los movimientos de inversión y eversión como muestra en la Figura 2.8.

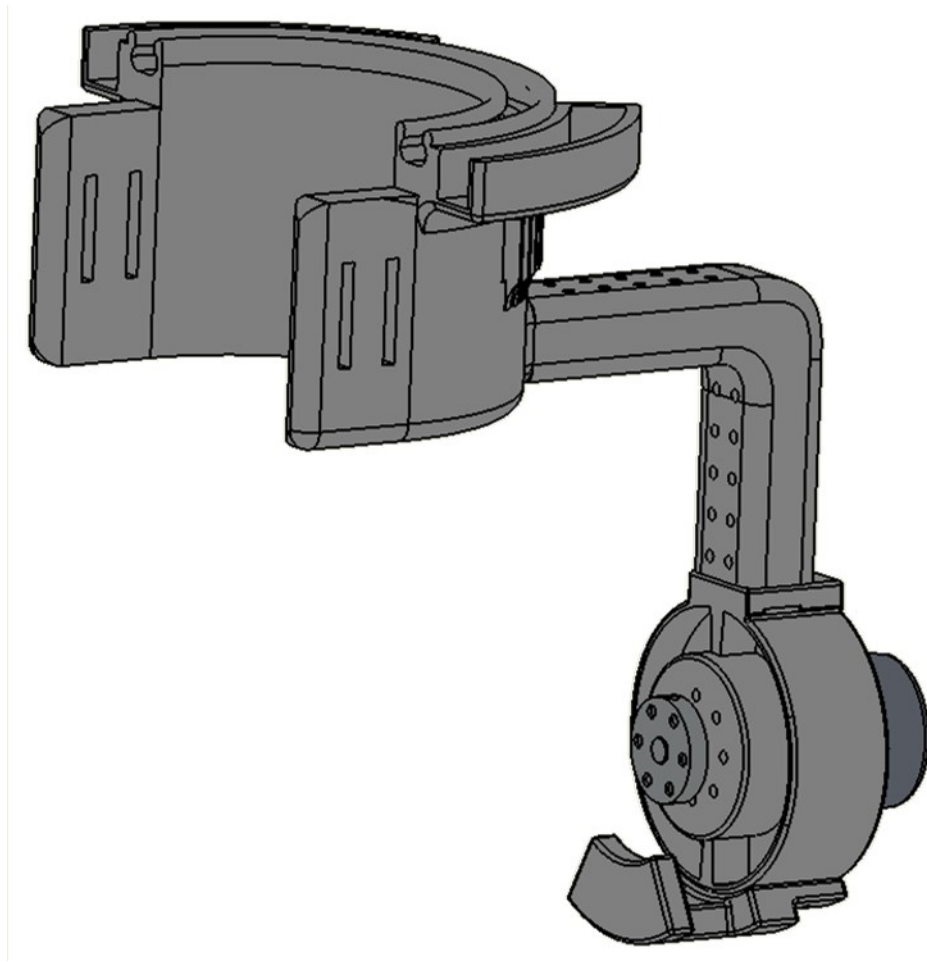


Figura 2.8: Eslabón B de órtesis pasiva. Tiene como función la transmisión de los movimientos de abducción y aducción. Cuenta con un encoder para la lectura de movimientos en el eje anterior-posterior.

## 2.10. Diseño de eslabón C de órtesis pasiva

El eslabón C es el encargado de transmitir el movimiento de inversión y eversión al eslabon B. Tiene forma de Y y en uno de sus extremos va colocado un encoder para medición de los movimiento de dorsiflexión y flexión plantar. Cuenta

con dos cajas de almacenamiento de resortes para restringir los movimiento alrededor de eje lateral medial. El diseño del eslabón C de órtesis pasiva se puede observar en la Figura 2.9.

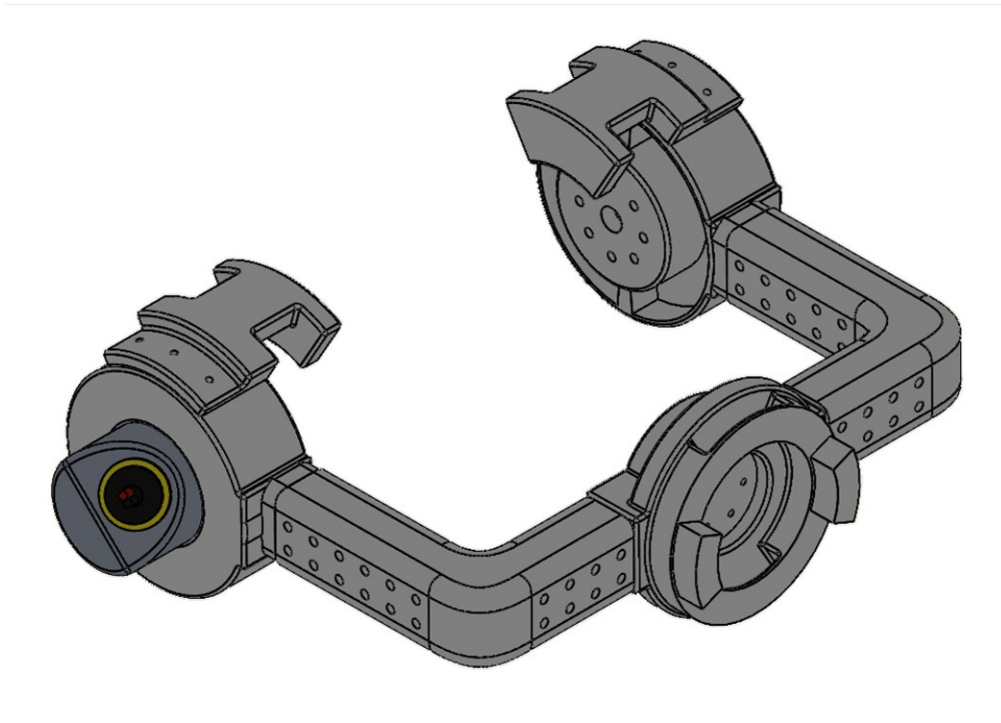


Figura 2.9: Eslabón C de órtesis pasiva. Tiene como función la transmisión de los movimientos de inversión y eversión. Cuenta con un encoder para la lectura de movimientos en el eje lateral medial.

## 2.11. Diseño de eslabón D de órtesis pasiva

El eslabón D es donde reposa el pie del usuario. Este es el encargado de transmitir los movimientos de dorsiflexión y flexión plantar al eslabón C. El diseño de este eslabón se puede muestra en la Figura 2.10.

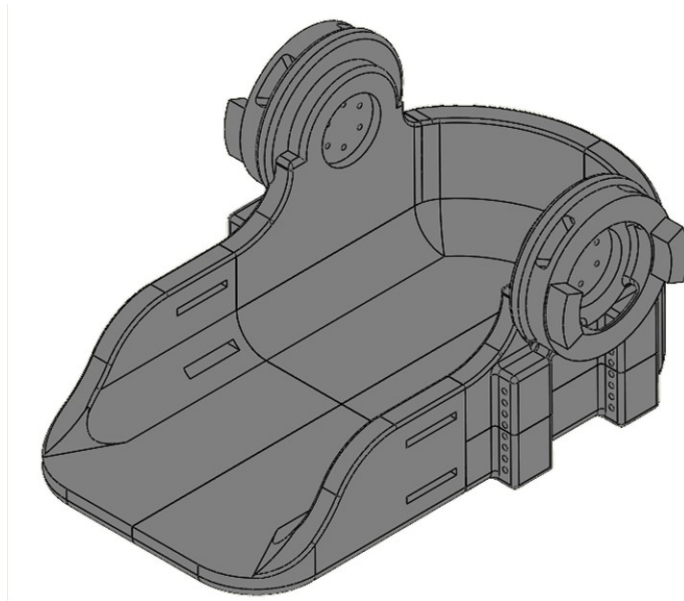


Figura 2.10: Eslabón D de órtesis pasiva. Tiene como función la transmisión de los movimientos de dorsiflexión y flexión plantar. Cuenta con un encoder para la lectura de movimientos en el eje lateral medial.

## 2.12. Sistema de medición por resortes de órtesis pasiva

Para hacer énfasis en el mecanismo de medición mediante resortes utilizado en el diseño de la órtesis pasiva, se presenta un acercamiento a este en la Figura 2.11. Donde se puede observar que al transmitir un movimiento de algún eslabón, el conjunto de resortes se oponen a la transmisión del movimiento angular debido a su resistencia a la deformación. Mediante el conocimiento de la constante de elasticidad del resorte, es posible estimar la fuerza que se está aplicando sobre este y así obtener el brazo de palanca aplicado.

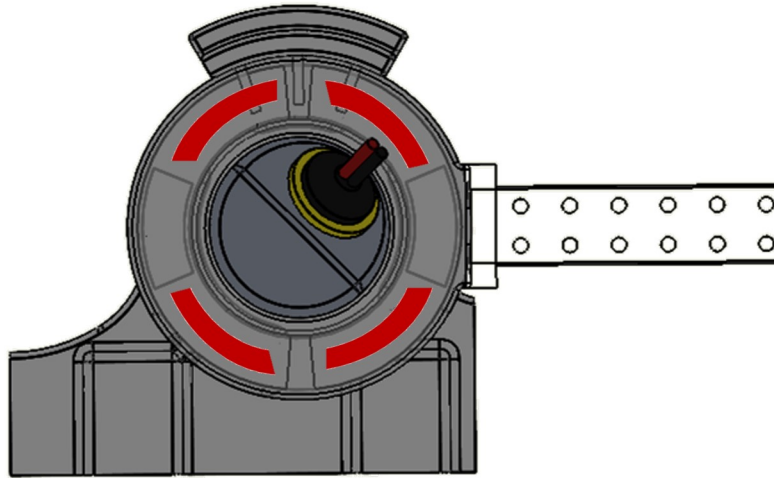


Figura 2.11: Acercamiento al sistema de medición mediante resortes en la órtesis pasiva.

### 2.13. Ensamble completo de órtesis pasiva

Por último se muestra el ensamble completo de todos los eslabones del modelo de órtesis pasiva para lectura en la articulación de tobillo en la Figura 2.11.

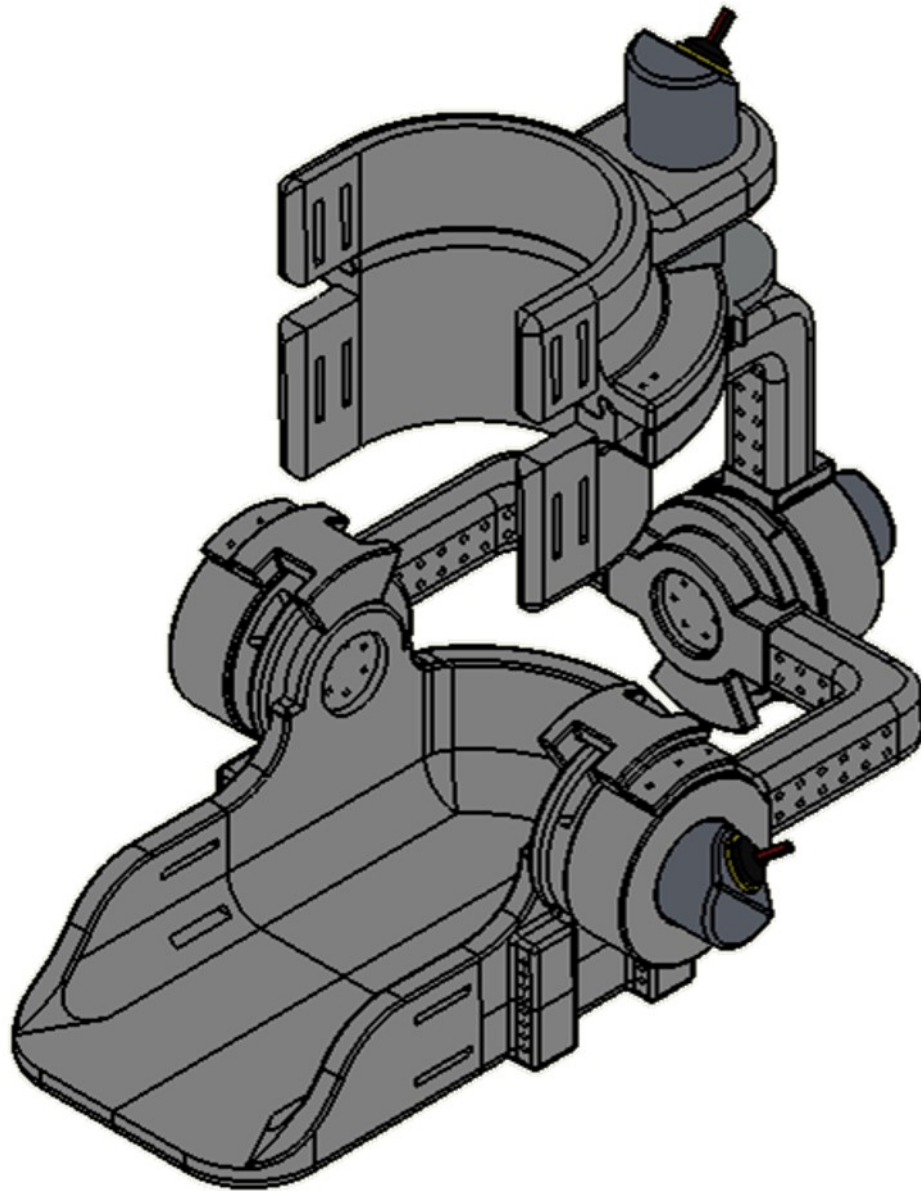


Figura 2.12: Ensamble completo de órtesis pasiva con vista isométrica.

Al igual que el diseño de la órtesis activa, una vez terminado el diseño del modelo de órtesis pasiva, se utilizó la herramienta de renderizado de SolidWorks® para tener una imagen más aproximada a la realidad del prototipo el cual se muestra en la Figura 2.12.

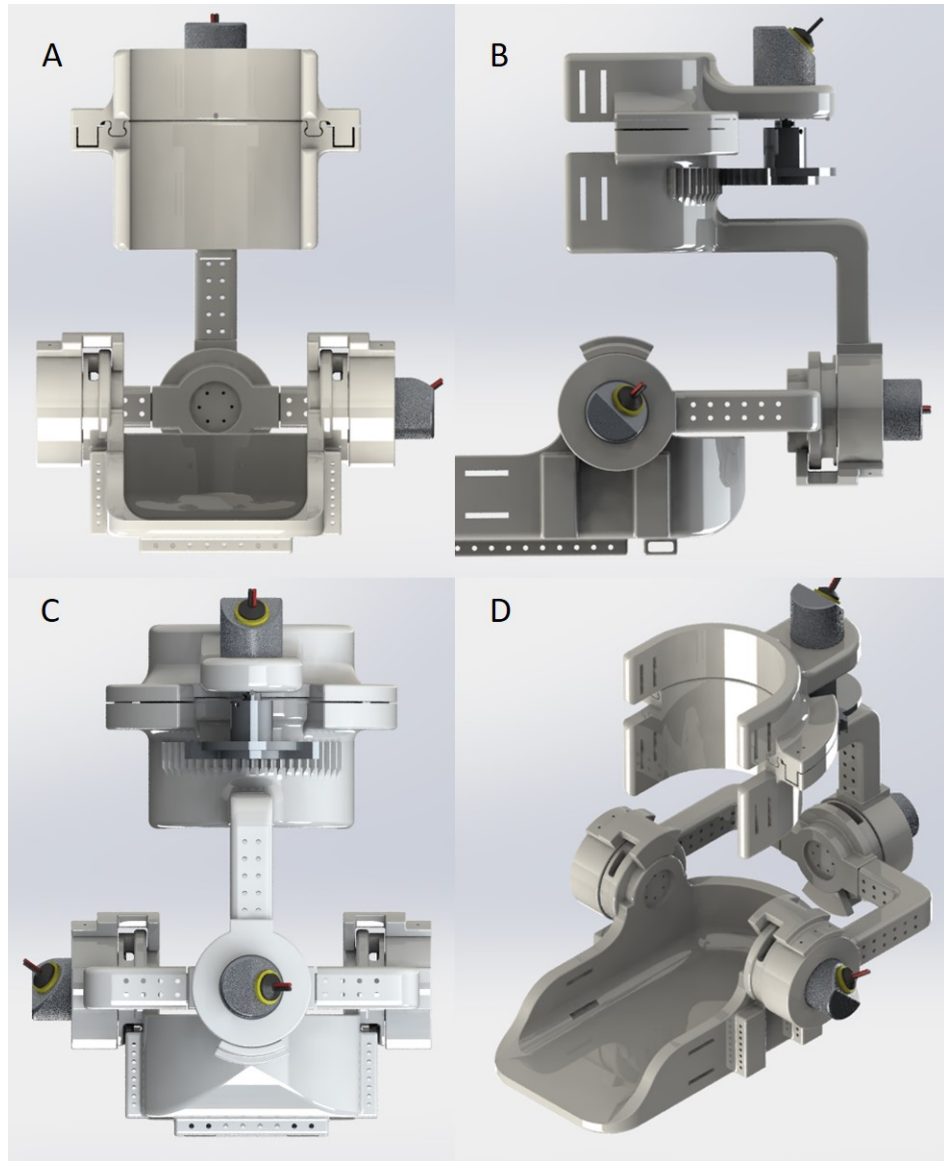


Figura 2.13: Renderizado de órtesis pasiva. A) Vista frontal, B) Vista lateral, C) Vista posterior, D) Vista isométrica.

## Capítulo 3

### Modelado matemático

Una vez realizado el diseño mecánico estructural de la órtesis de tobillo, se procede a obtener el modelo matemático correspondiente. Debido a que la órtesis está diseñada como un sistema automatizado articular se puede analizar sus movimientos como manipulador respecto a la definición establecida por la *Asociación Francesa de Normalización (AFNOR)*: “Mecanismo formado generalmente por elementos en serie, articulados entre sí, destinados al agarre y desplazamiento de objetos. Es multifuncional y puede ser gobernado directamente por un operador humano o mediante dispositivo lógico”. Por lo tanto es posible aplicar los métodos convencionales para modelado matemático que se utilizan en robots manipuladores.

La Figura 3.1 presenta una comparativa entre el diseño CAD de la órtesis propuesta y un gráfico de asignación de variables cinemáticas para cada articulación. En el gráfico A) se presenta el punto donde se lleva a cabo cada movimiento en el eje de la articulación del gráfico B). Es decir para cada eje  $i$ -ésimo de la articulación de tobillo corresponde una variable de movimiento articular  $q_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , que a su vez corresponden a un grado de libertad.



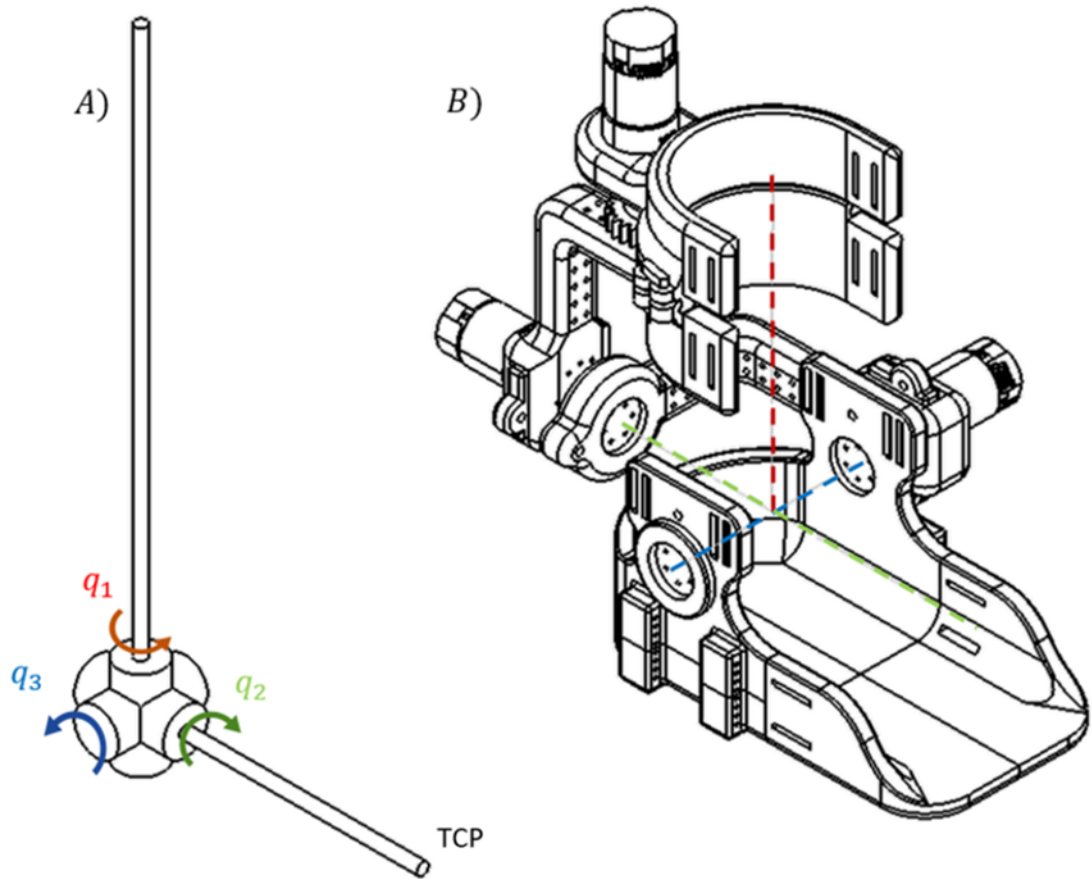


Figura 3.1: A) Representación gráfica del posicionamiento de variables de movimiento angular para cada articulación en órtesis de tobillo y extremo final del sistema articulado (TCP). B) Diseño CAD de órtesis de tobillo.

Basándose en la representación de la Figura 3.1, en el presente capítulo se expone primeramente el análisis cinemático directo haciendo uso del algoritmo de Denavit-Hartenberg. Partiendo de la cinemática directa se procede a calcular la dinámica de la órtesis mediante las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange y obtener un modelo matemático que describa el comportamiento de las energías en el sistema.

### 3.1. Modelado cinemático

Mediante el análisis cinemático, es posible conocer el comportamiento de los movimientos de cualquier sistema articulado. Dicho análisis permite conocer la

posición, velocidad y aceleración de cada eslabón o elemento del sistema sin la necesidad de conocer las fuerzas que ocasionan los movimientos.

Según el estudio realizado, la cinemática de los manipuladores puede dar a conocer todas las propiedades geométricas y movimientos con respecto al tiempo y los cambios que estos sufren. Dentro de la problemática de la cinemática de manipuladores, hay dos puntos a tratar; el primero es la cinemática directa que se centra en la orientación y posición del último elemento del sistema articulado, tomando la base como referencia, el segundo se refiere a la cinemática inversa a través de la cual se puede obtener la configuración que el robot puede adoptar para cumplir con un posición y orientación.

Para poder obtener un análisis adecuado de la cinemática de un sistema articulado, es necesario conocer la representación adecuada de los sistemas coordenados para cada eslabón. En 1955 Denavit y Hartenberg propusieron un método matricial que permite obtener las ecuaciones cinemáticas para un sistema completo articulado mediante la implementación de 4 transformaciones básicas. Las transformaciones son las siguientes:

1. Rotación alrededor del eje  $z_{i-1}$  un ángulo  $\theta_i$ .
2. Traslación a lo largo de  $z_{i-1}$  una distancia  $d_i$ ; vector  $d_i(0, 0, d_i)$ .
3. Traslación a lo largo de  $x_i$  una distancia  $a_i$ ; vector  $a_i(a_i, 0, 0)$ .
4. Rotación alrededor del eje  $x_i$  un ángulo  $\alpha_i$ .

Este método permite establecer un sistema de coordenadas  $\{S_i\}$  para cada eslabón  $i$  del sistema articulado. Así pues, las transformaciones se componen de la siguiente manera:

$${}^i A = T(z, \theta_i)T(0, 0, d_i)T(a_i, 0, 0)T(x, \alpha_i) \quad (3.1)$$

Donde:

$$T(z, \theta_i) = \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i & 0 & 0 \\ S\theta_i & C\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$T(0, 0, d_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$T(a_i, 0, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$T(x, \alpha_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha_i & -S\alpha_i & 0 \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Por lo tanto, el producto de dicha multiplicación matricial es:

$${}_{i-1}^i A = \begin{bmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i & a_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & a_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Y los parámetros de Denavit-Hertenberg son  $\theta_i$ ,  $d_i$ ,  $a_i$  y  $\alpha_i$ . Así, mediante la evaluación de dichos parámetros y la utilización de determinadas normas en [22] es posible calcular la matriz A, la cual contiene la relación entre todos los eslabones del sistema articulado.

### 3.2. Cinemática directa

Para el análisis de la cinemática directa de la órtesis de tobillo, se utilizó el diagrama esquemático de asignación de tramas de la Figura 3.2. Donde,  $D_2$  es una distancia para efectos de las operaciones simbólicas, la cual corresponde al valor cero en el diseño propuesto.

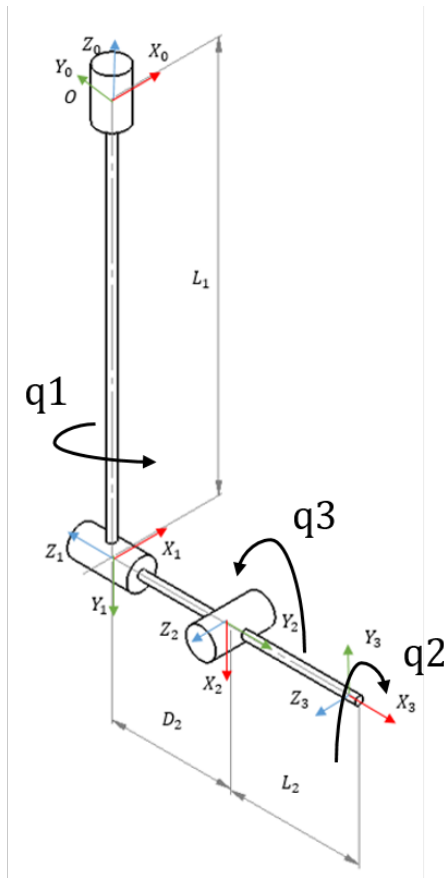


Figura 3.2: Análisis esquemático para la asignación de tramas en órtesis de tobillo donde el sistema de coordenadas  $i$ -ésimo está representado por  $x_i$  (línea verde),  $y_i$  (línea roja) y  $z_i$  (línea azul).

Siguiendo el algoritmo de Denavit-Hartenberg, es posible obtener la Tabla 7, donde se encuentran plasmados los parámetros para cada eslabón de la órtesis representada en el modelado mecánico.

Tabla 7. Parámetros de cada eslabón.

No. eslabón	$\theta_i$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$
1	$q_1$	$-L_1$	0	$-90^\circ$
2	$q_2 + 90^\circ$	$-D_2 = 0$	0	$-90^\circ$
3	$q_3 + 90^\circ$	0	$L_2$	0

Una vez obtenidos los parámetros es posible conocer el modelo cinemático mediante siguiente matriz:

$$\begin{bmatrix} \text{Cos}\theta_i & -\text{Cos}\alpha_i\text{Sin}\theta_i & \text{Sin}\alpha_i\text{Sin}\theta_i & a_i\text{Cos}\theta_i \\ \text{Sin}\theta_i & \text{Cos}\alpha_i\text{Cos}\theta_i & -\text{Sin}\alpha_i\text{Cos}\theta_i & a_i\text{Sin}\theta_i \\ 0 & \text{Sin}\alpha_i & \text{Cos}\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

La cual, al sustituir los parámetros da como resultado las siguientes matrices de transformación:

$${}^0_1A = \begin{bmatrix} \text{Cos}(q_1) & 0 & -\text{Sin}(q_1) & 0 \\ \text{Sin}(q_1) & 0 & \text{Cos}(q_1) & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$${}^1_2A = \begin{bmatrix} -\text{Sin}(q_2) & 0 & -\text{Cos}(q_2) & 0 \\ \text{Cos}(q_2) & 0 & -\text{Sin}(q_2) & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

$${}^2_3A = \begin{bmatrix} -\text{Sin}(q_3) & -\text{Cos}(q_3) & 0 & -L_2\text{Sin}(q_3) \\ \text{Cos}(q_3) & -\text{Sin}(q_3) & 0 & -L_2\text{Cos}(q_3) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Mediante (3.8), (3.9) y (3.10) se obtiene la matriz de transformación homogénea:

$${}^0_3A = \begin{bmatrix} {}^0_3A_{1,1} & {}^0_3A_{1,2} & {}^0_3A_{1,3} & {}^0_3A_{1,4} \\ {}^0_3A_{2,1} & {}^0_3A_{2,2} & {}^0_3A_{2,3} & {}^0_3A_{2,4} \\ {}^0_3A_{3,1} & {}^0_3A_{3,2} & {}^0_3A_{3,3} & {}^0_3A_{3,4} \\ {}^0_3A_{4,1} & {}^0_3A_{4,2} & {}^0_3A_{4,3} & {}^0_3A_{4,4} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

donde,

$$\begin{aligned} {}^0_3A_{1,1} &= C(q_1)S(q_2)S(q_3) \\ {}^0_3A_{1,2} &= C(q_1)C(q_3)S(q_2) - S(q_1)C(q_3) \\ {}^0_3A_{1,3} &= -C(q_1)C(q_2) \\ {}^0_3A_{1,4} &= L_2(C(q_1)C(q_3)S(q_2) + C(q_3)S(q_1)) \\ {}^0_3A_{2,1} &= S(q_1)S(q_2)S(q_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^0_3A_{2,2} &= C(q_3)S(q_1)S(q_2) + C(q_1)S(q_3) \\
{}^0_3A_{2,3} &= -C(q_2)S(q_1) \\
{}^0_3A_{2,4} &= L_2(S(q_1)S(q_2)S(q_3) - C(q_1)C(q_3)) \\
{}^0_3A_{3,1} &= C(q_2)S(q_3) \\
{}^0_3A_{3,2} &= C(q_2)S(q_3) \\
{}^0_3A_{3,3} &= S(q_2) \\
{}^0_3A_{3,4} &= L_2C(q_2)S(q_3) - L_1 \\
{}^0_3A_{4,1} &= 0 \\
{}^0_3A_{4,2} &= 0 \\
{}^0_3A_{4,3} &= 0 \\
{}^0_3A_{4,4} &= 1
\end{aligned}$$

y las coordenadas del extremo final del sistema articulado están definidas por:

$$xe = L_2(C(q_1)C(q_3)S(q_2) + C(q_3)S(q_1)) \quad (3.12)$$

$$ye = L_2(S(q_1)S(q_2)S(q_3) - C(q_1)C(q_3)) \quad (3.13)$$

$$ze = L_2C(q_2)S(q_3) - L_1 \quad (3.14)$$

De esta forma, la posición cartesiana y la orientación del extremo final o TCP (Tool Center Point) son conocidas.

### 3.3. Cinemática inversa

La cinemática inversa como su nombre lo dicta, es el proceso inverso de la cinemática directa. Mediante esta, es posible conocer los ángulos que existen entre cada eslabón de un sistema articulado conociendo la posición cartesiana del TCP de la cadena cinemática. Este proceso puede llevarse a cabo de varias formas, ya sea por medio de métodos geométricos o mediante la matriz de transformación homogénea. En este caso se hizo uso de relaciones trigonométricas en la matriz de transformación homogénea mediante la tangente inversa como se puede observar en las siguientes ecuaciones:

$$q_1 = \tan^{-1} \left( \frac{{}^0_3A(2,3)}{{}^0_3A(1,3)} \right) \quad (3.15)$$

$$q_2 = \tan^{-1} \left( \frac{{}^0_3A(3,3)}{{}^0_3A(1,3)} \right) \quad (3.16)$$

$$q_3 = \tan^{-1} \left( \frac{{}^0_3A(3,1)}{{}^0_3A(3,2)} \right) \quad (3.17)$$

### 3.4. Propuesta esquemática del diagrama de órtesis automatizada

Con el fin de realizar un análisis matemático adecuado respecto al sistema completo de la órtesis automatizada se propuso el diagrama de la Figura 3.3, donde se presenta el sistema de control a lazo cerrado de la órtesis de tobillo y la forma en la que están conectados cada uno de los elementos del sistema.

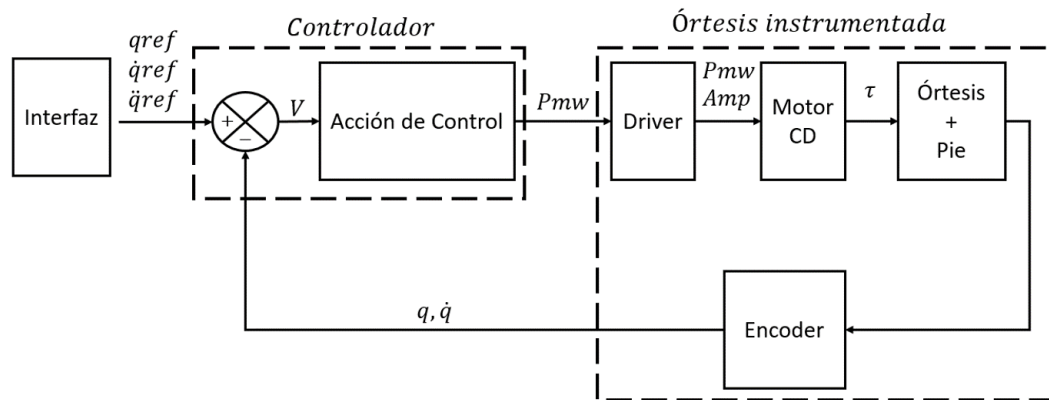


Figura 3.3: Diagrama esquemático del sistema de control a lazo cerrado de la órtesis de tobillo.

### 3.5. Dinámica de la órtesis

El modelado dinámico de un sistema tiene como propósito establecer la relación que existe entre las fuerzas que interactúan en el sistema de estudio y los movimientos que en este originan. Para la realización del modelo dinámico de la órtesis se utilizó la metodología de Euler – Lagrange para la obtención de las ecuaciones de movimiento. Dichas ecuaciones son obtenidas a base de dos ecuaciones principales:

$$L = K - U \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = \tau \quad (3.19)$$

Donde  $L$  es la ecuación Lagrangiana, la cual está definida por la diferencia entre la energía cinética ( $K$ ) y la energía potencial ( $U$ ) de cada eslabón. A su vez la ecuación (3.18) es homologa a la ecuación (3.19), la cual expresa la relación que existe entre el par de torsión y la derivada Jacobiana de la ecuación Lagrangiana. En dicha expresión  $q$  hace referencia a las coordenadas generalizadas (para el caso de estudio, angulares) y por lo tanto  $\dot{q}$  representa la derivada respecto al tiempo de esta (velocidad angular). Por ende, a un sistema con  $n$  cantidad de variables de movimiento, sea  $q_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ) su representación, corresponden las expresiones:

$$L = K(q_i, \dot{q}_i) - U(q_i) \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i \quad (3.21)$$

De esta forma es posible calcular el par de torsión provocado por la dinámica de cada  $i$ -ésimo eslabón del sistema articulado. Así pues, la energía cinética en la órtesis de tobillo está dada por:

$$K_o(q, \dot{q}) = \sum_{i=1}^3 \left[ \frac{1}{2} m_i v_{cm_i}^T v_{cm_i} + \frac{1}{2} w_{cm_i}^T {}^0 R I_{cm_i} {}^0 R w_{cm_i} \right] \quad (3.22)$$

A la vez, la energía potencial está definida por la ecuación:

$$U_o(q) = \sum_{i=1}^3 \left[ -m_i g^T {}_i^0 p_{cm_i} + U_{ref} \right] \quad (3.23)$$

Donde  $m_i$  es la masa del eslabón  $i$ -ésimo,  $v_{cm_i}$  es la velocidad lineal,  $w_{cm_i}$  es la velocidad angular,  $p_{cm_i}$  es la posición cartesiana y  $I_{cm_i}$  es el tensor de inercia, donde el subíndice  $cm_i$  corresponde al centro de masa del eslabón  $i$ -ésimo.  $I_{cm_i}$  está definido por :

$$I_{cm_i} = \begin{bmatrix} I_{xx_i} & I_{xy_i} & I_{xz_i} \\ I_{yx_i} & I_{yy_i} & I_{yz_i} \\ I_{zx_i} & I_{zy_i} & I_{zz_i} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$



Por otro lado, para el cálculo de la posición cartesiana del centro de masa del eslabón  $i$ -ésimo respecto al origen definida por  ${}^0_i p_{cm_i} = [ p_{cm_i} \ 1 ]^T$ , se utiliza la relación  ${}^0_i p_{cm_i} = {}^0_i A [ p_{cm_i} \ 1 ]^T$ .  $v_{cm_i}$  es calculada mediante la derivada de  $p_{cm_i}$  tal que  $v_{cm_i} = \frac{\partial p_{cm_i}}{\partial q} \dot{q}$ . La velocidad angular es calculada mediante  $w_{cm_i} = [ 0 \ 0 \ \dot{q}_1 ]^T + {}^0_1 R [ 0 \ 0 \ \dot{q}_2 ]^T + \dots + {}^0_{i-1} R [ 0 \ 0 \ \dot{q}_i ]^T$ . Así mismo,  ${}^0_i R$  es una matriz de rotación, la cual es obtenida mediante las ecuaciones (3.8) – (3.11) y  $g$  es un vector de gravedad tal que  $g = [ g_x \ g_y \ g_z ]^T$ .  $U_{ref}$  es una constante de referencia.

En el caso presente de estudio existen tres variables de movimiento, por consecuencia, los vectores de posición, velocidad y aceleración angular están definidos por  $q = [ q_1 \ q_2 \ q_3 ]^T$ ,  $\dot{q} = [ \dot{q}_1 \ \dot{q}_2 \ \dot{q}_3 ]^T$  y  $\ddot{q} = [ \ddot{q}_1 \ \ddot{q}_2 \ \ddot{q}_3 ]^T$ . Para fines prácticos, el cálculo de la dinámica de la órtesis en la ecuación (3.19) puede ser reescrita como:

$$M(q)\ddot{q} + H(q, \dot{q}) + G(q) = \tau \quad (3.25)$$

Donde  $M(q) \in R^{3 \times 3}$  es una matriz simétrica de masas positiva definida,  $H(q, \dot{q}) \in R^3$  es un vector donde se refleja el efecto Coriolis y fuerzas centrífugas,  $G(q) \in R^3$  es un vector que contiene componentes que dependen de la fuerza de gravedad y por ultimo  $\tau = [ \tau_1 \ \tau_2 \ \tau_3 ]^T$  es un vector con los pares de torsión para cada unión articular. Los componentes de la ecuación (3.25) se ven plasmados en el Apéndice A, así mismo, un esquema de la dinámica que la representa en la Figura 3.4.



Figura 3.4: Representación esquemática del modelo dinámico de la órtesis de tobillo.

### 3.6. Dinámica propuesta del tobillo-pie y dinámica de la carga

Debido a que el tobillo es una articulación bastante compleja, para fines de estudio y mediante un estudio exhaustivo de la morfología del pie y sus movi-

mientos, fue necesario proponer un modelo simplificado de la dinámica del tobillo junto con el pie que se asemejara lo mayor posible al comportamiento de este. Por lo tanto, se optó por una forma similar a la dinámica de la órtesis para fines posteriores tal que:

$$M_p(q)\ddot{q} + H_p(q, \dot{q}) + G_p(q) = \tau_p \quad (3.26)$$

Donde los parámetros de los componentes  $M_p(q)$ ,  $H_p(q, \dot{q})$  y  $G_p(q)$  permanecen inciertos debido a que no se cuenta con una medida específica de pie y existe variación entre cada individuo que lo vaya a utilizar. Entonces, la dinámica resultante  $\tau_L$  entre la suma de la órtesis y el tobillo-pie, la cual, por fines de estudio se ha nombrado como dinámica de la carga está dada por:

$$\tau_L = \tau + \tau_p \quad (3.27)$$

Que a su vez puede ser reescrita como:

$$M_L(q)\ddot{q} + H_L(q, \dot{q}) + G_L(q) = \tau_L \quad (3.28)$$

### 3.7. Dinámica del actuador (Motor DC + Caja de engranaje y Carga)

En orden de realizar un modelo dinámico que satisfaga la dinámica del actuador en cada unión articular de la órtesis de tobillo, se asumió como un motor CD (Corriente directa) con caja de engranaje y carga. Dicho actuador debe ser capaz de proporcionar el par de torsión necesario para poder llevar a cabo cada movimiento en las uniones articulares de la órtesis de tobillo. Por lo tanto el modelado dinámico del actuador se basó en el esquema presentado en la Figura 3.5. En esta se muestra tanto la parte eléctrica del diagrama como la parte mecánica y la forma en la que existe un acoplamiento entre ellas.

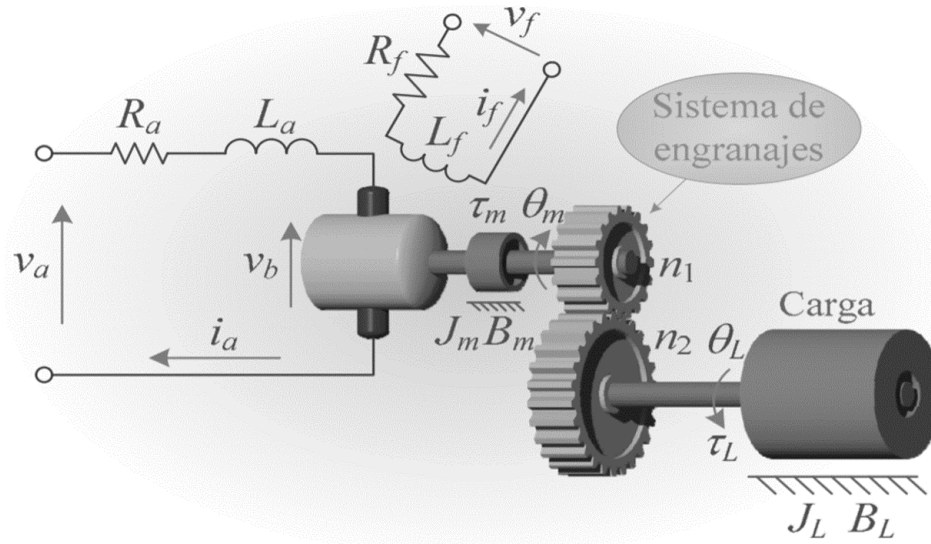


Figura 3.5: Diagrama general de un motor CD con carga acoplada mediante una caja de engranes [23].

Por consiguiente, existe una ecuación que describe cada parte de un motor CD. Primeramente, la parte electrónica del devanado de armadura de un motor CD está representada por:

$$V_a = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + V_b \quad (3.29)$$

donde,  $V_a$  es el voltaje de alimentación del circuito,  $V_b$  es el voltaje del embobinado del estator,  $R_a$  es la resistencia de armadura,  $L_a$  el coeficiente de inductancia en la armadura,  $i_a$  es la corriente de armadura y  $\frac{d}{dt}(i_a)$  es su derivada respecto al tiempo. Por otro lado, la ecuación matemática que rige el comportamiento de la parte mecánica de un sistema de motor CD, caja de engranes y carga está gobernado por la expresión:

$$\tau_m = J_m \ddot{\theta}_m + B_m \dot{\theta}_m + \frac{\tau_L}{n} \quad (3.30)$$

En la cual,  $\tau_m$  hace referencia al par de torsión generado por el motor,  $\tau_L$  es el par de torsión requerido por la dinámica de la carga. Los pares de torsión anteriores son asumidos como opuestos debido a que se requiere que el motor pueda estabilizar en cierto punto a la carga.  $J_m$  es referente al momento de inercia del

motor y  $B_m$  corresponde al coeficiente de fricción viscosa en el eje del motor. La velocidad y aceleración angular en la flecha del motor están definidos por  $\dot{\theta}_m$  y  $\ddot{\theta}_m$  respectivamente. Por último  $n$  es la relación que existe en la caja de engranes tal que  $n = \frac{n_2}{n_1}$ , donde  $n_1$  y  $n_2$  son los números de dientes de los engranes de entrada y salida.

### 3.8. Dinámica acoplada

Es posible realizar la combinación de las dinámicas de las ecuaciones (3.29) y (3.30) mediante las ecuaciones de acoplamiento siguientes:

$$V_b = K_e \dot{\theta}_m \quad (3.31)$$

$$\tau_m = K_t i_a \quad (3.32)$$

$$n\theta_L = \theta_m \quad (3.33)$$

$$w = K_d V_a \quad (3.34)$$

las cuales se tomaron en base a lo plasmado en [23]. Para el caso de estudio  $\theta_L$  toma el valor de  $q$ . Respecto a [24] y utilizando las ecuaciones (3.31) – (3.34), es posible obtener un modelo simplificado del motor CD como la siguiente:

$$k_3 w = k_1 \ddot{q} + \dot{q} + k_2 \tau_L \quad (3.35)$$

Debido a que el sistema cuenta con tres actuadores, la ecuación matricial correspondiente a la dinámica de estos es:

$$K_3 W = K_1 \ddot{q} + \dot{q} + K_2 \tau_L \quad (3.36)$$

donde  $W$ ,  $M_L$ ,  $H_L$ ,  $G_L$  se vuelven matrices de orden  $3 \times n$ ,  $\ddot{q}$  y  $\dot{q}$  pasan a ser vectores de orden  $3 \times 1$ . Por lo tanto,  $K_1$ ,  $K_2$  y  $K_3$  son matrices diagonales de orden  $3 \times 3$  que incluyen los parámetros propios de cada motor y los factores de conversión de unidades a PWM (modulación de ancho de pulso, en inglés). Sustituyendo  $\tau_L$  de (3.28) en (3.35), se obtiene la dinámica de órtesis, pie nominal y actuadores que se muestra en la ecuación (3.36).

$$K_3 W = (K_1 + K_2 M_L) \ddot{q} + (K_2 H_L + \dot{q}) + K_2 G_L \quad (3.37)$$

Una vez contando con una ecuación como la anterior, es posible realizar simulaciones de la dinámica acoplada del actuador, órtesis y tobillo con pie.

# Capítulo 4

## Esquema de operación y control de la órtesis con interfaz de usuario

### 4.1. Ley de control

Un elemento principal en el diseño de sistemas automatizados es el sistema de control. Para el caso actual, el sistema de control está encargado de minimizar los errores de seguimiento en las variables de movimiento respecto a las trayectorias de referencias. Este sistema está gobernado por lo que se llama ley de control, la cual es una expresión matemática para calcular la señal de entrada de energía apropiada al sistema que garantice, en este caso, el seguimiento asintótico de las posiciones articulares de la órtesis a las trayectorias propuestas a lo largo del tiempo y de esta forma poder cumplir con la tarea asignada. Basándose en el diagrama de la Figura 3.3, se propuso una ley de control de tipo par calculado capaz de compensar la dinámica de la órtesis de tobillo, la cual es conocida por previo análisis. La ecuación que corresponde a dicha ley de control a lazo cerrado es la siguiente:

$$W = K_3^{-1}((K_1 + K_2M)V + (K_2H + \dot{q}) + K_2G) \quad (4.1)$$

donde  $W \in R^3$  es el vector con elementos PWM (modulación de ancho de pulso por sus siglas en inglés) y  $V$  es una señal de entrada auxiliar regida por  $V = K_p e_1 + K_v e_2$ . Los errores de seguimiento corresponden a  $e_1$  y  $e_2$ , estos hacen referencia al error de posición y el error de velocidad respectivamente, donde  $e_1 = q_d - q$  y  $e_2 = \dot{q}_d - \dot{q}$ ,  $q_d$  es el vector que contiene las posiciones angulares deseadas y de forma similar  $\dot{q}_d$  es el vector de velocidad angular deseada respecto al tiempo. Las ganancias  $K_p$  y  $K_v$  son elegidas tales que el polinomio característi-

co sea Hurwitz estable. Las matrices  $M$ ,  $G$ ,  $H$ ,  $K_1$ ,  $K_2$  y  $K_3$  contienen la dinámica tanto de la órtesis como del actuador y son tomadas de las secciones anteriores. Por cuestiones de incertidumbre en los parámetros del tobillo y pie, su dinámica se considera como una perturbación para el sistema de control. Por lo tanto el esquema que representa la dinámica del control a lazo cerrado se muestra en la Figura 4.1.

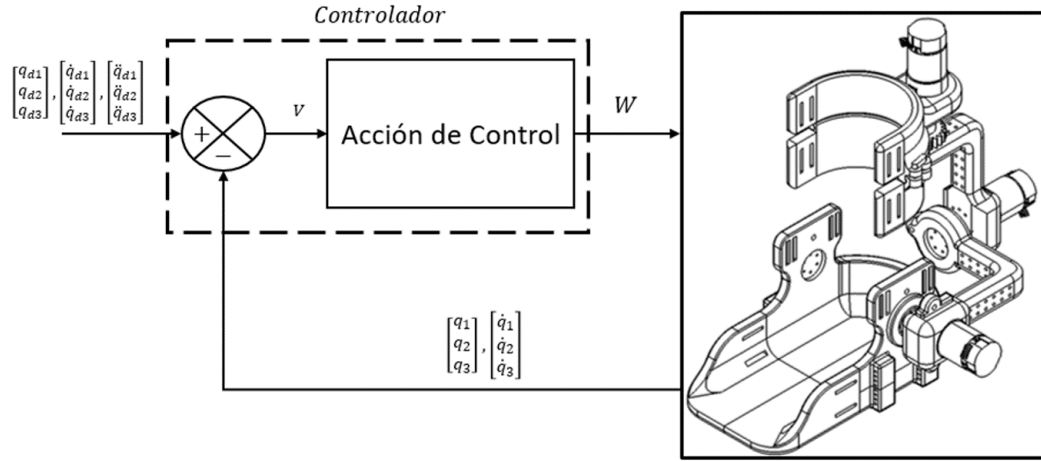


Figura 4.1: Representación esquemática del controlador.

## 4.2. Estimación de parámetros para motor CD

Al implementar una ley de control basada en el conocimiento de la dinámica del sistema, cualquier dinámica desconocida representa una perturbación al sistema, impidiendo así su buen desempeño a la hora de la realización de una tarea, como lo es un seguimiento de trayectorias. El conocer los valores en los parámetros que conforman la dinámica de un actuador implica asegurar el comportamiento acertado de este y a su vez disminuir el error. Mediante la metodología presentada a continuación es posible realizar la estimación en los parámetros que conforman la ecuación de la dinámica simplificada de un motor CD. Por lo tanto, para propósitos en este trabajo, se propone la siguiente metodología para estimación de coeficientes con la dinámica conocida para un motor CD, tal que:

$$c_3 w = c_1 \ddot{q} + \dot{q} + c_2 \tau_L \quad (4.2)$$

Por ende, para el caso específico en el que no existe carga en la flecha del motor, sea  $\tau_L = 0$ , la respuesta en el tiempo del sistema está representada por:

$$c_3 w = c_1 \ddot{q} + \dot{q} \quad (4.3)$$

Si se lleva la ecuación anterior al modelo en espacio de estados y realizando el cambio de variables  $q = x_1$ ,  $\dot{q} = x_2$ ,  $\dot{q} = \dot{x}_1$  y  $\ddot{q} = \dot{x}_2$  es posible obtener la siguiente ecuación:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{c_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{c_3}{c_1} \end{bmatrix} w \quad (4.4)$$

A su vez,  $c_1$  y  $c_3$  pueden estimarse mediante la entrada de un escalón constante y la medición tanto de la velocidad  $x_2(t)$  y la posición  $x_1(t)$  de la flecha del motor en un determinado tiempo en régimen de estado estacionario lo que corresponde a las siguientes ecuaciones:

$$c_3 = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{x_2(t)}{w} \right) \quad (4.5)$$

$$c_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{c_3 w t - \int_0^t x_2(\lambda) d\lambda}{x_2(t)} \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{c_3 w t - x_1(t) + x_1(0)}{c_3 w} \right) \quad (4.6)$$

Sin, embargo para el caso en el que no existe una carga en el rotor, no es posible calcular el coeficiente  $c_2$ , ya que este esta directamente relacionado con la dinámica de la carga. Para el propósito de calcular el coeficiente  $c_2$ , en este trabajo, se propone un experimento con una carga representada por una masa ( $m$ ) suspendida con peso puntual, la cual se encuentra suspendida directamente por un cable a tensión sobre una polea de radio ( $r$ ) y gravedad ( $g$ ) en dirección al peso de la masa, similar al funcionamiento de un ascensor. Por lo tanto la ecuación que define la dinámica de la carga es la siguiente:

$$\tau_L = J_L \ddot{q} + mgr \quad (4.7)$$

Sustituyendo (4.7) en (4.2) es posible obtener las siguientes ecuaciones en espacio de estados:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{c_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{c_3}{c_1} \end{bmatrix} w - \frac{c_2}{c_1} mgr \quad (4.8)$$



Así pues, es posible realizar la estimación del coeficiente  $c_2$  mediante la siguiente ecuación, que representa la rotación de la flecha en estado estacionario:

$$c_2 = \frac{c_3 w - x_2(t)}{mgr} \quad (4.9)$$

### 4.3. Planeación de trayectorias

Para poder proponer trayectorias que se adecuen al proceso de rehabilitación y cumplan con los requerimientos de esta, se han analizado ejercicios comúnmente usados por los fisioterapeutas en rehabilitación de tobillo.

Se consideraron los ROM de cada articulación del tobillo y los ejercicios de la Figura 1.9 para proponer los puntos de paso, los cuales son puntos con magnitudes establecidas arbitrariamente que sirven como guía para la generación de curvas. Mediante dichos puntos es posible generar trayectorias de movimiento articular acordes a los ejercicios de rehabilitación, llamadas trayectorias de referencia, haciendo uso de técnicas de interpolación. En el caso presente se utilizó una técnica de interpolación cúbica, cuya trayectoria de referencia está construida por:

$$q(t) = a + b(t^i - t^{i-1}) + c(t^i - t^{i-1})^2 + d(t^i - t^{i-1})^3; \quad t^{i-1} < t < t^i \quad (4.10)$$

$$a = q^{i-1}$$

$$b = \dot{q}^{i-1}$$

$$c = \frac{3}{T^2}(q^i - q^{i-1}) - \frac{2}{T}\dot{q}^{i-1} - \frac{1}{T}\dot{q}^i$$

$$d = \frac{2}{T^3}(q^i - q^{i-1}) - \frac{1}{T^2}(\dot{q}^{i-1} + \dot{q}^i)$$

$$T = t^i - t^{i-1}$$

La cual hace referencia a la trayectoria que une dos puntos de paso consecutivos, donde  $t^i$  es el tiempo actual,  $t^{i-1}$  es un instante anterior,  $q^i$  es la magnitud del punto del tiempo actual y  $q^{i-1}$  es la magnitud del punto en un instante anterior, siendo sus respectivas derivadas  $\dot{q}^i$  y  $\dot{q}^{i-1}$  [22]. Esta técnica de interpolación

permite garantizar tanto continuidad en posición, velocidad y aceleración, así como suavización en la referencia angular. Ejemplo de una trayectoria suavizada mediante interpoladores cúbicos se muestra en la Figura 4.2.

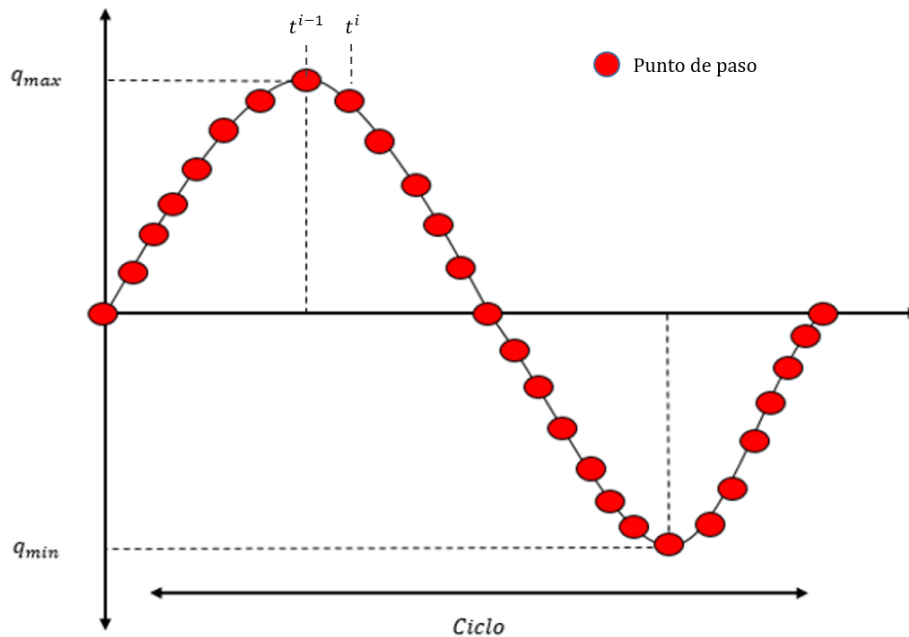


Figura 4.2: Ejemplo de trayectoria suavizada mediante splines (interpoladores, cúbicos para el caso) donde se muestra un conjunto de puntos paso unidos formando una curva continua.

En este documento se construyen trayectorias de movimiento de cada articulación para realizar los ejercicios de rehabilitación, regidas por puntos de paso que se propone ordenar en 3 patrones diferentes:

1. Sinusoidal
2. Trapezoidal
3. Caminata

Para la trayectoria de tipo sinusoidal se realizó una segmentación en el tiempo del ciclo entre 8 partes iguales. Tal que,  $\frac{Ciclo}{8} = t_s$ , donde  $t_s$  es el tiempo para cada segmento. Los valores para cada punto de paso están definidos por las siguientes ecuaciones:

$$f(0t_s) = 0q_{max} \quad (4.11)$$

$$f(1t_s) = 0,75q_{max} \quad (4.12)$$

$$f(2t_s) = q_{max} \quad (4.13)$$

$$f(3t_s) = 0,75q_{max} \quad (4.14)$$

$$f(4t_s) = 0q_{max} \quad (4.15)$$

$$f(5t_s) = -0,75q_{min} \quad (4.16)$$

$$f(6t_s) = -q_{min} \quad (4.17)$$

$$f(7t_s) = -0,75q_{min} \quad (4.18)$$

$$f(8t_s) = 0q_{min} \quad (4.19)$$

Esto proporciona una trayectoria como se muestra en la Figura 4.3.

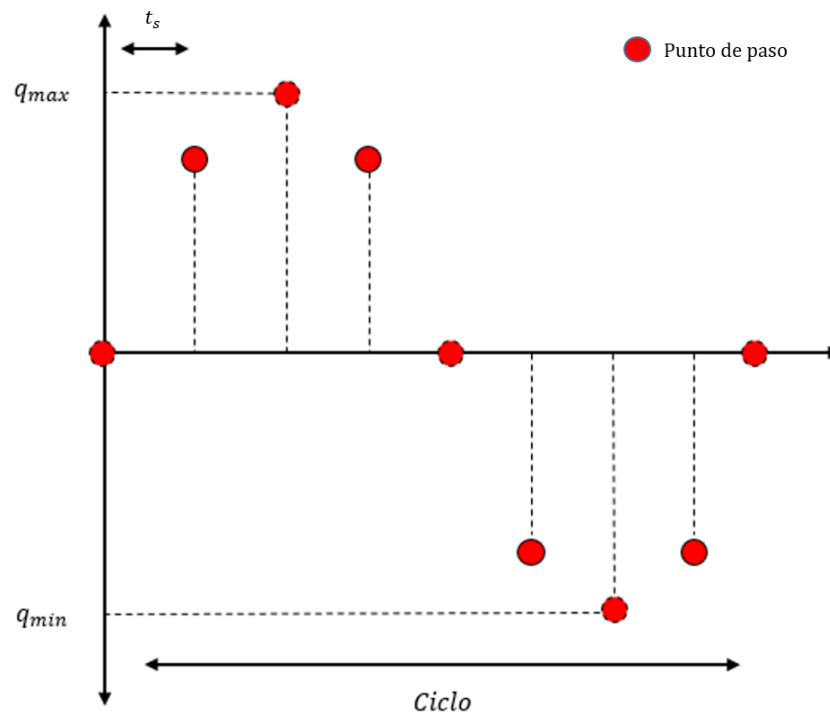


Figura 4.3: Segmentación y asignación de puntos de paso para gráfica sinusoidal.

Una vez obtenido un gráfico semejante a una gráfica con valores muestreados, se procede a realizar el proceso de interpolación cúbica entre cada segmento obteniendo una trayectoria como se puede observar en la Figura 4.4.

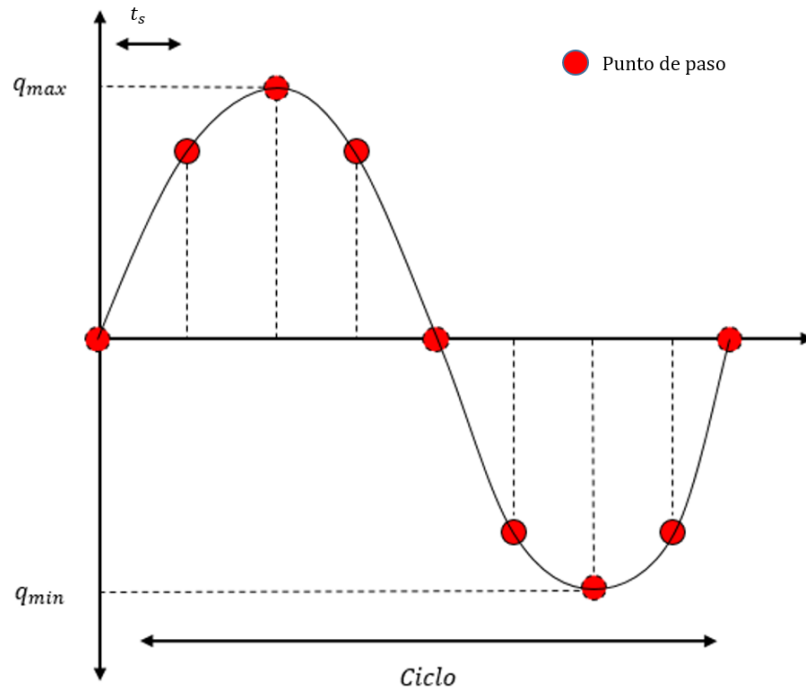


Figura 4.4: Trayectoria tipo senoide generada con interpolación cúbica entre cada segmento.

Por otro lado, para la planeación de trayectoria de tipo trapezoidal se tomó el siguiente criterio para asignación de puntos de paso. Los tiempos de asignación de valor para cada segmento están definidos por  $Ciclo = 4t_l + 2t_c$ , donde  $t_c$  es el tiempo de segmento corto y  $t_l$  es el tiempo de segmento largo. Por lo tanto la asignación de valores está dada por:

$$f(0) = 0 \quad (4.20)$$

$$f(t_c) = q_{max} \quad (4.21)$$

$$f(t_l + t_c) = q_{max} \quad (4.22)$$

$$f(2t_c + t_l) = 0 \quad (4.23)$$

$$f(3t_c + t_l) = -q_{min} \quad (4.24)$$

$$f(3t_c + 2t_l) = -q_{min} \quad (4.25)$$

$$f(3t_c + 3t_l) = 0 \quad (4.26)$$

En base a lo anterior es posible generar la gráfica de puntos de paso plasmada en la Figura 4.5.

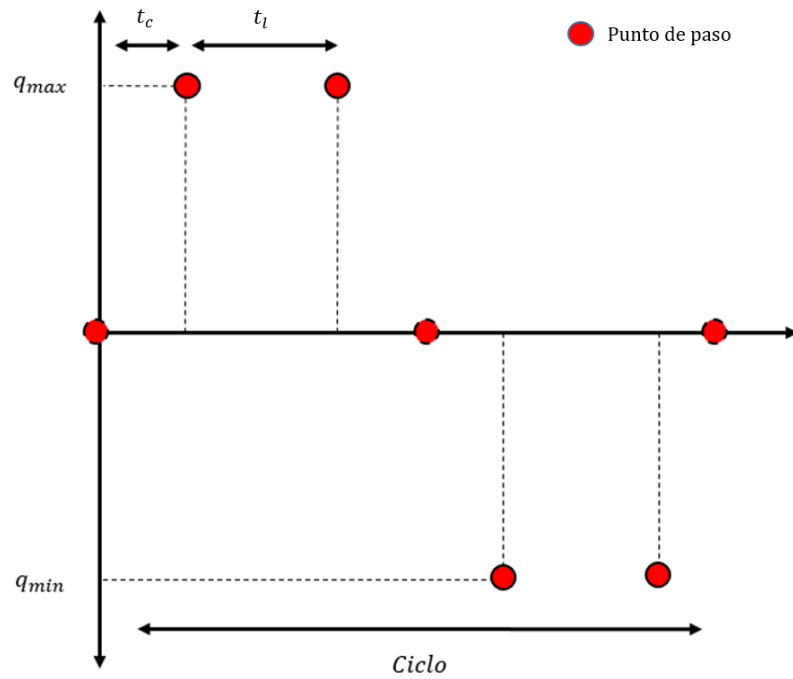


Figura 4.5: Segmentación y asignación de puntos de paso para trayectoria trapezoidal.

Después de obtener la gráfica con las magnitudes puntuales para cada tiempo. Es necesario realizar un interpolación lineal [22] entre cada segmento para obtener una trayectoria con magnitudes para cada instante de tiempo como se observa en la Figura 4.6.

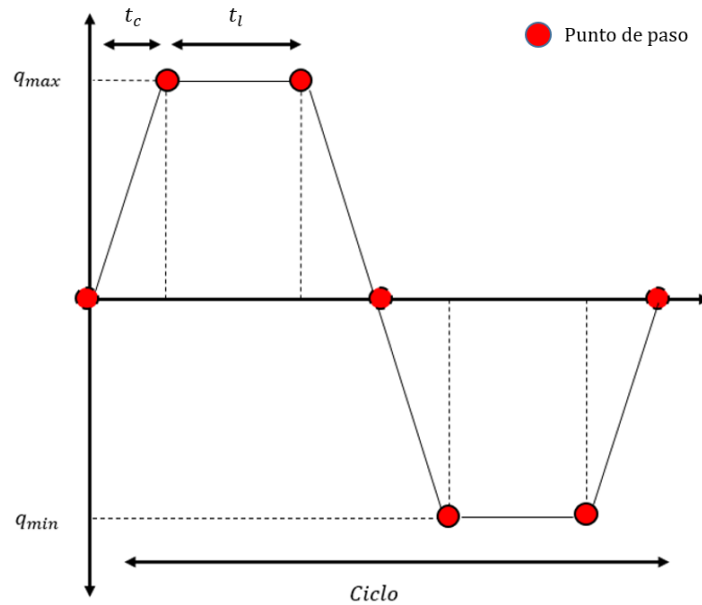


Figura 4.6: Trayectoria tipo trapecioide generada por interpolación lineal.

Por último, para la planeación de trayectoria de tipo caminata se tomaron los puntos de paso del movimiento aproximado de cada articulación del tobillo durante la caminata de [15].

#### 4.4. Diseño de aplicación móvil para interfaz usuario y máquina

Contar con un interfaz móvil mediante la cual se configuren los parámetros para la operación de la órtesis es de gran importancia. Esta aplicación (interfaz) se diseñó para el sistema Android mediante la plataforma My App Inventor<sup>®</sup> del MIT (Massachusetts Institute of Technology). Dicha aplicación debe ser amigable con el usuario y poder enviar los parámetros de rutina al dispositivo que funciona como tarjeta de adquisición de datos, como lo son los valores máximos y mínimos de los ROM, las cantidad de repeticiones y tiempos de ejecución. La interfaz diseñada se puede observar en la Figura 4.7.



Figura 4.7: Interfaz de aplicación móvil para control de trayectorias en órtesis de tobillo.

Una vez el usuario se encuentra en la pantalla de inicio, es necesario realizar la conexión con el dispositivo Bluetooth para la conexión serial. Por lo tanto es necesario acceder a la ventana conexión. Una vez el usuario pulsa el botón “Conectar”, aparecerá la pantalla de la Figura 4.8, de esta forma, se procede a seleccionar el dispositivo Bluetooth que funcionará como receptor.



Figura 4.8: Panel de selección de dispositivo Bluetooth para conexión.

Ya que el dispositivo Bluetooth sea seleccionado, si la conexión se realizó de forma efectiva, el botón “Conectar” pasará a tener un color verde. El siguiente paso, es acceder la ventana de ejercicios que se encuentra la parte inferior de la pantalla de inicio de la aplicación como se ve en la Figura 4.9.





Figura 4.9: Selección de botón para acceder a la ventana de ejercicios.

Al pulsar el botón de “Ejercicios” se mostrará la ventana de la Figura 4.10, donde se muestran los tipos de rutina (senoide, trapezoidal, caminata) que el dispositivo puede realizar.

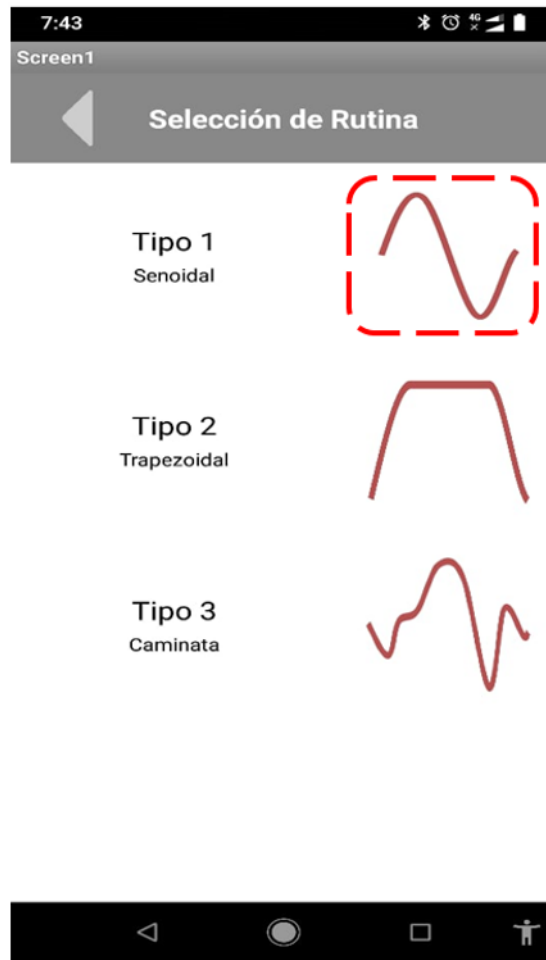


Figura 4.10: Selección de tipo de rutina en la ventana de ejercicios.

Una vez seleccionado el tipo de rutina pulsando sobre el ícono de ésta, se abrirá la ventana correspondiente a dicha rutina, donde es necesario introducir los parámetros para la realización de dicha rutina como los valores máximos y mínimos de movimiento, el tiempo de ciclo y la cantidad de repeticiones, como se muestra en la Figura 4.11.

The screenshot shows a mobile application interface titled "Ejercicio Senoidal". At the top, there is a status bar with the time 6:49 and various icons. Below the title bar, there is a back arrow and the text "Screen1". The main content area contains several input fields arranged in a grid:

MAX Abducción	MIN Aducción
30	30
MAX Inversión	MIN Eversión
15	35
MAX Dorsiflexión	MIN Plantar
25	40
Repeticiones	Tiempo Periodo
3	4

At the bottom of the form is a button labeled "ENVIAR". The bottom of the screen shows the standard Android navigation bar with back, home, and recent apps buttons.

Figura 4.11: Introducción de parámetros en la ventana de cada tipo de ejercicio.

Ya que sean introducidos los parámetros para el ejercicio, se presiona el botón "ENVIAR". Esto permite enviar el vector de datos de estos parámetros hacia la tarjeta de control electrónico para su procesamiento. Por otro lado, existe la modalidad de calibración o lectura, donde la aplicación funciona como receptor de información mediante sensores de movimiento y así calibrar de forma automática los parámetros para cada rutina. Esto se logra mediante la ventana de calibración para cada motor. Para poder acceder a dicha ventana es necesario presionar el botón "Calibrar" del motor que se desea calibrar. Como se observa en las Figura 4.12.



Figura 4.12: Procedimiento para acceder a la ventana de calibración de cada motor.

Por consiguiente a lo anterior, se abrirá la ventana de la Figura 4.13. Aquí es donde es posible realizar la calibración de cada motor mediante limitaciones paramétricas.

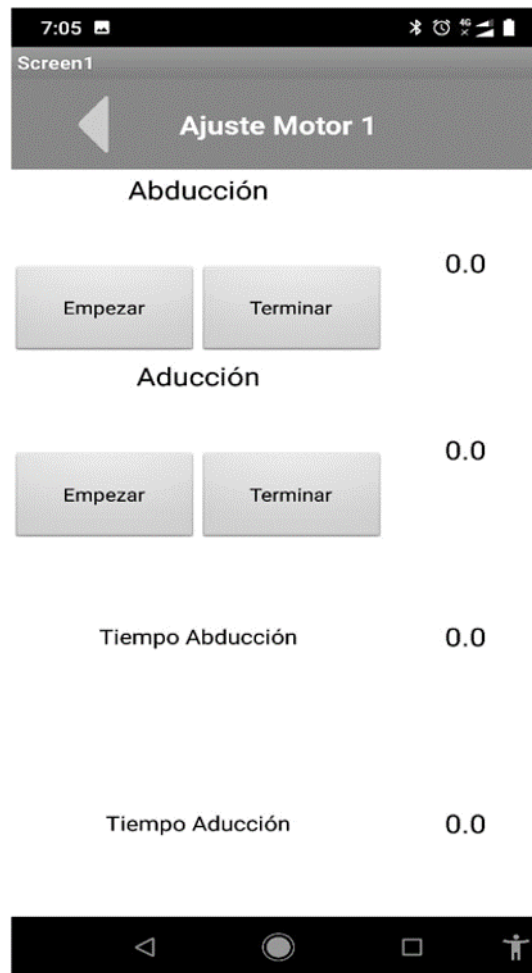


Figura 4.13: Ventana para calibración de cada motor mediante la lectura de sensores.

Para poder realizar el ajuste en los parámetros de la rutina para cada motor es necesario que el dispositivo de órtesis cuente con modo de lectura mediante sensores de posición angular (órtesis pasiva). Al presionar el botón “Empezar” la aplicación comenzará a recibir los datos que le envíe el dispositivo Bluetooth y almacenará tanto los valores máximos y mínimos de movimiento, como los tiempos de realización de la rutina. Al pulsar el botón “Terminar” automáticamente la aplicación pasará dichos valores a la ventana de ajuste paramétrico de cada rutina para su posterior envío.

# Capítulo 5

## Simulación numérica y resultados

Utilizando los modelos cinemáticos y dinámicos de la órtesis, incluyendo la dinámica de actuadores, en lazo cerrado con la ley de control propuesta, se realizan simulaciones numéricas mediante los softwares de MATLAB<sup>®</sup> y SolidWorks<sup>®</sup> para ilustrar una aproximación del comportamiento real de la órtesis al seguir las referencias de movimiento articular, correspondientes a los ejercicios de rehabilitación, ante ciertos escenarios de operación.

Características de los softwares utilizados para simulación:

### 1. MATLAB<sup>®</sup>

- \* Versión R2018a.
- \* 64-bit (win64).
- \* 6 GB de espacio libre en disco duro como mínimo.
- \* Memoria RAM mínima de 4 GB y 8 GB recomendados.
- \* Procesador x86-64 Intel<sup>®</sup> o AMD<sup>®</sup> recomendados.

### 2. SolidWorks<sup>®</sup>

- \* Versión 2018.
- \* 64-bit (win64).
- \* 6 GB de espacio libre en disco duro como mínimo.
- \* Memoria RAM mínima de 4 GB y 8 GB recomendados.
- \* Procesador x86-64 Intel<sup>®</sup> o AMD<sup>®</sup> recomendados.

Características del equipo que se utilizó para simulaciones:

- \* Versión de sistema operativo Windows 10.

- \* Procesador Intel CORE i7 8th Gen.
- \* 8GB de memoria RAM.
- \* Tarjeta gráfica NVIDIA GeForce GTX 1050 Ti de 4GB.

## 5.1. Implementación numérica para estimación de parámetros en motor DC

Con el fin de validar la metodología para la estimación de los coeficientes  $c_i$ , se utilizaron los valores paramétricos nominales de un motor CD basándose en [24]. La estimación se divide en dos etapas, cuando no existe una carga en el motor CD y cuando si la hay. Por lo tanto, para el primer caso se utilizaron los valores de la Tabla 8 como parámetros del motor CD, modelado como (4.2), para simulación.

Tabla 8. Valores utilizados para primer caso (sin carga).

Parámetro	Magnitud	Unidades
$c_1$	0.434	$s^2$
$c_3$	248.246	rad/ms

La respuesta en el tiempo de la posición y velocidad angular del motor sin carga simulado se muestran en las Figuras 5.1 y 5.2, respectivamente.

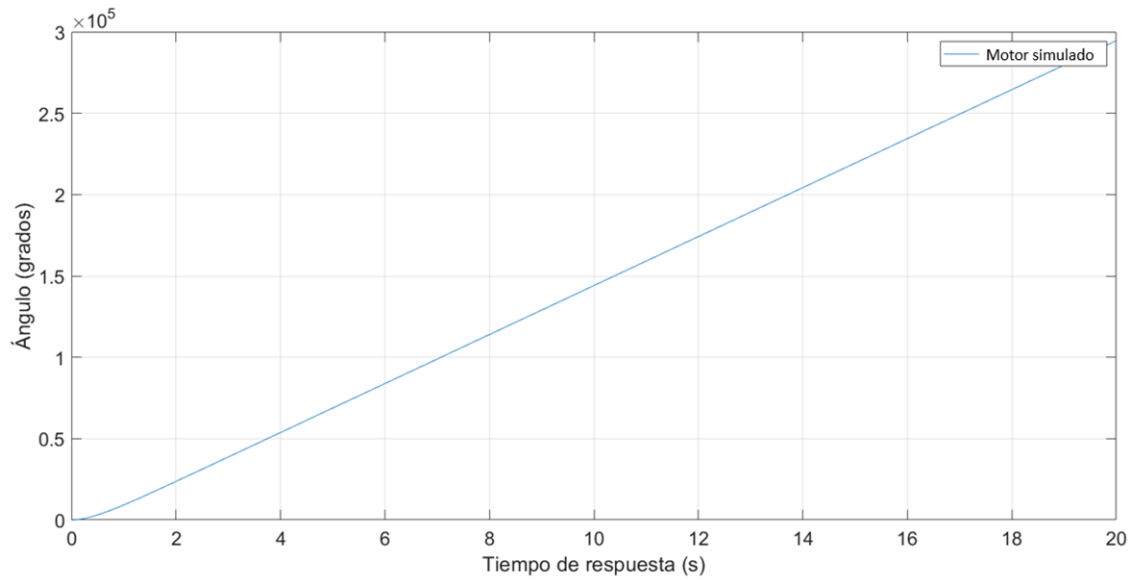


Figura 5.1: Gráfica de posición angular para motor CD simulado con parámetros conocidos sin carga.

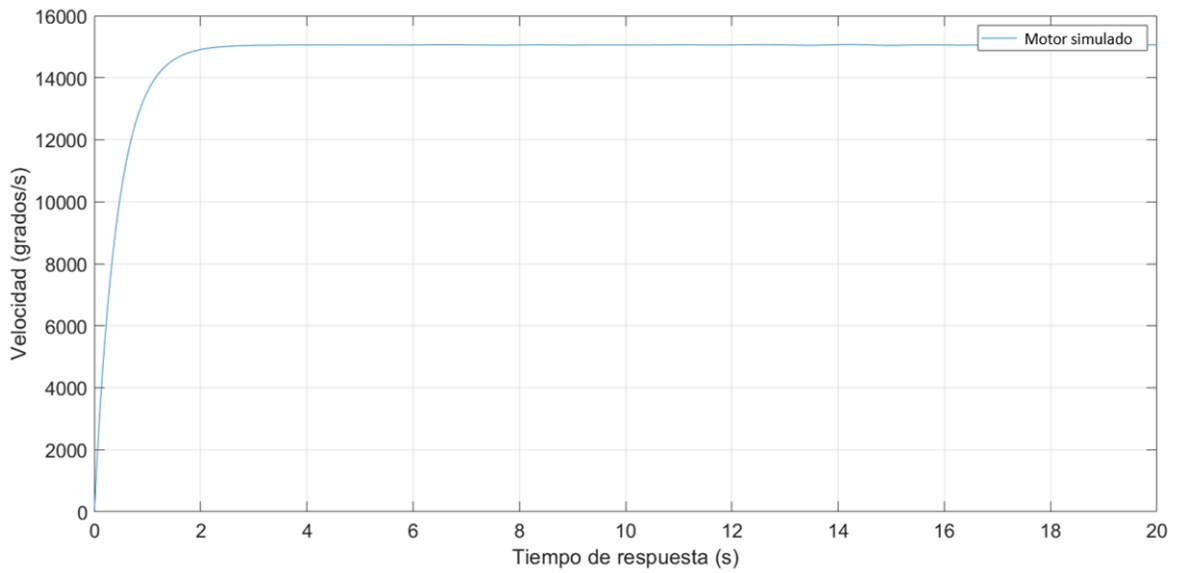


Figura 5.2: Gráfica de velocidad angular para motor CD simulado con parámetros conocidos sin carga.

Puesto que se hace la suposición que en un modelo de motor CD no se conocen



los valores de sus parámetros en general, para validar la metodología de estimación de estos parámetros, se utiliza la información de respuesta en el tiempo de las figuras 5.1 y 5.2 del motor CD simulado. Por lo que, una vez conocidos tanto el tiempo de estabilización ( $t_{ss}$ ) como la magnitud en la velocidad angular y posición angular en un tiempo  $t_f > t_{ss}$ , es posible realizar la estimación de los parámetros  $c_1$  y  $c_3$  mediante la sustitución de estos valores en ecuaciones (4.5) y (4.6). Los valores obtenidos se muestran en la Tabla 9.

Tabla 9. Resultados de estimación para  $c_1$  y  $c_3$

Parámetro	Magnitud	Unidades
$c_1$	0.433982054363268	$s^2$
$c_3$	248.245863484857	rad/ms
$t_f$	6	s
$x_2(t_f)$	262.8427	rad/s
$x_1(t_f)$	1462.9872	rad
$w$	1.0588	ms

Para validar el modelo estimado del motor CD sin carga se compara la respuesta en el tiempo del modelo del motor CD con las variables posición y velocidad angular del motor CD simulado, como se muestra en las Figuras 5.3 y 5.4.

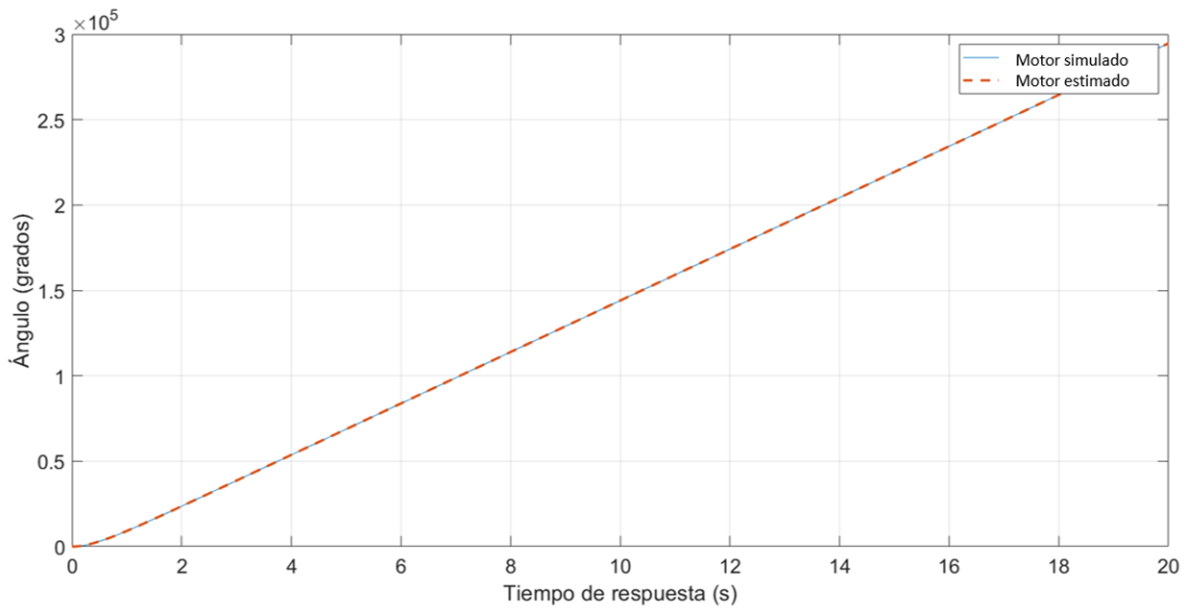


Figura 5.3: Gráfica de comparación en la posición angular de motor CD sin carga.

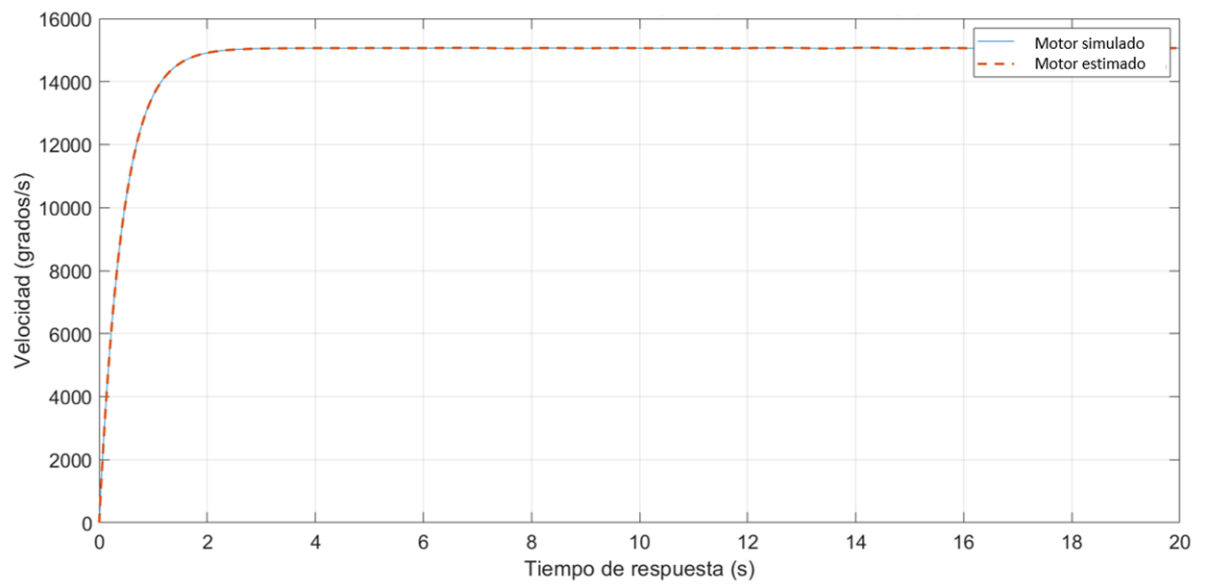


Figura 5.4: Gráfica de comparación en la velocidad angular de motor CD sin carga.

De la misma forma, para el siguiente caso referente a una carga expresada en la ecuación (4.7) se realiza la simulación numérica. Los valores de los parámetros

para simulación del motor CD con carga en la Tabla 10.

Tabla 10. Valores utilizados para simulación en el caso (con carga).

Parámetro	Magnitud	Unidades
$c_1'$	0.4774	$s^2$
$c_3$	248.246	rad/ms
$c_2$	2.745	rad/N.m
$w$	1.0588	ms
$m$	10	kg
$r$	0.01	m
$g$	9,81	$m/s^2$

Se obtiene el valor de  $c_2$  mediante el experimento de la ecuación (4.9) para  $c_2$  se puede observar en la Tabla 11.

Tabla 11. Resultados de estimación para  $c_2$ .

Parámetro	Magnitud	Unidades
$c_2$	2.745181921950385	$s^2$
$t_{ss}$	6	s
$x_2(t_{ss})$	260.149696	rad/s

Para validar el modelo estimado del motor CD con carga se compara la respuesta en el tiempo del modelo del motor CD con las variables posición y velocidad angular del motor CD simulado, como se muestra en las Figuras 5.5 y 5.6.

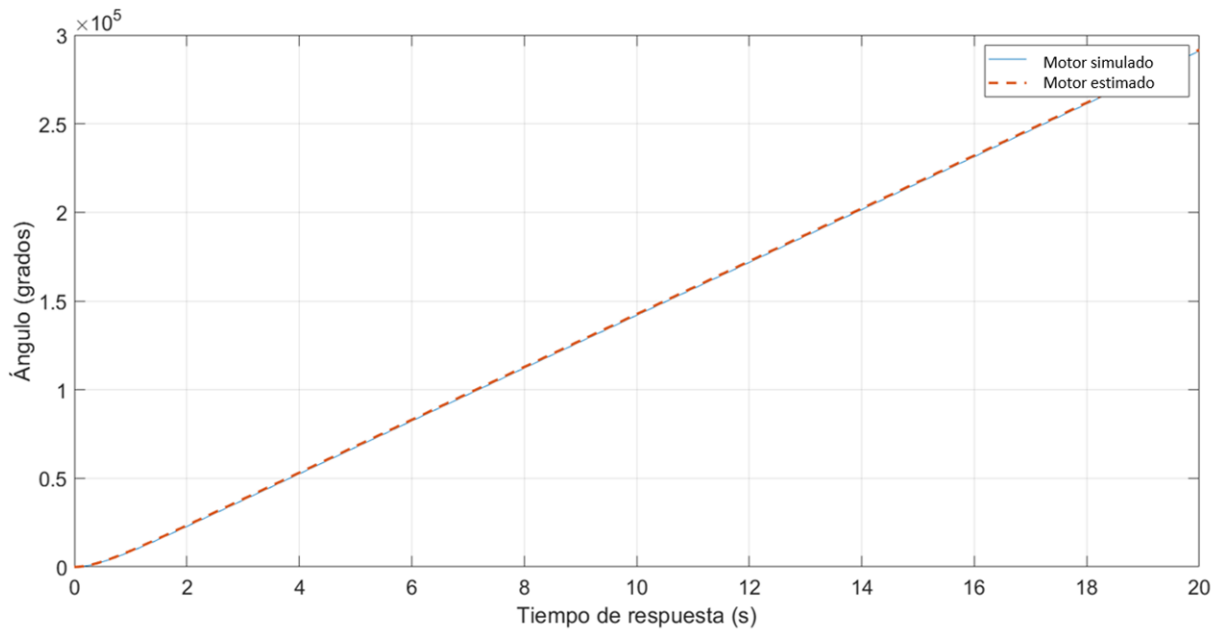


Figura 5.5: Comparación de la respuesta del modelo del motor CD con la posición angular de motor CD simulado con carga.

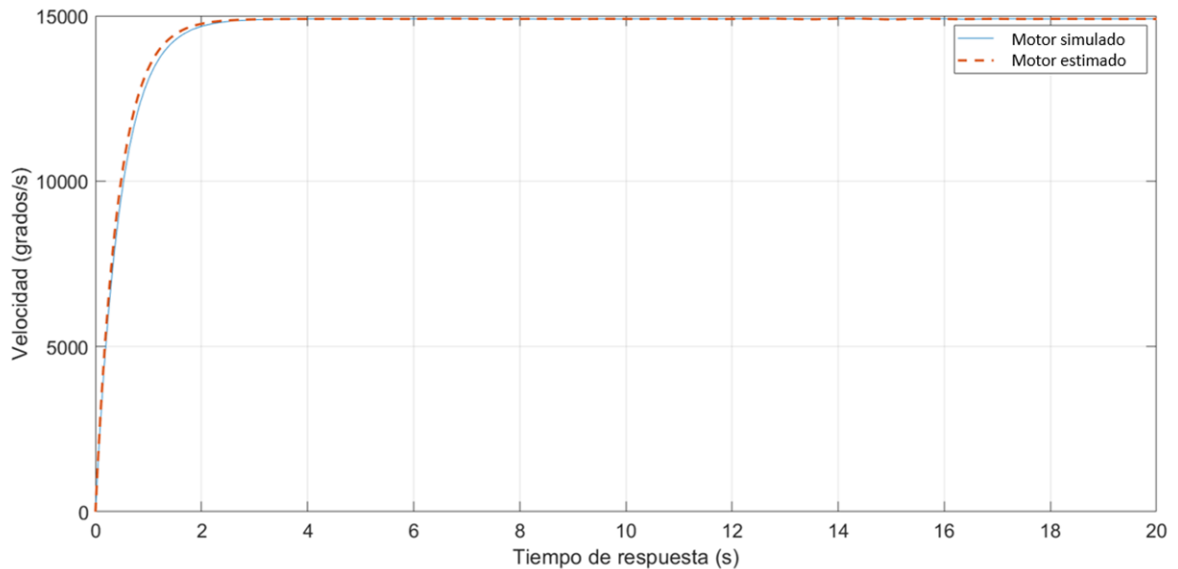


Figura 5.6: Comparación de la respuesta del modelo del motor CD con la velocidad angular de motor CD simulado con carga.

## 5.2. Simulación numérica para trayectorias de referencia

Luego de estimar todos los parámetros del actuador y suponiendo conocidos los parámetros nominales del mecanismo de órtesis, se simula el modelo de la dinámica de la órtesis y actuadores en lazo cerrado. El programa utilizado para el cálculo de la dinámica y la solución numérica se puede observar en el Apéndice C. En base a los resultados obtenidos en [25] se puede observar que valores de error máximo en el seguimiento de trayectorias angulares se consideran pequeños por debajo de  $20,0 \times 10^{-3}$  rad, por lo tanto se propuso que un error aceptable en el seguimiento de trayectoria para los movimientos de la órtesis de tobillo debería ser alrededor de 2 grados sexagesimales.

## 5.3. Generación de trayectorias de seguimiento de forma sinusoidal

Se tomaron los valores absolutos de la Tabla 12 para proponer trayectorias de seguimiento de tipo sinusoidal en base a lo planteado en el capítulo III mediante

la utilización de puntos de paso e interpolaciones y los valores máximos y mínimos de movimiento  $g_{r1a}$ ,  $g_{r2a}$ ,  $g_{r1b}$ ,  $g_{r2b}$ ,  $g_{r1c}$  y  $g_{r2c}$  para cada articulación. Dichas trayectorias se pueden observar en la Figura 5.7.

Tabla 12. Rangos de movimiento para generación de trayectorias sinusoidal y trapezoidal.

Parámetro	Descripción	Magnitud	Unidad
$g_{r1a}$	Valor máximo Abducción	30	Grado sexagesimal
$g_{r2a}$	Valor mínimo Flexión Aducción	-30	Grado sexagesimal
$g_{r1b}$	Valor máximo Inversión	15	Grado sexagesimal
$g_{r2b}$	Valor mínimo Eversión	-35	Grado sexagesimal
$g_{r1c}$	Valor máximo Dorsiflexión	25	Grados sexagesimal
$g_{r2c}$	Valor mínimo Plantar Flexión	-45	Grados sexagesimal

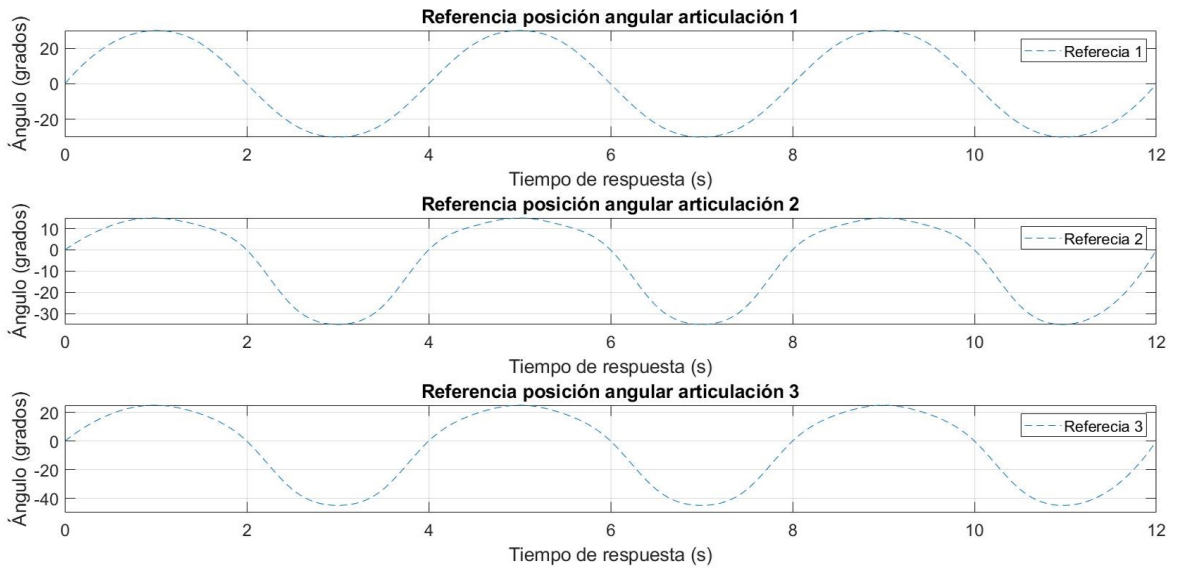


Figura 5.7: Trayectorias propuesta para seguimiento de posición angular calculada mediante *splines* de tipo sinusoidal.

Para tener un comportamiento adecuado a la hora de realizar movimientos en la órtesis, es necesario contar con una guía no tan solo en la posición angular, sino también tener una referencia para el seguimiento de su derivada (velocidad angular). Para las trayectorias de referencia de la velocidad angular, se calcularon las derivadas respecto al tiempo de las trayectorias propuestas de la Figura 5.7. De esta forma se obtuvieron las gráficas de la Figura 5.8.

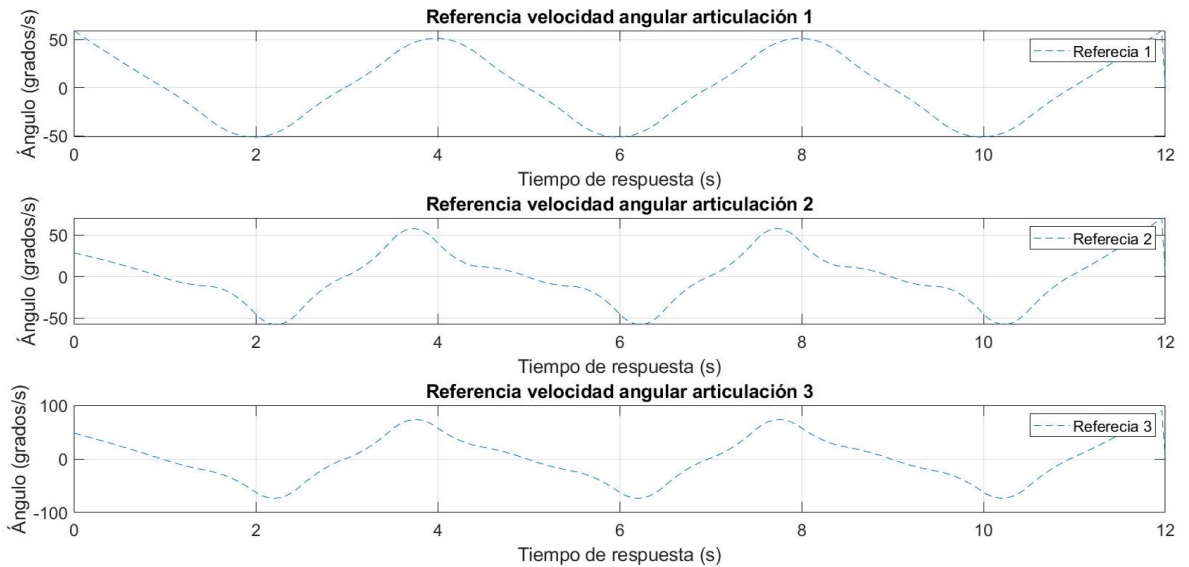


Figura 5.8: Derivada de trayectoria de tipo sinusoidal para seguimiento de velocidad angular.

## 5.4. Generación de trayectorias de seguimiento de forma trapezoidal

Así mismo, se generaron trayectorias de seguimiento de tipo trapezoidal usando como valores máximos y mínimos los valores de la Tabla 12. A diferencia de las anteriores trayectorias de seguimiento, estas cuentan con un tiempo donde la señal es constante en su punto máximo o mínimo, dándole así la forma de trapecio como muestra en la Figura 5.9.



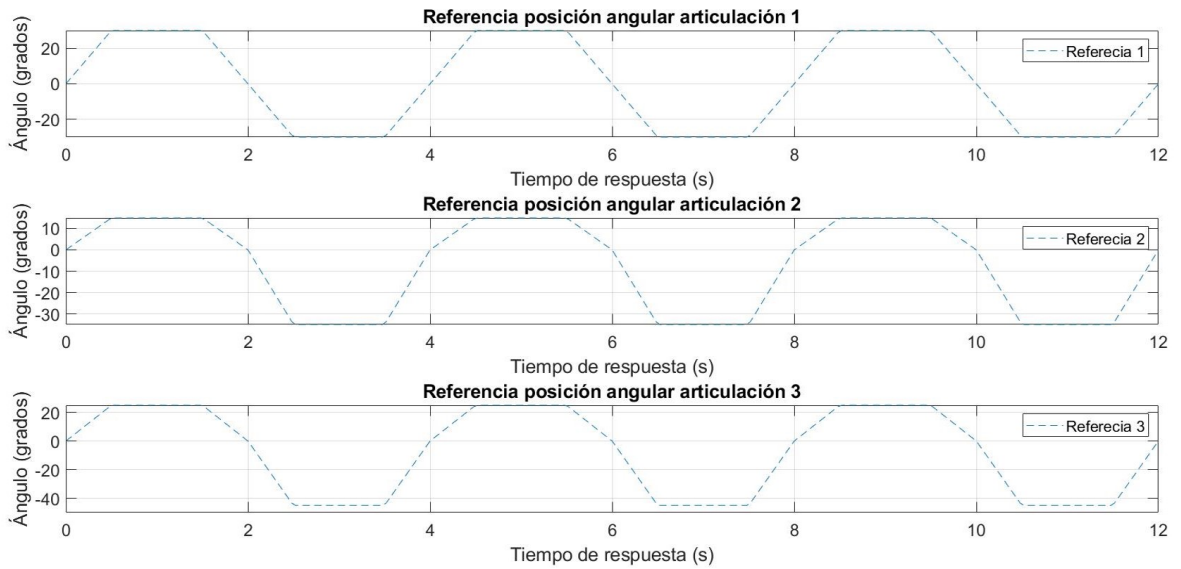


Figura 5.9: Trayectorias propuestas para seguimiento de movimiento angular de tipo trapezoidal utilizando interpolación lineal.

Las trayectorias de referencia en velocidad angular se muestran en la Figura 5.10.

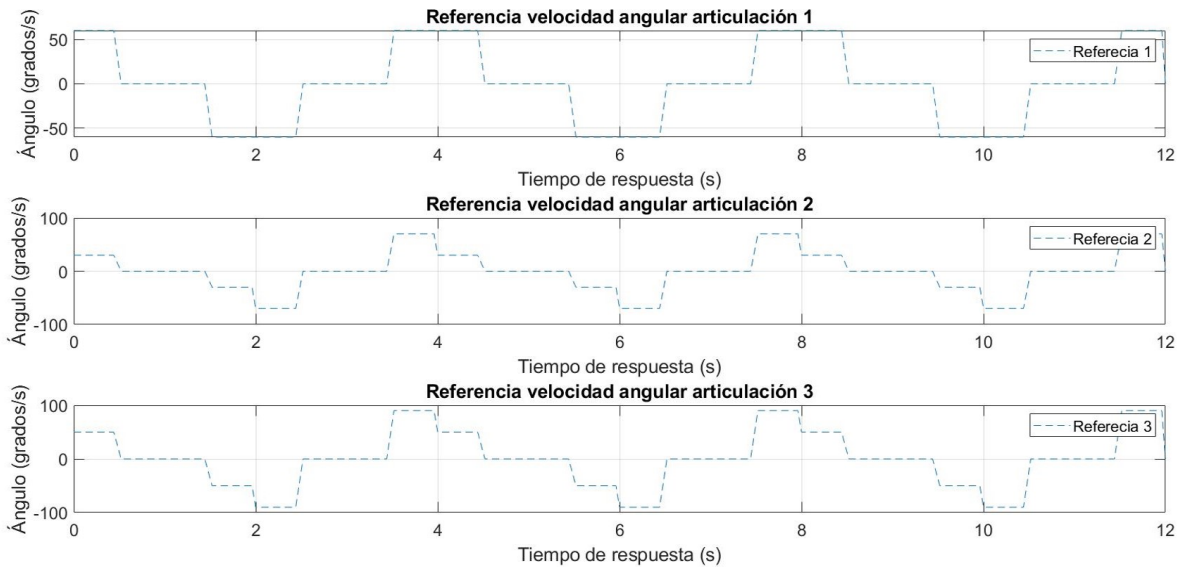


Figura 5.10: Derivada de trayectoria de tipo trapezoidal para seguimiento de velocidad angular.

## 5.5. Generación de trayectorias de seguimiento de tipo caminata

Para la generación de trayectorias de seguimiento de tipo caminata se tomó una aproximación de las gráficas en [15], tomando en cuenta el ciclo completo de movimiento angular únicamente para los movimientos de flexión dorsal, flexión plantar, eversión e inversión. Los demás movimientos permanecen en la posición de origen como una señal constante en cero como se muestra en la Figura 5.11.

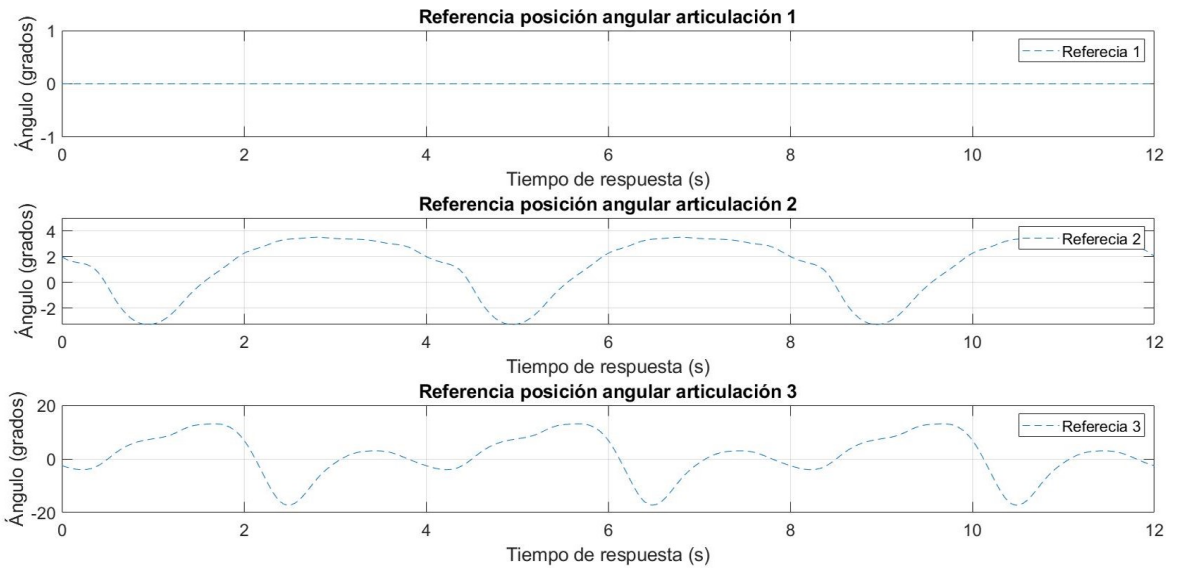


Figura 5.11: Trayectorias propuestas para seguimiento de movimiento angular de tipo caminata.

Las trayectorias de velocidad angular para tipo caminata se obtienen mediante la derivación de las trayectorias de posición angular. Dicha trayectoria se puede observar en la Figura 5.12.

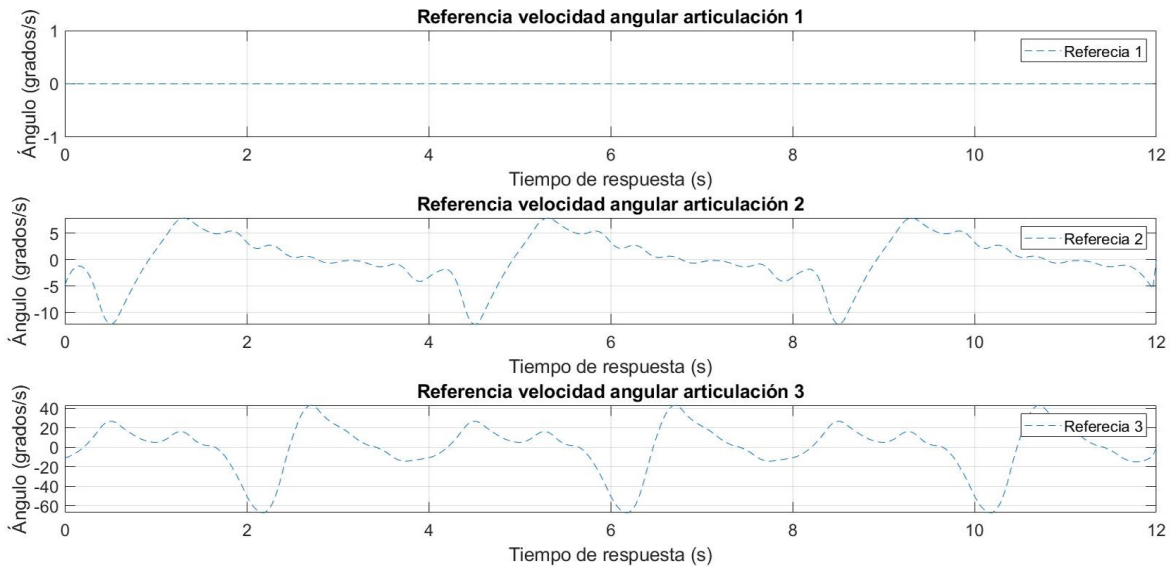


Figura 5.12: Derivada de trayectoria de tipo caminata para seguimiento de velocidad angular.

Una vez obtenidas las trayectorias tanto de movimiento como velocidad angular, se procede a realizar la simulación, con el fin de poner a prueba el desempeño del controlador a la hora de realizar su seguimiento. A continuación se ilustra el desempeño en el seguimiento de trayectorias con un tiempo de 12 segundos con tres repeticiones en el ciclo de movimiento.

## 5.6. Simulación de seguimiento de trayectorias

En la Tabla 13 se pueden observar los parámetros que fueron utilizados para la simulación donde se incluyen las condiciones iniciales para cada estado representado  $x_0$  donde los tres primeros elementos corresponden a posiciones angulares y los últimos tres a sus respectivas derivadas respecto al tiempo, así mismo se incluyen características tanto de longitud y masas para cada eslabón. Estas últimas fueron calculadas en base a la densidad de un material ácido poliláctico con una densidad del 20%, utilizando la herramienta de propiedades de SolidWorks<sup>®</sup> y situadas como una fuerza puntual en el centro de masa. Las ganancias  $K_1$ ,  $K_2$  y  $K_3$  corresponden a los datos obtenidos en la estimación en los parámetros del motor CD.

Tabla 13. Parámetros de la órtesis de tobillo para simulación.

Parámetro	Descripción	Magnitud	Unidad
K1	Parámetro del actuador	0.434	s <sup>2</sup>
K2	Parámetro del actuador	2.745	rad/Nm
K3	Parámetro del actuador	248.246	rad/ms
Kp	Ganancia proporcional	164	-
Kv	Ganancia derivativa	22	-
ti	Tiempo de inicio	0	s
tf	Tiempo por repetición	4	s
h	Paso de simulación	0.04	s
x <sub>0</sub>	Condiciones Iniciales	[0;0;0;0;0;0]	[rad,rad/s]
rep	Total de repeticiones	3	-
g1a	Grados Abducción	30	Grado sexagesimal
g2a	Grados Aducción	-30	Grado sexagesimal
g1b	Grados Inversión	15	Grado sexagesimal
g2b	Grados Eversión	-35	Grado sexagesimal
g1c	Grados Dorsiflexión	25	Grados sexagesimal
g2c	Grados Flexión Plantar	-45	Grados sexagesimal
L1	Longitud Órtesis Seg. 1	0.152	m
L2	Longitud Órtesis Seg. 2	0.21	m
L1p	Longitud Pie-Tobillo Seg. 1	0.152	m
L2p	Longitud Pie-Tobillo Seg. 2	0.24	m
m1	Masa eslabón 1	0.51	kg
m2	Masa eslabón 2	0.42	kg
m3	Masa eslabón 3	0.69	kg
m	Masa del pie	1.5	kg

De la misma forma se obtuvieron las matrices de inercia que contienen los tensores de inercia para cada centro de masa en cada eslabón. Los valores de dichas matrices se muestran en el Apéndice B. Sin embargo debido a que los valores máximos y mínimos para cada movimiento articular están expresados en grados, es necesario realizar una conversión de grados a radianes para su procesamiento mediante la relación  $1^\circ = \frac{180}{\pi} \text{ rad}$ .

## 5.7. Simulación numérica para trayectoria de forma sinusoidal

En esta sección se muestran los resultados de la respuesta en el seguimiento de las trayectorias de tipo sinusoidal mediante el controlador implementado en el modelo de la órtesis a lazo cerrado.

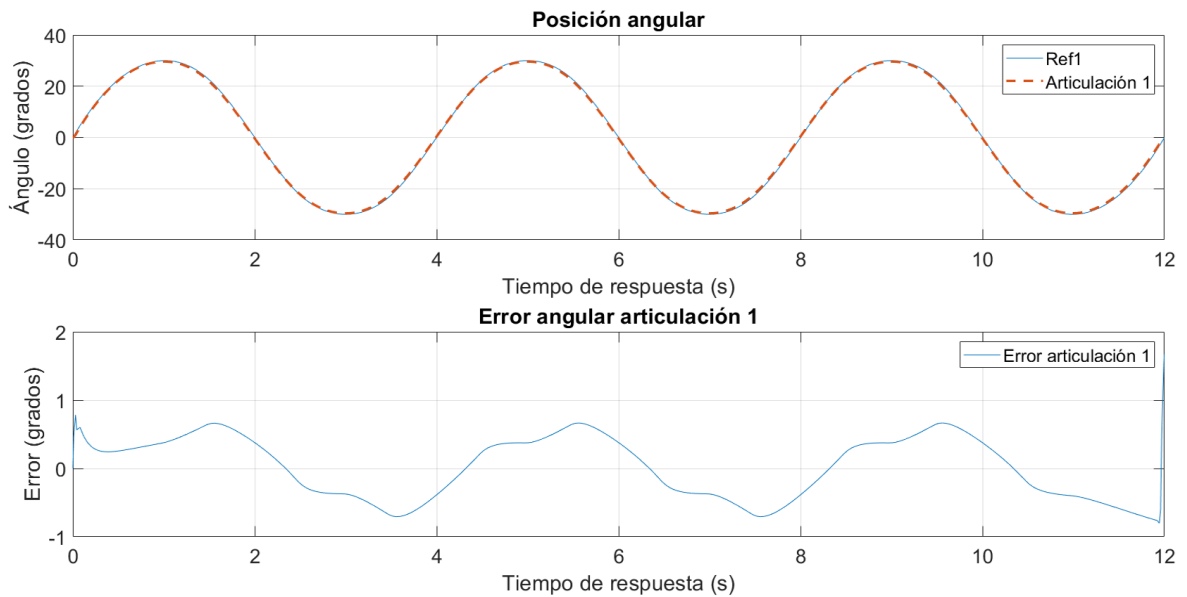


Figura 5.13: Seguimiento de posición y error angular en articulación 1.

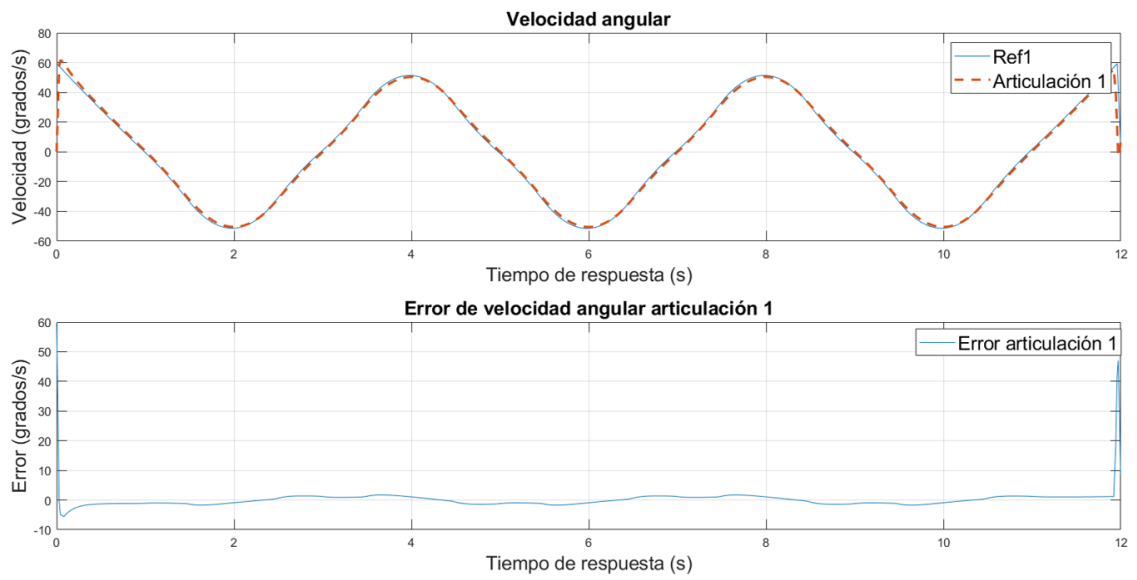


Figura 5.14: Derivada de trayectoria de tipo caminata para seguimiento de velocidad angular.

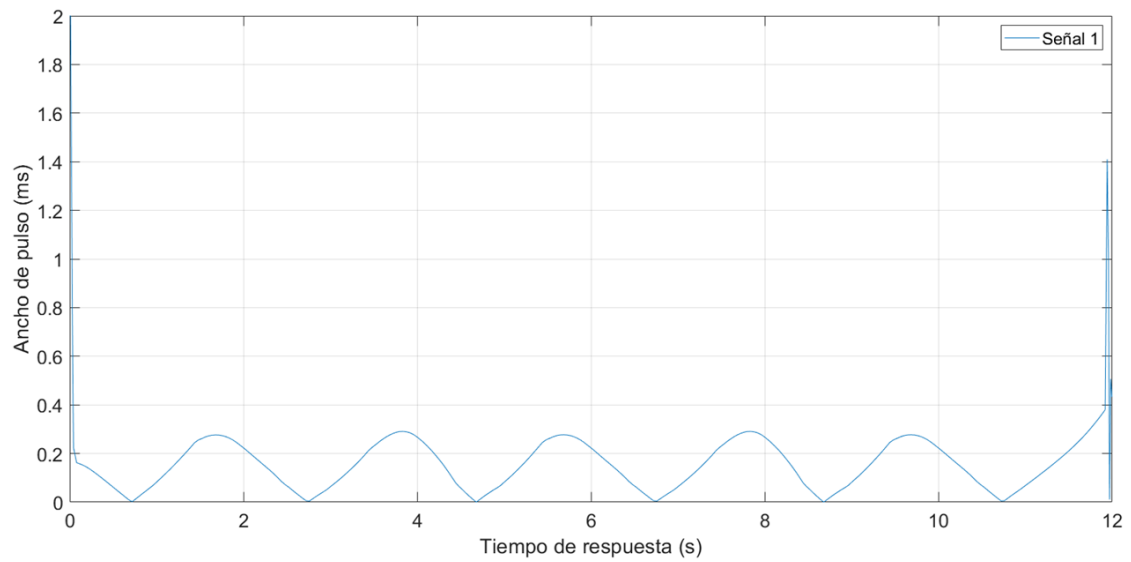


Figura 5.15: Señal de control para articulación 1.

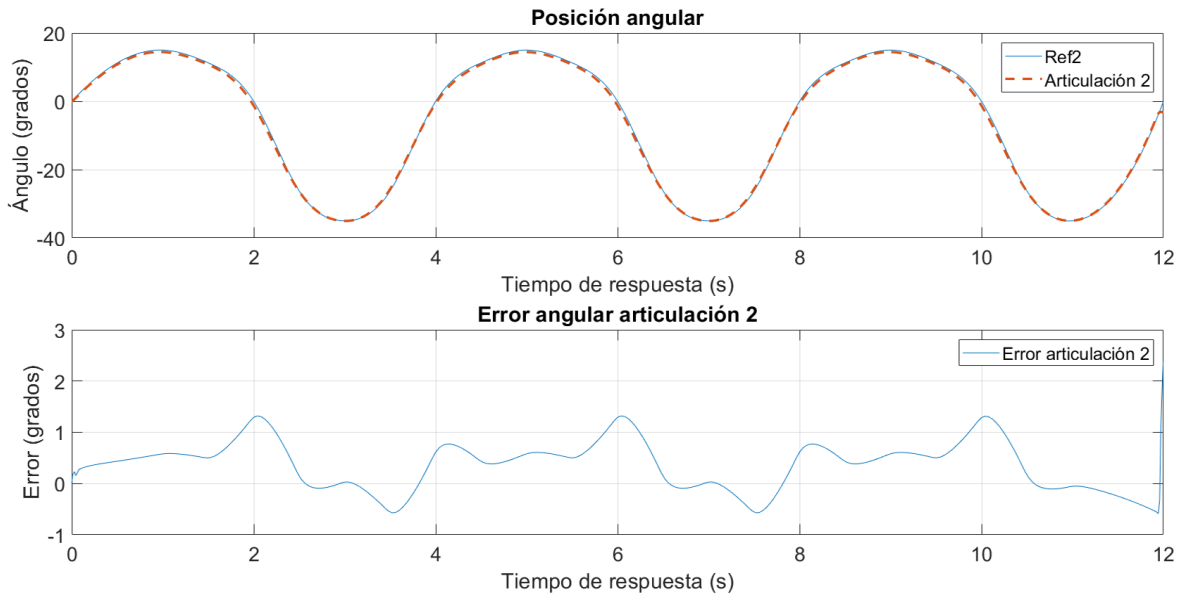


Figura 5.16: Seguimiento de posición y error angular en articulación 2.

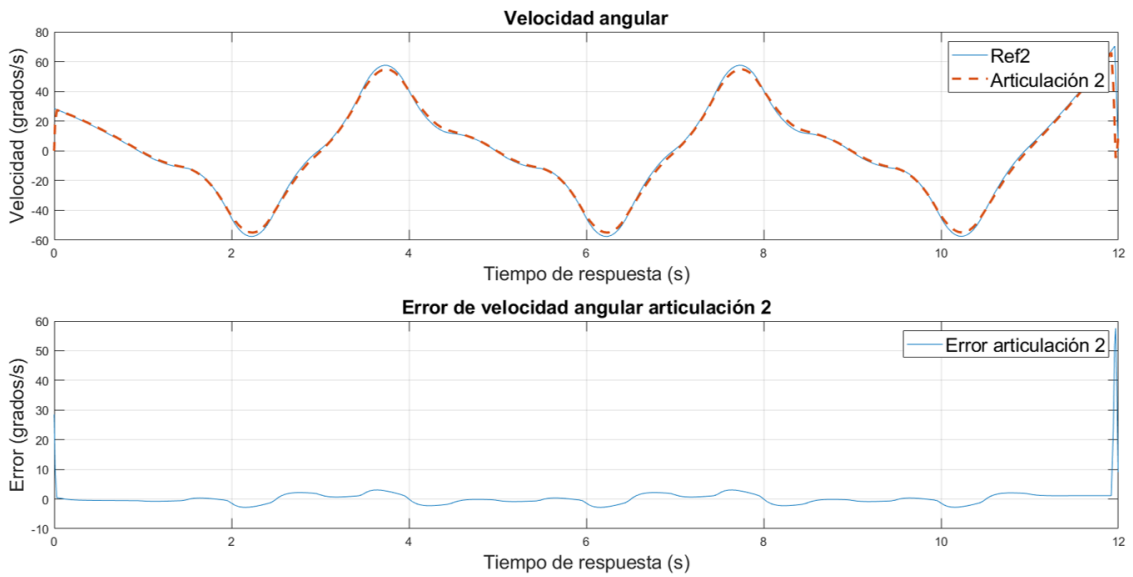


Figura 5.17: Derivada de trayectoria de tipo caminata para seguimiento de velocidad angular.



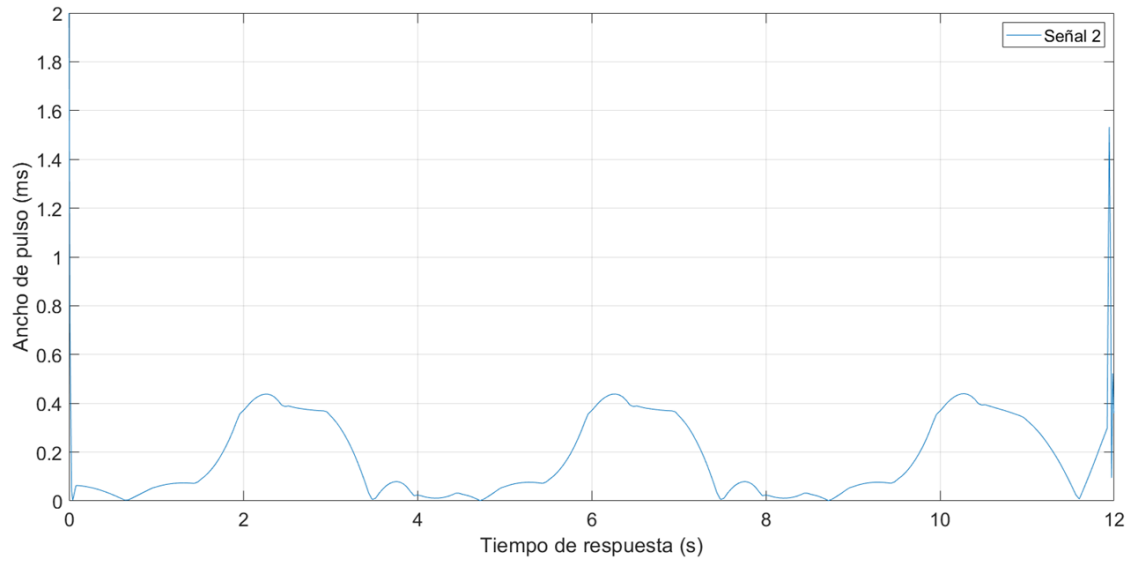


Figura 5.18: Señal de control para articulación 2.

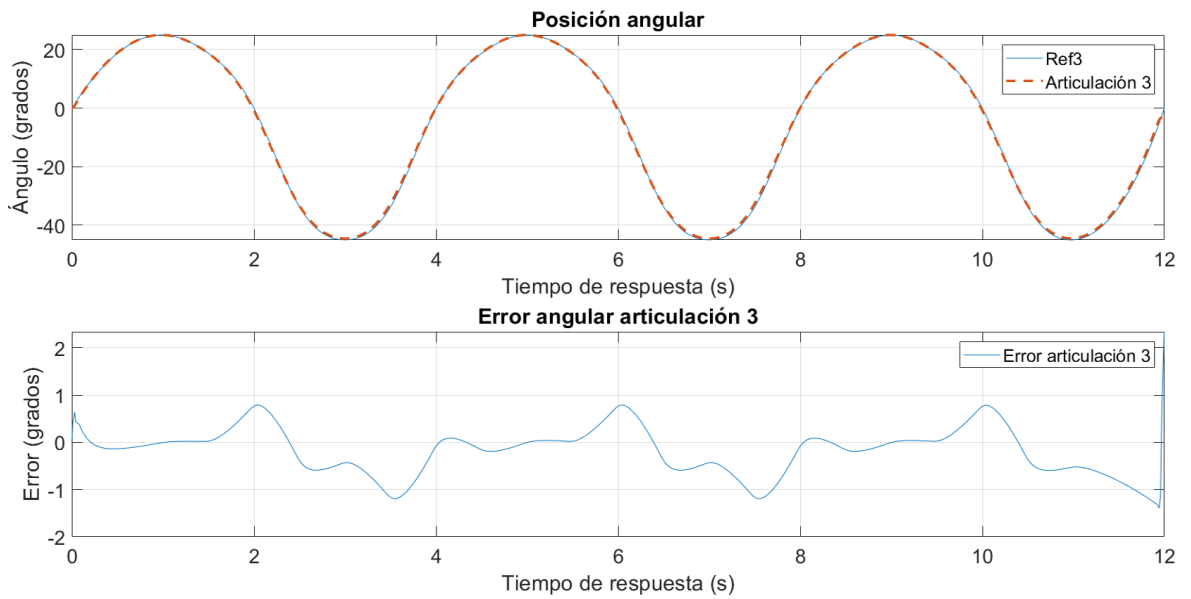


Figura 5.19: Seguimiento de posición y error angular en articulación 3.

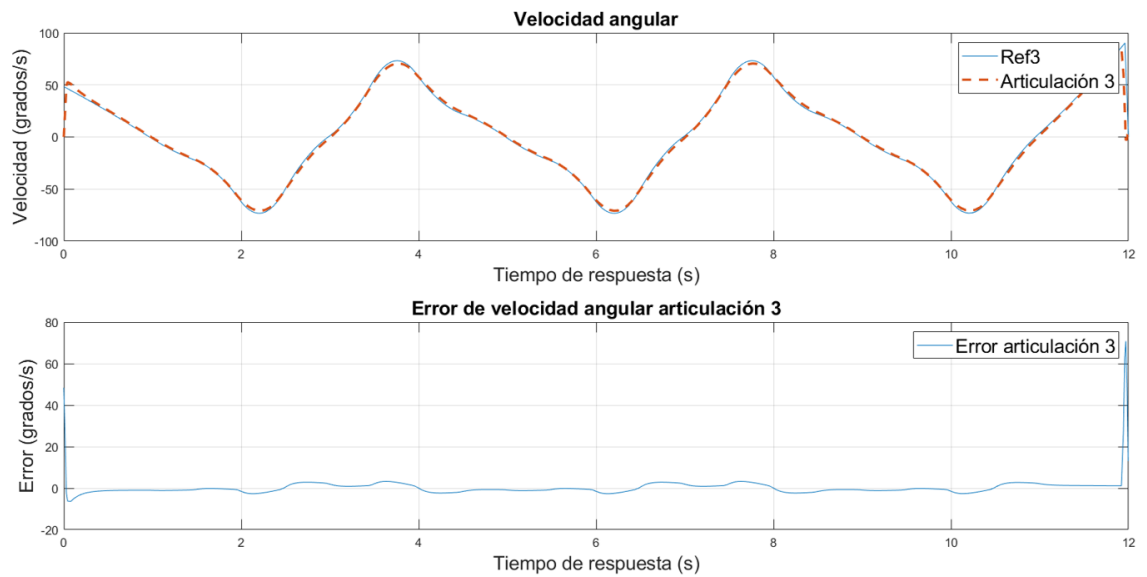


Figura 5.20: Derivada de trayectoria de tipo caminata para seguimiento de velocidad angular.

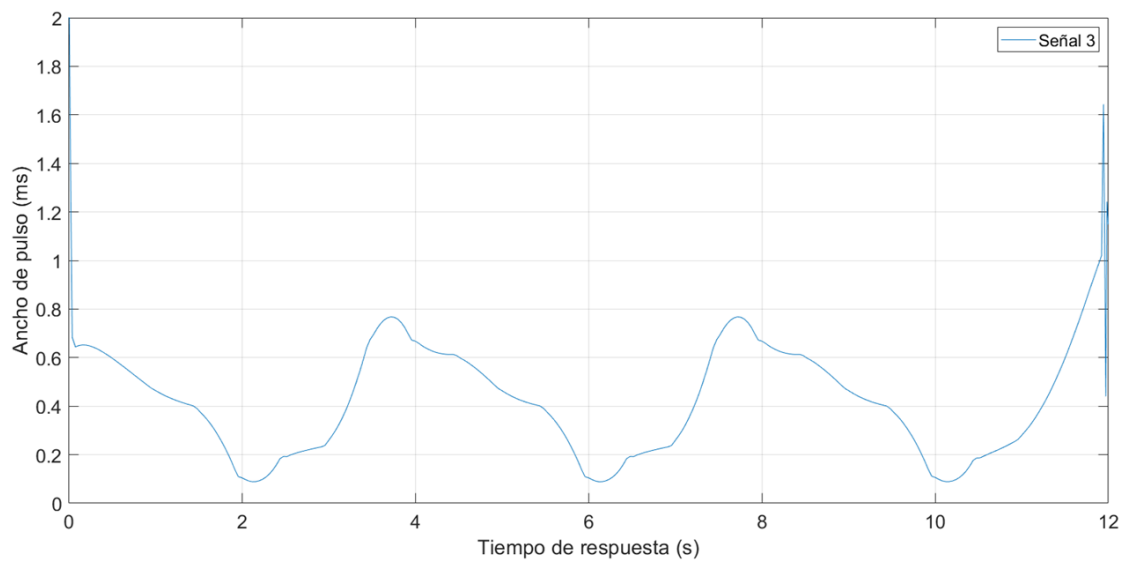


Figura 5.21: Señal de control para articulación 3.

## 5.8. Simulación numérica para trayectoria de forma trapezoidal

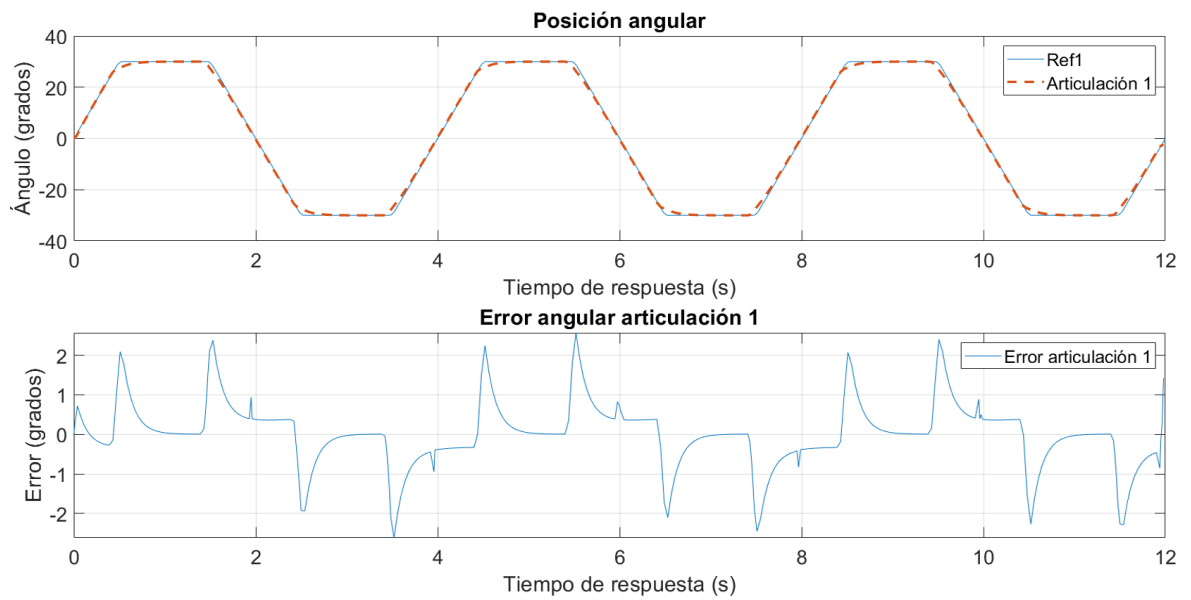


Figura 5.22: Gráfica de seguimiento de posición y error angular en articulación 1.

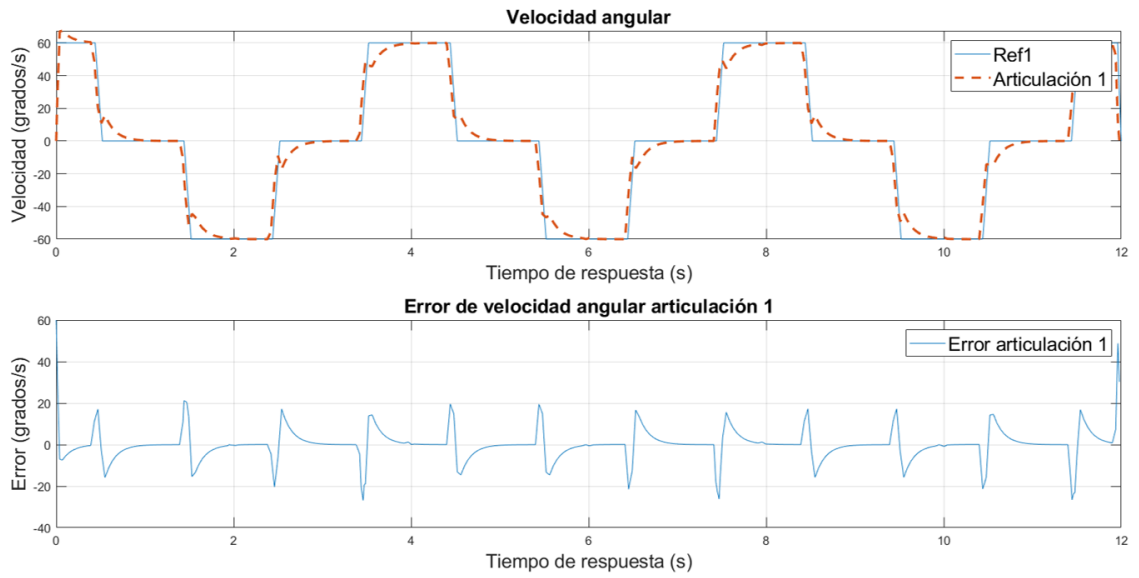


Figura 5.23: Derivada de trayectoria de tipo caminata para seguimiento de velocidad angular.

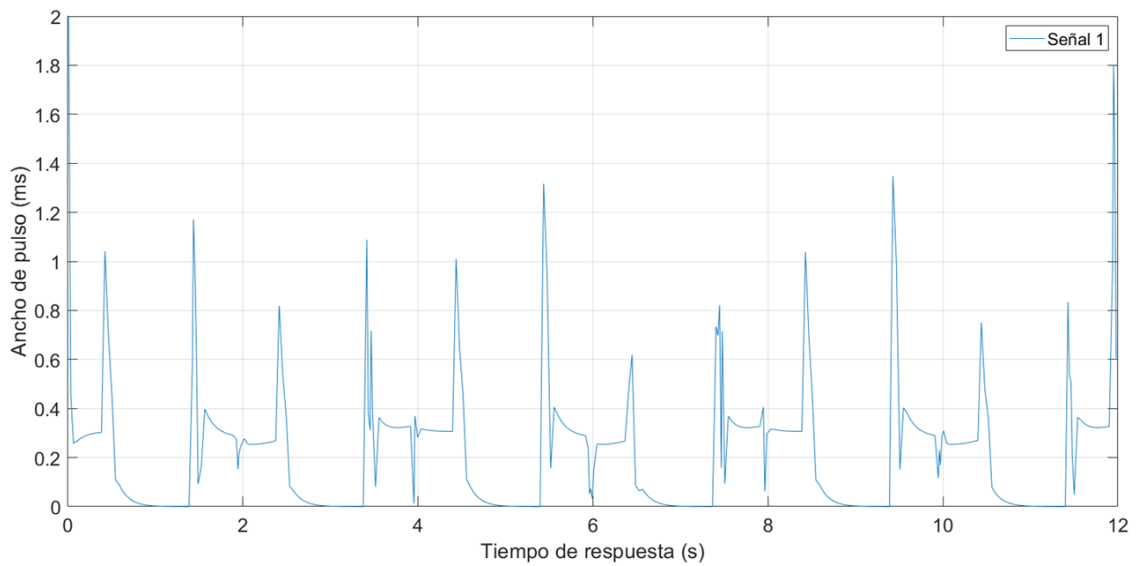


Figura 5.24: Gráfica de señal de control para articulación 1.

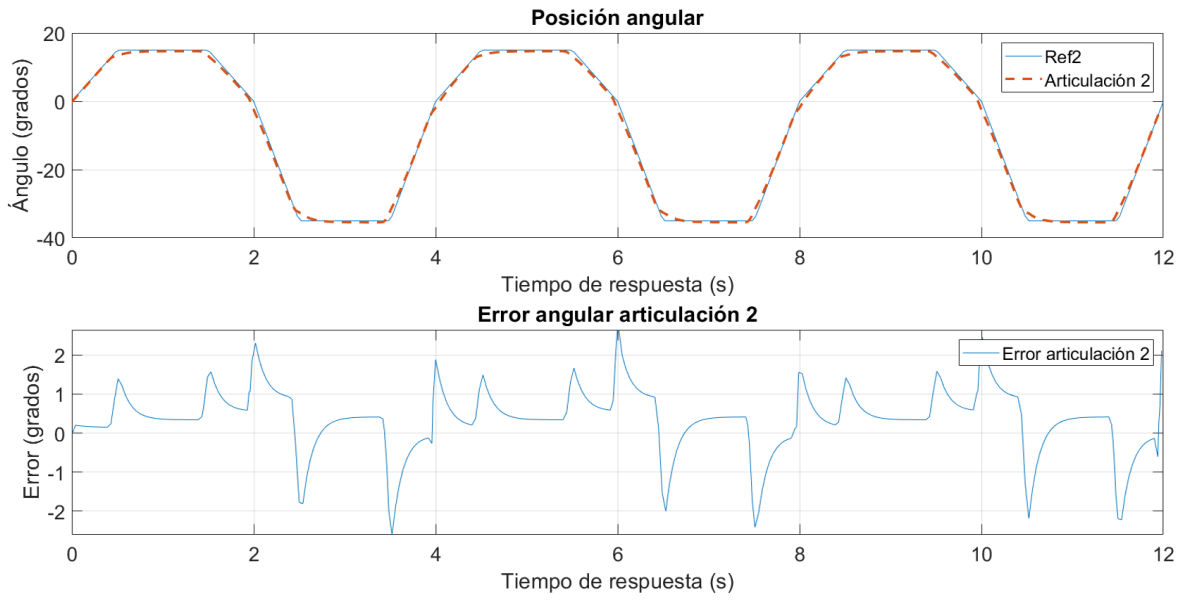


Figura 5.25: Gráfica de seguimiento de posición y error angular en articulación 2.

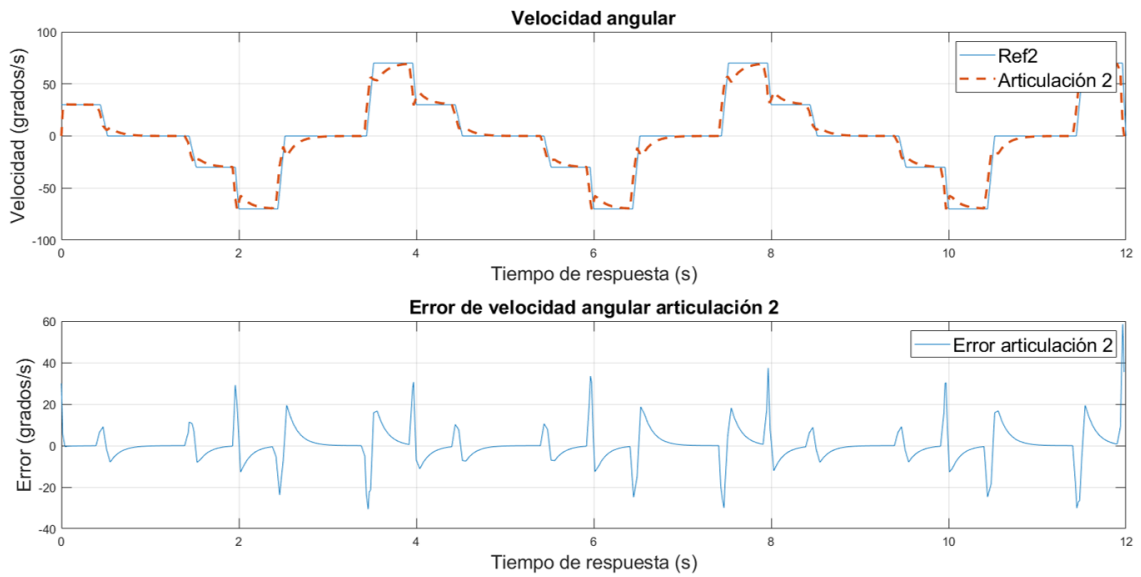


Figura 5.26: Derivada de trayectoria de tipo caminata para seguimiento de velocidad angular.

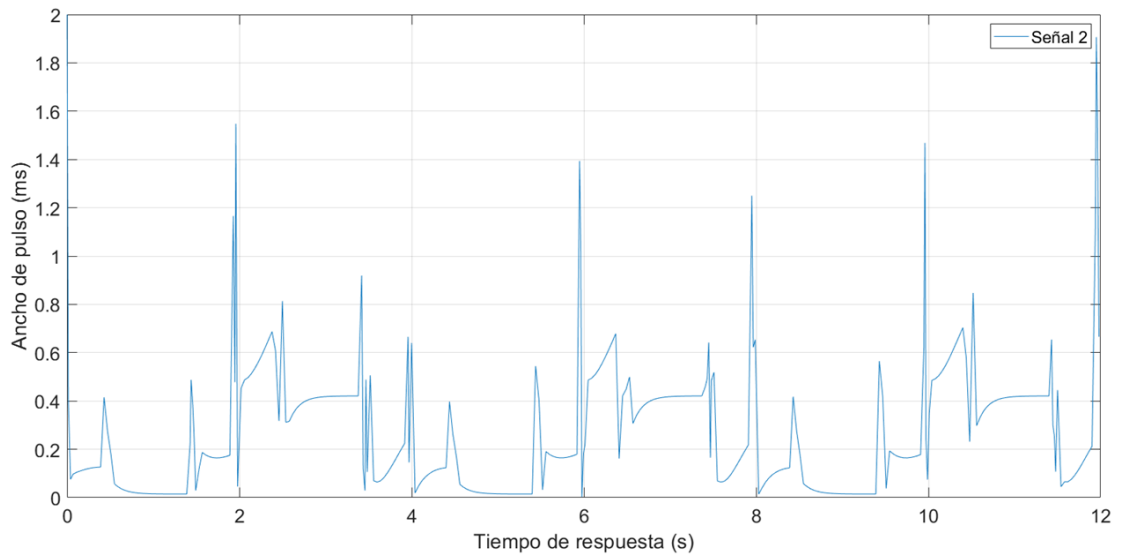


Figura 5.27: Gráfica de señal de control para articulación 2.

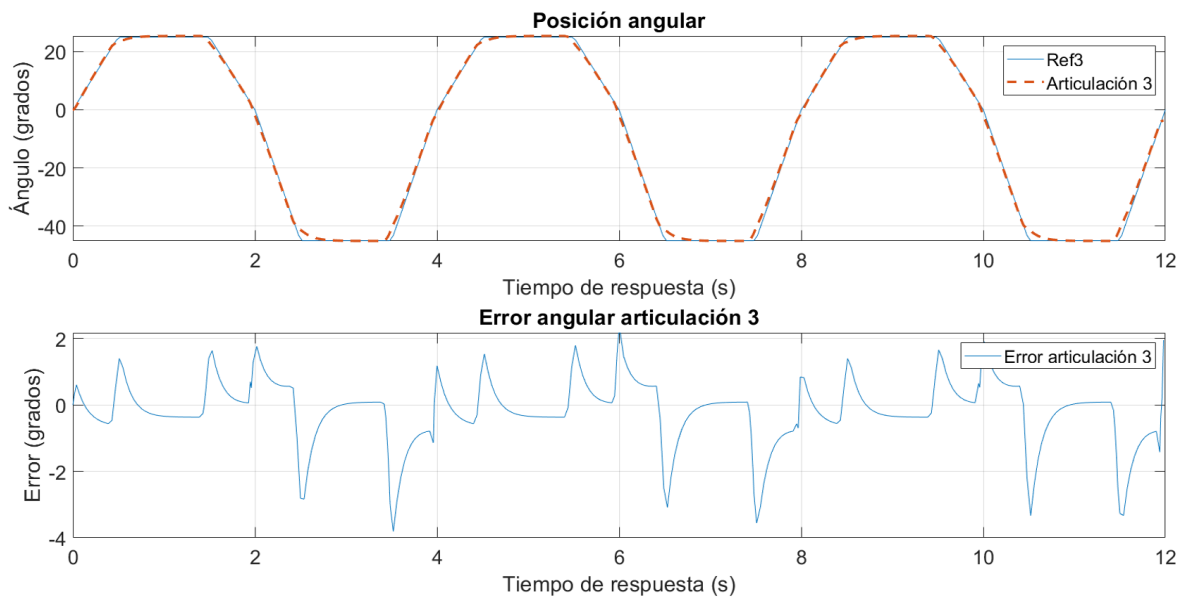


Figura 5.28: Gráfica de seguimiento de posición y error angular en articulación 3.

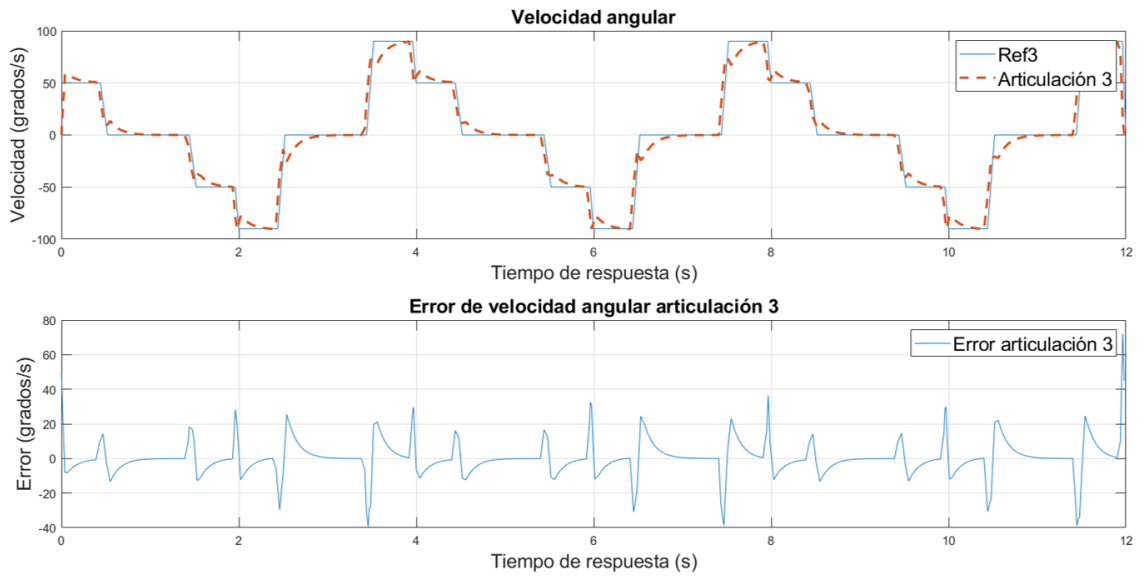


Figura 5.29: Derivada de trayectoria de tipo caminata para seguimiento de velocidad angular.

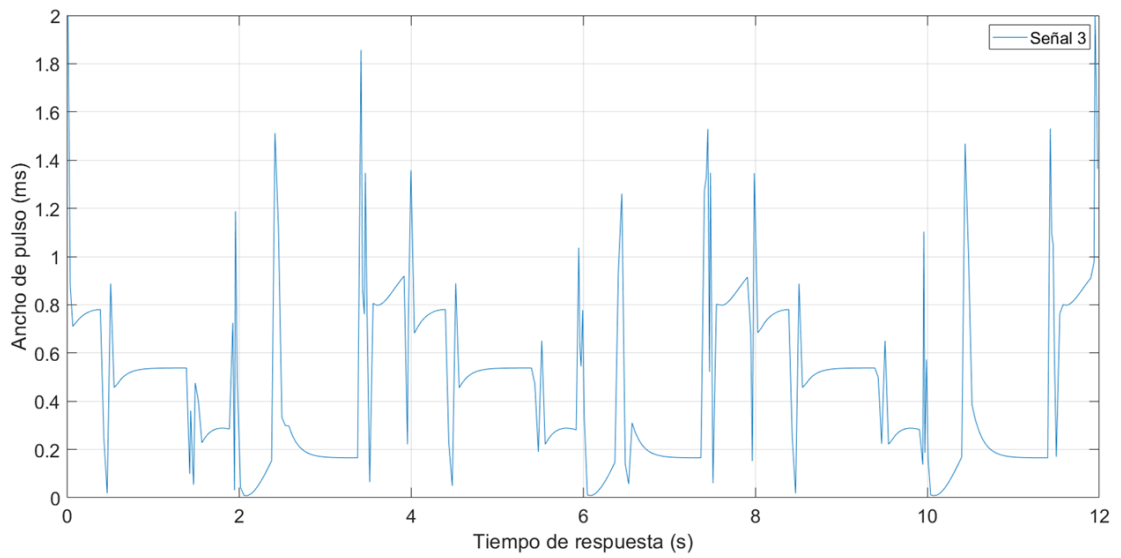


Figura 5.30: Gráfica de señal de control para articulación 3.

## 5.9. Simulación numérica para trayectoria de forma caminata

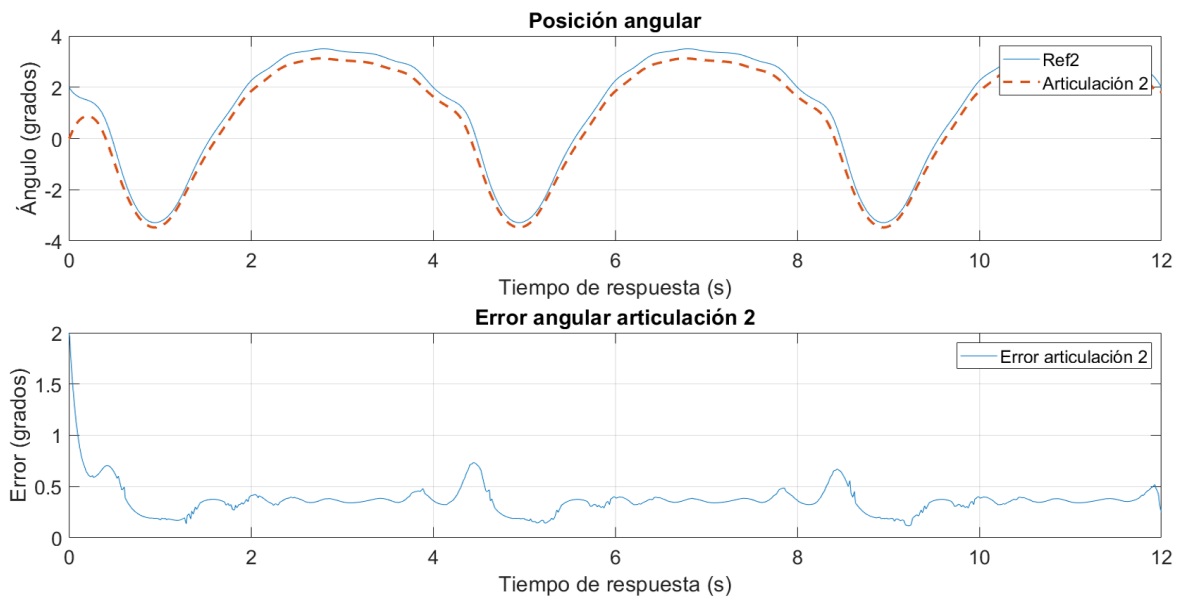


Figura 5.31: Gráfica de seguimiento de posición y error angular en articulación 2.



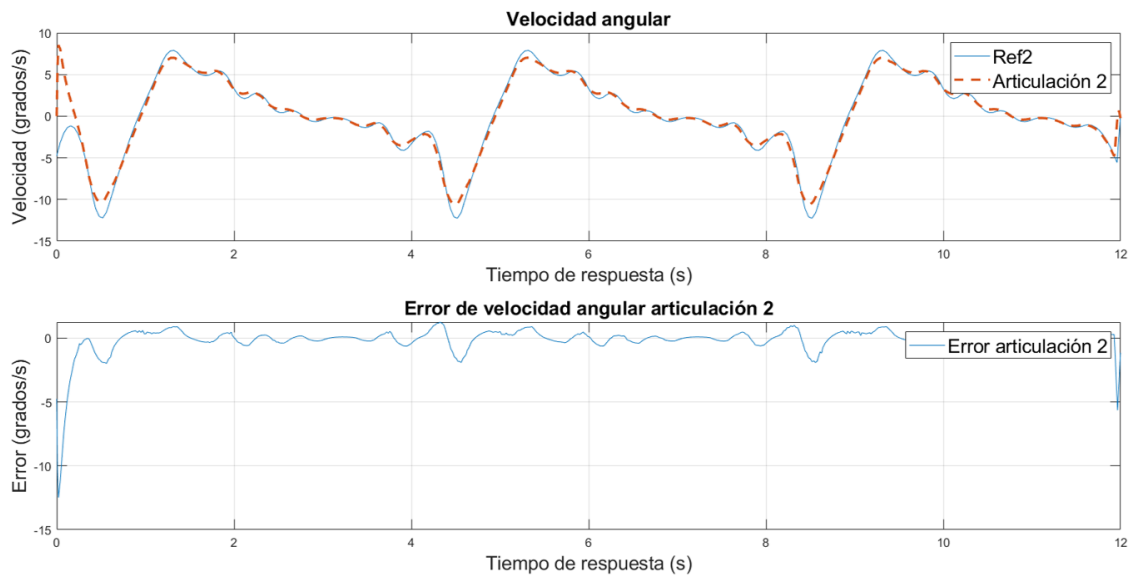


Figura 5.32: Derivada de trayectoria de tipo caminata para seguimiento de velocidad angular.

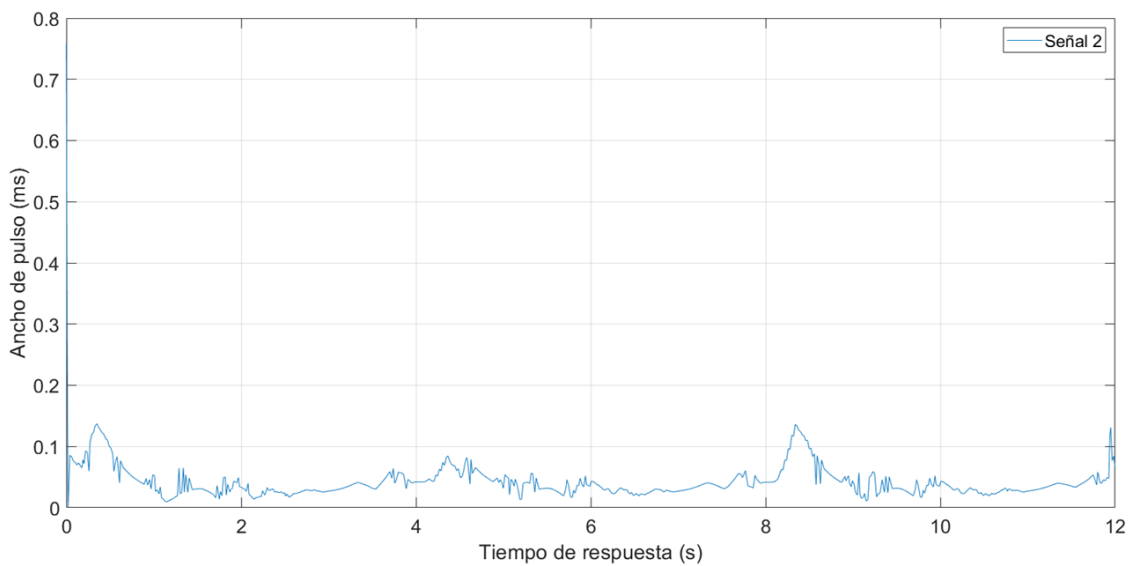


Figura 5.33: Gráfica de señal de control para articulación 2.

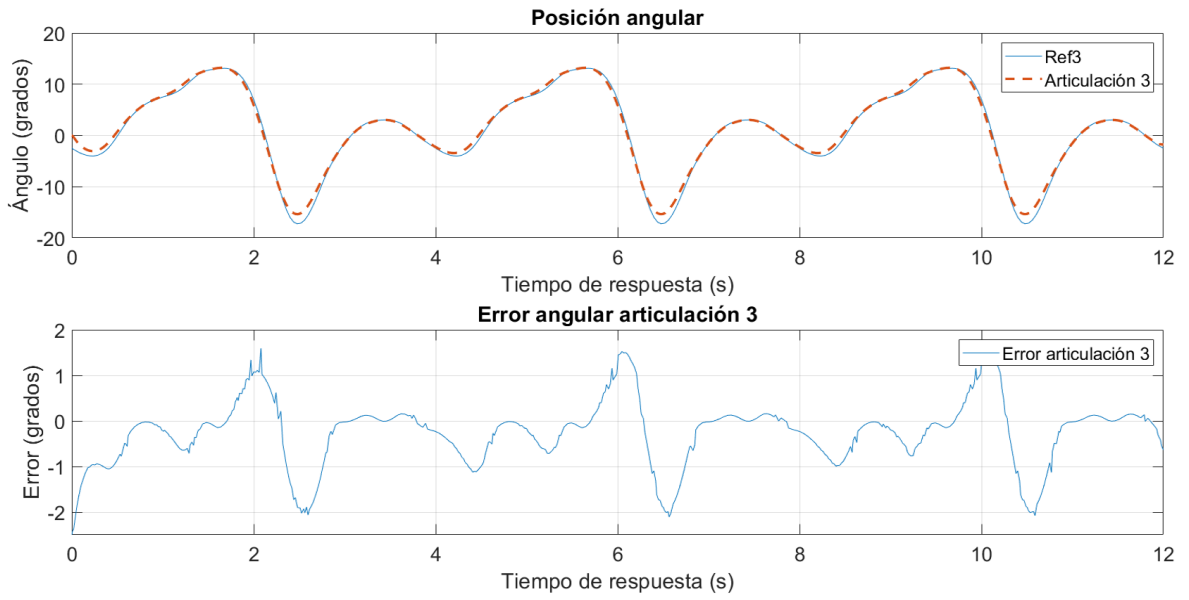


Figura 5.34: Gráfica de seguimiento de posición y error angular en articulación 3.

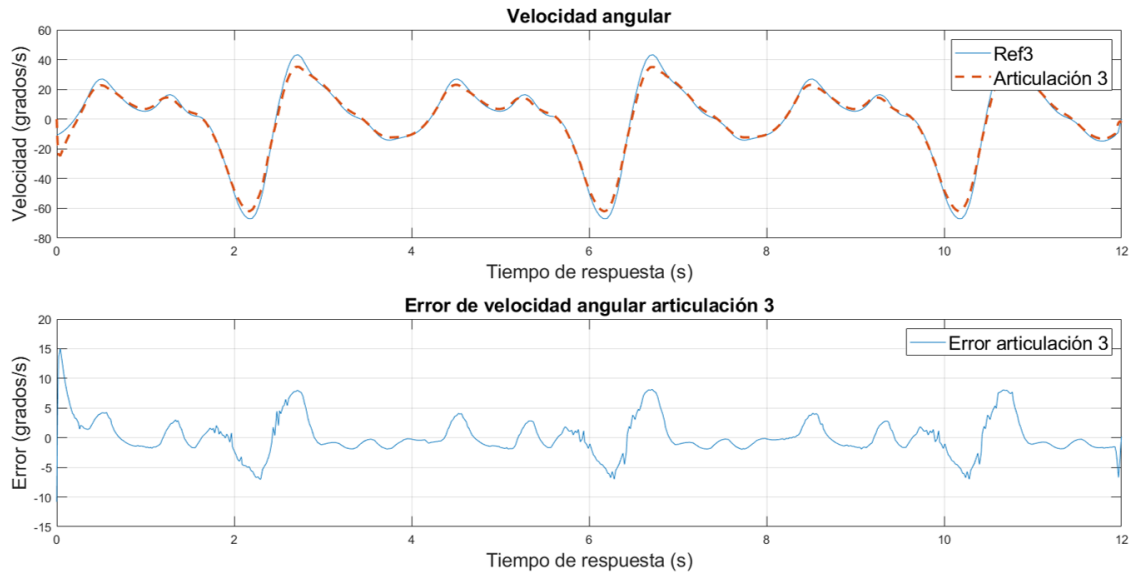


Figura 5.35: Derivada de trayectoria de tipo caminata para seguimiento de velocidad angular.

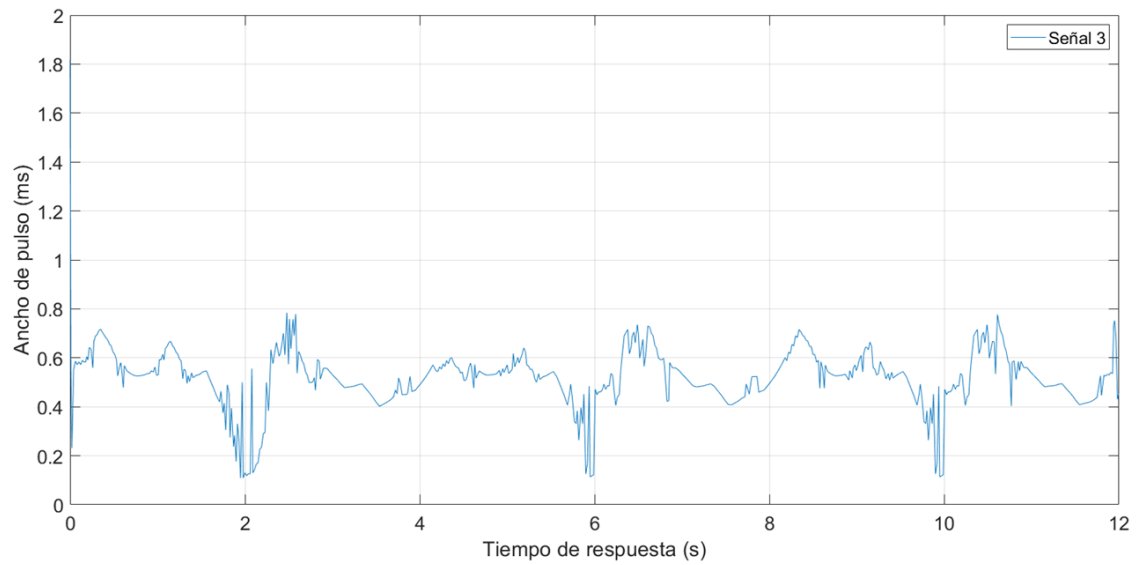


Figura 5.36: Gráfica de señal de control para articulación 3.

Enlace para visualización de video ejemplo en el movimiento de la órtesis:

<https://vimeo.com/manage/395561267>

# Conclusiones

El poder llevar a cabo la creación de un dispositivo capaz de realizar labores de seguimiento a trayectorias articulares conlleva la aplicación tanto de conocimiento técnico como teórico. Utilización de herramientas matemáticas como el modelado cinemático, dinámico y control son esenciales para conocer y controlar el comportamiento del sistema diseñado. Así mismo, la utilización de software tanto de diseño mecánico como cálculo matricial es indispensable. Gracias al correcto análisis del sistema diseñado, fue posible realizar el seguimiento en las trayectorias propuestas para movimiento articular con magnitudes de error aceptables, esto debido a que se tomó en consideración la dinámica tanto de la órtesis como de los actuadores para su compensación en el sistema de control. Sin embargo, debido a que el dispositivo no se pudo realizar de forma física, fue necesario acudir a técnicas de estimación y simulación computacional para asemejar el comportamiento real de los actuadores junto con la dinámica de la órtesis. Gracias a esto, fue posible obtener un comportamiento más cercano a la realidad. Por otro lado, la creación de una interfaz móvil simplificó de manera considerable la configuración paramétrica para la realización de trayectorias de seguimiento articular en la órtesis activa de tobillo. Si se contara con un modelo físico de órtesis pasiva, sería posible realizar la lectura de los rangos de movimiento en el paciente, así como la estimación de fuerza mediante la aplicación móvil diseñada.

## Referencias

- [1] J. Sánchez, “Estudio Epidemiológico de las Fracturas de Tobillo Causadas por Accidentes Deportivos en la Isla de Gran Canaria Durante el Período 1995-2005,” Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, Departamento de Ciencias Médicas y Quirúrgicas, Febrero, 2010.
- [2] S. Mehta, K. Rees, L. Cutler, and J. Mangwani, “Understanding risks and complications in the management of ankle fractures,” in *Indian J Orthop*, vol. 48, pp. 45-52, 2014.
- [3] L. Domínguez and S. Villaseñor, “Frecuencia y tipos de fracturas clasificadas por la asociación para el estudio de la osteosíntesis en el hospital general de León durante un año,” in *Acta médica Grupo Ángeles*, vol. 15, pp. 275-286, 2017.
- [4] L. García, S. Guzmán and E. Montelongo, “Epidemiología de las fracturas en el Servicio de Urgencias del Hospital Central Militar,” *Hospital Central Militar, Ciudad de México*, pp. 147-151, 2013.
- [5] D. Neumann, J. Martínez, F. García, M. Flores, and H. Aguilar, “Tratamiento de la fractura de tobillo en el adulto,” *Evidencias y Recomendaciones, Catalogo Maestro de Guías de Práctica Clínica*, vol. IMSS-493-11.
- [6] Garrido RP, González M, Pérez J, Llorens P, “Lesiones de tobillo: diferencias entre lesiones deportivas y no deportivas.” *Patología del aparato locomotor*, 3 (??): 87-100, 2005.
- [7] D. Neumann, “Kinesiology of the musculoskeletal system: Foundation for physical rehabilitation,” in *Mosby*, pp. 478-488, 2002.
- [8] M. Nordin and V. Frankel, “Basic biomechanics of the musculoskeletal system,” in *Lippincott Williams & Wilkins*, vol. Fourth Edition, pp. 225-233, 2013.
- [9] J. Faller and M. Schuenke, “The Human Body: An Introduction to Structure and Function,” in *Thieme*, pp. 183-184, 2004.
- [10] J. Hamill, K. Knutzen, and T. Derrick, “Biomechanical basis of human movement,” in *Wolters Kluwer*, vol. Fourth Edition, pp. 209-213, 2014.
- [11] C. Mattacola and M. Dwyer, “Rehabilitation of the Ankle After Acute Sprain or Chronic Instability,” in *Journal of Athletic Training*, University of Kentucky, Lexington, pp. 413-429, 2002.
- [12] A. López, “Servicio de medicina física y rehabilitación,” in *Temis Medical*,

Consorti Sanitari de l' Anoià, S.L., 2013.

[13] D. Stewart, "A Platform with Six Degrees of Freedom: A new form of mechanical linkage which enables a platform to move simultaneously in all six degrees of freedom developed by Elliott-Automation," *Aircraft Engineering and Aerospace Technology*, Vol. 38 No. 4, pp. 30-35, 1966.

[14] G. Liu, J. Gao, H. Yue, X. Zhang and G. Lu, "Design and Kinematics Simulation of Parallel Robots for Ankle Rehabilitation," 2006 International Conference on Mechatronics and Automation, Luoyang, Henan, pp. 1109-1113, 2006.

[15] M. Tovar, "Diseño de un exoesqueleto de miembros inferiores de 14 grados de libertad y su aplicación para emular la locomoción humana," Universidad Autónoma de Nuevo León, Facultad de Ingeniería Eléctrica, N.L., pp. 4-6, Septiembre, 2016.

[16] S. Yoshiyuki, "Hal: Hybrid assistive limb based on cybernetics. Robotics research," in Springer tracts in advanced robotics, vol. 66, pp. 25-34, 2007.

[17] A. Blanco, H. Azcarray, L. Vela and R. Vázquez, "Prototipo virtual de un rehabilitador de tobillo," in CIINDET 2011, Cuernavaca Morelos, Noviembre, 2011.

[18] Y. Bai, F. Li, J. Zhao, J. Li, F. Jin and X. Gao, ".A powered ankle-foot orthoses for ankle rehabilitation," 2012 IEEE International Conference on Automation and Logistics, Zhengzhou, pp. 288-293, 2012.

[19] J. Kim and J. Bae, "Design of a cable-driven ankle rehabilitation system (C-DARS)," 2014 11th International Conference on Ubiquitous Robots and Ambient Intelligence (URAI), Kuala Lumpur, pp. 140-142, 2014.

[20] Zhijiang Lu et al., "Development of a three freedoms ankle rehabilitation robot for ankle training," TENCON 2015 - 2015 IEEE Region 10 Conference, Macao, pp. 1-5, 2015.

[21] D. Ao, R. Song and J. Gao, "Movement Performance of Human-Robot Cooperation Control Based on EMG-Driven Hill-Type and Proportional Models for an Ankle Power-Assist Exoskeleton Robot," in IEEE Transactions on Neural Systems and Rehabilitation Engineering, vol. 25, no. 8, pp. 1125-1134, Aug. 2017.

[22] A. Barrientos, "Fundamentos de robótica", e-libro, Corp., 2007.

[23] C. Urrea, J. Kern, "Characterization, Simulation and Implementation of a New Dynamic Model for a DC Servomotor", IEEE Latin America Transactions. 12. 997-1004.

[24] E. Ordaz, A. Liñán, M. Aguilar and L. Torres, "Collective Task for a Flock of Robots Using Influence Factor", *Journal of Intelligence & Robotics Systems*, Springer, October 2018.

[25] F. Reyes, R. Kelly. (2001), "Experimental evaluation of model-based controllers on a direct-drive robot arm", *Mechatronics*, Volume 11, Issue 3, 1 April 2001, Pages 267-282, ISSN 0957-4158.

# Apéndice A: Componentes de ecuación matricial para la dinámica de la órtesis

CODIGO PARA CÁLCULO DE LA DINÁMICA DE LA ÓRTESIS

MATRIZ M DE MASAS

$M(1,1) =$

$$\begin{aligned}
 & I_{yy1} + I_{zz2} + I_{zz3} + L_2^2 * m_3 + L_{cx1}^2 * m_1 + L_{cx2}^2 * m_2 + L_{cx3}^2 * m_3 + L_{cy2}^2 * m_2 + \\
 & L_{cy3}^2 * m_3 + L_{cz1}^2 * m_1 + I_{xx2} * \cos(q_2)^2 + I_{xx3} * \cos(q_2)^2 - I_{zz2} * \cos(q_2)^2 - I_{zz3} * \\
 & \cos(q_2)^2 + I_{xz2} * \sin(2 * q_2) - I_{xx3} * \cos(q_2)^2 * \cos(q_3)^2 + I_{yy3} * \cos(q_2)^2 * \cos(q_3)^2 + \\
 & 2 * L_2 * L_{cx3} * m_3 - L_2^2 * m_3 * \cos(q_2)^2 - L_{cx2}^2 * m_2 * \cos(q_2)^2 - L_{cx3}^2 * m_3 * \cos(q_2)^2 + \\
 & L_{cz2}^2 * m_2 * \cos(q_2)^2 + L_{cz3}^2 * m_3 * \cos(q_2)^2 - 2 * I_{yz3} * \cos(q_2) * \cos(q_3) * \sin(q_2) - 2 * \\
 & I_{xz3} * \cos(q_2) * \sin(q_2) * \sin(q_3) - 2 * I_{xy3} * \cos(q_2)^2 * \cos(q_3) * \sin(q_3) - 2 * L_2 * L_{cx3} * \\
 & m_3 * \cos(q_2)^2 + L_{cx2} * L_{cz2} * m_2 * \sin(2 * q_2) + L_2^2 * m_3 * \cos(q_2)^2 * \cos(q_3)^2 + L_{cx3}^2 * \\
 & m_3 * \cos(q_2)^2 * \cos(q_3)^2 - L_{cy3}^2 * m_3 * \cos(q_2)^2 * \cos(q_3)^2 + 2 * L_2 * L_{cx3} * m_3 * \cos(q_2)^2 * \\
 & \cos(q_3)^2 - 2 * L_2 * L_{cz3} * m_3 * \cos(q_2) * \sin(q_2) * \sin(q_3) - 2 * L_{cx3} * L_{cz3} * m_3 * \cos(q_2) * \\
 & \sin(q_2) * \sin(q_3) - 2 * L_2 * L_{cy3} * m_3 * \cos(q_2)^2 * \cos(q_3) * \sin(q_3) - 2 * L_{cx3} * L_{cy3} * m_3 * \\
 & \cos(q_2)^2 * \cos(q_3) * \sin(q_3) - 2 * L_{cy3} * L_{cz3} * m_3 * \cos(q_2) * \cos(q_3) * \sin(q_2)
 \end{aligned}$$

$M(1,2) =$

$$\begin{aligned}
 & I_{yz2} * \sin(q_2) - I_{xy3} * \cos(q_2) - I_{xy2} * \cos(q_2) + I_{xz3} * \cos(q_3) * \sin(q_2) - I_{yz3} * \sin(q_2) * \\
 & \sin(q_3) + 2 * I_{xy3} * \cos(q_2) * \cos(q_3)^2 - I_{xx3} * \cos(q_2) * \cos(q_3) * \sin(q_3) + I_{yy3} * \cos(q_2) * \\
 & \cos(q_3) * \sin(q_3) - L_2 * L_{cy3} * m_3 * \cos(q_2) - L_{cx2} * L_{cy2} * m_2 * \cos(q_2) - L_{cx3} * L_{cy3} * \\
 & m_3 * \cos(q_2) + L_{cy2} * L_{cz2} * m_2 * \sin(q_2) + L_2^2 * m_3 * \cos(q_2) * \cos(q_3) * \sin(q_3) + L_{cx3}^2 * \\
 & m_3 * \cos(q_2) * \cos(q_3) * \sin(q_3) - L_{cy3}^2 * m_3 * \cos(q_2) * \cos(q_3) * \sin(q_3) + L_2 * L_{cz3} * \\
 & m_3 * \cos(q_3) * \sin(q_2) + L_{cx3} * L_{cz3} * m_3 * \cos(q_3) * \sin(q_2) - L_{cy3} * L_{cz3} * m_3 * \sin(q_2) * \\
 & \sin(q_3) + 2 * L_2 * L_{cy3} * m_3 * \cos(q_2) * \cos(q_3)^2 + 2 * L_{cx3} * L_{cy3} * m_3 * \cos(q_2) * \cos(q_3)^2 + \\
 & 2 * L_2 * L_{cx3} * m_3 * \cos(q_2) * \cos(q_3) * \sin(q_3)
 \end{aligned}$$

$$M(1,3) =$$

$$m3 * \sin(q2) * L2^2 + 2 * m3 * \sin(q2) * L2 * Lcx3 - Lcz3 * m3 * \cos(q2) * \sin(q3) * L2 + m3 * \sin(q2) * Lcx3^2 - Lcz3 * m3 * \cos(q2) * \sin(q3) * Lcx3 + m3 * \sin(q2) * Lcy3^2 - Lcz3 * m3 * \cos(q2) * \cos(q3) * Lcy3 + Izz3 * \sin(q2) - Iyz3 * \cos(q2) * \cos(q3) - Ixz3 * \cos(q2) * \sin(q3)$$

$$M(2,1) =$$

$$Iyz2 * \sin(q2) - Ixy3 * \cos(q2) - Ixy2 * \cos(q2) + Ixz3 * \cos(q3) * \sin(q2) - Iyz3 * \sin(q2) * \sin(q3) + 2 * Ixy3 * \cos(q2) * \cos(q3)^2 - Ixx3 * \cos(q2) * \cos(q3) * \sin(q3) + Iyy3 * \cos(q2) * \cos(q3) * \sin(q3) - L2 * Lcy3 * m3 * \cos(q2) - Lcx2 * Lcy2 * m2 * \cos(q2) - Lcx3 * Lcy3 * m3 * \cos(q2) + Lcy2 * Lcz2 * m2 * \sin(q2) + L2^2 * m3 * \cos(q2) * \cos(q3) * \sin(q3) + Lcx3^2 * m3 * \cos(q2) * \cos(q3) * \sin(q3) - Lcy3^2 * m3 * \cos(q2) * \cos(q3) * \sin(q3) + L2 * Lcz3 * m3 * \cos(q3) * \sin(q2) + Lcx3 * Lcz3 * m3 * \cos(q3) * \sin(q2) - Lcy3 * Lcz3 * m3 * \sin(q2) * \sin(q3) + 2 * L2 * Lcy3 * m3 * \cos(q2) * \cos(q3)^2 + 2 * Lcx3 * Lcy3 * m3 * \cos(q2) * \cos(q3)^2 + 2 * L2 * Lcx3 * m3 * \cos(q2) * \cos(q3) * \sin(q3)$$

$$M(2,2) =$$

$$Iyy2 + Iyy3 + L2^2 * m3 + Lcx2^2 * m2 + Lcx3^2 * m3 + Lcz2^2 * m2 + Lcz3^2 * m3 + Ixx3 * \cos(q3)^2 - Iyy3 * \cos(q3)^2 + Ixy3 * \sin(2 * q3) + 2 * L2 * Lcx3 * m3 - L2^2 * m3 * \cos(q3)^2 - Lcx3^2 * m3 * \cos(q3)^2 + Lcy3^2 * m3 * \cos(q3)^2 - 2 * L2 * Lcx3 * m3 * \cos(q3)^2 + L2 * Lcy3 * m3 * \sin(2 * q3) + Lcx3 * Lcy3 * m3 * \sin(2 * q3)$$

$$M(2,3) =$$

$$Ixz3 * \cos(q3) - Iyz3 * \sin(q3) + L2 * Lcz3 * m3 * \cos(q3) + Lcx3 * Lcz3 * m3 * \cos(q3) - Lcy3 * Lcz3 * m3 * \sin(q3)$$

$$M(3,1) =$$

$$m3 * \sin(q2) * L2^2 + 2 * m3 * \sin(q2) * L2 * Lcx3 - Lcz3 * m3 * \cos(q2) * \sin(q3) * L2 + m3 * \sin(q2) * Lcx3^2 - Lcz3 * m3 * \cos(q2) * \sin(q3) * Lcx3 + m3 * \sin(q2) * Lcy3^2 - Lcz3 * m3 * \cos(q2) * \cos(q3) * Lcy3 + Izz3 * \sin(q2) - Iyz3 * \cos(q2) * \cos(q3) - Ixz3 * \cos(q2) * \sin(q3)$$

$$M(3,2) =$$

$$Ixz3 * \cos(q3) - Iyz3 * \sin(q3) + L2 * Lcz3 * m3 * \cos(q3) + Lcx3 * Lcz3 * m3 * \cos(q3) - Lcy3 * Lcz3 * m3 * \sin(q3)$$

$$M(3,3) =$$

$$m3 * L2^2 + 2 * m3 * L2 * Lcx3 + m3 * Lcx3^2 + m3 * Lcy3^2 + Izz3$$

## VECTOR DE H DE EFECTO CORIOLIS Y FUERZAS CENTRÍFUGAS

$$H(1) =$$

$$Iyz2 * qp2^2 * \cos(q2) + Ixy2 * qp2^2 * \sin(q2) + Ixy3 * qp2^2 * \sin(q2) - 2 * Ixz2 * qp1 * qp2 + Ixz3 *$$



$$\begin{aligned}
& qp2^2 * \cos(q2) * \cos(q3) - Ixz3 * qp3^2 * \cos(q2) * \cos(q3) - Iyz3 * qp2^2 * \cos(q2) * \sin(q3) + \\
& Iyz3 * qp3^2 * \cos(q2) * \sin(q3) + Ixx3 * qp2 * qp3 * \cos(q2) - Iyy3 * qp2 * qp3 * \cos(q2) + 2 * Iyz3 * \\
& qp1 * qp2 * \cos(q3) + Izz3 * qp2 * qp3 * \cos(q2) + 2 * Ixz3 * qp1 * qp2 * \sin(q3) - 2 * Ixy3 * qp2^2 * \\
& \cos(q3)^2 * \sin(q2) + 2 * Ixy3 * qp1 * qp3 * \cos(q2)^2 + 4 * Ixz2 * qp1 * qp2 * \cos(q2)^2 - Ixx2 * qp1 * \\
& qp2 * \sin(2 * q2) - Ixx3 * qp1 * qp2 * \sin(2 * q2) + Izz2 * qp1 * qp2 * \sin(2 * q2) + Izz3 * qp1 * qp2 * \\
& \sin(2 * q2) + Lcy2 * Lcz2 * m2 * qp2^2 * \cos(q2) + Ixx3 * qp2^2 * \cos(q3) * \sin(q2) * \sin(q3) - Iyy3 * \\
& qp2^2 * \cos(q3) * \sin(q2) * \sin(q3) + L2 * Lcy3 * m3 * qp2^2 * \sin(q2) + Lcx2 * Lcy2 * m2 * qp2^2 * \\
& \sin(q2) + Lcx3 * Lcy3 * m3 * qp2^2 * \sin(q2) + 2 * Lcy3^2 * m3 * qp2 * qp3 * \cos(q2) - 2 * Lcx2 * \\
& Lcz2 * m2 * qp1 * qp2 - 2 * Ixx3 * qp2 * qp3 * \cos(q2) * \cos(q3)^2 + 2 * Iyy3 * qp2 * qp3 * \cos(q2) * \\
& \cos(q3)^2 - 4 * Iyz3 * qp1 * qp2 * \cos(q2)^2 * \cos(q3) + L2^2 * m3 * qp1 * qp2 * \sin(2 * q2) + Lcx2^2 * \\
& m2 * qp1 * qp2 * \sin(2 * q2) + Lcx3^2 * m3 * qp1 * qp2 * \sin(2 * q2) - Lcz2^2 * m2 * qp1 * qp2 * \sin(2 * \\
& q2) - Lcz3^2 * m3 * qp1 * qp2 * \sin(2 * q2) - 4 * Ixz3 * qp1 * qp2 * \cos(q2)^2 * \sin(q3) - 4 * Ixy3 * \\
& qp1 * qp3 * \cos(q2)^2 * \cos(q3)^2 - 4 * Ixy3 * qp2 * qp3 * \cos(q2) * \cos(q3) * \sin(q3) - 2 * Ixz3 * \\
& qp1 * qp3 * \cos(q2) * \cos(q3) * \sin(q2) + 2 * Lcy3 * Lcz3 * m3 * qp1 * qp2 * \cos(q3) + 2 * Iyz3 * \\
& qp1 * qp3 * \cos(q2) * \sin(q2) * \sin(q3) + 2 * L2 * Lcz3 * m3 * qp1 * qp2 * \sin(q3) + 2 * Lcx3 * Lcz3 * \\
& m3 * qp1 * qp2 * \sin(q3) - 2 * L2 * Lcy3 * m3 * qp2^2 * \cos(q3)^2 * \sin(q2) - 2 * Lcx3 * Lcy3 * m3 * \\
& qp2^2 * \cos(q3)^2 * \sin(q2) + 2 * L2^2 * m3 * qp2 * qp3 * \cos(q2) * \cos(q3)^2 + 2 * Lcx3^2 * m3 * qp2 * \\
& qp3 * \cos(q2) * \cos(q3)^2 - 2 * Lcy3^2 * m3 * qp2 * qp3 * \cos(q2) * \cos(q3)^2 + 2 * Ixx3 * qp1 * qp2 * \\
& \cos(q2) * \cos(q3)^2 * \sin(q2) + 2 * Ixx3 * qp1 * qp3 * \cos(q2)^2 * \cos(q3) * \sin(q3) - 2 * Iyy3 * qp1 * \\
& qp2 * \cos(q2) * \cos(q3)^2 * \sin(q2) - 2 * Iyy3 * qp1 * qp3 * \cos(q2)^2 * \cos(q3) * \sin(q3) + 2 * L2 * \\
& Lcy3 * m3 * qp1 * qp3 * \cos(q2)^2 + 2 * Lcx3 * Lcy3 * m3 * qp1 * qp3 * \cos(q2)^2 + 4 * Lcx2 * Lcz2 * m2 * \\
& qp1 * qp2 * \cos(q2)^2 + 2 * L2 * Lcx3 * m3 * qp1 * qp2 * \sin(2 * q2) + L2 * Lcz3 * m3 * qp2^2 * \cos(q2) * \\
& \cos(q3) - L2 * Lcz3 * m3 * qp3^2 * \cos(q2) * \cos(q3) + Lcx3 * Lcz3 * m3 * qp2^2 * \cos(q2) * \cos(q3) - \\
& Lcx3 * Lcz3 * m3 * qp3^2 * \cos(q2) * \cos(q3) - L2^2 * m3 * qp2^2 * \cos(q3) * \sin(q2) * \sin(q3) - \\
& Lcx3^2 * m3 * qp2^2 * \cos(q3) * \sin(q2) * \sin(q3) + Lcy3^2 * m3 * qp2^2 * \cos(q3) * \sin(q2) * \sin(q3) - \\
& Lcy3 * Lcz3 * m3 * qp2^2 * \cos(q2) * \sin(q3) + Lcy3 * Lcz3 * m3 * qp3^2 * \cos(q2) * \sin(q3) - 2 * \\
& L2^2 * m3 * qp1 * qp2 * \cos(q2) * \cos(q3)^2 * \sin(q2) - 2 * L2^2 * m3 * qp1 * qp3 * \cos(q2)^2 * \cos(q3) * \\
& \sin(q3) - 2 * Lcx3^2 * m3 * qp1 * qp2 * \cos(q2) * \cos(q3)^2 * \sin(q2) - 2 * Lcx3^2 * m3 * qp1 * qp3 * \\
& \cos(q2)^2 * \cos(q3) * \sin(q3) + 2 * Lcy3^2 * m3 * qp1 * qp2 * \cos(q2) * \cos(q3)^2 * \sin(q2) + 2 * Lcy3^2 * \\
& m3 * qp1 * qp3 * \cos(q2)^2 * \cos(q3) * \sin(q3) + 4 * L2 * Lcx3 * m3 * qp2 * qp3 * \cos(q2) * \cos(q3)^2 - \\
& 4 * Lcy3 * Lcz3 * m3 * qp1 * qp2 * \cos(q2)^2 * \cos(q3) - 4 * L2 * Lcz3 * m3 * qp1 * qp2 * \cos(q2)^2 * \\
& \sin(q3) - 4 * Lcx3 * Lcz3 * m3 * qp1 * qp2 * \cos(q2)^2 * \sin(q3) - 4 * L2 * Lcy3 * m3 * qp1 * qp3 * \\
& \cos(q2)^2 * \cos(q3)^2 - 4 * Lcx3 * Lcy3 * m3 * qp1 * qp3 * \cos(q2)^2 * \cos(q3)^2 - 2 * L2 * Lcx3 * m3 * \\
& qp2^2 * \cos(q3) * \sin(q2) * \sin(q3) + 4 * Ixy3 * qp1 * qp2 * \cos(q2) * \cos(q3) * \sin(q2) * \sin(q3) - \\
& 4 * L2 * Lcx3 * m3 * qp1 * qp2 * \cos(q2) * \cos(q3)^2 * \sin(q2) - 4 * L2 * Lcx3 * m3 * qp1 * qp3 * \\
& \cos(q2)^2 * \cos(q3) * \sin(q3) - 4 * L2 * Lcy3 * m3 * qp2 * qp3 * \cos(q2) * \cos(q3) * \sin(q3) - 2 * L2 * \\
& Lcz3 * m3 * qp1 * qp3 * \cos(q2) * \cos(q3) * \sin(q2) - 4 * Lcx3 * Lcy3 * m3 * qp2 * qp3 * \cos(q2) * \\
& \cos(q3) * \sin(q3) - 2 * Lcx3 * Lcz3 * m3 * qp1 * qp3 * \cos(q2) * \cos(q3) * \sin(q2) + 2 * Lcy3 * Lcz3 * \\
& m3 * qp1 * qp3 * \cos(q2) * \sin(q2) * \sin(q3) + 4 * L2 * Lcy3 * m3 * qp1 * qp2 * \cos(q2) * \cos(q3) * \\
& \sin(q2) * \sin(q3) + 4 * Lcx3 * Lcy3 * m3 * qp1 * qp2 * \cos(q2) * \cos(q3) * \sin(q2) * \sin(q3)
\end{aligned}$$

$$H(2) =$$

$$\begin{aligned}
& Ixz2 * qp1^2 - Iyz3 * qp1^2 * \cos(q3) - Iyz3 * qp3^2 * \cos(q3) - Ixz3 * qp1^2 * \sin(q3) - Ixz3 * \\
& qp3^2 * \sin(q3) - 2 * Ixy3 * qp2 * qp3 - 2 * Ixz2 * qp1^2 * \cos(q2)^2 + (Ixx2 * qp1^2 * \sin(2 * q2)) / 2 + \\
& (Ixx3 * qp1^2 * \sin(2 * q2)) / 2 - (Izz2 * qp1^2 * \sin(2 * q2)) / 2 - (Izz3 * qp1^2 * \sin(2 * q2)) / 2 + Lcx2 * \\
& Lcz2 * m2 * qp1^2 + Ixx3 * qp1 * qp3 * \cos(q2) - Iyy3 * qp1 * qp3 * \cos(q2) - Izz3 * qp1 * qp3 * \\
& \cos(q2) + 2 * Iyz3 * qp1^2 * \cos(q2)^2 * \cos(q3) - (L2^2 * m3 * qp1^2 * \sin(2 * q2)) / 2 - (Lcx2^2 * m2 * \\
& qp1^2 * \sin(2 * q2)) / 2 - (Lcx3^2 * m3 * qp1^2 * \sin(2 * q2)) / 2 + (Lcz2^2 * m2 * qp1^2 * \sin(2 * q2)) / 2 + \\
& (Lcz3^2 * m3 * qp1^2 * \sin(2 * q2)) / 2 + 2 * Ixz3 * qp1^2 * \cos(q2)^2 * \sin(q3) + 4 * Ixy3 * qp2 * qp3 * \\
& \cos(q3)^2 - Ixx3 * qp2 * qp3 * \sin(2 * q3) + Iyy3 * qp2 * qp3 * \sin(2 * q3) - Lcy3 * Lcz3 * m3 * qp1^2 * \\
& \cos(q3) - Lcy3 * Lcz3 * m3 * qp3^2 * \cos(q3) - L2 * Lcz3 * m3 * qp1^2 * \sin(q3) - L2 * Lcz3 * m3 * \\
& qp3^2 * \sin(q3) - Lcx3 * Lcz3 * m3 * qp1^2 * \sin(q3) - Lcx3 * Lcz3 * m3 * qp3^2 * \sin(q3) - 2 * L2^2 * \\
& m3 * qp1 * qp3 * \cos(q2) - 2 * Lcx3^2 * m3 * qp1 * qp3 * \cos(q2) - 2 * Iyz3 * qp1 * qp3 * \cos(q3) * \\
& \sin(q2) - 2 * L2 * Lcy3 * m3 * qp2 * qp3 - 2 * Lcx3 * Lcy3 * m3 * qp2 * qp3 - 2 * Ixz3 * qp1 * qp3 * \\
& \sin(q2) * \sin(q3) - Ixx3 * qp1^2 * \cos(q2) * \cos(q3)^2 * \sin(q2) + Iyy3 * qp1^2 * \cos(q2) * \cos(q3)^2 * \\
& \sin(q2) - 2 * Lcx2 * Lcz2 * m2 * qp1^2 * \cos(q2)^2 - L2 * Lcx3 * m3 * qp1^2 * \sin(2 * q2) - 2 * Ixx3 * \\
& qp1 * qp3 * \cos(q2) * \cos(q3)^2 + 2 * Iyy3 * qp1 * qp3 * \cos(q2) * \cos(q3)^2 + L2^2 * m3 * qp2 * qp3 * \\
& \sin(2 * q3) + Lcx3^2 * m3 * qp2 * qp3 * \sin(2 * q3) - Lcy3^2 * m3 * qp2 * qp3 * \sin(2 * q3) - 4 * Ixy3 * \\
& qp1 * qp3 * \cos(q2) * \cos(q3) * \sin(q3) - 4 * L2 * Lcx3 * m3 * qp1 * qp3 * \cos(q2) + L2^2 * m3 * \\
& qp1^2 * \cos(q2) * \cos(q3)^2 * \sin(q2) + Lcx3^2 * m3 * qp1^2 * \cos(q2) * \cos(q3)^2 * \sin(q2) - Lcy3^2 * \\
& m3 * qp1^2 * \cos(q2) * \cos(q3)^2 * \sin(q2) + 2 * Lcy3 * Lcz3 * m3 * qp1^2 * \cos(q2)^2 * \cos(q3) + 2 * \\
& L2 * Lcz3 * m3 * qp1^2 * \cos(q2)^2 * \sin(q3) + 2 * Lcx3 * Lcz3 * m3 * qp1^2 * \cos(q2)^2 * \sin(q3) + 2 * \\
& L2^2 * m3 * qp1 * qp3 * \cos(q2) * \cos(q3)^2 + 2 * Lcx3^2 * m3 * qp1 * qp3 * \cos(q2) * \cos(q3)^2 - 2 * \\
& Lcy3^2 * m3 * qp1 * qp3 * \cos(q2) * \cos(q3)^2 + 4 * L2 * Lcy3 * m3 * qp2 * qp3 * \cos(q3)^2 + 4 * Lcx3 * \\
& Lcy3 * m3 * qp2 * qp3 * \cos(q3)^2 + 2 * L2 * Lcx3 * m3 * qp2 * qp3 * \sin(2 * q3) - 2 * Ixy3 * qp1^2 * \\
& \cos(q2) * \cos(q3) * \sin(q2) * \sin(q3) - 2 * Lcy3 * Lcz3 * m3 * qp1 * qp3 * \cos(q3) * \sin(q2) - \\
& 2 * L2 * Lcz3 * m3 * qp1 * qp3 * \sin(q2) * \sin(q3) - 2 * Lcx3 * Lcz3 * m3 * qp1 * qp3 * \sin(q2) * \\
& \sin(q3) + 2 * L2 * Lcx3 * m3 * qp1^2 * \cos(q2) * \cos(q3)^2 * \sin(q2) + 4 * L2 * Lcx3 * m3 * qp1 * \\
& qp3 * \cos(q2) * \cos(q3)^2 - 2 * L2 * Lcy3 * m3 * qp1^2 * \cos(q2) * \cos(q3) * \sin(q2) * \sin(q3) - \\
& 2 * Lcx3 * Lcy3 * m3 * qp1^2 * \cos(q2) * \cos(q3) * \sin(q2) * \sin(q3) - 4 * L2 * Lcy3 * m3 * qp1 * \\
& qp3 * \cos(q2) * \cos(q3) * \sin(q3) - 4 * Lcx3 * Lcy3 * m3 * qp1 * qp3 * \cos(q2) * \cos(q3) * \sin(q3)
\end{aligned}$$

$$H(3) =$$

$$\begin{aligned}
& Ixy3 * qp2^2 - Ixy3 * qp1^2 * \cos(q2)^2 - 2 * Ixy3 * qp2^2 * \cos(q3)^2 + (Ixx3 * qp2^2 * \sin(2 * \\
& q3)) / 2 - (Iyy3 * qp2^2 * \sin(2 * q3)) / 2 + L2 * Lcy3 * m3 * qp2^2 + Lcx3 * Lcy3 * m3 * qp2^2 - \\
& Ixx3 * qp1 * qp2 * \cos(q2) + Iyy3 * qp1 * qp2 * \cos(q2) + Izz3 * qp1 * qp2 * \cos(q2) - (L2^2 * \\
& m3 * qp2^2 * \sin(2 * q3)) / 2 - (Lcx3^2 * m3 * qp2^2 * \sin(2 * q3)) / 2 + (Lcy3^2 * m3 * qp2^2 * \sin(2 * \\
& q3)) / 2 + 2 * Ixy3 * qp1^2 * \cos(q2)^2 * \cos(q3)^2 + Ixz3 * qp1^2 * \cos(q2) * \cos(q3) * \sin(q2) - \\
& Iyz3 * qp1^2 * \cos(q2) * \sin(q2) * \sin(q3) + 2 * L2^2 * m3 * qp1 * qp2 * \cos(q2) + 2 * Lcx3^2 * m3 * \\
& qp1 * qp2 * \cos(q2) + 2 * Iyz3 * qp1 * qp2 * \cos(q3) * \sin(q2) + 2 * Ixz3 * qp1 * qp2 * \sin(q2) * \\
& \sin(q3) - Ixx3 * qp1^2 * \cos(q2)^2 * \cos(q3) * \sin(q3) + Iyy3 * qp1^2 * \cos(q2)^2 * \cos(q3) *
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sin(q_3) - L_2 * L_{cy3} * m_3 * q_{p1}^2 * \cos(q_2)^2 - 2 * L_2 * L_{cy3} * m_3 * q_{p2}^2 * \cos(q_3)^2 - L_{cx3} * L_{cy3} * \\
& m_3 * q_{p1}^2 * \cos(q_2)^2 - 2 * L_{cx3} * L_{cy3} * m_3 * q_{p2}^2 * \cos(q_3)^2 - L_2 * L_{cx3} * m_3 * q_{p2}^2 * \sin(2 * \\
& q_3) + 2 * I_{xx3} * q_{p1} * q_{p2} * \cos(q_2) * \cos(q_3)^2 - 2 * I_{yy3} * q_{p1} * q_{p2} * \cos(q_2) * \cos(q_3)^2 + 4 * \\
& I_{xy3} * q_{p1} * q_{p2} * \cos(q_2) * \cos(q_3) * \sin(q_3) + 4 * L_2 * L_{cx3} * m_3 * q_{p1} * q_{p2} * \cos(q_2) + L_2^2 * \\
& m_3 * q_{p1}^2 * \cos(q_2)^2 * \cos(q_3) * \sin(q_3) + L_{cx3}^2 * m_3 * q_{p1}^2 * \cos(q_2)^2 * \cos(q_3) * \sin(q_3) - \\
& L_{cy3}^2 * m_3 * q_{p1}^2 * \cos(q_2)^2 * \cos(q_3) * \sin(q_3) - 2 * L_2^2 * m_3 * q_{p1} * q_{p2} * \cos(q_2) * \cos(q_3)^2 - \\
& 2 * L_{cx3}^2 * m_3 * q_{p1} * q_{p2} * \cos(q_2) * \cos(q_3)^2 + 2 * L_{cy3}^2 * m_3 * q_{p1} * q_{p2} * \cos(q_2) * \cos(q_3)^2 + \\
& 2 * L_2 * L_{cy3} * m_3 * q_{p1}^2 * \cos(q_2)^2 * \cos(q_3)^2 + 2 * L_{cx3} * L_{cy3} * m_3 * q_{p1}^2 * \cos(q_2)^2 * \\
& \cos(q_3)^2 + 2 * L_{cy3} * L_{cz3} * m_3 * q_{p1} * q_{p2} * \cos(q_3) * \sin(q_2) + 2 * L_2 * L_{cz3} * m_3 * q_{p1} * q_{p2} * \\
& \sin(q_2) * \sin(q_3) + 2 * L_{cx3} * L_{cz3} * m_3 * q_{p1} * q_{p2} * \sin(q_2) * \sin(q_3) + 2 * L_2 * L_{cx3} * m_3 * \\
& q_{p1}^2 * \cos(q_2)^2 * \cos(q_3) * \sin(q_3) - 4 * L_2 * L_{cx3} * m_3 * q_{p1} * q_{p2} * \cos(q_2) * \cos(q_3)^2 + L_2 * \\
& L_{cz3} * m_3 * q_{p1}^2 * \cos(q_2) * \cos(q_3) * \sin(q_2) + L_{cx3} * L_{cz3} * m_3 * q_{p1}^2 * \cos(q_2) * \cos(q_3) * \\
& \sin(q_2) - L_{cy3} * L_{cz3} * m_3 * q_{p1}^2 * \cos(q_2) * \sin(q_2) * \sin(q_3) + 4 * L_2 * L_{cy3} * m_3 * q_{p1} * q_{p2} * \\
& \cos(q_2) * \cos(q_3) * \sin(q_3) + 4 * L_{cx3} * L_{cy3} * m_3 * q_{p1} * q_{p2} * \cos(q_2) * \cos(q_3) * \sin(q_3)
\end{aligned}$$

#### VECTOR G DE GRAVEDAD

$$G(1) =$$

0

$$G(2) =$$

$$L_{cz2} * g * m_2 * \cos(q_2) + L_{cz3} * g * m_3 * \cos(q_2) + L_{cx2} * g * m_2 * \sin(q_2) - L_{cy3} * g * m_3 * \cos(q_3) * \sin(q_2) - L_2 * g * m_3 * \sin(q_2) * \sin(q_3) - L_{cx3} * g * m_3 * \sin(q_2) * \sin(q_3)$$

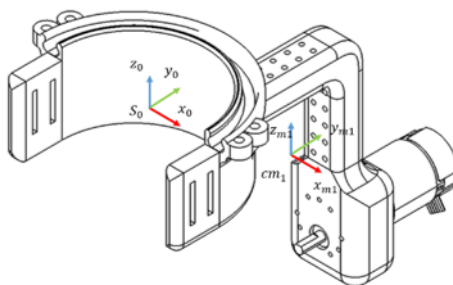
$$G(3) =$$

$$L_2 * g * m_3 * \cos(q_2) * \cos(q_3) + L_{cx3} * g * m_3 * \cos(q_2) * \cos(q_3) - L_{cy3} * g * m_3 * \cos(q_2) * \sin(q_3)$$

## Apéndice B: Matrices de tensores de inercia para pie izquierdo

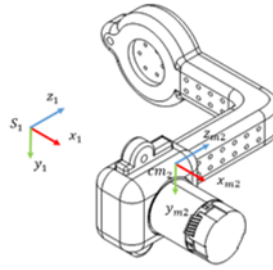
Matrices de inercia para eslabón 1 (kg-m<sup>2</sup>)

$$I_{cm_1} = \begin{bmatrix} 0,00368246 & 0,00000048 & 0,00000064 \\ 0,00000048 & 0,00241890 & 0,00160781 \\ 0,00000064 & 0,00160781 & 0,00188676 \end{bmatrix}$$



Matrices de inercia para eslabón 2 (kg-m<sup>2</sup>)

$$I_{cm_2} = \begin{bmatrix} 0,00164067 & -0,00000030 & 0,00000039 \\ -0,00000030 & 0,00085193 & 0,00067554 \\ 0,00000039 & 0,00067554 & 0,00089473 \end{bmatrix}$$



Matrices de inercia para eslabón 3 (kg-m<sup>2</sup>)

$$I_{cm_3} = \begin{bmatrix} 0,00179007 & -0,00034723 & 0,00000496 \\ -0,00034723 & 0,00424152 & -0,00000904 \\ 0,00000496 & -0,00000904 & 0,00317399 \end{bmatrix}$$

