

# Metody konstrukcí magických ohodnocení grafů

Methods for constructing magic graph labelings

Bc. Šárka Parmová

Vedoucí práce: doc. Mgr. Petr Kovář, Ph.D.

Ostrava, 2023



# Zadání diplomové práce

Student: **Bc. Šárka Parmová**

Studijní program: N0541A170007 Výpočetní a aplikovaná matematika

Specializace: S01 Aplikovaná matematika

Téma: **Metody konstrukcí magických ohodnocení grafů**  
**Methods for constructing magic graph labelings**

Jazyk vypracování: čeština

## Zásady pro vypracování:

Ohodnocení grafů patří mezi klasická témata teorie grafů. Existuje bezpočet aplikací grafových ohodnocení. Důležitou kapitolu tvoří tzv. magická ohodnocení, která mají pevně stanovené parametry: množinu hodnot, množinu vah, vztah vah a dalších parametrů grafu.

Práce bude rozdělena do několika částí:

- výběr několika typů magických ohodnocení,
- studium a zpracování přehledu známých výsledků,
- rozbor podobných a odlišných vlastností jednotlivých ohodnocení,
- rozbor analogií známých metod konstrukce,
- rozšíření či návrh vlastní konstrukce nebo algoritmu,
- důkazy správnosti, případně implementace.

Tato práce může být zaměřena teoreticky s důrazem na rozbor analogií známých metod konstrukcí ohodnocení, ale i prakticky s důrazem na vlastní výsledky a návrh nových metod konstrukce včetně důkazů jejich správnosti.

## Seznam doporučené odborné literatury:

- W. Wallis: Magic graphs, Birkhauser 2000.
- M. Bača, M. Miller: Super Edge-Antimagic Graphs, Brown, Walkers Press, 2008.
- J.A. Gallian, A dynamic survey of graph labeling, The Electronic Journal of Combinatorics, DS 6 (2011).
- odborné články a texty podle pokynů vedoucího

Formální náležitosti a rozsah diplomové práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

Vedoucí diplomové práce: **doc. Mgr. Petr Kovář, Ph.D.**

Datum zadání: 01.09.2022

Datum odevzdání: 30.04.2023

Garant studijního programu: prof. RNDr. Jiří Bouchala, Ph.D.

V IS EDISON zadáno: 12.11.2022 09:58:38

## Abstrakt

V této diplomové práci se zaměřujeme na distančně magické ohodnocení, handicapové ohodnocení,  $k$ -handicapové ohodnocení, distančně antimagické ohodnocení a supermagické ohodnocení grafu. Je zde zpracován přehled známých výsledků a nutné podmínky existence pro každé ze zmíněných ohodnocení. Na základě známých výsledků bylo cílem navrhnout analogické postupy i pro další typy ohodnocení. Navíc jsme se pokusili postupy aplikovat. V práci zkusíme kombinovat grafy s různými ohodnoceními tak, aby měl výsledný graf jedno z daných ohodnocení. Hledáme podobné a odlišné vlastnosti ohodnocení, které mohou být faktorem existence ohodnocení výsledného grafu. Pro supermagické ohodnocení jsme uvedli tzv. spektrum magické konstanty, kde pro jeden pravidelný graf můžeme zvětšením všech labelů grafu o stejnou hodnotu získat nekonečně mnoho nových supermagických ohodnocení. U  $k$ -handicapového ohodnocení jsme ukázali tvrzení, díky kterého můžeme pomocí  $k$ -dimenzionální magické krychle odvodit  $(-k)$ -handicapové ohodnocení grafu. Dalším výsledkem dosaženým v této práci je konstrukce supermagického ohodnocení pro graf, který byl vytvořen sjednocením dvou supermagických grafů, pomocí „posunutí“ původních ohodnocení sjednocovaných grafů. Na konci práce je uvedeno shrnutí, kde zkoumáme všechny použité konstrukce a pro jaký druh ohodnocení a typ grafu lze tato konstrukce použít.

## Klíčová slova

graf; ohodnocení grafu; magická ohodnocení; distančně magické ohodnocení; handicapové ohodnocení;  $k$ -handicapové ohodnocení; distančně antimagické ohodnocení; supermagické ohodnocení; sjednocení grafů

## Abstract

In this master thesis we focus on distance magic labeling, handicap labeling,  $k$ -handicap labeling, distance antimagic labeling and supermagic labeling. The known results and necessary conditions for existence of these labelings are compiled. Based on the known results, the goal was to come up with similar approaches for other labelings as well. We try to combine graphs with different labelings so that the resulting graph has one of the given labelings. We are looking for similar and different properties of the labelings, that could be a reason for existence of the labelings of the resulting graph. For supermagic labeling, we introduced the so-called spectrum of the magic constant, where we can increase all labels by the same value to get an infinite number of new supermagic labelings for

one regular graph. We also came up with a proposition that allows us to use a  $k$ -dimensional magic cube as a  $(-k)$ -handicap labeling of a graph. Another outcome of this thesis is the construction of supermagic labeling of a graph, that was created by union of two supermagic graphs, by „shifting“ the original labeling of the unified graphs. A summary is given at the end of the thesis, where we examine all the constructions used and for what kind of labeling and type of graphs these constructions can be used.

## **Keywords**

graph; graph labeling; magic labeling; distance magic labeling; handicap labeling;  $k$ -handicap labeling; distance antimagic labeling; supermagic labeling; union of graphs

## **Poděkování**

Ráda bych poděkovala panu doc. Mgr. Petru Kovářovi, Ph.D. za skvělé vedení mé diplomové práce. Mé poděkování patří také mým přátelům a rodině, kteří po celou dobu stáli při mně.

# Obsah

Seznam obrázků	8
Seznam tabulek	11
<b>1 Úvod</b>	<b>12</b>
<b>2 Distančně magické ohodnocení</b>	<b>14</b>
2.1 Nutné podmínky existence DM ohodnocení . . . . .	14
2.2 Skládání dvou grafů s DM ohodnocením . . . . .	16
<b>3 Handicapové ohodnocení</b>	<b>21</b>
3.1 Nutné podmínky existence handicapového ohodnocení . . . . .	21
3.2 Skládání DM a handicapového ohodnocení . . . . .	23
<b>4 <math>K</math>-handicapové ohodnocení</b>	<b>36</b>
4.1 Podmínky existence $k$ -handicapového ohodnocení . . . . .	36
4.2 Konstrukce $k$ -handicapového ohodnocení pomocí magické hyperkrychle . . . . .	38
4.3 Skládání dvou handicapových grafů . . . . .	41
4.4 Skládání $k$ -handicapového a distančně magického grafu . . . . .	42
4.5 Skládání dvou $k$ -handicapových grafů . . . . .	44
<b>5 Distančně antimagické ohodnocení</b>	<b>46</b>
5.1 Nutné podmínky existence distančně antimagického ohodnocení . . . . .	47
5.2 Nutné podmínky existence $(a, d)$ -distančně antimagického ohodnocení . . . . .	48
5.3 Skládání DM a $(a, d)$ -DAM ohodnocení . . . . .	49
5.4 Skládání DM a DAM ohodnocení . . . . .	50
5.5 Skládání dvou DAM ohodnocení . . . . .	52
5.6 Skládání DAM a $(a, d)$ -DAM ohodnocení . . . . .	53
5.7 Skládání dvou $(a, d)$ -ohodnocení . . . . .	55
5.8 Skládání speciálních ohodnocení . . . . .	56

<b>6 Supermagické ohodnocení</b>	<b>60</b>
6.1 Nutné podmínky existence SPM ohodnocení . . . . .	61
6.2 SPM ohodnocení kopií grafů . . . . .	62
6.3 Sjednocení SPM grafů . . . . .	63
6.4 Spektrum magické konstanty . . . . .	68
<b>7 Shrnutí</b>	<b>70</b>
7.1 Vrcholová ohodnocení . . . . .	70
7.2 Hranová a vrcholová ohodnocení – ohodnocení kopií grafů . . . . .	71
7.3 Hranová ohodnocení – posunutí magické konstanty . . . . .	72
<b>8 Závěr</b>	<b>73</b>
<b>Literatura</b>	<b>75</b>

# Seznam obrázků

2.1	Graf $G_1$ (červený) a graf $G_2$ (modrý). . . . .	17
2.2	Graf $G_1 \cup G_2$ s DM ohodnocením a magickou konstantou $k = 18$ . . . . .	17
2.3	Ukázka ohodnocení grafu $KC_4$ . . . . .	17
2.4	Postup pro důkaz Věty 5. . . . .	19
2.5	DM ohodnocení grafu $2C_4$ . . . . .	19
2.6	Graf se zakázanými hranami $Z$ . . . . .	19
2.7	Graf $Z$ a jeho doplněk. . . . .	20
2.8	Grafy $2C_4$ odpovídající barevným hranám grafu na obrázku 2.7. . . . .	20
2.9	DM ohodnocení grafu $4C_4$ . . . . .	20
3.1	Graf $2Q_3$ s handicapovým ohodnocením. . . . .	24
3.2	Graf se sloučenými vrcholy. . . . .	25
3.3	Doplněk grafu se zakázanými hranami. . . . .	25
3.4	Grafy $4C_4$ , které můžeme doplnit do grafu $2Q_3$ . . . . .	26
3.5	Graf $2Q_3$ s doplněnými čtyřmi cykly $C_4$ s handicapovým ohodnocením. . . . .	27
3.6	Graf $2Q_3$ s handicapovým ohodnocením. . . . .	27
3.7	Doplněk grafu se zakázanými hranami. . . . .	28
3.8	Graf $G_1 \cup G_2$ s handicapovým ohodnocením. . . . .	28
3.9	4-pravidelný graf $G_2$ na 19 vrcholech s handicapovým ohodnocením. . . . .	29
3.10	Graf se zakázanými hranami na 10 vrcholech. . . . .	30
3.11	Nepravidelný graf $G_1 = 5C_4$ , který můžeme sjednotit s handicapovým grafem $G_2$ . . . . .	30
3.12	Sjednocený graf $G = G_1 \cup G_2$ s handicapovým ohodnocením. . . . .	31
3.13	Nepravidelný handicapový graf $G_2$ na 20 vrcholech. . . . .	32
3.14	Graf se zakázanými hranami a párováním (žlutě) na 10 vrcholech. . . . .	32
3.15	4-pravidelný graf $G_1 = 5C_4$ , který můžeme sjednotit s handicapovým grafem $G_2$ . . . . .	33
3.16	Sjednocený graf $G_1 \cup G_2$ s handicapovým ohodnocením. . . . .	33
3.17	Handicapový nepravidelný graf $G_2$ na 11 vrcholech. . . . .	34
3.18	Nepravidelný distančně magický graf $G_1$ na 11 vrcholech . . . . .	34
3.19	Handicapový graf $G_1 \cup G_2$ . . . . .	35



4.1	Graf $G$ , který je $(-2)$ -handicapový. . . . .	40
4.2	Doplňěk $\overline{G}$ , který je 1-handicapový. . . . .	41
4.3	Kompletní graf $K_8$ s fair ohodnocením, kde $w(i) = 36 - i$ . . . . .	42
4.4	Graf $G_1 = K_8 - 2C_4$ (červený) s fair ohodnocením a graf $G_2 = 2C_4$ (modrý) s DM ohodnocením. . . . .	43
4.5	Graf $G_1$ (červený) s fair ohodnocením a graf $G_2$ (modrý) s DM ohodnocením. . . . .	44
4.6	Graf $G_1 \cup G_2$ s fair ohodnocením. . . . .	44
5.1	Graf se šesti vrcholy s distančně antimagickým ohodnocením. Váhy vrcholů jsou vyznačeny červeně. . . . .	46
5.2	Graf se šesti vrcholy s $(10, 1)$ -distančně antimagickým ohodnocením. . . . .	47
5.3	DM graf $G_1$ (červený) a $(1, 1)$ -DAM graf $G_2$ (modrý). Červeně jsou vyznačeny váhy vrcholů. . . . .	50
5.4	$(10, 1)$ -DAM graf $G_1 \cup G_2$ . Červeně jsou vyznačeny váhy vrcholů. . . . .	50
5.5	DM graf $G_1$ (červený) a DAM graf $G_2$ (modrý). Červeně jsou vyznačeny váhy vrcholů. . . . .	51
5.6	DAM graf $G_1 \cup G_2$ . Červeně jsou vyznačeny váhy vrcholů. . . . .	52
5.7	Graf $G_1$ s DAM ohodnocením (vlevo), graf $G_2$ s DAM ohodnocením (vpravo) a graf $G_1 \cup G_2$ (dole). Červeně jsou vyznačeny váhy vrcholů. . . . .	53
5.8	Graf $G_1$ s DAM ohodnocením (vlevo), graf $G_2$ s $(1, 1)$ -DAM ohodnocením (vpravo) a graf $G_1 \cup G_2$ (dole). Červeně jsou vyznačeny váhy vrcholů. . . . .	54
5.9	Graf $G_1 \cup G_2$ s jiným distančně antimagickým ohodnocením. . . . .	54
5.10	Graf $G_1$ (vlevo) s $(8, 1)$ -DAM ohodnocením, graf $G_2$ (vpravo) s $(1, 1)$ -DAM ohodnocením a graf $G_1 \cup G_2$ s DM ohodnocením (dole). Červeně jsou vyznačeny váhy vrcholů. . . . .	55
5.11	Graf se šesti vrcholy s „rostoucím“ distančně antimagickým ohodnocením. Váhy vrcholů jsou vyznačeny červeně. . . . .	56
5.12	Graf $G_2$ s rostoucím DAM ohodnocením. . . . .	58
5.13	Graf $G_1$ s DM ohodnocením. . . . .	58
5.14	Graf $G_1 \cup G_1$ s rostoucím DAM ohodnocením. Žlutě jsou vyznačeny hrany grafu $G_1$ . . . . .	58
6.1	Supermagické ohodnocení Möbiova žebříku $M_3$ . Červeně jsou vyznačeny váhy vrcholů. . . . .	60
6.2	Graf $G = K_{4,4}$ se supermagickým ohodnocením. . . . .	65
6.3	Graf $H = K_{3,3}$ se supermagickým ohodnocením. . . . .	65
6.4	Graf $G \cup H$ se supermagickým ohodnocením. . . . .	66
6.5	Supermagické grafy $G$ a $H$ . . . . .	67
6.6	Supermagické grafy $G$ a $H$ . . . . .	67
6.7	Tři různá SPM ohodnocení grafu $K_{3,3}$ pro $a = 1, k = 15$ , $a = 2, k = 18$ a $a = 3, k = 21$ . . . . .	68
6.8	Nepřavidelný graf se supermagickým ohodnocením . . . . .	68

6.9	Nepřavidelný graf z obrázku 6.8 se zvětšenými labely. . . . .	69
-----	---	----

# Seznam tabulek

2.1	Známé výsledky DM ohodnocení. . . . .	16
3.1	Možnosti existence DM ohodnocení grafu $G_1$ a handicapového ohodnocení grafu $G_2$ . . . . .	24
4.1	Tři řezy magické krychle . . . . .	39
4.2	Sousední vrcholy vrcholu s labelem 8 . . . . .	39
4.3	Magický čtverec odpovídající ohodnocení grafu $G$ . . . . .	40

# Kapitola 1

## Úvod

Cílem této diplomové práce bylo zpracovat přehled známých výsledků vybraných druhů ohodnocení grafů, porovnat známé metody konstrukce těchto ohodnocení, srovnat podobné a odlišné vlastnosti jednotlivých ohodnocení a případný návrh vlastních konstrukcí.

V teorii grafů je zkoumáno mnoho různých ohodnocení grafů. Tato práce je zaměřena na celkem pět různých ohodnocení. Čtyři ohodnocení vrcholová – distančně magické, handicapové,  $k$ -handicapové, distančně antimagické ohodnocení a jedno ohodnocení hranové – supermagické ohodnocení. Pro každé z vyjmenovaných ohodnocení je uveden souhrn známých nutných podmínek existence. Tzn. vlastnosti grafů, které jsou nutné aby graf mohl takové ohodnocení mít.

Dále byly zkoumány různé možnosti konstrukcí těchto ohodnocení. Jednou z nejpoužívanějších metod v této práci je sjednocení dvou grafů se stejnou množinou vrcholů a s disjunktními množinami hran. V tomto případě má každý z grafů nějaké vrcholové ohodnocení a úkolem je zjistit, zda-li ohodnocení grafu vytvořeného sjednocením původních grafů odpovídá některému z vybraných ohodnocení. Např. sjednocením distančně magického grafu a handicapového grafu získáme nový graf s handicapovým ohodnocením. Tímto způsobem můžeme skládat grafy se skoro všemi vrcholovými ohodnoceními z této práce.

V dalších typech konstrukcí byly využity kopie pravidelných grafů. U distančně magického ohodnocení bylo zjištěno, že tento postup často není nijak systematický a existence, nebo neexistence je spíše náhodou. U supermagického ohodnocení bylo již dříve dokázáno, že pokud supermagický graf splňuje určité podmínky, je supermagický i graf, který je tvořen jeho kopiemi. Pro supermagické ohodnocení pravidelných grafů také platí, že labely vrcholů pro toto ohodnocení nemusí nutně začínat jedničkou. Pokud tedy existuje supermagické ohodnocení pravidelného grafu, přičtením jedničky ke každému labelu získáme nové supermagické ohodnocení s magickou konstantou zvětšenou o stupeň vrcholu grafu. Jelikož labely tohoto ohodnocení mohou začínat libovolným přirozeným číslem, můžeme posunout interval labelů dvou supermagických grafů tak, že na sebe budou hodnoty labelů navazovat. Takto „posunuté“ supermagické pravidelné grafy lze pak již za jistých podmínek jednoduše sjednotit tak, aby výsledný graf byl supermagický.

Princip poslední metody použité ke konstrukci ohodnocení byl již znám, v této práci ho bylo ale nově využito. Principem této metody je zjištění, že  $k$ -dimenzionální magická hyperkrychle odpovídá  $(-k)$ -handicapovému ohodnocení grafu. Pokud tedy taková hyperkrychle existuje, existuje i graf, který má odpovídající  $(-k)$ -handicapové ohodnocení. Doplňkem tohoto grafu pak získáme graf, který je  $(k - 1)$ -handicapový.

Kromě úvodu a závěru je práce rozdělena do šesti kapitol. Každá z prvních pěti kapitol odpovídá každému ze zvolených ohodnocení. U každého ohodnocení je uvedena jeho definice, nutné podmínky pro existenci tohoto ohodnocení a také všechny výše zmíněné konstrukce, které je pro toto ohodnocení možné použít. Poslední kapitolou (kapitolou 7) před závěrem je kapitola pojmenovaná „Shrnutí“, kde jsou zrekapitulovány použité metody a také to, co mají jednotlivé metody společné. Např. obě metody pro konstrukci supermagického ohodnocení, tzn. známá metoda posunuté magické konstanty a vlastní metoda sjednocení dvou grafů s posunutým ohodnocením, využívají faktu, že labely supermagického ohodnocení mohou začínat libovolným přirozeným číslem.

## Kapitola 2

# Distančně magické ohodnocení

Jako první ohodnocení uveďme distančně magické ohodnocení. Magičnost spočívá v tom, že každý vrchol grafu má stejnou váhu. Definice zní následovně:

**Definice 1** *Nechť je  $G$  jednoduchý graf a  $f$  bijektivní zobrazení  $f : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, |V(G)|\}$ . Distančně magické ohodnocení grafu  $G$  je zobrazení  $f$ , pro které platí, že váha každého vrcholu grafu je rovna magické konstantě, tedy*

$$w(v) = \sum_{u \in N(v)} f(u) = k.$$

**Poznámka 1** Distančně magické ohodnocení budeme v textu označovat zkratkou DM.

### 2.1 Nutné podmínky existence DM ohodnocení

Zde představíme známé výsledky pro podmínky existence DM ohodnocení (vztah 2.1, Věta 1, Věta 2 a tabulka 2.1). Pro zjištění nutných podmínek nejprve nalezneme vztah pro výpočet magické konstanty DM ohodnocení  $r$ -pravidelného grafu.

Víme, že pokud sečteme váhy všech vrcholů grafu, získáme  $n$ -násobek magické konstanty. Platí tedy:

$$\sum_{i=1}^n w(i) = n \cdot k.$$

Jelikož je graf  $r$ -pravidelný, label jednoho vrcholu sečteme vždy  $r$ -krát. Platí tedy:

$$n \cdot k = \left( \sum_{i=1}^n i \right) \cdot r,$$
$$n \cdot k = \frac{n(n+1)}{2} \cdot r,$$

$$k = \frac{r(n+1)}{2}. \quad (2.1)$$

Vztah pro magickou konstantu je  $k = \frac{r(n+1)}{2}$ . Z něj můžeme nyní najít některé podmínky existence DM ohodnocení.

**Věta 1** [1] *Nechť je  $G$   $r$ -pravidelný graf. Pokud je  $r$  liché, graf nemá distančně magické ohodnocení.*

**Důkaz** Postupujeme sporem. Pokud je  $r$  liché, tak víme, že z principu sudosti může mít graf pouze sudý počet vrcholů  $n$ . Položme tedy  $r = 2h + 1$  a  $n = 2l$ . Dosadíme do vztahu pro magickou konstantu.

$$k = \frac{(2h+1)(2l+1)}{2}.$$

Po násobení dvou lichých čísel dostáváme v čitateli znovu liché číslo. Po dělení dvěma nedostáváme celé číslo. Magická konstanta však může být jen číslo celé. Tímto dostáváme spor, a víme, že distančně magické ohodnocení nemůže existovat. ■

**Věta 2** [2] *Nechť je  $G$   $r$ -pravidelný graf s  $n$  vrcholy. Pokud je  $r \equiv 2 \pmod{4}$  a  $n \equiv 2 \pmod{4}$ , distančně magické ohodnocení grafu  $G$  nemůže existovat.*

**Důkaz** Položme  $r = 2 + 4t$  a  $n = 2 + 4s$ . Dosadíme do vztahu pro magickou konstantu.

$$k = \frac{(2+4t)(2+4s+1)}{2} = \frac{2(1+2t)(4s+3)}{2} = (1+2t)(4s+3).$$

Násobením dvou lichých čísel získáváme znovu liché číslo. Labely distančně magického ohodnocení jsou z množiny  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Uvažujme indukovaný podgraf pouze s vrcholy s lichým labelem. Aby magická konstanta mohla být liché číslo, musela by být váha každého vrcholu v tomto podgrafu liché číslo jako součet lichého počtu sousedů. Indukovaný podgraf  $I$  by měl lichý počet vrcholů lichého stupně, což je spor s principem sudosti. Graf s  $r \equiv 2 \pmod{4}$  a  $n \equiv 2 \pmod{4}$  tedy nemůže být distančně magický. ■

Pokud je graf  $r$ -pravidelný, kde  $r$  je sudé a  $n$  je liché, zatím neznáme způsob, jakým popsat existenci distančně magického ohodnocení pro všechny přípustné hodnoty parametrů  $n$  a  $r$ . Výsledky můžeme najít např. v [3]. Známé výsledky jsou shrnuty v tabulce 2.1. Navíc pro menší hodnoty  $n$  je hrubou výpočetní silou ukázáno, že DM ohodnocení neexistuje.

$r = 2$	$\nexists$
$r = 4$	$n \geq 17$
$r = 6$	$n = 9 \vee n \geq 13$
$r = 8, 10, 12$	$n \geq 15$
$r = 14$	$n \geq 19$

Tabulka 2.1: Známé výsledky DM ohodnocení.

## 2.2 Skládání dvou grafů s DM ohodnocením

Pokud existují dva distančně magické grafy, které mají stejnou množinu vrcholů a různé množiny hran, můžeme je tzv. „skládat“ a získat tak nový graf s distančně magickým ohodnocením. Tento postup byl již použit v [4]. Stejný postup se také pokusíme použít v následujících kapitolách pro jiná ohodnocení. Více nám řekne následující tvrzení.

**Věta 3** *Nechť jsou  $G_1 = (V_1, E_1)$  a  $G_2 = (V_2, E_2)$  grafy, kde  $V_1 = V_2$  a  $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ . Nechť je  $f$  distančně magické ohodnocení grafu  $G_1$  a současně distančně magické ohodnocení grafu  $G_2$ .*

*Potom má graf  $G_1 \cup G_2 = (V_1, E_1 \cup E_2)$  distančně magické ohodnocení  $f$ .*

**Důkaz** Abychom ukázali, že  $G_1 \cup G_2$  má DM ohodnocení, musíme ukázat, že všechny vrcholy mají stejnou váhu.

Ohodnocení  $f$  je bijekce, protože  $f$  je DM ohodnocení grafu  $G_1$ . Můžeme tedy předpokládat, že

$$f(i) = i.$$

Váha každého vrcholu  $i \in V(G_1 \cup G_2)$  (součet labelů jeho sousedních vrcholů) grafu v  $G_1 \cup G_2$  bude

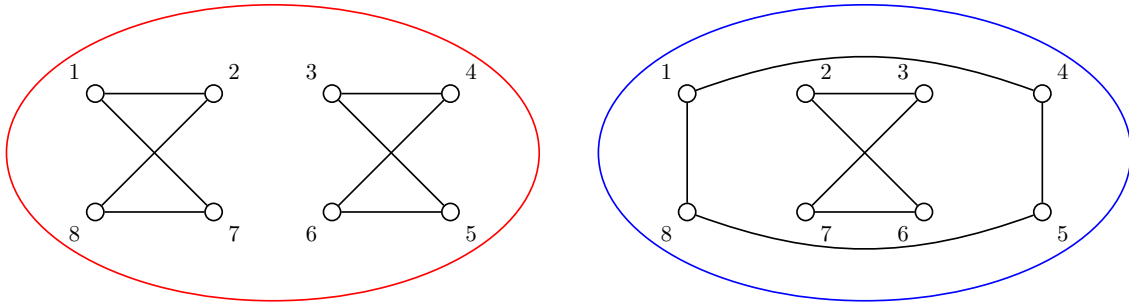
$$\begin{aligned} w(i) &= \sum_{u \in N(i)} f(u) = \sum_{u \in N_{G_1}(i) \cup N_{G_2}(i)} f(u) = \sum_{u \in N_{G_1}(i)} f(u) + \sum_{u \in N_{G_2}(i)} f(u) = \\ &= w_{G_1}(i) + w_{G_2}(i) = k_1 + k_2 = k, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Graf  $G_1 \cup G_2$  má DM ohodnocení s magickou konstantou  $k_1 + k_2 = k$ . ■

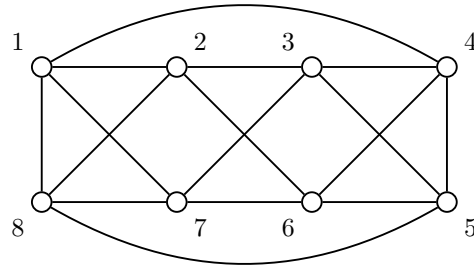
### Příklad 1

Na obrázku 2.1 můžeme vidět dva grafy na osmi vrcholech, které jsou hranově disjunktní. Oba grafy mají magickou konstantu  $k = 9$ . Graf  $G_1 \cup G_2$  má také DM ohodnocení s magickou konstantou  $k = k_1 + k_2 = 18$ . Jak vypadá graf  $G_1 \cup G_2$  můžeme vidět na obrázku 2.2.





Obrázek 2.1: Graf  $G_1$  (červený) a graf  $G_2$  (modrý).



Obrázek 2.2: Graf  $G_1 \cup G_2$  s DM ohodnocením a magickou konstantou  $k = 18$ .

■

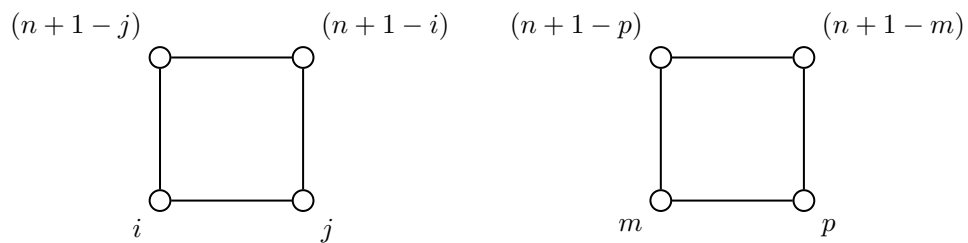
Můžeme si všimnout, že DM ohodnocení existuje pro každý graf  $tC_4$ ,  $\forall t \in \mathbb{N}$ .

**Věta 4** [5] Každý graf  $tC_4$ , kde  $t \in \mathbb{N}$ , má DM ohodnocení.

**Důkaz** Důkaz bude konstruktivní. Ohodnocení jednotlivých cyklů sestrojíme následovně. Dva sousední vrcholy  $i, j$  ohodnotíme

$$f(i) = i, \quad f(j) = j.$$

Zbývající soused vrcholu  $i$  bude mít label  $n+1-j$  a zbývající soused vrcholu  $j$  bude mít label  $n+1-i$ .



Obrázek 2.3: Ukázka ohodnocení grafu  $KC_4$ .

Víme, že magická konstanta DM ohodnocení je  $k = \frac{r(n+1)}{2}$ . Pro cyklus  $C_4$  je tedy  $k = n + 1$ . Zkontrolujeme nyní váhy všech vrcholů cyklu.

$$w(i) = (n + 1 - j) + j = n + 1,$$

$$w(j) = (n + 1 - i) + i = n + 1,$$

$$w(n + 1 - i) = (n + 1 - j) + j = n + 1,$$

$$w(n + 1 - j) = (n + 1 - i) + i = n + 1.$$

Vidíme, že váha každého vrcholu cyklu je roven magické konstantě DM ohodnocení. Toto bude platit pro všechny cykly grafu  $tC_4$ . DM ohodnocení tedy existuje pro každý graf  $tC_4$ . ■

Z Věty 4 a jejího důkazu vyplývá existence silnějšího tvrzení. Toto tvrzení bylo bez důkazu uvedeno v [6].

**Věta 5 (Silnější tvrzení Věty 4)** *Pokud má 2-pravidelný graf  $G$  distančně magické ohodnocení, potom je  $G$  graf  $tC_4$ ,  $t \in \mathbb{N}$ .*

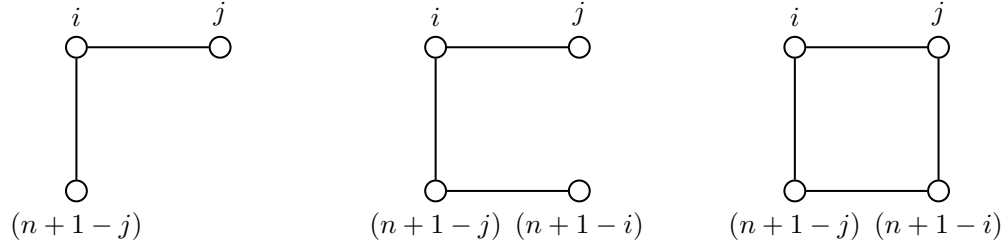
**Důkaz** Jelikož známe pravidelnost tohoto grafu, můžeme ze vztahu 2.1 vypočítat magickou konstantu.

$$k = \frac{2(n+1)}{2} = n + 1.$$

Nyní se podívejme na graf  $G$ . Jelikož víme, že je 2-pravidelný, můžeme tvrdit, že každý jeho vrchol má právě dva sousedy. Pokud si tedy vezmeme např. vrchol s labelem  $i$ , víme, že součet labelů jeho sousedů bude právě  $k = n + 1$ . Pokud si položíme label jednoho ze sousedů vrcholu  $i$  jako  $j$ , label zbývajících souseda musí být  $n + 1 - j$ . Tento krok je na obrázku 2.4 vlevo.

Posuňme se nyní k dalšímu vrcholu. Váha vrcholu  $(n + 1 - j)$  musí být také rovna  $n + 1$ . Tedy  $w(n + 1 - j) = n + 1$ . Jelikož tento vrchol již jednoho souseda má, a to vrchol  $i$ , label zbývajících souseda musí být  $(n + 1 - i)$ . Tento krok je na obrázku 2.4 uprostřed.

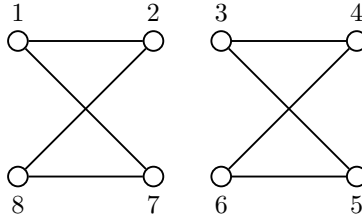
Nyní se podívejme na zbývajících souseda vrcholu  $(n + 1 - i)$ . Aby byly splněny podmínky DM ohodnocení, musí být jeho váha  $n + 1$ . Jelikož ale jeden z jeho sousedů má label  $(n + 1 - j)$ , jeho další soused musí mít label  $j$ . Tento label je ale již v grafu použit a nesmí být použit znovu. Zbývajícím sousedem vrcholu  $(n + 1 - i)$  musí být právě vrchol  $j$ . Zbývá zkontrolovat, že váha vrcholu  $j$  je rovna magické konstantě. Na obrázku 2.4 vpravo můžeme vidět, že opravdu  $w(j) = i + (n + 1 - i) = n + 1$ . Vidíme, že pro DM ohodnocení 2-pravidelného grafu neexistuje jiná možnost, než že každá komponenta grafu  $G$  je právě  $C_4$ .



Obrázek 2.4: Postup pro důkaz Věty 5

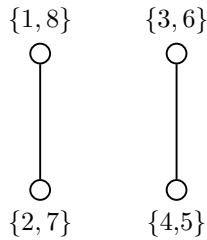
■

Ukažme si nyní postup, jakým jde k distančně magickému grafu sestrojít graf hranově disjunktí tak, aby jejich sjednocení mělo distančně magické ohodnocení. Tento postup byl již použit v [4].



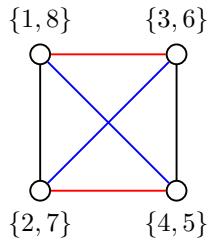
Obrázek 2.5: DM ohodnocení grafu  $2C_4$ .

Ke grafu  $G$  na obrázku 2.5 vytvoříme tzv. graf se zakázanými hranami  $Z$ . Do jeho vrcholů „vložíme“ vždy po dvou vrcholech  $i$  a  $n+1-i$ . Tzn.  $V(Z) = \{\{1, 8\}, \{2, 7\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}\}$ . Hranu pak do  $E(Z)$  dáme vždy, pokud v původním grafu mezi vrcholy  $\{u, v\}$  a  $\{x, y\}$  existuje alespoň jedna z hran  $ux$ ,  $uy$ ,  $vx$  nebo  $vy$ .



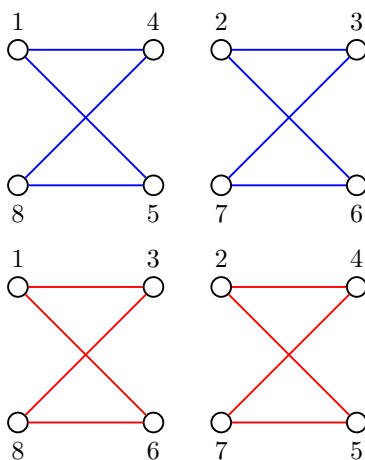
Obrázek 2.6: Graf se zakázanými hranami  $Z$ .

K poslednímu grafu nakreslíme jeho doplněk, ve kterém budeme hledat pravidelný faktor.



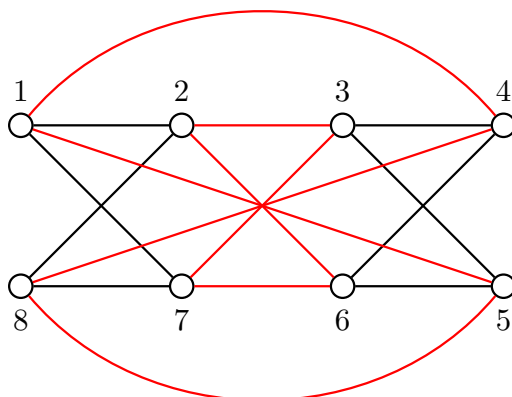
Obrázek 2.7: Graf  $Z$  a jeho doplněk.

Každá barevná třída v grafu na obrázku 2.7 reprezentuje jeden z grafů  $2C_4$  (na obrázku 2.8), které můžeme do původního grafu přidat tak, aby měl DM ohodnocení.



Obrázek 2.8: Grafy  $2C_4$  odpovídající barevným hranám grafu na obrázku 2.7.

Tyto cykly již můžeme přidat do grafu na obrázku 2.8 a získáváme nový graf s DM ohodnocením. Získáváme tedy graf 4-pravidelný graf s DM ohodnocením, který můžeme vidět na obrázku 2.9.



Obrázek 2.9: DM ohodnocení grafu  $4C_4$ .

## Kapitola 3

# Handicapové ohodnocení

Další ohodnocení, se kterým budeme v tomto textu pracovat, je handicapové ohodnocení (čteno „hendikepové“). Tentokrát budou mít váhy vrcholů grafu různé hodnoty tvořící aritmetickou posloupnost.

**Definice 2** *Nechť je  $G$  jednoduchý graf a  $f$  bijektivní zobrazení  $f : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, |V(G)|\}$ . Handicapové ohodnocení grafu  $G$  je zobrazení  $f$ , pro které platí, že existuje celé číslo  $l$  takové, že pro každý vrchol  $v \in V(G)$  platí*

$$w(v) = \sum_{u \in N(v)} f(u) = l + f(v).$$

Dále uvádíme známé výsledky (Lemma 1 a Věty 6, 7, 8, 9, 10 a 11). Metodu, kterou jsme použili již v kapitole 2.2, použijeme také nyní, kdy budeme skládat grafy s DM a handicapovým ohodnocením. Vlastním výsledkem této kapitoly je metoda, pomocí které získáváme nepravidelné grafy v podkapitole 3.2.

### 3.1 Nutné podmínky existence handicapového ohodnocení

Abychom mohli grafy s handicapovým ohodnocením sestrojít, potřebujeme vědět, pro jaké grafy toto ohodnocení může existovat. To se dozvíme v této kapitole.

**Lemma 1** [4] *V  $r$ -pravidelném handicapovém grafu s  $n$  vrcholy je váha každého vrcholu rovna*

$$w(v) = l + f(v) = \frac{(r-1)(n+1)}{2} + f(v).$$

**Věta 6** [4] *Neexistuje žádný netriviální  $r$ -pravidelný handicapový graf, kde  $r = 1$ ,  $r = 2$ ,  $r = n - 1$ ,  $r = n - 2t$ , kde  $t \in [1, \lfloor n/2 \rfloor]$ .*

**Věta 7** [4] *Handicapové ohodnocení  $r$ -pravidelného grafu s  $n$  vrcholy neexistuje, pokud*

- $n$  a  $r$  jsou obě lichá čísla.
- $n$  a  $r$  jsou obě sudá čísla.
- $n \equiv 2 \pmod{4}$  a zároveň  $r \equiv 1 \pmod{4}$ .

**Důkaz**

- Díky principu sudosti víme, že handicapový graf nemůže mít zároveň lichý počet vrcholů, a lichou pravidelnost.
- Pokud bychom dosadili do vztahu pro váhu vrcholu v Lemma 1 pro  $n$  a  $r$  sudé ( $n = 2k$  a  $r = 2h$ ), museli bychom dělit liché číslo dvěma. Což je ve sporu s tím, že váha vrcholu v handicapovém ohodnocení je celé číslo.
- Postupujme sporem. Jelikož má graf  $n = 4k + 2$  vrcholů, graf má  $2k + 1$  vrcholů se sudým labelem a  $2k + 1$  vrcholů s lichým labelem (nazvěme je sudé a liché vrcholy). Jelikož má graf pravidelnost  $r = 4t + 1$ , číslo  $l$  ze vztahu 1 je sudé. Váha lichého vrcholu je tak liché číslo – to znamená, že lichý vrchol má lichý počet lichých sousedů. Pokud nyní uděláme indukovaný podgraf na vrcholech s lichými labely, zjistíme, že tento podgraf má lichý počet vrcholů lichého stupně. Tento podgraf tak porušuje princip sudosti a nemůže existovat. Neexistuje tak ani graf s  $n \equiv 2 \pmod{4}$  a  $r \equiv 1 \pmod{4}$ .

■

Byla dokázána následující tvrzení.

**Věta 8** [4] *Pro 3-pravidelný graf s  $n$  vrcholy existuje handicapové ohodnocení, pokud je  $n \geq 28$ .*

**Věta 9** [4] *Pro 5-pravidelný graf s  $n$  vrcholy existuje handicapové ohodnocení, pokud je  $n \geq 12$ .*

**Věta 10** [4] *Pro  $n$  sudé a  $r$  liché existuje  $r$ -pravidelný handicapový graf, kde  $3 \leq r \leq n - 11$  pro všechny přípustné hodnoty  $n$  a  $r$ . (Vyhovují podmínkám Věty 6.)*

**Věta 11** [7] *Handicapový  $r$ -pravidelný graf na  $n$  vrcholech existuje, pokud je  $n \geq 8$  a*

- $n \equiv 0 \pmod{4}$  pouze tehdy, když  $3 \leq r \leq n - 5$  a  $r$  je liché,
- $n \equiv 2 \pmod{4}$  pouze tehdy, když  $3 \leq r \leq n - 7$  a  $r \equiv 3 \pmod{4}$

*kromě  $k = 3$  a  $n \in \{10, 12, 14, 18, 22, 26\}$ .*

## 3.2 Skládání DM a handicapového ohodnocení

Stejně jako dva distančně magické grafy, můžeme skládat dva grafy s různými ohodnoceními. V této kapitole si ukážeme, jak skládat grafy s DM a handicapovým ohodnocení. Také uvidíme, pro které grafy toto skládání nevede k magickému nebo handicapovému ohodnocení.

**Poznámka 2** Váhy vrcholů  $v \in V(G)$  grafu  $G$  s handicapovým ohodnocením tvoří aritmetickou posloupnost s diferencí 1. Navíc čím větší label vrchol má, tím větší je jeho váha.

**Věta 12** *Nechť jsou  $G_1 = (V_1, E_1)$  a  $G_2 = (V_2, E_2)$  grafy, kde  $V_1 = V_2$  a  $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ . Necht je  $f$  distančně magické ohodnocení grafu  $G_1$  a současně handicapové ohodnocení grafu  $G_2$ . Potom má graf  $G_1 \cup G_2 = (V, E_1 \cup E_2)$  handicapové ohodnocení  $f$ .*

**Důkaz** Váha vrcholu DM ohodnocení grafu  $G_1$  je  $w(i) = k$ , kde  $k \in \mathbb{N}$ , a váha vrcholu handicapového ohodnocení grafu  $G_2$  je  $w(i) = l + f(i)$ , kde  $l \in \mathbb{Z}$ . Váha každého vrcholu  $i \in V(G_1 \cup G_2)$  grafu  $G_1 \cup G_2$  bude

$$\begin{aligned} w(i) &= \sum_{u \in N(i)} f(u) = \sum_{u \in N_{G_1}(i) \cup N_{G_2}(i)} f(u) = \sum_{u \in N_{G_1}(i)} f(u) + \sum_{u \in N_{G_2}(i)} f(u) = \\ &= w_{G_1}(i) + w_{G_2}(i) = k + l + f(i) = (k + l) + f(i) = h + f(i), \quad h \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Graf  $G_1 \cup G_2$  má handicapové ohodnocení, jelikož pro každý vrchol platí  $w(i) = h + f(i)$ , kde  $h \in \mathbb{Z}$ . ■

Abychom našli příklad, kdy lze Věta 12 použít, hledáme takovou dvojici grafů  $G_1$  a  $G_2$ , kde

- Oba grafy mají stejný počet vrcholů,
- grafy  $G_1$  a  $G_2$  jsou hranově disjunktní,
- graf  $G_1$  má DM ohodnocení,
- graf  $G_2$  má handicapové ohodnocení.

Nyní se podívejme, kdy pro graf  $G_1$  existuje DM ohodnocení. Pro grafy na lichém počtu vrcholů zatím neznáme obecný způsob, jak DM ohodnocení najít. Na druhou stranu ale víme, že DM ohodnocení grafu nemůže existovat, pokud je  $r$  liché, nebo jsou  $n$  a  $r$  zároveň kongruentní 2 (mod 4).

Kdy bude existovat handicapové ohodnocení grafu  $G_2$ ? U handicapového ohodnocení pravidelného grafu víme, že neexistuje, pokud se parita počtu vrcholů a parita jeho pravidelnosti rovná. Tzn. u grafu  $G_2$  můžeme uvažovat buďto sudý počet vrcholů a lichou pravidelnost, nebo lichý počet vrcholů a sudou pravidelnost. Víme ale také, že  $r$ -pravidelný handicapový graf na sudém počtu vrcholů nemůže existovat. Shrňme si tyto výsledky do tabulky:

$n$ sudé			$n$ liché		
$G_1 \setminus G_2$	$r_2$ sudé	$r_2$ liché	$G_1 \setminus G_2$	$r_2$ sudé	$r_2$ liché
$r_1$ sudé	Věta 6		$r_1$ sudé	?	Princip sudosti
$r_1$ liché	Věta 1	Věta 1	$r_1$ liché	Princip sudosti	Princip sudosti

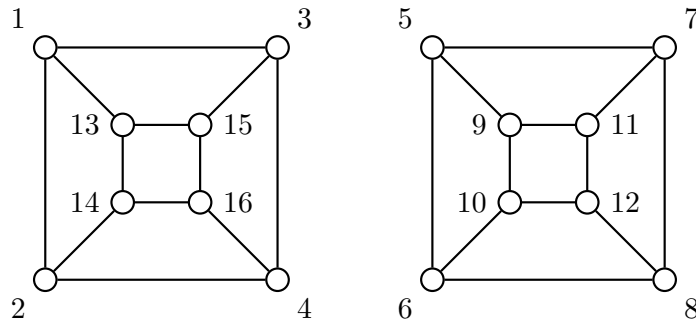
Tabulka 3.1: Možnosti existence DM ohodnocení grafu  $G_1$  a handicapového ohodnocení grafu  $G_2$ .

V tabulce 3.1 vlevo můžeme vidět, že pokud je  $n$  sudé, má smysl hledat  $G_1 \cup G_2$  pouze pro  $G_1$  se sudou pravidelností a  $G_2$  s lichou pravidelností. Pokud je  $n$  liché, hledat  $G_1 \cup G_2$  má smysl pouze tehdy, když mají oba grafy  $G_1$  i  $G_2$  sudou pravidelnost. V tomto případě víme, že příklady existují, ale neznáme jejich obecnou konstrukci. Tento případ je v tabulce označen otazníkem. Pro jiné hodnoty graf  $G_1 \cup G_2$  s lichým počtem vrcholů nemůže existovat.

Vidíme, že moc možností pro pravidelné grafy nezůstává. Můžeme začít přemýšlet nad těmito ohodnoceními pro nepravidelné grafy, nebo zjistit, jak nalézt DM ohodnocení grafů s lichým počtem vrcholů. Tyto případy můžeme vidět v příkladech 2 a 3.

## Příklad 2

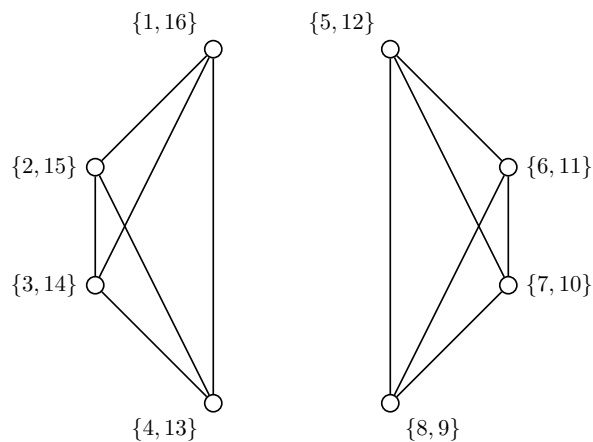
Nyní ukážeme, že pro grafy, které patří do jediného prázdného pole v tabulce 3.1, platí Věta 12. Příklad pro DM a handicapové ohodnocení můžeme nalézt pomocí tzv. grafu se „zakázanými“ hranami. Začneme nejprve se dvěma kopiemi grafu hyperkrychle  $Q_3$  s handicapovým ohodnocením. Tento graf označíme  $G_2$ .



Obrázek 3.1: Graf  $2Q_3$  s handicapovým ohodnocením.

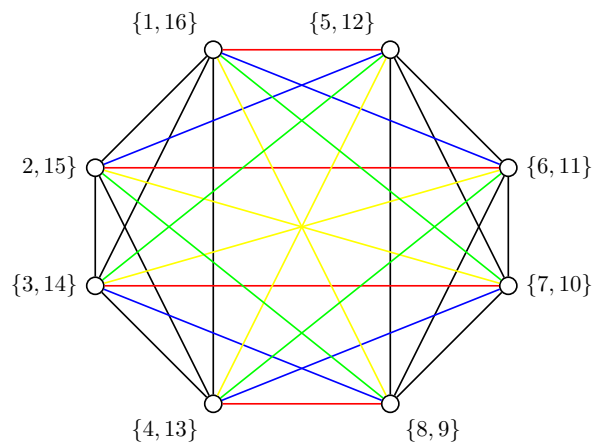
Nyní z tohoto grafu vytvoříme graf  $Z$  se zakázanými hranami na  $\frac{n}{2}$  vrcholech. Do každého vrcholu dáme dva vrcholy z grafu na obrázku 3.1. Graf tedy bude mít množinu vrcholů  $\{\{1, 16\}, \{2, 15\}, \{3, 14\}, \{4, 13\}, \{5, 12\}, \{6, 11\}, \{7, 10\}, \{8, 9\}\}$ . Hranu do tohoto grafu zakreslíme vždy, když bude existovat alespoň jedna hrana v původním grafu.





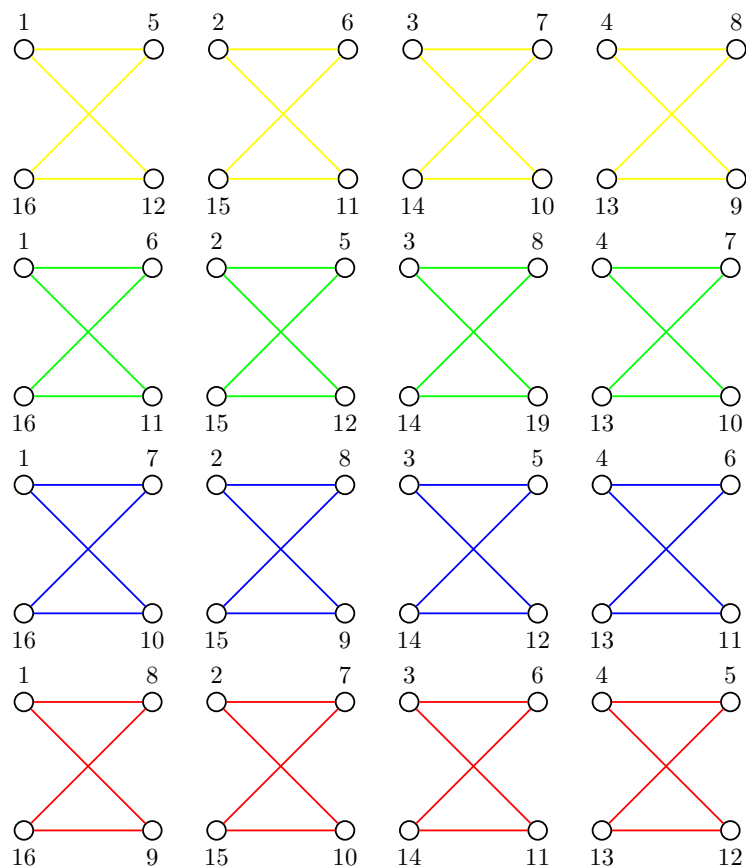
Obrázek 3.2: Graf se sloučenými vrcholy.

Nyní do grafu můžeme přidat hrany, které budou reprezentovat cykly  $C_4$ . V tomto příkladu jsou 4 možnosti, jak cykly zapsat. V grafu na obrázku 3.3 je zvýrazníme barevně.



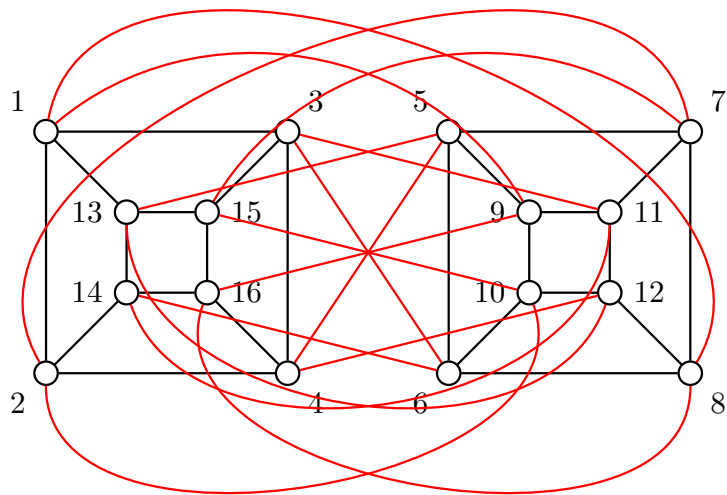
Obrázek 3.3: Doplněk grafu se zakázanými hranami.

Podívejme se nyní, co ony barevné hrany reprezentují. Hrany každé barvy v grafu  $Z$  odpovídají čtyřem cyklům  $C_4$ .



Obrázek 3.4: Grafy  $4C_4$ , které můžeme doplnit do grafu  $2Q_3$ .

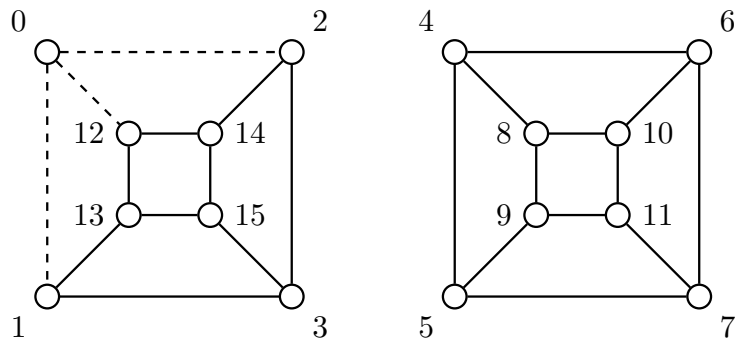
Cykly stejné barevné třídy pak můžeme přidat do grafu na obrázku 3.1. Vyberme si například červeně označené cykly  $C_4$ . Tyto čtyři kopie grafu  $C_4$  s DM ohodnocením označíme jako  $G_1$ . Vidíme, že máme dva grafy. Graf  $G_1$  s DM ohodnocením a graf  $G_2$  s handicapovým ohodnocením na stejném počtu vrcholů. Můžeme tedy uplatnit Větu 12. Pokud tyto dva grafy sjednotíme, dostaneme graf  $G_1 \cup G_2$  s handicapovým ohodnocením, který je na obrázku 3.5.



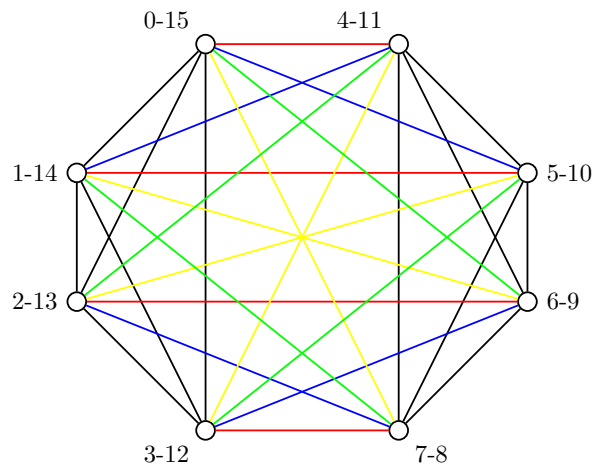
Obrázek 3.5: Graf  $2Q_3$  s doplněnými čtyřmi cykly  $C_4$  s handicapovým ohodnocením.

Na posledním obrázku můžeme vidět finální graf s handicapovým ohodnocením, který je vytvořen sjednocením dvou grafů s DM a handicapovým ohodnocením. ■

Výše v textu jsme zmiňovali, že neznáme způsob, jakým sestavit DM ohodnocení grafu na lichém počtu vrcholů. Můžeme použít stejný postup jako v minulém případě, ale za přítomnosti triku. Začneme opět u grafu se sudým počtem vrcholů. Vezměme si znovu dvě kopie grafu  $Q_3$ , kde od každého labelu vrcholu odečteme jedničku. Získáme tím graf, u kterého bude mít jeden vrchol label „0“. Tento graf si označme  $G_2$ .

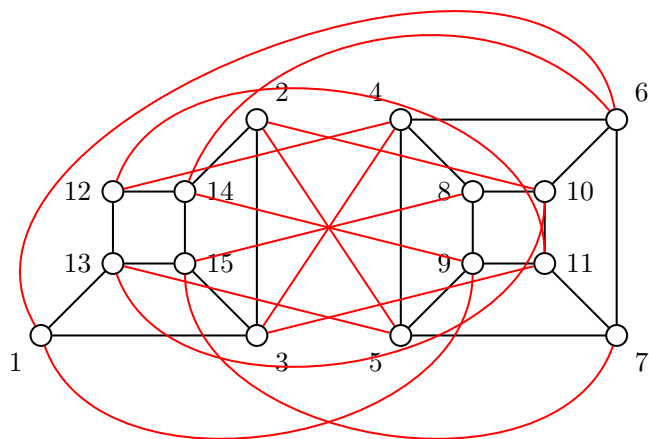


Obrázek 3.6: Graf  $2Q_3$  s handicapovým ohodnocením.



Obrázek 3.7: Doplněk grafu se zakázanými hranami.

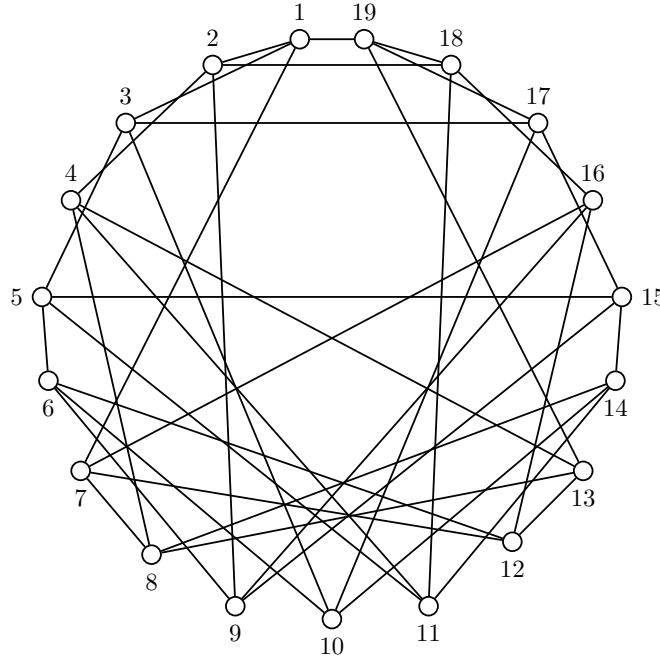
Vrchol s labelem 0 můžeme ignorovat. Jako v předchozím případě vytvoříme graf  $Z$  se zakázanými hranami, a následně získáme jeho párování. Tento krok se od předchozího příkladu neliší, barevné hrany opět představují cykly  $C_4$ , které můžeme podle barev doplnit do původního grafu. Akorát nebudeme přidávat hrany, které by vedly do vrcholu 0. Tyto cykly  $C_4$  tvoří graf  $G_1$ . Sloučením handicapového grafu  $G_2$  s distančně magickým grafem  $G_1$  získáváme podle Věty 12 graf s handicapovým ohodnocením, který je na obrázku 3.8.



Obrázek 3.8: Graf  $G_1 \cup G_2$  s handicapovým ohodnocením.

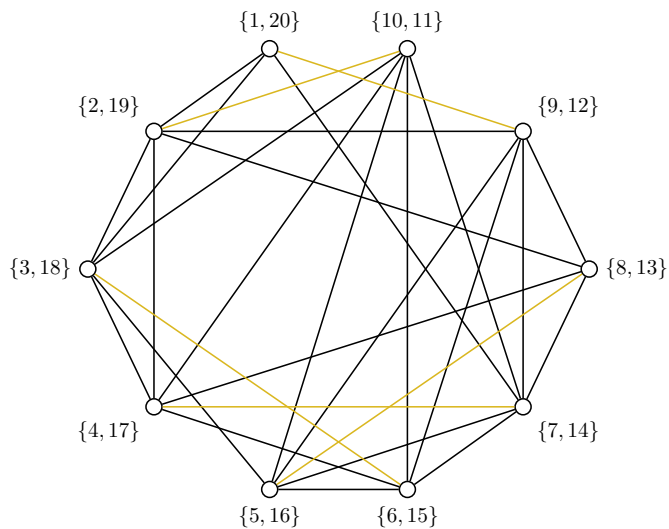
### Příklad 3

Jako další příklad ukážeme pravidelný handicapový graf na lichém počtu vrcholů, ke kterému přidáme nepravidelný graf s DM ohodnocením. Na obrázku 3.9 můžeme vidět handicapový graf na 19 vrcholech, který byl nalezen pomocí počítače.

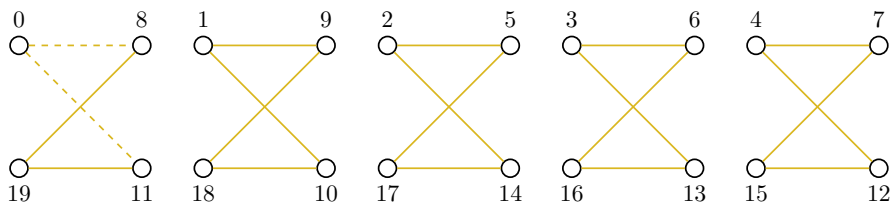


Obrázek 3.9: 4-pravidelný graf  $G_2$  na 19 vrcholech s handicapovým ohodnocením.

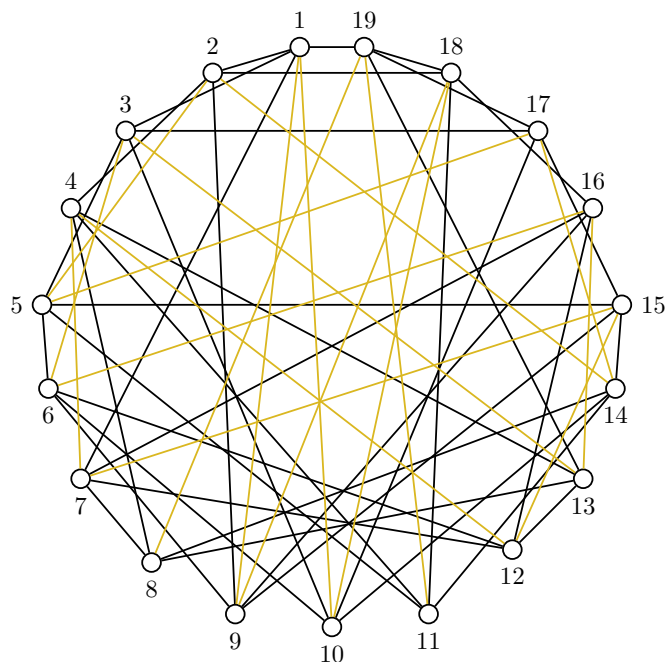
Podobným způsobem jako v příkladu 2 získáme DM graf na 19 vrcholech. Ke grafu  $G_2$  sestavíme distančně magický graf se stejnými vrcholy a s různými hranami následujícím způsobem. Z původního grafu na 19 vrcholech vytvoříme graf se zakázanými hranami s 10 vrcholy, který je zobrazen na obrázku 3.10. Tento graf doplníme o nové (žlutě označené) hrany, kde každá hrana znázorňuje graf  $C_4$ . Právě tyto cykly  $C_4$  tvoří distančně magický graf ze kterého „uměle“, odečtením jedničky od každého labelu a následným odebráním vrcholu s labelem 0, vytvoříme nepravidelný distančně magický graf  $G_1$  na 19 vrcholech. Ten je zobrazen na obrázku 3.11. Když grafy  $G_1$  a  $G_2$  sjednotíme, získáme handicapový graf na obrázku 3.12.



Obrázek 3.10: Graf se zakázanými hranami na 10 vrcholech.



Obrázek 3.11: Nepravidelný graf  $G_1 = 5C_4$ , který můžeme sjednotit s handicapovým grafem  $G_2$ .

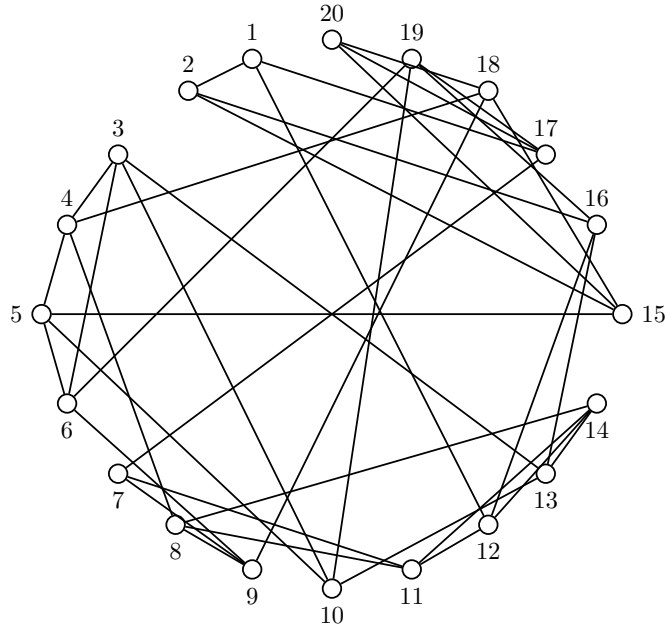


Obrázek 3.12: Sjednocený graf  $G = G_1 \cup G_2$  s handicapovým ohodnocením.

■

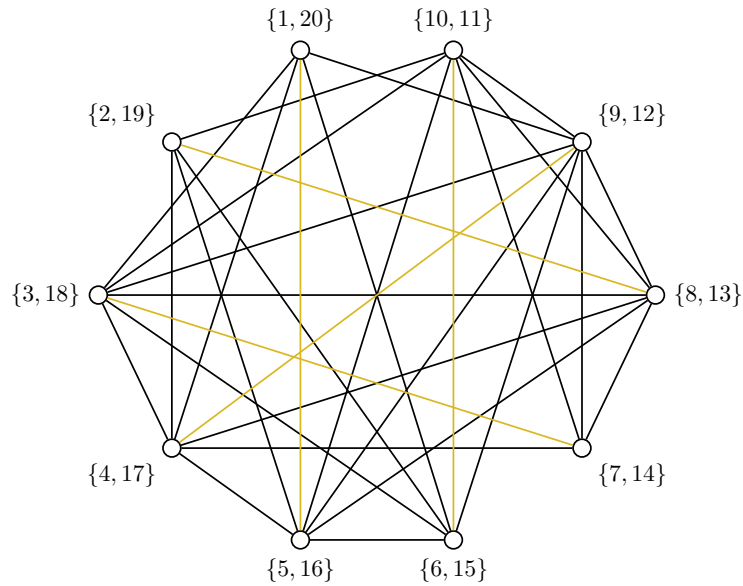
#### Příklad 4

Jako další z příkladů ukážeme sjednocení nepravidelného handicapového grafu a pravidelného distančně magického grafu na 20 vrcholech. Začneme s handicapovým grafem na 21 vrcholech, který jsme získali hrubou výpočetní silou. V tomto grafu od každého labelu vrcholu odečteme 1. Vrchol s labelem 0 můžeme opět ignorovat. Tímto získáme nepravidelný handicapový graf  $G_2$  na 20 vrcholech, který můžeme vidět na obrázku 3.13.



Obrázek 3.13: Nepravidelný handicapový graf  $G_2$  na 20 vrcholech.

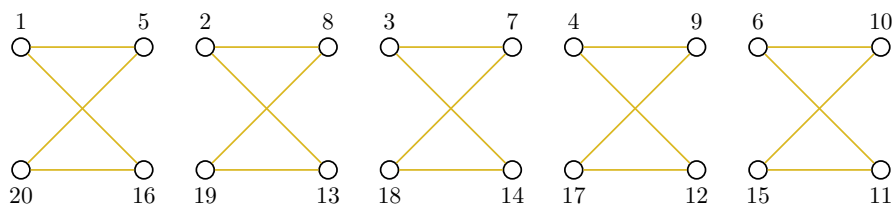
Z tohoto grafu pak vytvoříme graf se zakázanými hranami, do kterého přidáme hrany odpovídající cyklům  $C_4$ . Tento krok můžeme vidět na obrázku 3.14.



Obrázek 3.14: Graf se zakázanými hranami a párováním (žlutě) na 10 vrcholech.

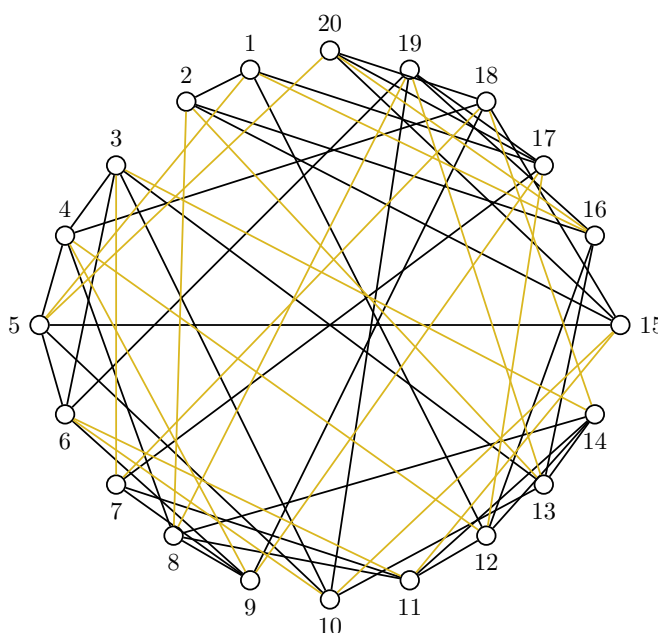
Na obrázku 3.14 vidíme graf se zakázanými hranami doplněný o žluté hrany (tzv. párování). Jak vidíme na obrázku 3.15, každá tato žlutá hrana představuje cyklus  $C_4$ . Seskupení těchto cyklů tvoří distančně magický graf  $G_1$  (Obrázek 3.15), který můžeme sjednotit s grafem  $G_2$ .





Obrázek 3.15: 4-pravidelný graf  $G_1 = 5C_4$ , který můžeme sjednotit s handicapovým grafem  $G_2$ .

Posledním krokem tohoto příkladu je sjednocení grafů  $G_1$  a  $G_2$ . To můžeme vidět na obrázku 3.16. Tímto jsme získali graf  $G_1 \cup G_2$ , který je, podle Věty 12, handicapový.

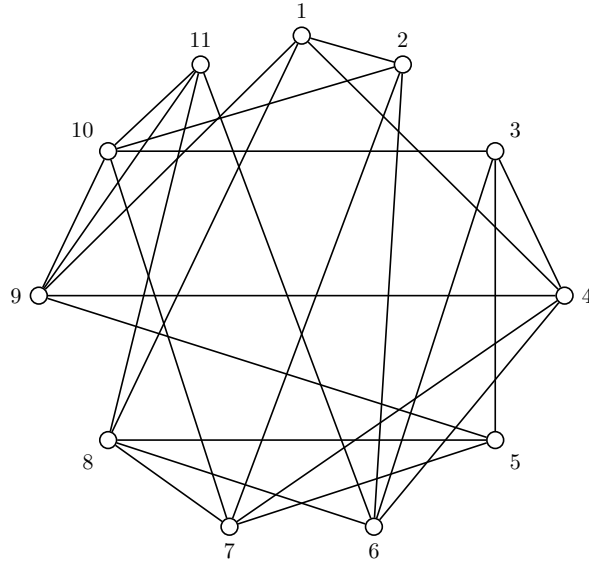


Obrázek 3.16: Sjednocený graf  $G_1 \cup G_2$  s handicapovým ohodnocením.

■

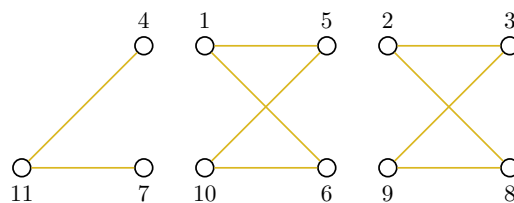
### Příklad 5

V předchozích příkladech jsme pracovali vždy alespoň s jedním pravidelným grafem. V tomto příkladě si ukážeme skládání dvou nepravidelných grafů. Handicapovým grafem je nyní nepravidelný graf na 11 vrcholech, který jsme získali upravením 5-pravidelného grafu na 12 vrcholech. Od každého labelu jsme odečetli 1 a odebrali vrchol s labelem 0. Vidět ho můžeme na obrázku 3.17.



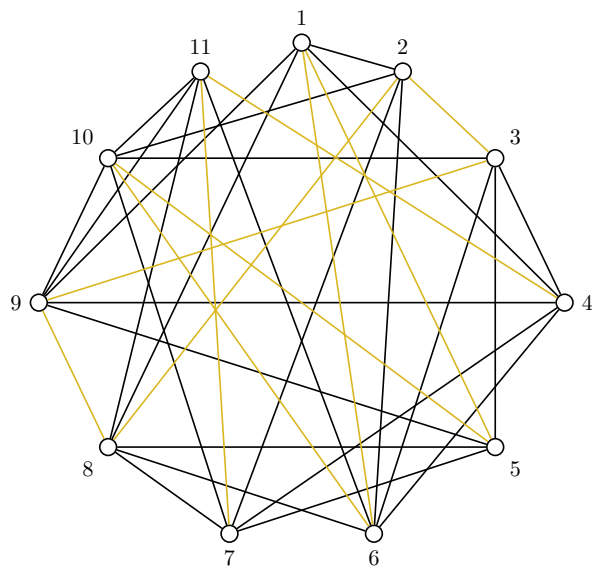
Obrázek 3.17: Handicapový nepravidelný graf  $G_2$  na 11 vrcholech.

Z tohoto grafu jsme opět udělali graf se zakázanými hranami a k němu přidali tzv. párování. Díky tomu jsme, stejně jako v příkladu 3 a obrázku 3.11 vytvořili nepravidelný distančně magický graf  $G_1$ , který je znázorněn na obrázku 3.18.



Obrázek 3.18: Nepravidelný distančně magický graf  $G_1$  na 11 vrcholech

Jejich sjednocením získáme handicapový graf na 11 vrcholech, který je znázorněný na obrázku 3.19 níže.



Obrázek 3.19: Handicapový graf  $G_1 \cup G_2$ .

■

Postup pro získání nepravidelných grafů nebyl doposud zmíněn v žádné publikaci. Lze jej proto považovat za vlastní přínos.

## Kapitola 4

# $K$ -handicapové ohodnocení

Můžeme si všimnout, že ohodnocení, kde váhy vrcholu budou tvořit aritmetickou posloupnost s diferencí  $k$ , můžeme nazvat  $k$ -handicapovým ohodnocením.

**Poznámka 3** [8] Handicapové ohodnocení je speciální případ obecnějšího  $k$ -handicapového ohodnocení. U tohoto ohodnocení pro váhy vrcholů platí

$$w(i) = \sum_{u \in N(u)} f(u) = l + k \cdot f(i), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Nejprve představme známé výsledky (Věty 13 až 21). Tyto výsledky jsou citovány z [9, 10, 11, 12]. Metodu použitou v dřívějších kapitolách nyní použijeme pro konstrukci dalších ohodnocení v podkapitolách 4.4 a 4.5. Existenci více dimenzionální magické hyperkrychle využijeme pro novou alternativní konstrukci  $k$ -handicapového ohodnocení v podkapitole 4.2.

### 4.1 Podmínky existence $k$ -handicapového ohodnocení

#### 4.1.1 Nutné podmínky

Označme  $H(n, r, k)$   $r$ -pravidelný,  $k$ -handicapový graf  $G$  na  $n$  vrcholech. Nutné podmínky existence  $H(n, r, k)$  byly nalezeny v [9].

**Věta 13** [9] *Pokud existuje  $H(n, r, k)$ , pak platí:*

1.  $w(f(v)) = k \cdot f(v) + \frac{(r-k)(n+1)}{2}$ , pro všechny  $v \in V(G)$ .
2. Pokud je  $n$  sudé, pak  $r \equiv k \pmod{2}$ .
3. Pokud je  $n$  liché, pak  $r \equiv 0 \pmod{2}$ .
4.  $n \geq 4k + 4$ .

$$5. k + 2 \leq r \leq n - k - 4.$$

#### 4.1.2 Postačující podmínky

První, kdo uvažoval nad  $k$ -handicapovými grafy pro  $k = 1$  byl Fronček [10]. Věta 14 byla dokázána v [10]. Postačující podmínky se ověří zpravidla konstrukcí grafu s danými parametry.

**Věta 14** [10] *Pokud je  $n \equiv 0 \pmod{16}$ , pak  $H(n, r, 2)$  existuje právě tehdy, když je  $r$  sudé a  $4 \leq r \leq n - 6$ .*

**Věta 15** [11] *Pokud je  $n \equiv 8 \pmod{16}$  a zároveň  $n \geq 56$ , pak existuje  $H(n, r, 2)$  existuje pokud je  $r$  sudé a  $6 \geq k \geq n - 50$ .*

**Věta 16** [9] *Pro každé liché  $k$  existuje  $H(n, r, k)$  pro každé liché  $r$  takové, že  $2k + 1 \leq r \leq n - (2k + 3)$ , pokud platí jedna z následujících podmínek:*

1.  $n \equiv 0 \pmod{4k + 4}$ ,  $n \geq (k + 1)(k + 3)$  a  $d \equiv 1 \pmod{4}$ ,
2.  $n \equiv 0 \pmod{4k + 4}$ ,  $n \geq (k + 1)(k + 5)$  a  $d \equiv 3 \pmod{4}$ ,
3.  $n \equiv 2k + 2 \pmod{4k + 4}$ ,  $n \geq (k + 1)(k + 3)$  a  $d \equiv 3 \pmod{4}$ .

**Věta 17** [9] *Buď  $k \geq 2$  a  $t, v \geq k + 2$  všechna sudá čísla a buď  $n = vt$ . Pokud je  $k \equiv 0 \pmod{4}$  nebo  $v \equiv t \equiv 0 \pmod{4}$ , pak existuje  $H(n, r, k)$  pro všechna sudá  $r$  taková, že  $2k \leq r \leq n + 2k + 2$ .*

V článku [12] byla uvedena konstrukce  $k$ -handicapových grafů z grafů  $(k - 1)$ -handicapových.

**Věta 18** [12] *Pokud existuje  $H(n, k + 2, k)$ , tak existuje  $H(2n, k + 3, k + 1)$ .*

Pokud začneme s 1-handicapovými grafy z Věty 11, opakováním Věty 18 získáme  $k$ -handicapový graf se sudým počtem vrcholů a nejmenší možnou pravidelností.

**Věta 19** [12] *Nechť je  $m \geq 4$  a  $m \notin \{5, 6, 7, 9, 11, 13\}$ . Pak  $H(2^k m, k + 2, k)$  existuje pro každé  $k \geq 1$ .*

Pokud si přejeme do  $k$ -handicapového grafu přidat vrcholy bez změny  $k$  a  $r$ , můžeme toho dosáhnout přidáním  $2^{k+2}$  vrcholů:

**Věta 20** [12] *Pokud existuje  $H(n, k + 2, k)$  a  $k \geq 2$ , pak existuje  $H(n + 2^{k+2}, k + 2, k)$ .*

**Věta 21** [12] *Buď  $k \geq 1$  dáno a buď  $n \equiv 0 \pmod{2^{k+2}}$ . Pak  $H(n, r, k)$  existuje pouze tehdy, když  $k + 2 \leq r \leq n - k - 4$  a  $r \equiv k \pmod{2}$ .*

## 4.2 Konstrukce $k$ -handicapového ohodnocení pomocí magické hyperkrychle

Ukažme alternativní konstrukci  $k$ -handicapového grafu. Představme si  $k$ -dimenzionální magickou hyperkrychli o rozměru  $n$ . Touto hyperkrychlí rozumíme  $k$ -dimenzionální matici

$$M_n^k = [m(i_1, i_2, \dots, i_k) : 1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n]$$

obsahující všechna přirozená čísla  $1, \dots, n^k$  rozmístěná tak, že součet čísel v řádku každého směru a součet čísel na každé hlavní diagonále je stejný. Řádkem hyperkrychle  $M_n^k$  rozumíme  $n$ -tici prvků  $m(i_1, \dots, i_k)$  které mají identické souřadnice na  $k-1$  místech. Např. 1-dimenzionální magická hyperkrychle  $M_n^1$  o rozměru  $n$  je dána libovolnou permutací čísel  $1, \dots, n$ . Magický čtverec je speciálním případem 2-dimenzionální magické krychle. Existence magických hyperkrychlí je popsána v článku [13].

**Věta 22** [13] *Magická  $k$ -dimenzionální krychle  $M_n^k$  o rozměru  $n$  existuje právě tehdy, když  $k \geq 2$  a  $n \neq 2$  nebo  $k = 1$ .*

Víme tedy, že součet čísel v řádku každého směru je stejný. Tomuto číslu říkáme magická konstanta a označme ho  $l$ . Nyní si pod magickou hyperkrychlí představme ohodnocení grafu  $G$ , kde jednotlivé prvky hyperkrychle jsou labely vrcholů. Tyto vrcholy jsou vždy sousední s vrcholy, jejichž labely jsou ve stejném sloupci, řádku, a případně dalších směrech (těchto směrů je celkem  $k$ ).

**Věta 23** *Buď  $G$  graf s ohodnocením  $f$ , které odpovídá  $k$ -dimenzionální magické krychli o rozměru  $n$ . Ohodnocení  $f$  je pak  $(-k)$ -handicapové a graf  $G$  je  $(-k)$ -handicapový.*

### Důkaz

Pokud pro nějaký vrchol  $v \in V(G)$  sečteme hodnotu jeho labelu a labely sousedních vrcholů ve všech  $k$  směrech, získáme  $k$ -násobek magické konstanty  $l$ . Tzn.

$$\sum_{i=1}^k ((\sum_{u \in N(v)} f(u)) + f(v)) = k \cdot f(v) + \sum_{u \in N(v)} f(u) = k \cdot l. \quad (4.1)$$

Váhu vrcholu  $v \in V(G)$  získáme tak, že od čísla  $k \cdot l$  odečteme  $k$ -krát label vrcholu  $v$ , protože jsme ho  $k$  magické konstantě přičetli v 4.1 v každém směru – tj.  $k$ -krát. Tzn.

$$w(v) = k \cdot l - k \cdot f(v).$$

Díky tomu, že prvky magické krychle tvoří aritmetickou posloupnost s diferencí 1 (čísla  $1, 2, \dots, n^k$ ), budou váhy vrcholů tvořit aritmetickou posloupnost s diferencí  $k$ , protože s rostoucím labellem vrcholu odečteme od čísla  $k \cdot l$  vždy o  $k$  větší číslo. Tj. váhy

$$w(v_i) = k \cdot l - k \cdot f(v_i) \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, n^k \quad (4.2)$$

tvoří aritmetickou posloupnost s diferencí  $k$ . To by mohlo naznačovat, že graf  $G$  je  $k$ -handicapový. Jelikož ale od magické konstanty odečítáme pokaždé větší číslo, váhy vrcholů nerostou zároveň s labelem, tak jak to u  $k$ -handicapového ohodnocení má být. To znamená, že čím vyšší label vrcholu je, tím nižší je jeho váha. Pokud se znovu podíváme na vztah 4.2 pro váhu vrcholu, zjistíme, že k číslu  $k \cdot l$  „přičítáme“  $(-k)$ -násobek labelu vrcholu, a graf  $G$  je tak  $(-k)$ -handicapový. ■

### Příklad 6

Ukažme si tento princip na příkladu pro 3-dimenzionální krychle o rozměru 3. Ta vypadá následovně

8	15	19	24	1	17	10	26	6
12	25	5	7	14	21	23	3	16
22	2	18	11	27	4	9	13	20

Tabulka 4.1: Tři řezy magické krychle

Čísla této magické krychle jsou labely jednotlivých vrcholů. V grafu jsou tyto vrcholy sousední se všemi vrcholy s labely ve stejném řádku, sloupci a řezu. V tabulce 4.2 jsou červeně zvýrazněny všechny sousední vrcholy vrcholu s labelem 8.

8	15	19	24	1	17	10	26	6
12	25	5	7	14	21	23	3	16
22	2	18	11	27	4	9	13	20

Tabulka 4.2: Sousední vrcholy vrcholu s labelem 8

Jelikož má magická krychle stejný součet na řádcích, sloupcích a řezech (v tomto případě 42), tak pro váhy všech vrcholů  $v \in V(G)$  bude platit

$$w(v) = 3 \cdot 42 - 3 \cdot f(v),$$

kde 3 je dimenze magické krychle. Tzn. že od čísla  $3 \cdot 42 = 126$  se bude vždy odečítat trojnásobek labelu vrcholu. Graf  $G$  má tak  $(-3)$ -handicapové ohodnocení. ■

Všimněme si, že uděláme-li doplněk  $(-k)$ -handicapového grafu, získáme graf  $(k-1)$ -handicapový:

**Důsledek 1.1** *Doplněk  $\overline{G}$ , kde  $G$  je  $(-k)$ -handicapový graf, je  $(k-1)$ -handicapový.*

**Důkaz** Sjednocením grafu  $G$  a jeho doplňku  $\overline{G}$  získáme kompletní graf  $K_n$ , kde  $n$  je počet vrcholů grafu  $G$ . Váha všech vrcholů v kompletním grafu je rozdíl součtu čísel  $\{1, \dots, n\}$  a labelu konkrétního vrcholu.

$$w_{K_n}(v) = \frac{n(n+1)}{2} - f(v).$$

Jelikož má  $\overline{G}$  všechny hrany, které nemá graf  $G$ , váha vrcholů v doplňku  $\overline{G}$  je rozdíl vah vrcholů grafu  $K_n$  a grafu  $G$ . Jelikož je graf  $G$   $(-k)$ -handicapový, váhy jeho vrcholů jsou  $w_G = l - k \cdot f(v)$ . Váhy vrcholů doplňku  $\overline{G}$  jsou

$$w_{\overline{G}}(v) = w_{K_n}(v) - w_G(v) = \frac{n(n+1)}{2} - f(v) - (l - k \cdot f(v)) = \left( \frac{n(n+1)}{2} - l \right) + (k-1)f(v).$$

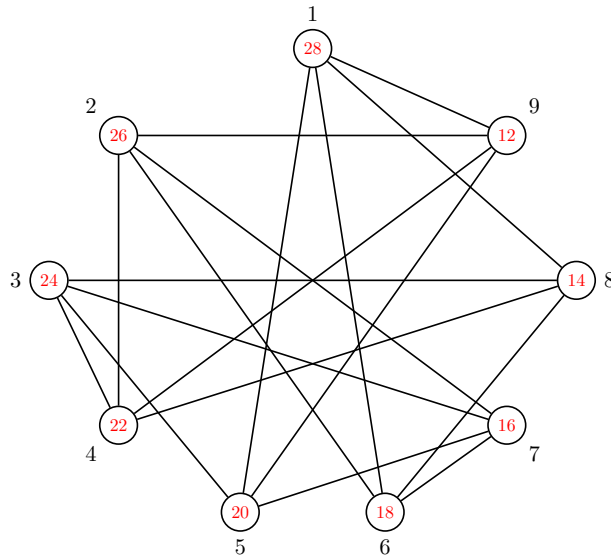
Graf  $\overline{G}$  má tak  $(k-1)$ -handicapové ohodnocení. ■

### Příklad 7

Sestrojme si graf  $G$ , jehož ohodnocení odpovídá magickému čtverci  $M_3^2$ , který je znázorněn v tabulce 4.3. Graf  $G$  je na Obrázku 4.1. Pokud nyní sestrojíme doplněk grafu  $G$ , zjistíme, že každý vrchol má váhu  $w_{\overline{G}}(v) = \frac{9 \cdot (9+1)}{2} - f(v) - w_G(v) = 45 - f(v) - (30 - 2f(v)) = 15 + f(v)$  a má tak 1-handicapové ohodnocení. Můžeme ho vidět na Obrázku 4.2.

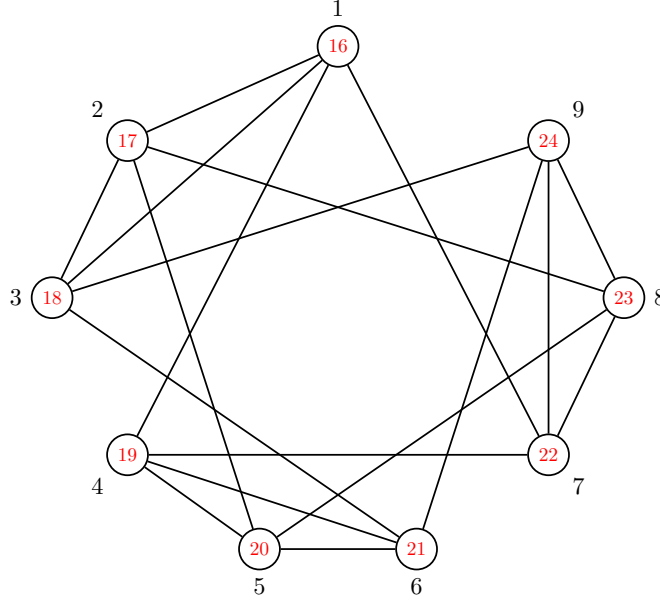
8	1	6
3	5	7
4	9	2

Tabulka 4.3: Magický čtverec odpovídající ohodnocení grafu  $G$ .



Obrázek 4.1: Graf  $G$ , který je  $(-2)$ -handicapový.





Obrázek 4.2: Doplněk  $\overline{G}$ , který je 1-handicapový.

■

Všimněme si, že pokud budeme chtít nalézt přímo graf s  $k$ -handicapovým ohodnocením, stačí začít magickou hyperkrychlí dimenze  $k + 1$ . Doplněk grafu, jehož ohodnocení odpovídá této hyperkrychli, je  $k + 1 - 1 = k$ -handicapový.

### 4.3 Skládání dvou handicapových grafů

Stejně jako jsme skládali dva DM grafy, můžeme skládat i dva grafy handicapové. Oproti DM ohodnocení, kde jsme složením dvou DM grafů získali nový DM graf, sjednocením dvou handicapových nezískáme nový handicapový graf, ale graf 2-handicapový.

**Věta 24** *Nechť jsou  $G_1 = (V_1, E_1)$  a  $G_2 = (V_2, E_2)$  grafy, kde  $V_1 = V_2$  a  $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ . Nechť je  $f$  handicapové ohodnocení grafu  $G_1$  a současně handicapové ohodnocení grafu  $G_2$ . Potom má graf  $G_1 \cup G_2 = (V, E_1 \cup E_2)$  2-handicapové ohodnocení  $f$ .*

**Důkaz** Pro 2-handicapové ohodnocení grafu platí

$$\forall v \in V(G) : w(v) = l + 2f(v).$$

Váha každého vrcholu  $i \in V(G_1 \cup G_2)$  grafu  $G_1$  a  $G_2$  bude

$$w_{G_1}(i) = l_1 + f(i), \quad w_{G_2}(i) = l_2 + f(i),$$

kde  $l_1, l_2 \in \mathbb{Z}$ . Váha vrcholů grafu  $G_1 \cup G_2$  bude tedy

$$\begin{aligned} w(i) &= \sum_{u \in N(i)} f(u) = \sum_{u \in N_{G_1}(i) \cup N_{G_2}(i)} f(u) = \sum_{u \in N_{G_1}(i)} f(u) + \sum_{u \in N_{G_2}(i)} f(u) = \\ &= w_{G_1}(i) + w_{G_2}(i) = l_1 + f(i) + l_2 + f(i) = (l_1 + l_2) + 2f(i) = l + 2f(i), \quad l \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Graf  $G_1 \cup G_2$  má tedy 2-handicapové ohodnocení  $f$ , jelikož pro každý vrchol platí  $w(i) = l + 2f(i)$ . ■

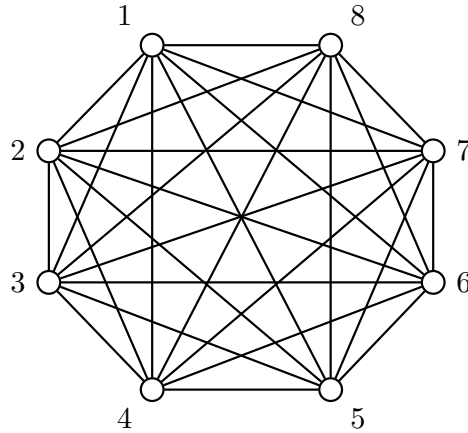
Příklad skládání dvou handicapových grafů se nám zatím nepodařilo nalézt.

**Poznámka 4** Fair ohodnocením nazýváme speciální případ  $k$ -handicapového ohodnocení, kde  $k = -1$ . Tzn. pro všechny vrcholy platí

$$w(v) = l - f(v), \quad l \in \mathbb{Z}.$$

### Příklad 8

Na obrázku 4.3 můžeme vidět ukázkou fair ohodnocení kompletního grafu  $K_8$ . Váhy všech vrcholů odpovídají posloupnosti  $\{28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35\}$  a váha každého vrcholu je rovna  $w(i) = 36 - i$ . Všechny kompletní grafy mají fair ohodnocení s konstantou  $l = \binom{n+1}{2}$ . Ohodnocení se říká *fair* právě proto, že grafy s tímto ohodnocením odpovídají tzv. férovým turnajům, kdy každý tým hraje s každým týmem.



Obrázek 4.3: Kompletní graf  $K_8$  s fair ohodnocením, kde  $w(i) = 36 - i$ . ■

## 4.4 Skládání $k$ -handicapového a distančně magického grafu

Jako další ukázkou skládání grafů je skládání  $k$ -handicapového a distančně magického grafu. Následující věta říká, co se stane při složení grafů s fair a DM ohodnocením.

**Věta 25** Necht jsou  $G_1 = (V_1, E_1)$  a  $G_2 = (V_2, E_2)$  grafy, kde  $V_1 = V_2$  a  $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ . Necht je  $f$  fair ohodnocení grafu  $G_1$  a současně distančně magické ohodnocení grafu  $G_2$ . Potom má graf  $G_1 \cup G_2 = (V, E_1 \cup E_2)$  fair ohodnocení  $f$ .

**Důkaz** Váhy vrcholů ohodnocení grafů  $G_1$  a  $G_2$  budou

$$w_{G_1}(i) = l_1 - f(i), \quad w_{G_2}(i) = k,$$

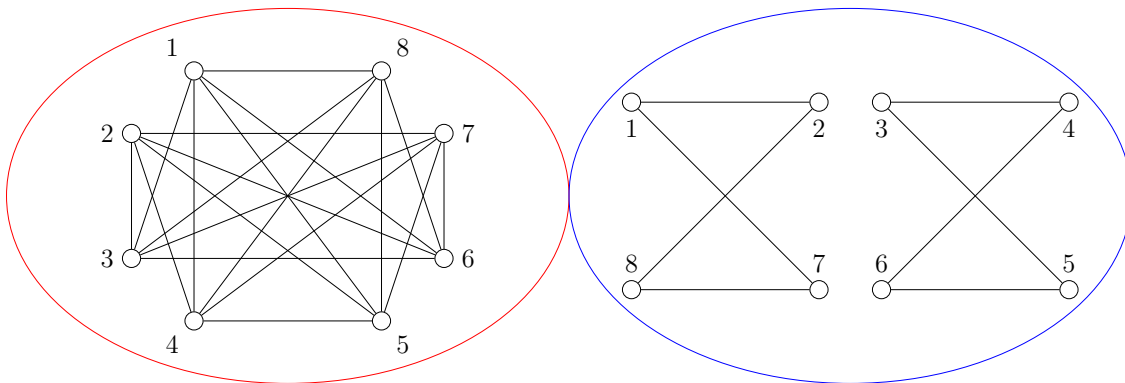
kde  $l_1, k \in \mathbb{Z}$ . Váha každého vrcholu  $i \in V(G_1 \cup G_2)$  grafu  $G_1 \cup G_2$  bude tedy

$$\begin{aligned} w(i) &= \sum_{u \in N(i)} f(u) = \sum_{u \in N_{G_1}(i) \cup N_{G_2}(i)} f(u) = \sum_{u \in N_{G_1}(i)} f(u) + \sum_{u \in N_{G_2}(i)} f(u) = \\ &= w_{G_1}(i) + w_{G_2}(i) = l_1 - f(i) + k = (l_1 + k) - f(i) = l - f(i), \quad l \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Můžeme vidět, že váhy všech vrcholů odpovídají  $w(i) = l - f(i)$ . Graf  $G_1 \cup G_2$  má fair ohodnocení. ■

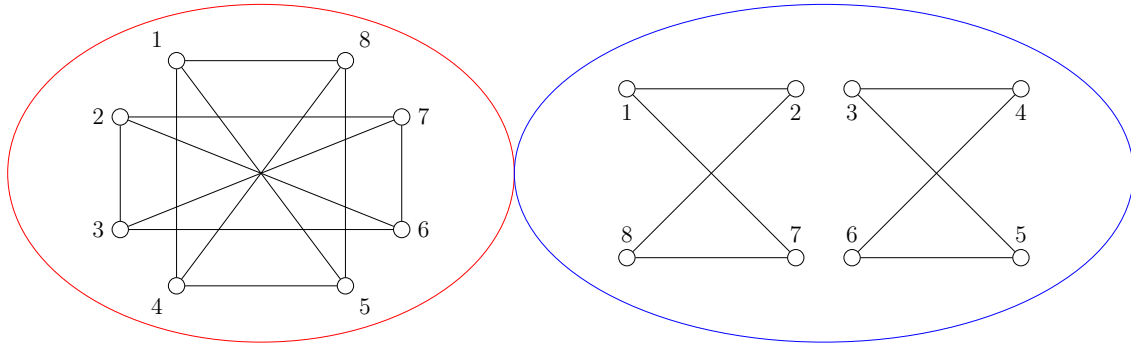
### Příklad 9

Na obrázku 4.4 níže můžeme vidět graf  $K_8 - 2C_4$  s fair ohodnocením a graf  $2C_4$  s DM ohodnocením. Pokud tyto dva grafy sjednotíme, dostaneme graf  $K_8$ , který má fair ohodnocení. Ten můžeme vidět výše na obrázku 4.3.

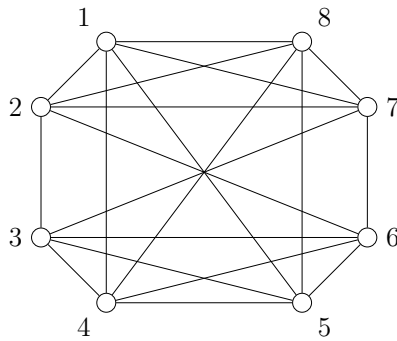


Obrázek 4.4: Graf  $G_1 = K_8 - 2C_4$  (červený) s fair ohodnocením a graf  $G_2 = 2C_4$  (modrý) s DM ohodnocením.

Na obrázku 4.5 níže můžeme vidět další příklad, kdy jeden graf má fair ohodnocení, druhý graf má ohodnocení distančně magické, a jejich sjednocení je graf s fair ohodnocením. Tentokrát jsme z kompletního grafu  $K_8$  odebrali 4 cykly  $C_4$  a zpět přidali dva z nich s DM ohodnocením. Výsledný graf můžeme vidět na obrázku 4.6.



Obrázek 4.5: Graf  $G_1$  (červený) s fair ohodnocením a graf  $G_2$  (modrý) s DM ohodnocením.



Obrázek 4.6: Graf  $G_1 \cup G_2$  s fair ohodnocením.

■

## 4.5 Skládání dvou $k$ -handicapových grafů

Následující možností skládání grafů je sjednocení grafu s  $k$ -handicapovým ohodnocením a grafu s fair ohodnocením. O tomto pojednává Věta 26 níže.

**Věta 26** *Nechť jsou  $G_1 = (V_1, E_1)$  a  $G_2 = (V_2, E_2)$  grafy, kde  $V_1 = V_2$  a  $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ . Nechť je  $f$   $k$ -handicapové ohodnocení grafu  $G_1$  a současně fair ohodnocení grafu  $G_2$ . Potom má graf  $G_1 \cup G_2 = (V, E_1 \cup E_2)$   $(k - 1)$ -handicapové ohodnocení.*

**Důkaz** Váhy vrcholů s  $k$ -handicapovým ohodnocením jsou rovny  $w(i) = l_1 + k \cdot f(i)$  a váhy vrcholů grafu  $G_2$  s fair ohodnocením jsou rovny  $w(i) = l_2 - f(i)$ .

Váha každého vrcholu  $i \in V(G_1 \cup G_2)$  grafu  $G_1 \cup G_2$  bude

$$w(i) = \sum_{u \in N(i)} f(u) = \sum_{u \in N_{G_1}(i) \cup N_{G_2}(i)} f(u) = \sum_{u \in N_{G_1}(i)} f(u) + \sum_{u \in N_{G_2}(i)} f(u)$$

$$= w_{G_1}(i) + w_{G_2}(i) = l_1 + kf(i) + l_2 - f(i) = (l_1 + l_2) + (k - 1)f(i) = l + (k - 1)f(i), \quad l \in \mathbb{Z}.$$

Vidíme, že váhy vrcholů grafu  $G_1 \cup G_2$  odpovídají  $(k - 1)$ -handicapovému ohodnocení, jelikož všechny vrcholy mají váhu  $l + (k - 1)f(i)$ , kde  $l = l_1 + l_2 \in \mathbb{Z}$ . ■

Tato varianta lze ještě zobecnit sjednocením grafů s  $k$ -handicapovým a  $m$ -handicapovým ohodnocením. Ta je ukázána ve Větě 27. Speciálním případem této Věty by byly 2  $k$ -handicapové grafy. Výsledný graf by byl  $2k$ -handicapový.

**Věta 27** . *Nechť jsou  $G_1 = (V_1, E_1)$  a  $G_2 = (V_2, E_2)$  grafy, kde  $V_1 = V_2$  a  $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ . Nechť je  $f$   $k$ -handicapové ohodnocení grafu  $G_1$  a současně  $m$ -handicapové ohodnocení grafu  $G_2$ .*

*Potom má graf  $G_1 \cup G_2 = (V, E_1 \cup E_2)$   $(k + m)$ -handicapové ohodnocení.*

**Důkaz** Váhy vrcholů s  $k$ -handicapovým ohodnocením jsou rovny  $w(i) = l_1 + k \cdot f(i)$  a váhy vrcholů grafu  $G_2$  s  $m$ -handicapovým ohodnocením jsou rovny  $w(i) = l_2 + m \cdot f(i)$ .

Váha každého vrcholu  $i \in V(G_1 \cup G_2)$  grafu  $G_1 \cup G_2$  bude

$$w(i) = \sum_{u \in N(i)} f(u) = \sum_{u \in N_{G_1}(i) \cup N_{G_2}(i)} f(u) = \sum_{u \in N_{G_1}(i)} f(u) + \sum_{u \in N_{G_2}(i)} f(u)$$

$$= w_{G_1}(i) + w_{G_2}(i) = l_1 + kf(i) + l_2 + mf(i) = (l_1 + l_2) + (k + m)f(i) = l + (k + m)f(i), \quad l \in \mathbb{Z}.$$

Vidíme, že váhy vrcholů grafu  $G_1 \cup G_2$  odpovídají  $(k + m)$ -handicapovému ohodnocení, jelikož všechny vrcholy mají váhu  $l + (k + m)f(i)$ , kde  $l = l_1 + l_2 \in \mathbb{Z}$ . ■

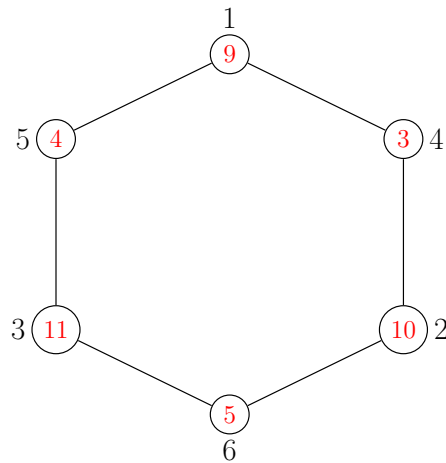
Stejně jako u Věty 24 se příklad nepodařilo nalézt.

## Kapitola 5

# Distančně antimagické ohodnocení

Jako čtvrté ohodnocení uvedeme distančně antimagické ohodnocení. Tohoto ohodnocení existuje více typů. V této práci si podrobněji ukážeme distančně antimagické ohodnocení a  $(a, d)$ -distančně antimagické ohodnocení. Oproti handicapovému ohodnocení, kde váhy vrcholů rostou s jejich labelem, u  $(a, d)$ -distančně antimagického ohodnocení na pořadí vah nezáleží. Distančně antimagické ohodnocení má pro váhy vrcholů pouze jednu podmínku, váhy všech vrcholů musí být od sebe navzájem různé. Jako první si ukažme definici distančně antimagického ohodnocení. Definici a nutné podmínky pro existenci distančně antimagického ohodnocení nalezneme v [14].

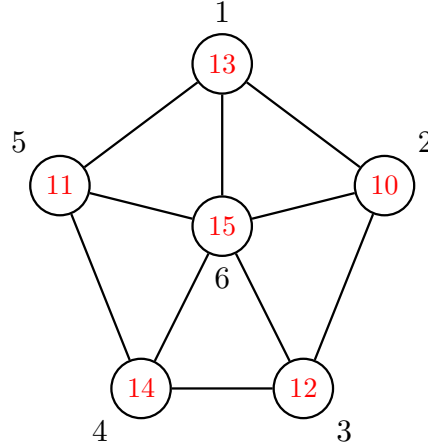
**Definice 3** [14] *Graf  $G$  s  $n$  vrcholy má distančně antimagické ohodnocení, pokud existuje bijektivní zobrazení  $f : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$  takové, že váhy všech vrcholů grafu  $G$  jsou navzájem různá čísla. Váhu vrcholu  $v$  spočítáme jako  $w(v) = \sum_{u \in N_G(v)} f(u)$ .*



Obrázek 5.1: Graf se šesti vrcholy s distančně antimagickým ohodnocením. Váhy vrcholů jsou vyznačeny červeně.

Definice  $(a, d)$ -distančně antimagického ohodnocení zní následovně. Definici a nutné podmínky existence  $(a, d)$ -distančně antimagického ohodnocení nalezneme v [15].

**Definice 4** [15] Graf  $G$  s  $n$  vrcholy má  $(a, d)$ -distančně antimagické ohodnocení, pokud existuje bijektivní zobrazení  $f : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$  takové, že množina vah všech vrcholů je  $\{a, a + d, a + 2d, \dots, a + (n - 1)d\}$  pro  $a, d \in \mathbb{Z}$ . Váhu vrcholu  $v$  spočítáme jako  $w(v) = \sum_{u \in N_G(v)} f(u)$ .



Obrázek 5.2: Graf se šesti vrcholy s  $(10, 1)$ -distančně antimagickým ohodnocením.

Můžeme si všimnout, že  $k$ -handicapové ohodnocení můžeme považovat za speciální případ  $(a, d)$ -distančně antimagického ohodnocení. Zde váhy vrcholů tvoří aritmetickou posloupnost a navíc rostou zároveň s labelem vrcholu.

**Poznámka 5** Distančně antimagické ohodnocení budeme v textu označovat zkratkou DAM a  $(a, d)$ -distančně antimagické ohodnocení budeme označovat zkratkou  $(a, d)$ -DAM. DM ohodnocení je speciální případ  $(a, d)$ -DAM ohodnocení pro  $d = 0$ .

Nutné podmínky pro existenci distančně antimagického a  $(a, d)$ -distančně antimagického ohodnocení byly čerpány z [14, 15, 16]. To zahrnuje Lemma 2, Důsledky 2.1, 2.2 a Věty 28 až 33. Skládání hranově disjunktních grafů zde znovu používáme v podkapitolách 5.3 a 5.4. Jelikož jsou DAM a  $(a, d)$ -DAM ohodnocení moc obecná na to, abychom je mohli spolu skládat (viz podkapitoly 5.5-5.7), v kapitole 5.8 zavádíme „rostoucí distančně antimagické ohodnocení“, které již skládat lze.

## 5.1 Nutné podmínky existence distančně antimagického ohodnocení

Z článku [14] víme, že pokud mají jakékoliv dva vrcholy v grafu stejnou množinu sousedních vrcholů, graf nemá DAM ohodnocení.

**Lemma 2** [14] *Pokud je graf distančně antimagický, pak pro každé dva vrcholy  $u, v \in V(G)$  platí  $N(u) \neq N(v)$ .*

Jelikož ale u kompletních bipartitních grafů platí, že vrcholy stejné partity sousedí se stejnými vrcholy, z Lemma 2 vyplývá:

**Důsledek 2.1** [14] *Kompletní bipartitní graf  $G$  je distančně antimagický právě tehdy, když  $G = K_{1,1} = K_2$ .*

Pro stromy platí, že pokud by měl libovolný vrchol více než jeden list, tak by tyto listy sdílely stejné sousedy, a tak

**Důsledek 2.2** [14] *Pokud je strom  $T$  distančně antimagický, pak každý nelistový vrchol sousedí s právě jedním listem.*

Každý graf, který je  $(a, d)$ -DAM s  $d > 0$  je také DAM. Naopak ale toto tvrzení neplatí. Např. cesta  $P_4$  je DAM, ale není  $(a, d)$ -DAM. Pokud je  $n$  sudé, cyklus  $C_n$  není  $(a, d)$ -DAM, ale je DAM. Důkazy Vět 28, 29, 30, 31 a zároveň konstrukce ohodnocení pro tyto grafy nalezneme v [14].

**Věta 28** [14] *Cyklus  $C_n$  je distančně antimagický pro každé  $n > 4$ .*

**Věta 29** [14] *Kolo  $W_n$  je distančně antimagické pro každé  $n > 4$ .*

**Věta 30** [14] *Cesta  $P_n$  je distančně antimagická pro všechna  $n \in \mathbb{N}$ .*

**Věta 31** [14] *Graf  $G = r \cdot K_2 + K_1$  je distančně antimagický.*

## 5.2 Nutné podmínky existence $(a, d)$ -distančně antimagického ohodnocení

**Lemma 3** [15] *Pokud je graf  $G$  s počtem vrcholů  $n$ , nejmenším stupněm  $\delta$  a největším stupněm  $\Delta$   $(a, d)$ -distančně antimagický, tak platí*

$$d \leq \frac{2n\Delta - \Delta(\Delta - 1) - \delta(\delta + 1)}{(2n + 1)}. \quad (5.1)$$

**Důsledek 3.1** [15] *Pokud je  $r$ -pravidelný graf  $G$   $(a, d)$ -distančně antimagický s počtem vrcholů  $n$  a platí  $r \geq 2$ , tak  $d < r$ .*

**Důsledek 3.2** [16] *Pokud je graf  $G$   $r$ -pravidelný  $(a, d)$ -distančně antimagický s počtem vrcholů  $n$  a platí  $r \geq \frac{n}{2}$ , tak  $d \leq \frac{n}{2}$ .*



**Věta 32** [15] *Pokud je graf  $G$  3-pravidelný  $(a, d)$ -distančně antimagický graf s počtem vrcholů  $n$ , pak  $a = n + 2$  a  $d = 1$ .*

**Věta 33** [15] *Pokud je graf  $G$  2-pravidelný  $(a, d)$ -distančně antimagický graf s počtem vrcholů  $n$ , pak  $a = n + 3$  a  $d = 1$ .*

### 5.3 Skládání DM a $(a, d)$ -DAM ohodnocení

Jako v předchozích kapitolách, nyní budeme grafy s různými ohodnoceními skládat. Nyní se podívejme na to, jaký výsledek dostaneme při složení distančně magického a  $(a, d)$ -distančně antimagického ohodnocení.

**Věta 34** *Nechť jsou  $G_1 = (V_1, E_1)$  a  $G_2 = (V_2, E_2)$  grafy, kde  $V_1 = V_2$  a  $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ . Nechť je  $f$  distančně magické ohodnocení grafu  $G_1$  a současně  $(a, d)$ -distančně antimagické ohodnocení grafu  $G_2$ . Potom má graf  $G_1 \cup G_2 = (V, E_1 \cup E_2)$   $(a + k, d)$ -distančně antimagické ohodnocení  $f$ .*

**Důkaz** Aby měl graf  $G_1 \cup G_2$   $(a, d)$ -distančně antimagické ohodnocení, musí být váhy všech vrcholů  $v \in V(G_1 \cup G_2)$  navzájem různé a dohromady tvořit aritmetickou posloupnost s diferencí  $d$ .

Postupujme nepřímou. Předpokládáme tedy, že graf  $G_1 \cup G_2$   $(a, d)$ -DAM ohodnocení nemá a proto existují alespoň dva vrcholy  $u, v \in V(G_1 \cup G_2)$ , pro které platí

$$w_{G_1 \cup G_2}(u) = w_{G_1 \cup G_2}(v).$$

Víme, že v grafu  $G_1 \cup G_2$  můžeme sečíst váhy vrcholů zvlášť z DM ohodnocení grafu  $G_1$  a z  $(a, d)$ -DAM ohodnocení grafu  $G_2$ , proto

$$w_{G_1}(u) + w_{G_2}(u) = w_{G_1}(v) + w_{G_2}(v).$$

Váhy všech vrcholů DM grafu  $G_1$  mají stejnou hodnotu  $k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

$$k + w_{G_2}(u) = k + w_{G_2}(v),$$

$$w_{G_2}(u) = w_{G_2}(v).$$

Jelikož má graf  $G_2$   $(a, d)$ -DAM ohodnocení, dva libovolné vrcholy mají různé váhy. Pokud se v grafu  $G_2$  rovnají váhy dvou vrcholů, musí se rovnat i vrcholy samotné. Tedy

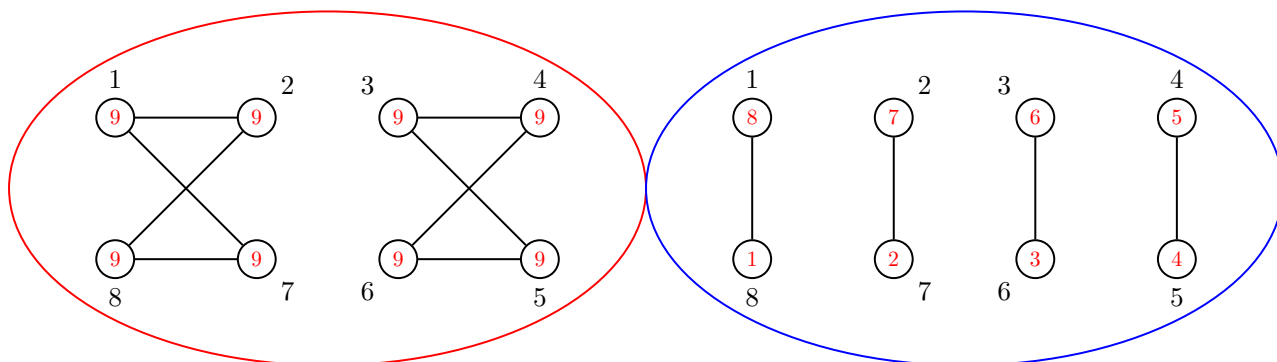
$$u = v.$$

Pokud mají dva vrcholy stejnou váhu, musí se jednat o stejný vrchol. Všechny vrcholy grafu  $G_1 \cup G_2$  mají tedy navzájem různé váhy. Tím, že  $k$  váhám vrcholů grafu  $G_2$ , který má  $(a, d)$ -DAM

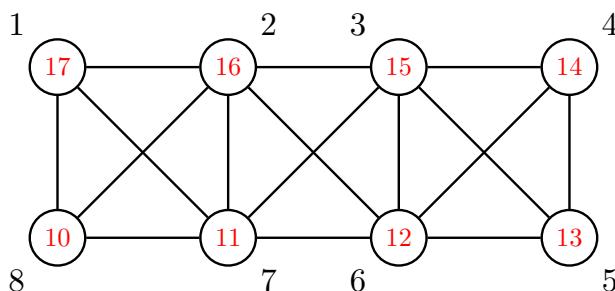
ohodnocení, přičítáme konstantu  $k \in \mathbb{N}$  DM grafu  $G_1$ , zachováváme různost vah a váhy vrcholů grafu  $G_1 \cup G_2$  stále tvoří aritmetickou posloupnost s diferencí  $d$ . Tato posloupnost tentokrát začíná hodnotou  $a + k$ . Graf  $G_1 \cup G_2$  má tak  $(a + k, d)$ -DAM ohodnocení. ■

### Příklad 10

Na obrázku 5.3 vidíme DM graf  $G_1$  s magickou konstantou 9 a  $(1, 1)$ -DAM graf. Pokud tyto grafy složíme, tak získáme graf  $G_1 \cup G_2$  s  $(10, 1)$ -DAM ohodnocením. Přesně tak, jak říká Věta 34.



Obrázek 5.3: DM graf  $G_1$  (červený) a  $(1, 1)$ -DAM graf  $G_2$  (modrý). Červeně jsou vyznačeny váhy vrcholů.



Obrázek 5.4:  $(10, 1)$ -DAM graf  $G_1 \cup G_2$ . Červeně jsou vyznačeny váhy vrcholů. ■

## 5.4 Skládání DM a DAM ohodnocení

Stejně jako v kapitole 5.3, DM ohodnocení můžeme skládat i s „obyčejným“ DAM ohodnocením.

**Věta 35** *Nechť jsou  $G_1 = (V_1, E_1)$  a  $G_2 = (V_2, E_2)$  grafy, kde  $V_1 = V_2$  a  $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ . Necht je  $f$  distančně magické ohodnocení grafu  $G_1$  a současně distančně antimagické ohodnocení grafu  $G_2$ . Potom má graf  $G_1 \cup G_2 = (V, E_1 \cup E_2)$  distančně antimagické ohodnocení  $f$ .*

**Důkaz** Aby měl graf  $G_1 \cup G_2$  DAM ohodnocení, musí být váhy všech vrcholů  $v \in V(G_1 \cup G_2)$  navzájem různé.

Postupujme opět nepřímo. Předpokládáme tedy, že existují alespoň dva vrcholy  $u, v \in V(G_1 \cup G_2)$ , pro které platí

$$w_{G_1 \cup G_2}(u) = w_{G_1 \cup G_2}(v).$$

Víme, že v grafu  $G_1 \cup G_2$  sčítáme váhy vrcholů zvlášť z DM ohodnocení grafu  $G_1$  a DAM ohodnocení grafu  $G_2$ .

$$w_{G_1}(u) + w_{G_2}(u) = w_{G_1}(v) + w_{G_2}(v).$$

Graf  $G_1$  má DM ohodnocení a váhy všech vrcholů mají stejnou hodnotu  $k \in \mathbb{N}$ .

$$k + w_{G_2}(u) = k + w_{G_2}(v),$$

$$w_{G_2}(u) = w_{G_2}(v).$$

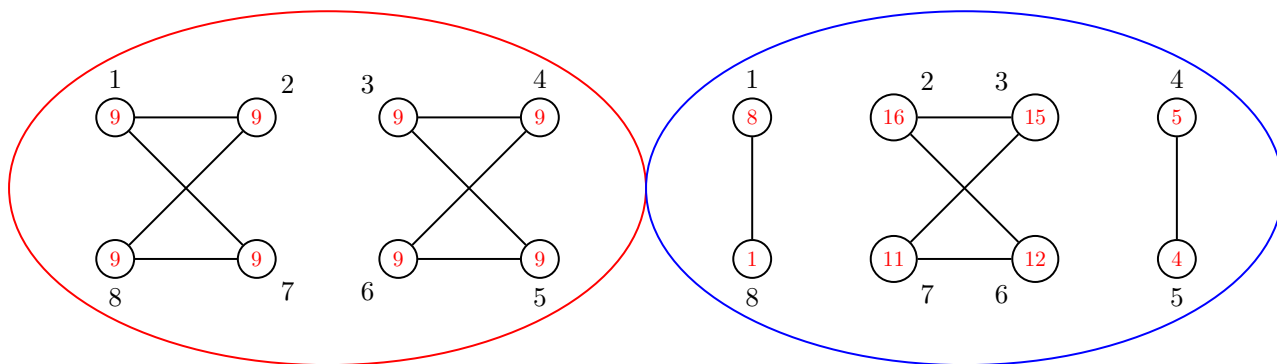
Jelikož má graf  $G_2$  DAM ohodnocení, musí mít libovolné dva vrcholy různé váhy. Pokud se tedy v grafu  $G_2$  rovnají váhy dvou vrcholů, musí se rovnat i vrcholy samotné. Tedy

$$u = v.$$

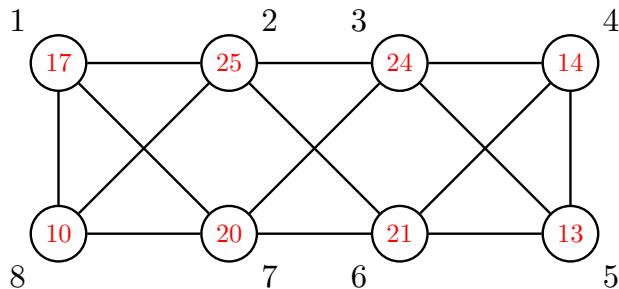
Pokud mají dva vrcholy stejnou váhu, musí se jednat o stejný vrchol. Všechny vrcholy grafu  $G_1 \cup G_2$  mají tedy navzájem různé váhy a graf  $G_1 \cup G_2$  má tak DAM ohodnocení. ■

### Příklad 11

Na obrázku 5.5 níže vidíme graf  $G_1$  s DM ohodnocením a graf  $G_2$  s DAM ohodnocením. Pokud tyto dva grafy složíme, získáme nový graf  $G_1 \cup G_2$  (obrázek 5.6), který má DAM ohodnocení.



Obrázek 5.5: DM graf  $G_1$  (červený) a DAM graf  $G_2$  (modrý). Červeně jsou vyznačeny váhy vrcholů.



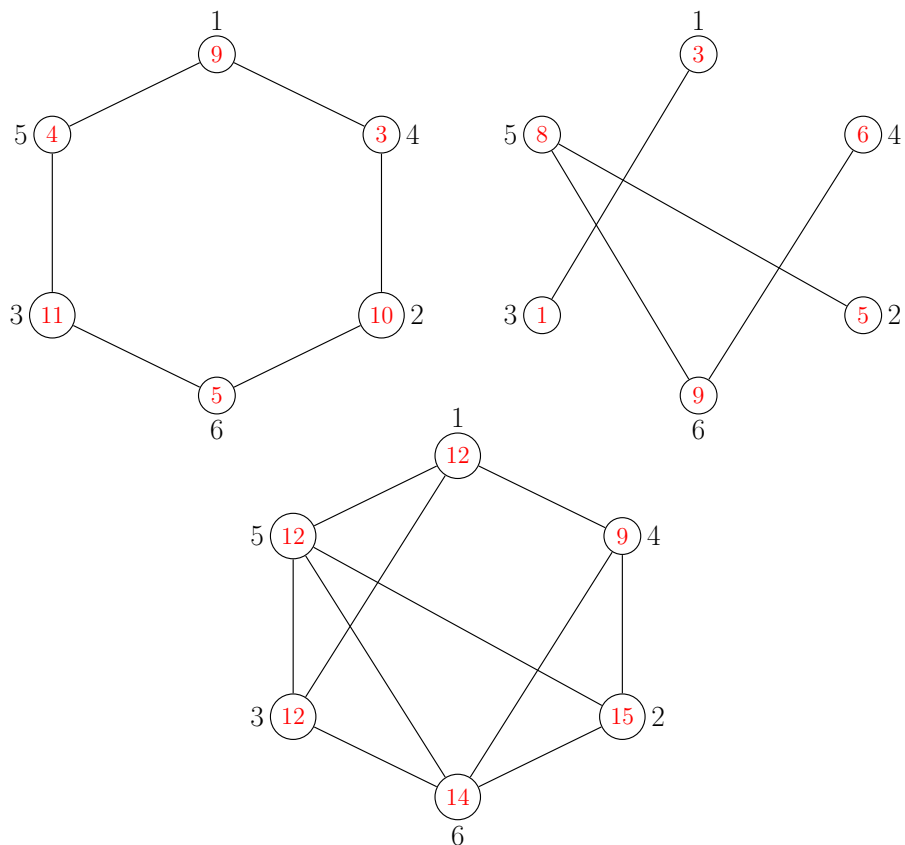
Obrázek 5.6: DAM graf  $G_1 \cup G_2$ . Červeně jsou vyznačeny váhy vrcholů.

■

## 5.5 Skládání dvou DAM ohodnocení

V této kapitole se podíváme na to, že ne všechna ohodnocení lze vždy úspěšně skládat. U předchozích ohodnocení jsou jejich „vlastnosti“ natolik jasné, že lze grafy hranově skládat. DAM ohodnocení má ale pouze jednu vlastnost – různost vah všech vrcholů. Pokud tedy budeme chtít složit dva grafy s DAM ohodnocením, může nastat situace, že budou mít dva vrcholy sjednoceného grafu stejnou váhu.

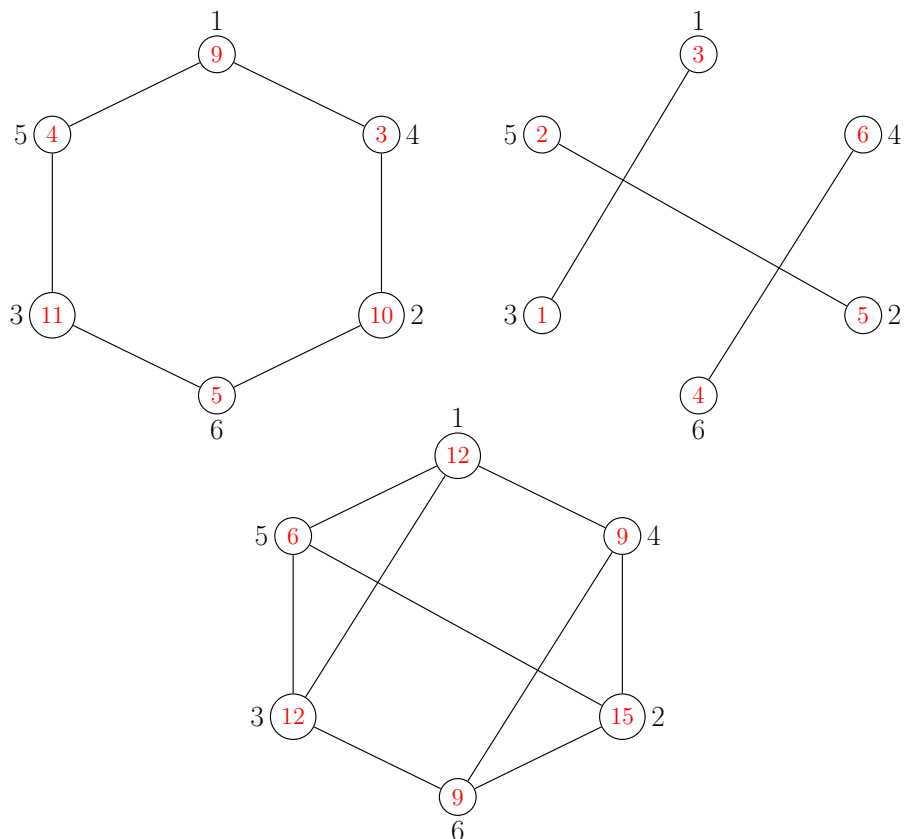
Podíváme-li se na grafy na obrázku 5.7, vidíme, že ačkoliv mají oba grafy  $G_1$  a  $G_2$  DAM ohodnocení, jejich sjednocení  $G_1 \cup G_2$  DAM ohodnocení nemá. Váhu 12 totiž sdílejí hned 3 vrcholy. Přesněji vrcholy s labely 1, 5 a 3.



Obrázek 5.7: Graf  $G_1$  s DAM ohodnocením (vlevo), graf  $G_2$  s DAM ohodnocením (vpravo) a graf  $G_1 \cup G_2$  (dole). Červeně jsou vyznačeny váhy vrcholů.

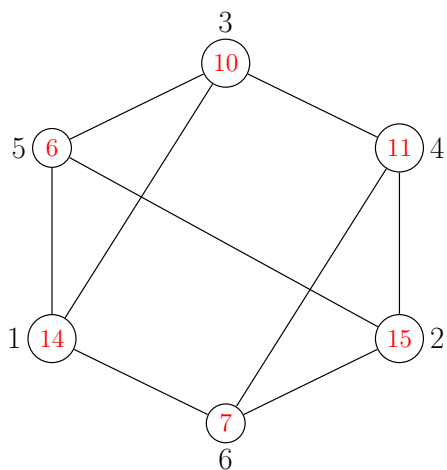
## 5.6 Skládání DAM a $(a, d)$ -DAM ohodnocení

Stejně jako v předchozí kapitole se přesvědčíme, že tak, jako jsme složením dvou grafů s DAM ohodnocením získali graf, který žádné „pěkné“ ohodnocení neměl, složením grafů s DAM a  $(a, d)$ -DAM ohodnocením můžeme získat graf, který žádné „pěkné“ ohodnocení nemá. Na obrázku 5.8 můžeme vidět, že ačkoliv má graf  $G_1$  DAM ohodnocení a graf  $G_2$  má  $(1, 1)$ -DAM ohodnocení,  $f$  není antimagické ohodnocení grafu  $G_1 \cup G_2$ . Dva jeho vrcholy sdílejí váhu 9 a další dva vrcholy váhu 12. Tato dvě ohodnocení jsou tedy stále příliš obecná na to, abychom je mohli obecně skládat.



Obrázek 5.8: Graf  $G_1$  s DAM ohodnocením (vlevo), graf  $G_2$  s  $(1, 1)$ -DAM ohodnocením (vpravo) a graf  $G_1 \cup G_2$  (dole). Červeně jsou vyznačeny váhy vrcholů.

Ohodnocení  $f$  grafu  $G_1 \cup G_2$  nemusí být antimagické. To ale neznamená, že graf  $G_1 \cup G_2$  nemá žádné ohodnocení. Na obrázku 5.9 můžeme vidět graf  $G_1 \cup G_2$ , který má jiné ohodnocení než je  $f$  a je distančně antimagické.

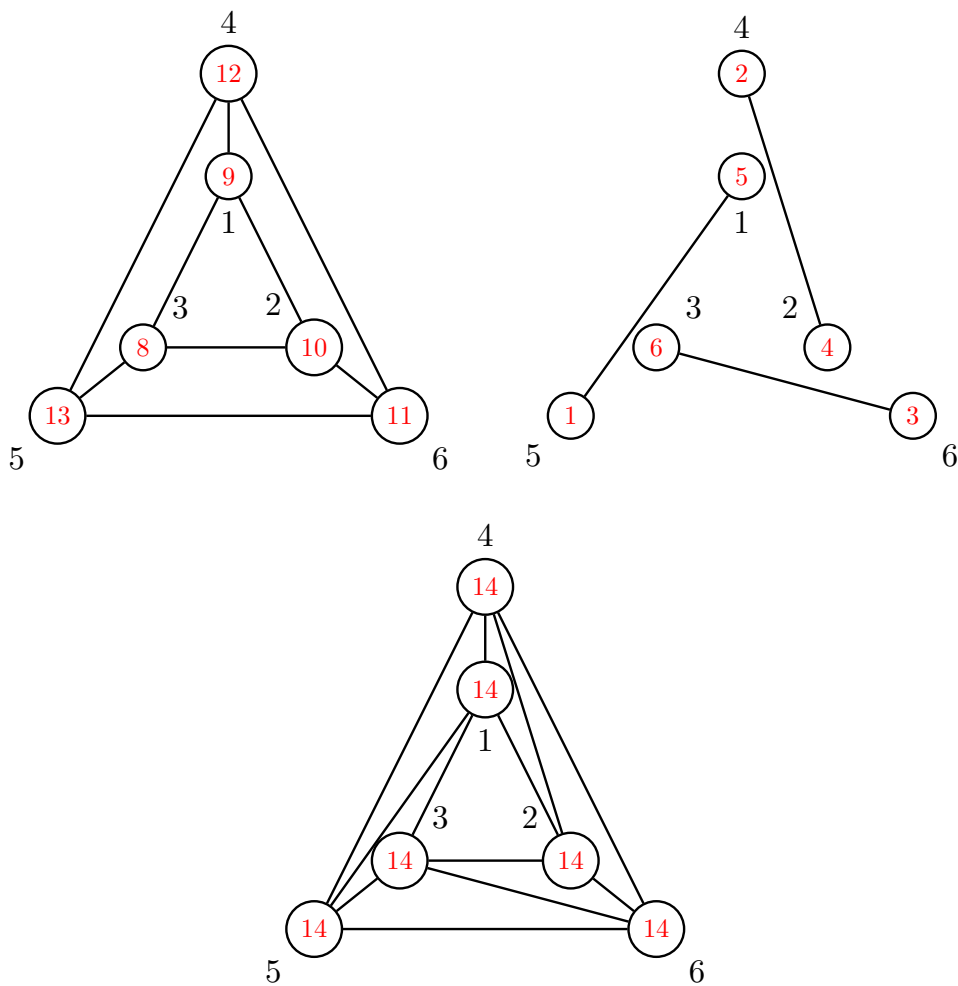


Obrázek 5.9: Graf  $G_1 \cup G_2$  s jiným distančně antimagickým ohodnocením.

## 5.7 Skládání dvou $(a, d)$ -ohodnocení

Jak jsme mohli tušit, ani dvě  $(a, d)$ -DAM ohodnocení nám ve sjednoceném grafu nezajistí automaticky DAM nebo  $(a, d)$ -DAM ohodnocení. V některých případech se můžou ve sjednoceném grafu ocitnout součty vah vrcholů, které dají stejné číslo a poruší tak antimagičnost.

Na obrázku 5.10 můžeme vidět dva hranově disjunktí grafy s  $(a, d)$ -DAM ohodnocením. Můžeme si všimnout, že když tyto dva grafy sjednotíme, získáme graf s ohodnocením, pro které mají všechny vrcholy stejnou váhu. Neobjevily se zde např. pouze dva nebo tři vrcholy se stejnou váhou, jak tomu bylo v minulých dvou kapitolách. Můžeme dokonce říct, že tento graf má (náhodou) DM ohodnocení. Ohodnocení sjednoceného grafu nemusí být obecně ani DM, DAM nebo  $(a, d)$ -DAM.



Obrázek 5.10: Graf  $G_1$  (vlevo) s  $(8, 1)$ -DAM ohodnocením, graf  $G_2$  (vpravo) s  $(1, 1)$ -DAM ohodnocením a graf  $G_1 \cup G_2$  s DM ohodnocením (dole). Červeně jsou vyznačeny váhy vrcholů.

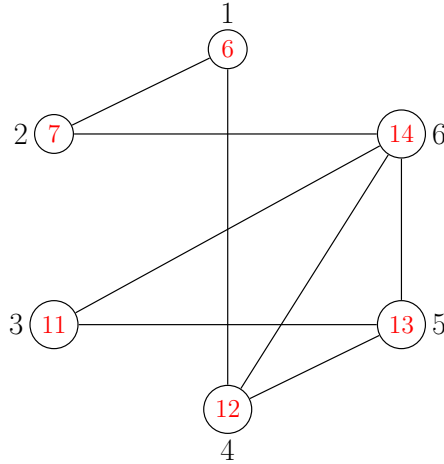
Můžeme si všimnout, že jestliže má graf  $G$  s DM ohodnocením podgraf  $H$  s  $(a, d)$ -ohodnocením,

tak graf  $G - H$  je také  $(a, d)$ -distančně antimagický. Na obrázku 5.10 je grafem  $G$  distančně magický graf dole, podgrafem  $H$  je graf vlevo nahoře s  $(8, 1)$ -DAM ohodnocením a grafem  $G - H$  je graf vpravo nahoře s  $(1, 1)$ -DAM ohodnocením.

## 5.8 Skládání speciálních ohodnocení

Skládáním dvou DAM ohodnocení, dvou  $(a, d)$ -DAM ohodnocení nebo DAM a  $(a, d)$ -DAM ohodnocení nemusíme docílit jistých výsledků. Může se stát, že některé vrcholy složeného grafu budou mít stejnou váhu. Můžeme se tak pokusit o skládání speciálního případu DAM ohodnocení, které nám zajistí, že složený graf nějaké námi známé ohodnocení bude mít.

Jak speciální případ DAM ohodnocení vypadá? Víme, že váhy vrcholů grafu s DAM ohodnocením jsou navzájem různá čísla. Toto ohodnocení má svůj speciální případ, který nazveme „rostoucí“ DAM ohodnocení. Váhy vrcholů jsou navzájem různá čísla, která musí růst zároveň s labelem vrcholů. Příklad tohoto ohodnocení můžeme vidět na obrázku 5.11. Skládání DM ohodnocení a rostoucího DAM ohodnocení nebude tak přísné jako skládání DM a  $(a, d)$ -DAM, ale zase obsahuje dostatek podmínek na to, aby se ve sjednoceném grafu neocitly vrcholy stejné váhy. Toto skládání je také speciálním případem skládání DM a DAM ohodnocení (Věta 35) – je jeho „přísnější“ verzí. To můžeme přesněji vidět u Věty 36 a jejího důkazu.



Obrázek 5.11: Graf se šesti vrcholy s „rostoucí“ distančně antimagickým ohodnocením. Váhy vrcholů jsou vyznačeny červeně.

Jelikož je rostoucí DAM ohodnocení speciálním případem DAM ohodnocení, Věta 36 je speciálním případem Věty 35, kde skládáme graf s DM ohodnocením a graf s DAM ohodnocením.

**Věta 36** *Nechť jsou  $G_1 = (V_1, E_1)$  a  $G_2 = (V_2, E_2)$  grafy, kde  $V_1 = V_2$  a  $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ . Nechť je  $f$  distančně magické ohodnocení grafu  $G_1$  a současně rostoucí distančně antimagické ohodnocení grafu  $G_2$ . Potom má graf  $G_1 \cup G_2 = (V, E_1 \cup E_2)$  rostoucí distančně antimagické ohodnocení  $f$ .*



**Důkaz** Jelikož má graf  $G_1$  DM ohodnocení a graf  $G_2$  rostoucí DAM ohodnocení, víme, že pro všechny vrcholy  $u, v \in V(G)$  takové, že  $f(u) < f(v)$ , platí

$$w_{G_1}(u) = w_{G_1}(v) \quad \text{a} \quad w_{G_2}(u) < w_{G_2}(v).$$

Jelikož

$$w_{G_1 \cup G_2}(u) = w_{G_1}(u) + w_{G_2}(u)$$

a

$$w_{G_1 \cup G_2}(v) = w_{G_1}(v) + w_{G_2}(v),$$

můžeme napsat, že

$$w_{G_1}(u) + w_{G_2}(u) < w_{G_1}(v) + w_{G_2}(v).$$

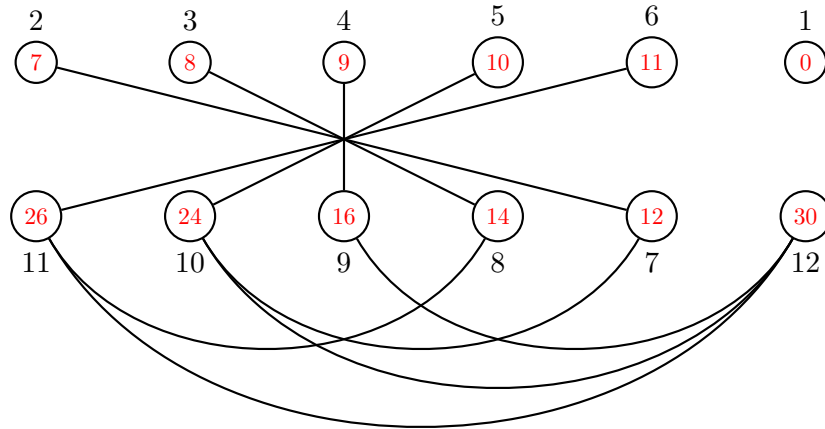
Jelikož má graf  $G_1$  DM ohodnocení, tak váhy všech vrcholů jsou stejné. Přičtením konstanty bude nerovnost zachována a váhy všech vrcholů porostou s jejich labely. Můžeme napsat, že

$$w_{G_1 \cup G_2}(u) < w_{G_1 \cup G_2}(v).$$

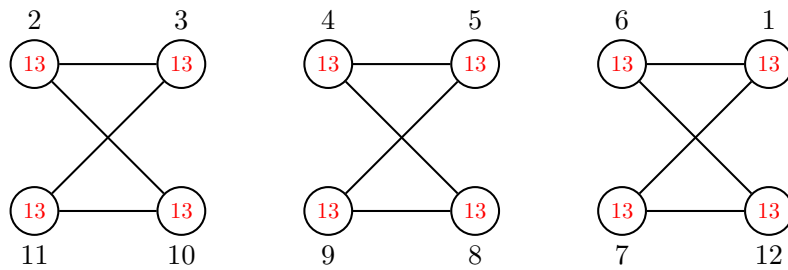
Jestliže rostou váhy vrcholů v grafu  $G_2$ , přičtením konstanty ke každé váze tuto vlastnost neporuší a graf  $G_1 \cup G_2$  má rostoucí DAM ohodnocení. ■

### Příklad 12

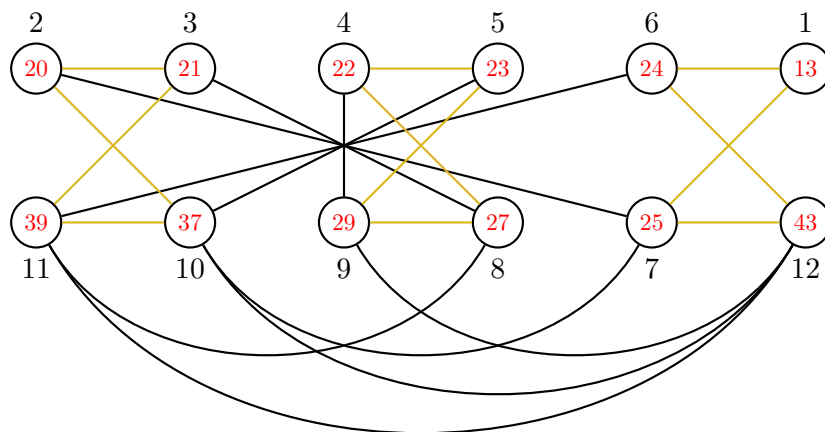
Jako graf  $G_2$  s rostoucím DAM ohodnocením si zvolme graf na dvanácti vrcholech z obrázku 5.12. Abychom získali hranově disjunktní graf s distančně magickým ohodnocením, použijeme stejný postup jaký jsme použili u příkladu 2. Vytvoříme tedy graf se zakázanými hranami  $Z$  a do tohoto grafu  $Z$  přidáme hrany, které reprezentují cykly  $C_4$ . Tyto cykly mají distančně magické ohodnocení a odpovídají našim požadavkům pro graf  $G_1$ . Ten vidíme na obrázku 5.13. Po sjednocení těchto dvou hranově disjunktních grafů získáme graf  $G_1 \cup G_2$ , který má rostoucí distančně antimagické ohodnocení a je zobrazen na obrázku 5.14. Všechny tyto grafy (Obrázky 5.12, 5.13 a 5.14) mají červeně vyznačeny váhy vrcholů.



Obrázek 5.12: Graf  $G_2$  s rostoucím DAM ohodnocením.



Obrázek 5.13: Graf  $G_1$  s DM ohodnocením.



Obrázek 5.14: Graf  $G_1 \cup G_1$  s rostoucím DAM ohodnocením. Žlutě jsou vyznačeny hrany grafu  $G_1$ .

■

Skládat můžeme také grafy, které oba mají rostoucí DAM ohodnocení.

**Věta 37** *Nechť jsou  $G_1 = (V_1, E_1)$  a  $G_2 = (V_2, E_2)$  grafy, kde  $V_1 = V_2$  a  $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ . Necht je  $f$  rostoucí distančně antimagické ohodnocení grafu  $G_1$  a současně rostoucí distančně antimagické ohodnocení grafu  $G_2$ . Potom má graf  $G_1 \cup G_2 = (V, E_1 \cup E_2)$  rostoucí distančně antimagické ohodnocení  $f$ .*

**Důkaz** Jelikož mají grafy  $G_1$  a  $G_2$  rostoucí DAM ohodnocení, pro všechny vrcholy  $u, v \in V(G)$  takové, že  $f(u) < f(v)$ , platí

$$w_{G_1}(u) < w_{G_1}(v) \quad \text{a} \quad w_{G_2}(u) < w_{G_2}(v). \quad (5.2)$$

Váhy vrcholů grafu  $G_1 \cup G_2$  vypočteme sečtením vah vrcholu v grafech  $G_1$  a  $G_2$ , tedy

$$w_{G_1 \cup G_2}(u) = w_{G_1}(u) + w_{G_2}(u),$$

$$w_{G_1 \cup G_2}(v) = w_{G_1}(v) + w_{G_2}(v).$$

Jelikož mezi stranami v nerovnicích 5.2 platí stejný vztah, můžeme napsat

$$w_{G_1}(u) + w_{G_2}(u) < w_{G_1}(v) + w_{G_2}(v)$$

a z toho

$$w_{G_1 \cup G_2}(u) < w_{G_1 \cup G_2}(v).$$

Vidíme tedy, že mají-li oba grafy  $G_1$  a  $G_2$  rostoucí DAM ohodnocení (váhy vrcholů jsou různé a rostou s labelem vrcholu), má i graf  $G_1 \cup G_2$  rostoucí DAM ohodnocení. ■

Příklad pro užití Věty 37 se nám nepodařil nalézt. Čekáme, že hranově disjunktí grafy s rostoucím DAM ohodnocením budou existovat pro větší počet vrcholů. Pro „malý“ počet vrcholů je obtížné nalézt dva grafy s rostoucím DAM ohodnocením takové, aby nesdílely žádnou hranu.

## Kapitola 6

# Supermagické ohodnocení

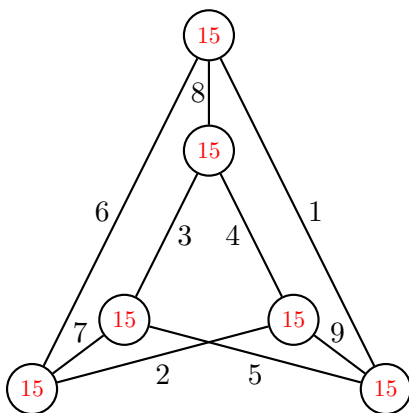
V této kapitole se zaměříme na supermagické ohodnocení. Oproti předchozím ohodnocením, která byla vrcholová, supermagické ohodnocení je hranové ohodnocení. Labely jsou přiřazovány hranám. Příklad supermagického ohodnocení grafu  $M_3$  můžeme vidět na obrázku 6.1.

**Definice 5** [17] Graf  $G$  s  $n$  vrcholy má supermagické ohodnocení, pokud existuje bijektivní zobrazení  $f : E(G) \rightarrow \{a, a + 1, a + 2, \dots, a + |E(G)| - 1\}$  takové, že pro každý vrchol  $v \in V(G)$  platí

$$w(v) = \sum_{u \in N(v)} f(uv) = k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Tzn., že váha všech vrcholů grafu  $G$  s ohodnocením  $f$  je stejné číslo  $k$ , které nazýváme magická konstanta.

**Poznámka 6** Někdy je za supermagické ohodnocení považováno zobrazení  $f : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, |E(G)|\}$ . To je ale pouze speciálním případem výše definovaného supermagického ohodnocení pro  $a = 1$ . U pravidelných grafů lze  $a = 1$  zajistit vždy, viz podkapitola 6.4.1.



Obrázek 6.1: Supermagické ohodnocení Möbiova žebříku  $M_3$ . Červeně jsou vyznačeny váhy vrcholů.

Známé výsledky představujeme v podkapitolách 6.1 a 6.2 (Věty 38 až 42 z článků [17] a [18]). V podkapitole 6.4 jsme ke konstrukci nových SPM ohodnocení použili zvýšení všech labelů vrcholů. Novým výsledkem je podkapitola 6.3, kde „posunujeme“ ohodnocení dvou různě pravidelných grafů tak, abychom je mohli skládat.

## 6.1 Nutné podmínky existence SPM ohodnocení

V roce 1966 zavedl B. M. Stewart ve článku „Magic graphs“ [17] pojem supermagického ohodnocení. Tam se také nachází vztah pro výpočet magické konstanty. Zaveďme si nejprve označení

$$|E(G)| = e, \quad |V(G)| = v.$$

Jelikož labely na hranách nabývají hodnot  $a, a + 1, \dots, a + e - 1$ , jejich součet bude  $e$ -násobek čísla  $a$  dohromady se součtem hodnot  $1, 2, \dots, e - 1$ .

$$\sum_{x \in V(G)} f(xy) = \left( e \cdot a + \frac{e(e-1)}{2} \right) \quad (6.1)$$

Jelikož je váha všech vrcholů stejná (magická konstanta  $k$ ), součet 6.1 se současně rovná  $v$ -násobku magické konstanty. Jelikož ale labely všech hran započítáváme dvakrát – jednou pro oba s ní incidentní vrcholy, musíme vztah 6.1 vynásobit dvěma.

$$v \cdot k = 2 \sum_{x \in V(G)} f(xy) = 2 \left( e \cdot a + \frac{e(e-1)}{2} \right) \quad (6.2)$$

Magická konstanta je proto pro supermagický graf určena jednoznačně.

**Věta 38** [17] *Pokud je graf  $G$  supermagický a labely jeho hran jsou  $\{a, a + 1, \dots, a + e - 1\}$ , pak je pro všechny vrcholy  $x \in V(G)$  magická konstanta  $k \in \mathbb{N}$  rovna*

$$k = \frac{2}{v} \sum_{x \in V(G)} f(xy) = \frac{2e}{v} \left( a + \frac{e-1}{2} \right). \quad (6.3)$$

Z principu sudosti víme, že platí

$$\sum_{x \in V(G)} \deg(x) = 2e.$$

Pro  $r$ -pravidelné grafy pak navíc

$$v \cdot \deg(x) = 2e,$$

$$v \cdot r = 2e.$$

$$e = \frac{v \cdot r}{2}.$$

Pro  $r$ -pravidelné grafy je vzorec pro magickou konstantu následující.

**Věta 39** *Pokud je  $r$ -pravidelný graf  $G$  supermagický a labely jeho hran jsou  $\{a, a+1, \dots, a+e-1\}$ , pak je pro všechny vrcholy  $x \in V(G)$  magická konstanta  $k \in \mathbb{N}$  rovna*

$$k = \frac{2}{v} \sum_{x \in V(G)} f(xy) = r \cdot \left( a + \frac{v \cdot r - 2}{4} \right).$$

Pro  $r$ -pravidelné grafy také platí následující tvrzení.

**Věta 40** [18] *Nechť je  $r$ -pravidelný graf  $G$  supermagický. Pokud je  $r \equiv 1 \pmod{2}$ , tak počet vrcholů musí být  $n \equiv 2 \pmod{4}$ .*

Např. aby byl 3-pravidelný graf supermagický, nemůže mít 8 vrcholů.

## 6.2 SPM ohodnocení kopií grafů

Jednou z možností, jak zkonstruovat supermagické ohodnocení grafu  $mG$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) je využití supermagického ohodnocení grafu  $G$  k sestrojení supermagického ohodnocení grafu  $mG$ , kde  $m \in \mathbb{N}$ . To ovšem nelze použít pro všechny grafy. Existence ohodnocení kopií supermagického grafu bude pravděpodobnější, pokud je graf  $G$  pravidelný a třídy  $I$  (hrany lze obarvit  $\Delta(G)$  barvami).

Označme  $\mathcal{G}$  množinu všech supermagických pravidelných grafů a  $\mathcal{G}(r)$  množinu všech supermagických  $r$ -pravidelných grafů. Také označme  $\mathcal{F}(k)$ , pro  $k \geq 2$ , množinu všech pravidelných grafů, které lze rozložit na  $k$  navzájem hranově disjunktních  $\delta$ -faktorů – tzn.  $\delta$  pravidelných faktorů. Ivančo et al ukázal v [18] následující Věty.

**Věta 41** [18] *Nechť  $G \in \mathcal{G} \cap \mathcal{F}(k)$ . Pak platí následující tvrzení:*

(i) *Pokud je  $k$  sudé, pak  $m \cdot G \in \mathcal{G}$  pro každé  $m \in \mathbb{N}$ ,*

(ii) *pokud je  $k$  liché, pak  $m \cdot G \in \mathcal{G}$  pro každé liché  $m \in \mathbb{N}$ .*

Kompletní  $k$ -partitní graf je graf, jehož vrcholy jsou rozděleny do  $k \geq 2$  disjunktních množin (partit)  $V_1, \dots, V_k$  takových, že dva vrcholy jsou sousední pouze tehdy, když náležejí do různých partit. Jestliže  $|V_i| = n$ , pro  $\forall i = 1, 2, \dots, k$ , pak je graf  $r$ -pravidelný, kde  $r = (k-1)n$  a značí se  $K_{k[n]}$ .

**Věta 42** [18] *Graf  $m \cdot K_{k[n]} \in \mathcal{G}$  právě tehdy, když je splněna jedna z následujících podmínek:*

(i)  $n = 1, k = 2, m = 1,$

(ii)  $n = 1, k = 5, m \geq 2,$

- (iii)  $n = 1, 5 < k \equiv 1 \pmod{4}, m \geq 1,$
- (iv)  $n = 1, 6 \leq k \equiv 2 \pmod{4}, m \equiv 1 \pmod{2},$
- (v)  $n = 1, 7 \leq k \equiv 3 \pmod{4}, m \equiv 1 \pmod{2},$
- (vi)  $n = 2, k \geq 3, m \geq 1,$
- (vii)  $3 \leq n \equiv 1 \pmod{2}, 2 \leq k \equiv 1 \pmod{4}, m \geq 1,$
- (viii)  $3 \leq n \equiv 1 \pmod{2}, 2 \leq k \equiv 2 \pmod{4}, m \equiv 1 \pmod{2},$
- (ix)  $3 \leq n \equiv 1 \pmod{2}, 2 \leq k \equiv 3 \pmod{4}, m \equiv 1 \pmod{2},$
- (x)  $4 \leq n \equiv 0 \pmod{2}, k \geq 2, m \geq 1.$

### 6.3 Sjedenocení SPM grafů

U všech námi vybraných vrcholových ohodnocení jsme skládali grafy se stejnou množinou vrcholů a s disjunktími množinami hran. Jelikož u vrcholového ohodnocení jsou přiřazeny labely vrcholům a sjednocované grafy mají disjunktíni pouze množiny hran, sjednocený graf má správnou množinu labelů (tzn.  $1, \dots, n$ , kde  $n$  je počet vrcholů grafu). Pokud se tento postup rozhodneme opakovat i u supermagického ohodnocení, narazíme na problém. Jelikož je supermagické ohodnocení hranové, sjednocením dvou grafů s různými množinami hran získáme graf, který může mít více stejných labelů, a tak nemůže být supermagický. Jelikož labely supermagického ohodnocení mohou začít libovolným přirozeným číslem, pokusíme se ohodnocení obou grafů (pokud jsou pravidelné) „posunout“ tak, aby se žádný label ve sjednoceném grafu neopakoval, a zároveň, aby labely obou grafů na sebe navazovaly. Následující část je vlastním příspěvkem autora.

#### 6.3.1 Pokud $G$ a $H$ jsou pravidelné grafy

Uvažujme dva supermagické grafy  $G$  a  $H$ . Sjedenocením těchto grafů nezískáme supermagický graf. Pokud ale hodnoty labelů ohodnocení grafů  $G$  a  $H$  zvětšíme tak, aby se magické konstanty těchto ohodnocení rovnaly a intervaly posunutých labelů na sebe navazovaly, tak  $G \cup H$  supermagický bude.

**Věta 43** *Bud'  $G$   $r$ -pravidelný graf se supermagickým ohodnocením  $f$  s magickou konstantou  $k$  a labely  $\{a, a + 1, \dots, a + |E(G)| - 1\}$  a bud'  $H$   $s$ -pravidelný graf se supermagickým ohodnocením  $g$  s magickou konstantou  $l$  a labely  $\{b, b + 1, \dots, b + |E(H)| - 1\}$ , kde  $r \neq s$ . Pak existují supermagická ohodnocení  $f'$  s magickou konstantou  $k'$  a labely  $\{a + c, a + c + 1, a + c + 2, \dots, a + c + |E(G)| - 1\}$  a  $g'$  s magickou konstantou  $l'$  a labely  $\{b + d, b + d + 1, \dots, b + d + |E(H)| - 1\}$ , kde*

$$c = \frac{s(a + |E(G)| - b) + l - k}{(r - s)} \quad a \quad d = \frac{r(a + |E(G)| - b) + l - k}{(r - s)},$$

taková, že  $k' = l'$  a graf  $G \cup H$  je supermagický s magickou konstantou  $k' = l'$  a labely

$$\{a + c, a + c + 1, \dots, a + c + |E(G)| - 1, b + d, b + d + 1, \dots, b + d + |E(H)| - 1\}.$$

**Důkaz** Předpokládejme, že pro grafy  $G$  a  $H$  platí  $V(G) \cap V(H) = \emptyset$  a proto platí současně  $E(G) \cap E(H) = \emptyset$ .

Snažíme se „posunout“ supermagická ohodnocení grafů  $G$  a  $H$  tak, aby jejich sjednocení bylo supermagické. K hodnotám labelů grafů  $G$  a  $H$  přičteme dva různé násobky čísel  $c$  a  $d$  tak, aby se „posunuté“ magické konstanty  $k' = k + r \cdot c$  a  $l' = l + s \cdot d$  rovnaly a množiny labelů grafů  $G$  a  $H$  na sebe navazovaly.

Vždy chceme, aby labely menšího grafu navazovaly na labely většího grafu. Búno předpokládejme, že  $|E(G)| > |E(H)|$ . V opačném případě grafy  $G$  a  $H$  přeznačíme tak, aby  $|E(G)| > |E(H)|$  platilo. Chceme, aby labely grafu  $H$  navazovaly na labely grafu  $G$ . Tzn. že graf  $G \cup H$  bude mít množinu labelů

$$\{a + c, a + c + 1, \dots, a + c + |E(G)| - 1, b + d, b + d + 1, \dots, b + d + |E(H)| - 1\}.$$

Řešíme tedy soustavu dvou rovnic o dvou neznámých  $c$  a  $d$

$$k + r \cdot c = l + s \cdot d \tag{6.4}$$

$$a + c + |E(G)| = b + d, \tag{6.5}$$

Z rovnice 6.5 vyjádříme  $d$ :

$$d = a + c + |E(G)| - b \tag{6.6}$$

a dosadíme do 6.4 a vyjádříme  $c$ .

$$k + r \cdot c = l + s(a + c + |E(G)| - b),$$

$$r \cdot c - s \cdot c = l - k + s(a + |E(G)| - b),$$

$$c = \frac{s(a + |E(G)| - b) + l - k}{(r - s)}.$$

Dosazením do 6.6 získáme po úpravě vztah pro  $d$ :

$$d = \frac{r(a + |E(G)| - b) + l - k}{(r - s)}.$$

V odvození vztahů pro  $c$  a  $d$  jsme předpokládali  $r \neq s$ , což je dle předpokladů věty splněno.

Čísla  $c$  a  $d$  přičteme k labelům grafů  $G$  a  $H$ , tzn.

$$a + c, a + c + 1, a + c + 2, \dots, a + c + |E(G)| - 1, \tag{6.7}$$



$$b + d, b + d + 1, b + d + 2, \dots, b + d + |E(H)| - 1. \quad (6.8)$$

Tímto získáme dvě nová ohodnocení  $f'$  a  $g'$ . Supermagické ohodnocení  $f'$  grafu  $G$  s magickou konstantou  $k'$  a labely 6.7 a supermagické ohodnocení  $g'$  grafu  $H$  s magickou konstantou  $l'$  a labely 6.8, přičemž  $k' = l'$ .

Sjednocením těchto grafů získáme nový graf  $G \cup H$ , který má supermagické ohodnocení s magickou konstantou  $k'$  a labely

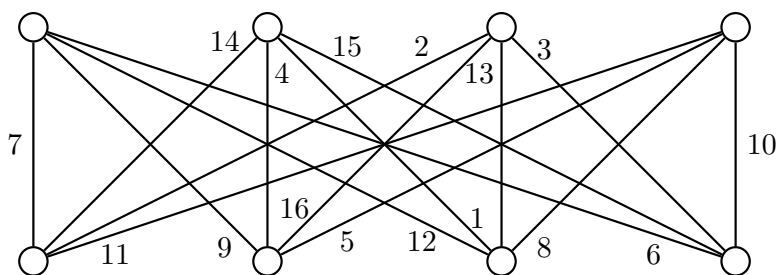
$$\{a + c, a + c + 1, \dots, a + c + |E(G)| - 1, b + d, b + d + 1, \dots, b + d + |E(H)| - 1\}.$$

■

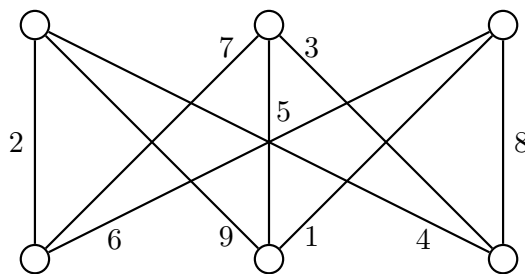
Ukažme si tuto myšlenku na příkladu.

### Příklad 13

Mějme 4-pravidelný graf  $G$  na obrázku 6.2 a 3-pravidelný graf  $H$  na obrázku 6.3. Graf  $G$  je supermagický s ohodnocením  $f$ , magickou konstantou  $k = 34$  a labely  $1, 2, 3, \dots, 16$  a graf  $H$  je supermagický s ohodnocením  $g$ , magickou konstantou  $l = 15$  a labely  $1, 2, 3, \dots, 9$ .



Obrázek 6.2: Graf  $G = K_{4,4}$  se supermagickým ohodnocením.

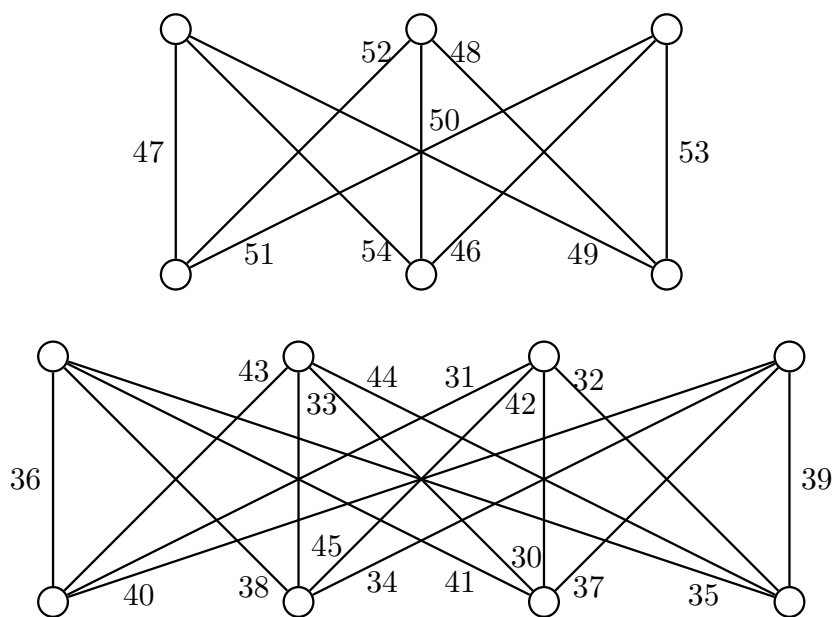


Obrázek 6.3: Graf  $H = K_{3,3}$  se supermagickým ohodnocením.

Řešíme soustavu rovnic

$$\begin{aligned}
 34 + 4c &= 15 + 3d \\
 \frac{c + 17 &= 1 + d}{d = 16 + c} \\
 34 + 4c &= 15 + 3(16 + c) \\
 \frac{c &= 29}{d = 16 + c = 45}
 \end{aligned}$$

K labelům grafů  $G$  a  $H$  přičteme čísla  $c = 29$  a  $d = 45$ . Získáme supermagické ohodnocení  $f'$  a  $g'$  grafů  $G$  a  $H$ . Pokud tyto grafy sloučíme, graf  $G \cup H$  je také supermagický.

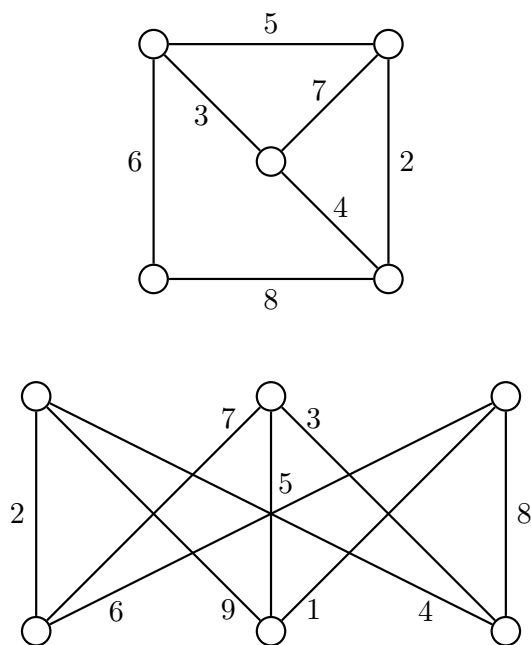


Obrázek 6.4: Graf  $G \cup H$  se supermagickým ohodnocením.

■

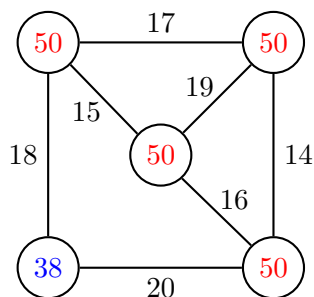
### 6.3.2 Pokud $G$ a $H$ nejsou pravidelné grafy

Pokusme se nyní použít postup z kapitoly 6.3.1 u alespoň jednoho nepravidelného grafu. Vezměme si například dvojici grafů z obrázku 6.5.



Obrázek 6.5: Supermagické grafy  $G$  a  $H$ .

Pokud se pokusíme „posunout“ ohodnocení grafů  $G$  a  $H$  stejně jako v předchozí kapitole, narazíme na problém. Řekněme například, že v grafu  $G$  budeme muset ke každému labelu přičíst číslo 12. Vznikne graf na obrázku 6.6.



Obrázek 6.6: Supermagické grafy  $G$  a  $H$ .

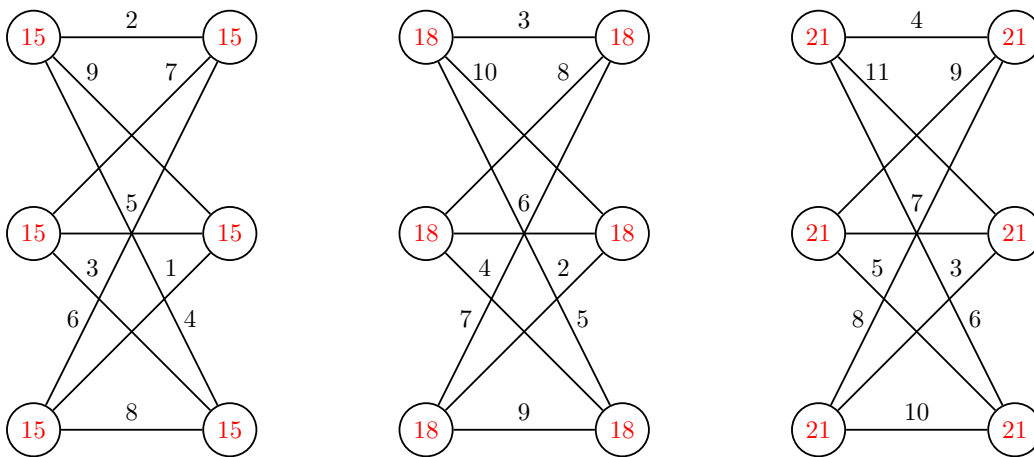
Pokud se podíváme na váhy vrcholů tohoto grafu, zjistíme, že jeden vrchol nemá stejnou váhu jako ostatní, a graf  $G$  tak není supermagický. Tento problém nastane u každého nepravidelného grafu. Číslo, které přičítáme k labelům, se do vah všech vrcholů nezapočítá se stejným násobkem, a tak vrcholy, které mají jiný počet sousedů, nebudou mít stejnou váhu. Posunuté ohodnocení grafů  $G$  a  $H$  tedy obecně nemůžeme sjednotit, protože by výsledný graf nebyl supermagický.

## 6.4 Spektrum magické konstanty

V kapitole 6.1 jsme z Vět 38 a 39 zjistili, že pokud je pevně zvoleno  $a$ , magická konstanta je pro supermagický graf  $G$  určena jednoznačně.

### 6.4.1 Pro pravidelné grafy

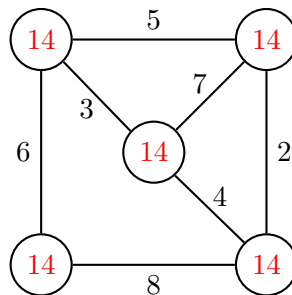
Jak můžeme na obrázku 6.7 vidět, pokud existuje SPM ohodnocení  $r$ -pravidelného grafu pro  $a = 1$ , existuje SPM ohodnocení stejného grafu pro  $a = 1 + i$ , kde  $i \in \mathbb{N}$ . To znamená, že přičtením jedničky ke všem labelům hran zvýšíme váhy vrcholů vždy o stupeň vrcholu,  $w_{f'}(v) = w_f(v) + r \cdot i$ , kde  $i \in \mathbb{N}$ . U grafu  $K_{3,3}$  zvýšením hodnoty  $a$  o jedničku zvýšíme magickou konstantu o číslo 3.



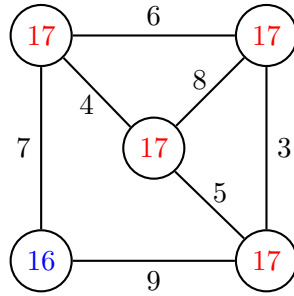
Obrázek 6.7: Tři různá SPM ohodnocení grafu  $K_{3,3}$  pro  $a = 1, k = 15$ ,  $a = 2, k = 18$  a  $a = 3, k = 21$ .

### 6.4.2 Pro nepravidelné grafy

Nyní se podívejme, platí-li pozorování z kapitoly 6.4.1 také pro nepravidelné grafy. Vezměme nyní graf na obrázku 6.8 a ke každému labelu přičteme jedničku. Takto upravený graf je na obrázku 6.9.



Obrázek 6.8: Nepravidelný graf se supermagickým ohodnocením



Obrázek 6.9: Nepravidelný graf z obrázku 6.8 se zvětšenými labely.

Jak můžeme vidět, tak graf s posunutými labely supermagické ohodnocení nemá. Vrcholy, které mají stejný počet sousedů mají stejnou váhu. Jakmile má ale vrchol jiný počet sousedů, jeho váha se liší právě o rozdíl mezi stupni vrcholů. V našem případě vrcholy se třemi sousedy mají váhu 17, ale váha vrcholu, který má stupeň jen dva, se o jedničku liší.

# Kapitola 7

## Shrnutí

V této kapitole shrneme druhy konstrukcí ohodnocení, které jsme v této práci použili. Také se podíváme, pro jaká ohodnocení lze použít daný typ konstrukce.

### 7.1 Vrcholová ohodnocení

Zde uvedeme postupy, které lze použít pouze pro vrcholová ohodnocení.

#### 7.1.1 Sjedení hranově disjunktních grafů

Při sjedení hranově disjunktních grafů využíváme faktu, že dva grafy mají stejnou množinu vrcholů, ale nesdílejí žádnou hranu. Váhy vrcholů se pro sjedený graf sečtou a zachovají si tak vlastnosti každého z ohodnocení. Tento typ konstrukce je v této práci nejčastěji využíván pro různé typy vrcholových ohodnocení. Konstrukce může být však použita pouze pro vrcholová ohodnocení, grafy mají stejnou množinu vrcholů a tak si sjedený graf zachovává „správnou“ množinu labelů  $\{1, \dots, n\}$ . Kdybychom se tímto způsobem snažili sjednotit grafy s hranovým ohodnocením, sjedený graf by obsahoval více hran se stejným labelem – což u ohodnocení není možné. Díky této konstrukci můžeme například sjednotit dva grafy s

- DM a DM ohodnocením (Věta 3),
- DM a handicapovým ohodnocením (Věta 12),
- handicapovým a handicapovým ohodnocením (Věta 24),
- DM a fair ohodnocením (Věta 25),
- $k$ -handicapovým a fair ohodnocením (Věta 26),
- $k$ -handicapovým a  $k$ -handicapovým ohodnocením (Věta 27,

- DM a  $(a, d)$ -DAM ohodnocením (Věta 34),
- DM a DAM ohodnocením (Věta 35),
- DM a rostoucím DAM ohodnocením (Věta 36),
- dvěma rostoucími DAM ohodnoceními (Věta 37).

Při sjednocení dvou DAM grafů, dvou  $(a, d)$ -DAM grafů nebo grafů s DM a  $(a, d)$ -DAM ohodnocením jsme zjistili, že tato ohodnocení jsou příliš obecná na to, aby šla obecně skládat. V tomto případě se může stát, že sjednocený graf bude mít více vrcholů stejné váhy. Zkusili jsme proto v sekci 5.8 ohodnocení upřesnit pomocí podmínky, že váha vrcholu musí růst zároveň s jeho labelem. Toto speciální „rostoucí“ DAM ohodnocení již lze bez problému skládat, jak jsme ukázali ve Větách 36 a 37.

### 7.1.2 Konstrukce $k$ -handicapového ohodnocení pomocí magické hyperkrychle

V kapitole 4.2 jsme zpozorovali, že  $k$ -dimenzionální magická hyperkrychle odpovídá  $(-k)$ -handicapovému ohodnocení. V  $k$ -dimenzionální hyperkrychli jsou obsažena všechna čísla  $1, \dots, n^k$ . Prvky hyperkrychle považujeme za labely vrcholů grafu, ve kterém jsou sousední všechny vrcholy s labely ve stejném sloupci, řádku a případně všech ostatních směrech dimenze  $k$ . Víme, že váhy vrcholů  $k$ -handicapového grafu tvoří aritmetickou posloupnost s diferencí  $k$ . Pro váhy vrcholů grafu, jehož ohodnocení odpovídá magické hyperkrychli, platí, že pokud sečteme labely všech sousedů daného vrcholu (v hyperkrychli to znamená všechny čísla v řádcích všech dimenzí), získáme rozdíl  $k$ -násobku magické konstanty hyperkrychle a  $k$ -násobku labelu daného vrcholu. Jelikož labely  $k$ -handicapového ohodnocení jsou postupně všechna čísla  $1, \dots, n^k$ , od  $k$ -násobku magické konstanty hyperkrychle postupně odečítáme vždy o  $k$  větší číslo, a váhy vrcholů grafu tvoří aritmetickou posloupnost s diferencí  $k$ . Zároveň to také znamená, že čím vyšší je label vrcholu, tím nižší je jeho váha. Graf s ohodnocením, které odpovídá  $k$ -dimenzionální hyperkrychli, je tak  $(-k)$ -handicapový.

## 7.2 Hranová a vrcholová ohodnocení – ohodnocení kopií grafů

V kapitole 2.2, konkrétněji ve Větách 4 a 5, ukazujeme, že jakýkoliv počet kopií grafu  $C_4$  má DM ohodnocení. Tato existence však není nijak systematická a je spíše náhodou, že všechny 2-pravidelné DM grafy jsou kopie grafu  $C_4$ , který je distančně magický.

Následně pak v kapitole 6.2 o supermagickém ohodnocení jsou citovány Věty 41 a 42, které pojednávají o existenci SPM ohodnocení pro kopie grafů. V tomto případě již obecně využíváme kopie hranově ohodnocených grafů pro konstrukci nového ohodnocení.

### 7.3 Hranová ohodnocení – posunutí magické konstanty

V kapitole 6 využíváme, že u některých ohodnocení může magická konstanta nabývat pro stejný graf různých hodnot. Například SPM ohodnocení pravidelných grafů může obsahovat labely začínající jakýmkoliv přirozeným číslem, a tak můžeme k labelům ohodnocení přičíst libovolné číslo, čímž vznikne „nové“ SPM ohodnocení grafu s „posunutou“ magickou konstantou. Detailněji je tento postup popsán v kapitole 6.4. Podařilo se najít SPM ohodnocení pro sjednocení grafů s různou pravidelností.

U DM grafů je pro  $r$ -pravidelné grafy určena magická konstanta jednoznačně jako  $k = \frac{r(n+1)}{2}$  ([5]). Také labely tohoto ohodnocení musí z definice nabývat hodnot  $1, 2, \dots, n$ . Nemůžeme tedy přičítat k labelům grafu čísla, a tím tak „posouvat“ magickou konstantu a vytvářet tím nové DM ohodnocení stejného grafu. Posunutí magické konstanty lze použít pouze pro supermagické ohodnocení, které je hranové.



# Kapitola 8

## Závěr

Tato práce je zaměřena na zpracování známých výsledků vybraných ohodnocení, rozbor vlastností, které mohou ohodnocení sdílet, nebo se jimi naopak mohou odlišovat, rozbor známých metod konstrukcí, které mohou analogicky fungovat pro více ohodnocení a také případně na vlastní návrh konstrukce ohodnocení.

Pro tuto diplomovou práci jsme zvolili celkem šest druhů ohodnocení – distančně magické, handicapové, které je speciálním případem  $k$ -handicapového ohodnocení, distančně antimagické,  $(a, d)$ -distančně antimagické a supermagické ohodnocení.

Nejpoužívanější metodou konstrukce ohodnocení v této práci je sjednocení dvou grafů, které mají stejnou množinu vrcholů a disjunktí množiny hran. V tomto případě rozebíráme, jestli výsledný graf má nějaké ohodnocení, a jaký vliv na to mají ohodnocení sjednocovaných grafů. Sjednocením dvou distančně magických grafů získáme nový graf s distančně magickým ohodnocením, sjednocením distančně magického grafu a handicapového grafu získáme handicapový graf. Sjednocením dvou handicapových grafů získáme 2-handicapový graf (kde si jen nejsme jisti, zda existuje příklad), pro distančně magický graf a graf s fair ohodnocením (tzn.  $(-1)$ -handicapový graf) má sjednocený graf opět fair ohodnocení. Fair graf dohromady s  $k$ -handicapovým grafem dává graf s  $(k - 1)$ -handicapovým ohodnocením, distančně magický graf a  $(a, d)$ -distančně antimagický graf dává graf  $(a + k, d)$ -distančně antimagický a naposledy sjednocením distančně magického a distančně antimagického grafu získáváme graf distančně antimagický.

Při sjednocování dvou distančně antimagických grafů, dvou  $(a, d)$ -distančně antimagických grafů a jednoho distančně antimagického a jednoho  $(a, d)$ -distančně antimagického grafu jsme zjistili, že tato ohodnocení jsou příliš obecná na to, aby sjednocený graf nabýval nějakého „pěkného“ ohodnocení. V tomto případě zavedeme nové „speciální“ ohodnocení – u distančně antimagického ohodnocení, jehož jedinou podmínkou je různost vah vrcholů, přidáme podmínku, že tyto váhy musí růst současně s labelem vrcholu. Toto ohodnocení je již dost „přísné“ na to, aby jsme ho mohli skládat s jiným ohodnocením. Sjednocením distančně magického grafu a grafu s rostoucím distančně antimagickým ohodnocením získáme graf s rostoucím distančně antimagickým ohodnocením a sjedno-

cením dvou grafů s rostoucím distančně antimagickým ohodnocením získáme nový graf s rostoucím distančně antimagickým ohodnocením.

Sjednocení dvou hranově disjunktních grafů můžeme použít ale pouze pro vrcholová ohodnocení. Jelikož skládáme dva grafy se stejnými vrcholy, sjednocený graf si zachová „správnou“ množinu labelů. Pokud bychom tedy skládali dva supermagické grafy se stejnou množinou vrcholů a disjunktními množinami hran, mohlo by se stát, že sjednocený graf bude mít více stejných labelů, a žádné ohodnocení pro něj neexistuje.

Pro konstrukci supermagického ohodnocení využíváme faktu, že jeho labely nemusí začínat jedničkou, ale jakýmkoliv přirozeným číslem. To znamená, že existuje-li jakýkoliv supermagický graf, přičtením jedničky ke každému labelu můžeme opakovaně získávat nová a nová supermagická ohodnocení. Této vlastnosti využíváme i u vlastní konstrukce supermagického ohodnocení. Dokazujeme, že supermagické ohodnocení dvou různě pravidelných grafů můžeme „posunout“ tak, že labely jednotlivých grafů na sebe navazují, a oba grafy mají stejnou magickou konstantu. Pokud tedy máme  $r$ -pravidelný supermagický graf  $G$  s magickou konstantou  $k$  a labely  $\{a, a + 1, \dots, a + |E(G)| - 1\}$  a  $s$ -pravidelný graf  $H$  s magickou konstantou  $l$  a labely  $\{b, b + 1, \dots, b + |E(H)| - 1\}$ , sjednocený graf  $G \cup H$  má supermagické ohodnocení s labely  $\{a + c, a + c + 1, a + c + 2, \dots, a + c + |E(G)| - 1, b + d, b + d + 1, b + d + 2, \dots, b + d + |E(H)| - 1\}$  a magickou konstantou  $k + r \cdot c = l + s \cdot d$ , kde  $c = \frac{s(a + |E(G)| - b) + l - k}{(r - s)}$  a  $d = \frac{r(a + |E(G)| - b) + l - k}{(r - s)}$ . Pokud je to známý výsledek, tak jsme na něj ve známé literatuře nenarazili.

V kapitole o  $k$ -handicapovém ohodnocení jsme dokázali, že  $(-k)$ -handicapové ohodnocení odpovídá  $k$ -dimenzionální magické hyperkrychli. Touto hyperkrychlí o rozměru  $n$  rozumíme  $k$ -dimenzionální matici, která obsahuje všechna čísla  $1, \dots, n^k$  rozmístěná tak, že součet čísel v řádku každého směru je stejný – tento součet se nazývá magická konstanta. Pod touto hyperkrychlí si nyní představme ohodnocení grafu. Prvky hyperkrychle jsou labely vrcholů grafu. Tyto vrcholy jsou sousední vždy s vrcholy, jejichž labely jsou ve stejném řádku, sloupci a ve všech ostatních dimenzích. Aby bylo toto ohodnocení  $k$ -handicapové, váhy vrcholů musí tvořit aritmetickou posloupnost s diferencí  $k$ . To je zajištěno tím, že pokud sečteme u vrcholu jeho label a labely vrcholů ve všech směrech, získáme  $k$ -násobek magické konstanty hyperkrychle, a jelikož labely hyperkrychle jsou po sobě jdoucí čísla, od  $k$ -násobku magické konstanty pro každý vrchol vždy odečítáme o  $k$  větší číslo – tzn., že čím vyšší je label vrcholu, tím nižší je jeho váha. Váhy vrcholů tvoří aritmetickou posloupnost s diferencí  $-k$  a graf je tak  $(-k)$ -handicapový. Doplnkem tohoto grafu je pak graf, který je  $(k - 1)$ -handicapový.

Mezi následující směry výzkumu bychom mohli zařadit další konstrukce vybraných ohodnocení. Také bychom se mohli zaměřit na již použité konstrukce a pokusit se je analogicky použít i na další typy ohodnocení.

# Literatura

1. MILLER, Mirka; RODGER, C. A.; SIMANJUNTAK, Rinovia. Distance magic labelings of graphs. *Australasian journal of combinatorics*. 2003, roč. 28, s. 305–315.
2. FRONČEK, Dalibor; KOVÁŘ, Petr; KOVÁŘOVÁ, Tereza. Fair incomplete tournaments. *Bulletin of the Institute of Combinatorics and its Applications*. 2006, roč. 48.
3. ŽÁČEK, Jaroslav. *Využití 1-VMV ohodnocení grafů*. 2012. VŠB-TU Ostrava.
4. FRONČEK, Dalibor; KOVÁŘ, Petr; KOVÁŘOVÁ, Tereza; KRAJC, Bohumil; KRAVČENKO, Michal; SHEPANIK, Aaron; SILBER, Adam. On regular handicap graphs of even order. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*. 2017, roč. 60, s. 69–76.
5. ARUMUGAM, S.; FRONČEK, D.; KAMATCHI, N. DISTANCE MAGIC GRAPHS - A SURVEY. *Journal of the Indonesian Mathematical Society*. 2011, roč. Special Edition, s. 11–26.
6. JINNAH, M. I. On  $\Sigma$ -labelled graphs. In: ACHARYA, B.D.; HEDGE, S. M. (ed.). *Technical Proceedings of Group Discussion on Graph Labeling Problems*. 1999, s. 71–77.
7. FRONČEK, Dalibor. Regular handicap graphs of odd order. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*. 2017, roč. 102, s. 253–266.
8. FRONČEK, D.; SHEPANIK, A. Regular handicap graphs of order  $n \equiv 0 \pmod{8}$ . *Electronic Journal of Graph Theory and Applications*. 2018, roč. 6, s. 208–218.
9. FREYBERG, Bryan. *Distance magic-type and distance antimagic-type labelings of graphs*. 2017. Dis. pr. Michigan Technological University.
10. FRONČEK, Dalibor. Full spectrum of regular incomplete 2-handicap tournaments of order  $n \equiv 0 \pmod{16}$ . [B.r.].
11. FRONČEK, Dalibor. A note on incomplete regular tournaments with handicap two of order  $n \equiv 8 \pmod{16}$ . *Opuscula Mathematica*. 2017, roč. 37, s. 557–566.
12. FREYBERG, Bryan. Regular  $d$ -handicap graphs of even order. *Bulletin of the ICA*. 2018, roč. 83, s. 108–117.
13. TRENKLER, Marián. Magic  $p$ -dimensional cubes. *Acta Arithmetica*. 2001, roč. 96, s. 361–364.

14. KAMATCHI, N.; ARUMUGAM, S. Distance antimagic graphs. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*. 2013, roč. 84, s. 61–67.
15. KAMATCHI, N.; ARUMUGAM, S. On  $(a, d)$ -distance antimagic graphs. *Australasian journal of combinatorics*. 2012, roč. 54, s. 279–287.
16. SEMENIUTA, M. F.  $(a, d)$ -DISTANCE ANTIMAGIC LABELING OF SOME TYPES OF GRAPHS. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2016, roč. 52, s. 208–218.
17. STEWART, B. M. Magic graphs. *Canadian Journal of Mathematics*. 1966, roč. 17, s. 1031–1059.
18. IVANČO, Jaroslav. On Supermagic Regular Graphs. *Mathematica Bohemica*. 2000, roč. 125, s. 99–114.