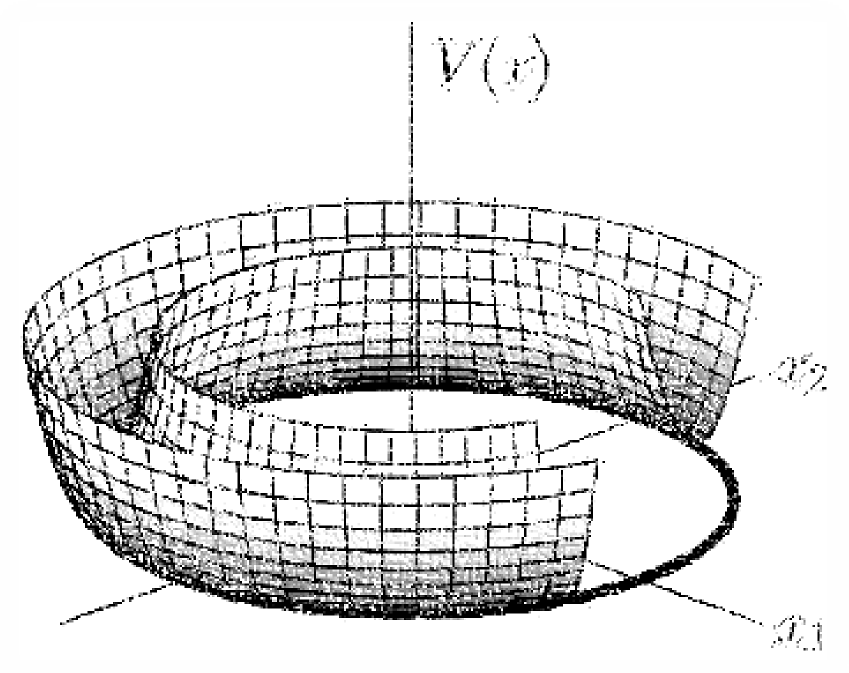
Nelinearno načrtovanje zaprtozančnih sistemov

Zbirka rešenih vaj



Inštitut za avtomatiko

Fakulteta za elektrotehniko, računalništvo in informatiko

Univerza v Mariboru

Andrej Sarjaš

Maj 2023

Podatki o delu:

Naslov:	Nelinearno načrtovanje zaprtozančnih sistemov
Avtor:	doc. dr. Andrej Sarjaš, univ. dipl. inž. el.
Strokovni recenzent:	izr. prof. dr. Rajko Svečko, univ. dipl. inž. el.
Lektor:	Tanja Bigec, prof. slovenščine
Založnik:	Fakulteta za elektrotehniko, računalništvo in informatiko Maribor
Vrsta publikacije:	Zbirka vaj
Tisk:	Elektronski vir (pdf)
Način dostopa:	https://estudij.um.si/
Leto izdaje:	Maribor, maj 2023

Gradivo je namenjeno vajam pri predmetu Napredni regulacijski sistemi in izdelavi zaključnega dela na Inštitutu za avtomatiko, FERI, UM.

Kazalo

Kazalo slik

Kazalo enačb

1. Lyapunov stabilnostni kriterij

Vzemimo dinamični sistem, opisan z diferencialno enačbo:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$ ***Error! Bookmark not defined.***,

kjer je x_0 ravnovesna točka, za katero velja:

$$x(0) = x_0, \quad f(x_0) = 0, \quad x(t) \in D \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Funkciji $f(x)$ in $g(x)$ sta poljubni funkciji, ki izpolnjujeta Lipschitzev pogoj $\dot{f}(x) < L$, $\dot{g}(x) < G$, pri čemer sta L in G Lipschitzevi konstanti.

1.1. Analiza stabilnosti ravnovesne točke

- Ravnovesna točka x_0 je **stabilna** po Lyapunu, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja območje $\delta(\varepsilon) > 0$, pri čemer velja:
  - $\|x(0) - x_0\| < \delta$
  - $\|x(t) - x_0\| < \varepsilon, \; t \geq 0$

- Ravnovesna točka x_0 je **asimptotično stabilna** po Lyapunu, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja območje $\delta(\varepsilon) > 0$, pri čemer velja:
  - $\|x(0) - x_0\| < \delta$
  - $\|x(t) - x_0\| < \varepsilon, \; t \geq 0$
  - $\lim_{t\to\infty} \|x(t) - x_0\| = 0$

- Ravnovesna točka x_0 je **eksponentno stabilna** po Lyapunu, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja območje $\delta(\varepsilon) > 0$ ter parametera $\alpha > 0$ in $\beta > 0$, pri čemer velja:
  - $\|x(0) - x_0\| < \delta$
  - $\|x(t) - x_0\| \leq \alpha \|x(t) - x_0\| e^{-\beta t}, \; t \geq 0$
  - $\lim_{t\to\infty} \|x(t) - x_0\| = 0$

1.2. Splošni kriterij stabilnosti po Lyapunu

Za določitev stabilnosti po Lyapun-u izberemo Lyapunovo funkcijo $V(x)$. Lyapunov funkcija je vsaka skalarna funkcija, ki je zvezno odvedljiva in za katero velja:

$$V(x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$$V(x_0) = 0, \quad f(x_0) = 0$$

Sistem je stabilen po Lyapunu, če je odvod Lyapunove funkcije strogo negativna definitna funkcija.

$$\nabla V(x)\dot{x} < 0$$

$$\nabla V(x_0) = 0, \quad f(x_0) = 0$$

Primer 1:

Ugotovi, ali je sistem stabilen. Uporabi dirketno metodo Lyapunova:

$$\dot{x}_1 = -2x_1 - x_2$$
$$\dot{x}_2 = x_1$$

Rešitev:

Določimo funkcijo Lyapunova $V(x)$,

$$V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$$

Odvod funkcije $V(x)$ je,

$$\nabla V(x)\dot{x} = \frac{\partial V(x)}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial V(x)}{\partial x_2}\dot{x}_2$$
$$\nabla V(x)\dot{x} = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2$$
$$\nabla V(x)\dot{x} = x_1(-2x_1 - x_2) + x_2(x_1)$$
$$\nabla V(x)\dot{x} = -2x_1^2 - x_1x_2 + x_1x_2 = -2x_1^2$$

Podani sistem je stabilen, saj je odvod funkcije strogo negativno definitna funkcija.

1.3. Kvadratična forma stabilnosti po Lyapunu

Pri kvadratični formi izberemo Lyapunovo funkcija $V(x)$ tipa:

$$V(x) = x^T P x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \; P > 0,$$

kjer je P pozitivna simetrična matrika $P = P^T$. Sistem imamo podan v prostoru stanj:

$$\dot{x} = Ax \qquad \left(\dot{x}^T = x^T A^T\right)$$

Odvod funkcije je:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x}, \\ &= \left(x^T A^T\right) P x + x^T P \left(Ax\right), \\ &= x^T \left(A^T P + PA\right) x, \end{aligned}$$

Predpostavimo, da je:

$$\dot{V}(x) = -x^T Q x, \quad Q > 0.$$

Sledi, da je stabilnost sistem zagotovljena s:

$$\dot{V}(x) = x^T \left(A^T P + PA\right) x = -x^T Q x \; .$$

Kjer je Lyapunova enačba:

$$A^T P + PA = -Q.$$

Sistem je stabilen, če matrika P pozitivno definitna matrika.

Primer 2:

Ugotovi, ali je sistem stabilen. Uporabi kvadratično formo Lyapunova:

$$\dot{x}_1 = -2x_1 - x_2$$
$$\dot{x}_2 = x_1$$

Rešitev:

Sistem zapišemo v prostoru stanj:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

Rešimo enačbo Lyapunova, kjer izberemo matriko Q kot $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$$A^T P + PA = -Q$$
$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rešimo enačbo:

$$\begin{bmatrix} -2p_1 + p_3 & -2p_2 + p_4 \\ -p_1 & -p_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2p_1 + p_2 & -p_1 \\ -2p_3 + p_4 & -p_3 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} -4p_1 + p_2 + p_3 & -p_1 - 2p_2 + p_4 \\ -p_1 - 2p_3 + p_4 & -p_2 - p_3 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sistem enačb:

$$-4p_1 + p_2 + p_3 = -1$$
$$-p_1 - 2p_2 + p_4 = 0$$
$$-p_1 - 2p_3 + p_4 = 0$$
$$-p_2 - p_3 = -1$$

Rešitev sistem enačb:

$$p_1 = 0.5,\ \ p_2 = -0.5,\ \ p_3 = -0.5,\ \ p_4 = 1.5$$
$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1.5 \end{bmatrix}$$

Sistem je stabilen, saj so vse lastne vrednosti matrike P pozitivne.

$$\det(\lambda I - P) \Rightarrow [0.292 \ \ 1.7071]$$

Matlab ukaz za reševanje Lyapunove enačbe '`P=lyap(A,Q)`'.

2. Zaprtozančna linearizacija

Zaprtozančna linearizacija je postopek načrtovanja nelinearnega regulatorja ali preoblikovanje nelinearnega sistema tako, da je dinamika nelinearnega sistema predstavljena v linearni formi.

Imamo dinamični sistem opisan kot:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u\,,$$

$$y = h(x)\,,$$

Funkcije $f(x)$, $g(x)$ in $h(x)$ so poljubne funkcije, ki izpolnjujejo Lipschitzev pogoj $\dot{f}(x) < L$, $\dot{g}(x) < G$, $\dot{h}(x) < H$, pri čemer so L, G in H Lipschitzeve konstante. Vse funkcije so definirane v domeni $D \subset \mathbb{R}^n$, ki vsebuje tudi ravnovesne točke. Obstaja zaprto-zančna funkcija s strukturo:

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v\,,$$

kjer sta $\alpha(x), \beta(x) \subset D$ in transformacija stanj s transformacijsko funkcijo $T(x) \subset D$,

$$z = T(x)\,.$$

Primer 1:

Določite zaprto-zančno pravilo po metodi zaprtozančne linearizacije.

$$\dot{x}_1 = \cos(x_1) - 2x_1^3 - x_1^2 + u$$

Rešitev:

Določimo funkcijo Lyapunova:

$$V(x) = \frac{1}{2}x_1^2,$$

Kjer je odvod funkcije:

$$\dot{V}(x) = x_1\dot{x}_1,$$

$$\dot{V}(x) = x_1 \underbrace{(\cos(x_1) - 2x_1^3 - x_1^2 + u)}_{\dot{x}_1},$$

$$\dot{V}(x) = x_1\cos(x_1) - 2x_1^4 - x_1^3 + x_1 u,$$

Regulacijsko pravilo izberemo tako, da bo sistem stabilen in lineariziran,

$$u = -\cos(x_1) + 2x_1^3 + x_1^2 - kx_1, \quad k > 0$$

Kjer je $\dot{V}(x)$,

$$\dot{V}(x) = x_1\cos(x_1) - 2x_1^4 - x_1^3 + x_1\left(\underbrace{\cos(x_1) + 2x_1^3 + x_1^2 - kx_1}_{u}\right),$$

$$\dot{V}(x) = -kx_1^2,$$

Zaprto-zančni sistem s regulacijskim pravilom $u = u + v'$ in zunanjim vhodom v':

$$\dot{x}_1 = \cos(x_1) - 2x_1^3 - x_1^2 - \cos(x_1) + 2x_1^3 + x_1^2 - kx_1 + v'$$

Lineariziran sistem:

$$\dot{x}_1 = -kx_1 + v'$$

Primer 2:

Določite zaprto-zančno pravilo po metodi zaprtozančne linearizacije.

$\dot{x}_1 = -x_1^3 + u$

Rešitev:

Določimo funkcijo Lyapunova:

$$V(x) = \frac{1}{2} x_1^2,$$

Kjer je odvod funkcije:

$$\dot{V}(x) = x_1 \dot{x}_1,$$

$$\dot{V}(x) = x_1 \underbrace{(-x_1^3 + u\ )}_{\dot{x}_1},$$

$$\dot{V}(x) = -x_1^4 + x_1 u,$$

Regulacijsko pravilo izberemo tako, da bo sistem stabilen in lineariziran:

$$u = x_1^3 - kx_1, \qquad k > 0$$

Kjer je $\dot{V}(x)$:

$$\dot{V}(x) = -x_1^4 + x_1 \left(\underbrace{x_1^3 - kx_1}_{u} \right),$$

$$\dot{V}(x) = -kx_1^2,$$

Zaprto-zančni sistem z regulacijskim pravilom $u = u + v'$ in zunanjim vhodom v':

$$\dot{x}_1 = -x_1^3 + x_1^3 - kx_1 + v'$$

Lineariziran sistem:

$$\dot{x}_1 = -kx_1 + v'$$

Primer 3:

Določite zaprto-zančno pravilo po metodi zaprto-zančne linearizacije.

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_1^3 + x_2 + \cos(x_2)u$$
$$y = x_1$$

Rešitev:

Določimo funkcijo Lyapunova:

$$V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2,$$

Kjer je odvod funkcije:

$$\dot{V}(x) = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2,$$
$$\dot{V}(x) = x_1x_2 + x_2\left(-x_1^3 + x_2 + \cos(x_2)u\right),$$

Regulacijsko pravilo izberemo tako, da bo sistem stabilen in lineariziran.

$$u = \frac{1}{\cos(x_2)}\left(x_1^3 - x_2 - k_1x_1 - k_2x_2\right), \qquad k_1, k_2 > 0$$

Kjer je $\dot{V}(x)$:

$$\dot{V}(x) = x_1x_2 + x_2\left(-x_1^3 + x_2 + \cos(x_2)\underbrace{\left(\frac{1}{\cos(x_2)}\left(x_1^3 - x_2 - k_1x_1 - k_2x_2\right)\right)}_{u}\right), k_1 = 1,$$

$$\dot{V}(x) = -k_2x_2^2,$$

Zaprto-zančni sistem s regulacijskim pravilom $u = u + v'$ in zunanjim vhodom v':

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_1^3 + x_2 + \cos(x_2)\left(\frac{1}{\cos(x_2)}\left(x_1^3 - x_2 - x_1 - k_2x_2\right) + v'\right)$$

Lineariziran sistem:

$$\dot{x}_1 = x_2 \qquad \qquad \begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -k_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}v'$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 - k_2x_2 + v'$$

Primer 4:

Določite zaprto-zančno pravilo po metodi zaprtozančne linearizacije.

$$\dot{x}_1 = -x_1^2 + x_2$$
$$\dot{x}_2 = x_1^3 + u$$
$$y = x_1$$

Rešitev:

Vpeljemo novo spremenljivko glede na izhod sistema $y = x_1$.

$$z_1 = x_1$$

kjer je:

$$\dot{z}_1 = z_2 = \dot{x}_1 \ ,$$

$$\dot{z}_1 = -x_1^2 + x_2 \ ,$$

kjer je $\dot{z}_2$,

$$\dot{z}_2 = \ddot{x}_1 = -2x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2$$
$$\dot{z}_2 = -2x_1\left(-x_1^2 + x_2\right) + x_2\left(x_1^3 + u\right)$$

Izberemo u:

$$u = -2\frac{x_1^3}{x_2} + 2x_1 - x_1^3 + \frac{v}{x_2}$$

$$\dot{z}_2 = v$$

Transformirani sistem ima obliko:

$$\dot{z}_1 = z_2$$
$$\dot{z}_2 = v$$

Sedaj lahko določimo zaprto-zančno pravilo v za linearni sistem v prostoru stanj (Ackermannova formula, direktna tehnika pomikanja polov, Lyapunova metoda itd.).

Uporabimo Lyapunovo metodo, kjer določimo:

$$V(z) = \frac{1}{2}z_1^2 + \frac{1}{2}z_2^2,$$

Kjer je odvod funkcije:

$$\dot{V}(z) = z_1\dot{z}_1 + z_2\dot{z}_2,$$
$$\dot{V}(x) = z_1 z_2 + z_2\left(v\right),$$

Izberemo vhod v:

$$v = -z_1 - kz_2, \quad k > 0$$

$$\dot{V}(x) = -kz_2^2,$$

Vhodu v zamenjamo virtulana stanja z za merljiva stanja x ter dodamo vhod zunanji vhod v':

$$v = -\underbrace{x_1}_{z_1} - k\left(\underbrace{-x_1^2 + x_2}_{z_2}\right) + v'$$

Celotno regulacijsko pravilo sistema je:

$$u = -2\frac{x_1^3}{x_2} + 2x_1 - x_1^3 + \frac{1}{x_2}\left(\underbrace{-x_1 - k\left(-x_1^2 + x_2\right) + v'}_{v}\right), \quad k > 0$$

Dodatek – drugi način:

Uporabimo Ackermmanovo formulo za linearni regulator v prostoru stanj:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2\\ \dot{z}_2 &= v\end{aligned}$$

Zapišemo sistem v prostoru stanj:

$$\begin{bmatrix}\dot{z}_1\\ \dot{z}_2\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}}_{B} v$$

Izberem zaprto-zančne pole za dinamični sistem z virtualnimi stanji z. Pole izberemo tako, da zadostimo želeni dinamiki:

$$s_1 = -3, \quad s_2 = -4$$

Po Ackermannovi formuli določimo regulator v prostoru stanj ('`K=acker(A,B,[-3 -4])`'):

$$v = -k_1 z_1 - k_2 z_2 + v', \qquad k_1, k_2 > 0 \qquad k = \begin{bmatrix}k_1 & k_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}12 & 7\end{bmatrix}$$

Vhodu v zamenjamo virtulana stanja z za merljiva stanja x:

$$v = -k_1 x_1 - k_2\left(-x_1^2 + x_2\right) + v'$$

Celotno regulacijsko pravilo sistema je:

$$u=-2\frac{x_1^3}{x_2}+2x_1-x_1^3+\frac{1}{x_2}\left(\underbrace{-k_1x_1-k_2\left(-x_1^2+x_2\right)+v'}_{v}\right),\;k_1,k_2>0$$

Primer 5:

Določite zaprto-zančno pravilo po metodi zaprtozančne linearizacije.

$$\dot{x}_1=\cos(x_2)$$
$$\dot{x}_2=-x_2^2+u$$
$$y=x_1$$

Rešitev:

Vpeljemo novo spremenljivko glede na izhod sistema $y=x_1$.

$$z_1=x_1$$

kjer je:

$$\dot{z}_1=z_2=\dot{x}_1\;,$$

$$\dot{z}_1=\cos(x_2),$$

kjer je $\dot{z}_2$,

$$\dot{z}_2=\ddot{x}_1=-\sin(x_2)\dot{x}_2$$
$$\dot{z}_2=-\sin(x_2)\left(-x_2^2+u\right)$$

Izberemo u:

$$u=x_2^2-\frac{1}{\sin(x_2)}v$$

$$\dot{z}_2=v$$

Transformirani sistem ima obliko:

$$\dot{z}_1=z_2$$
$$\dot{z}_2=v$$

Po Ackermannovi formuli določimo linearni regulator v prostoru stanj:

$$\begin{bmatrix}\dot{z}_1\\\dot{z}_2\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix}z_1\\z_2\end{bmatrix}+\underbrace{\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}}_{B}v$$

Določimo zaprto-zančne pole:

$$s_1 = -1$$
$$s_2 = -1$$

Regulator v prostoru stanj ('`K=acker(A,B,[-1 -1])`'),

$$v = -k_1 z_1 - k_2 z_2 + v', \qquad k_1, k_2 > 0 \qquad k = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Vhodu v zamenjamo virtulana stanja z za merljiva stanja x:

$$v = -k_1 x_1 - k_2 \left(\cos(x_2)\right) + v'$$

Celotno regulacijsko pravilo sistema je:

$$u = x_2^2 - \frac{1}{\sin(x_2)}\left(-k_1 x_1 - k_2 \left(\cos(x_2)\right) + v'\right).$$

Primer 6:

Določite zaprto-zančno pravilo po metodi zaprtozančne linearizacije.

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = x_3^2 - x_1^2$$
$$\dot{x}_3 = -x_2^2 + x_1 + u$$
$$y = x_1$$

Rešitev:

Vpeljemo novo spremenljivko glede na izhod sistema $y = x_1$.

$$z_1 = x_1$$

kjer je:

$$\dot{z}_1 = z_2 = \dot{x}_1$$

$$\dot{z}_1 = x_2$$

kjer je $\dot{z}_2$

$$\dot{z}_2 = z_3 = \ddot{x}_1 = \dot{x}_2 = x_3^2 - x_1^2$$

in $\dot{z}_3$:

$$\begin{aligned}\dot{z}_3 &= \dddot{x}_1 = \ddot{x}_2 = 2x_3\dot{x}_3 - 2x_2\dot{x}_2 \\ &= 2x_3\left(-x_2^2 + x_1 + u\right) - 2x_2\left(x_3^2 - x_1^2\right) \\ &= 2x_3\left(-x_2^2 + x_1 + u\right) - 2x_2\left(x_3^2 - x_1^2\right)\end{aligned}$$

$$\dot{z}_3 = -2x_3x_2^2 + 2x_3x_1 - 2x_3^2x_2 + 2x_1^2x_2 + 2x_3u.$$

Izberemo u:

$$u = \frac{1}{2x_3}\left(2x_3x_2^2 - 2x_3x_1 + 2x_3^2x_2 - 2x_1^2x_2 + v\right)$$

$$\dot{z}_3 = v.$$

Transformirani sistem ima obliko:

$$\dot{z}_1 = z_2$$
$$\dot{z}_2 = z_3$$
$$\dot{z}_3 = v$$

Po Ackermannovi formuli določimo linearni regulator v prostoru stanj:

$$\begin{bmatrix}\dot{z}_1\\ \dot{z}_2\\ \dot{z}_3\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\\ z_3\end{bmatrix}+\underbrace{\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}}_{B}v$$

Določimo zaprto-zančne pole:

$$s_1=-0.5,\quad s_2=-1,\ s_3=-1$$

Regulator v prostoru stanj ('`K=acker(A,B,[-0.5 -1 -1])`'),

$$v=-k_1z_1-k_2z_2-k_3z_3+v',\qquad k_1,k_2,k_3>0\qquad k=\begin{bmatrix}k_1 & k_2 & k_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.5 & 2 & 2.5\end{bmatrix}$$

Vhodu v zamenjamo virtulana stanja z za merljiva stanja x:

$$v=-k_1x_1-k_2x_2-k_3\left(x_3^2-x_1^2\right)+v'$$

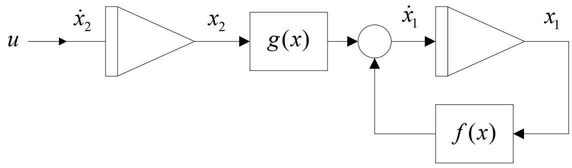
Celotno regulacijsko pravilo sistema je:

$$u=\frac{1}{2x_3}\left(2x_3x_2^2-2x_3x_1+2x_3^2x_2-2x_1^2x_2+\underbrace{\left(-k_1x_1-k_2x_2-k_3\left(x_3^2-x_1^2\right)+v'\right)}_{v}\right).$$

3. Načrtovanje regulatorja po sestopni metodi – Backstepping

Vzemimo nelinearno enačbo stanj:

$$\dot{x}_1 = f(x) + g(x)x_2 \qquad f(0)=0$$
$$\dot{x}_2 = u$$



Slika 1: Nelinearni sistem

Ideja sestopnega 'Backstepping' načrtovanja regulatorja je koračna parcialna stabilizacija posameznega stanja v sistemu, kjer predpostavimo, da je sistem opisan z verigo integratorjev, začenši od izhoda proti vhodu sistema. Za stabilizacijo stanja $\dot{x}_1$ uvedemo virtualno regulacijsko funkcijo $\phi(x_1)$.

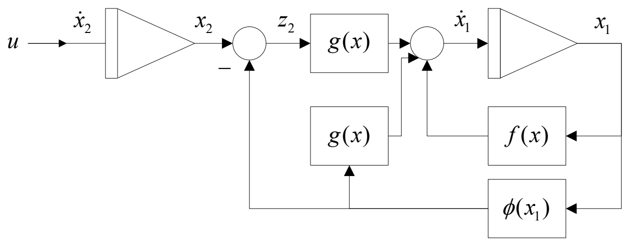
$$\dot{x}_1 = f(x) + g(x)\phi(x_1) \ .$$

Za določitev stabilizirajoče funkcije uvedemo Lyapunov stabilnostni kriterij, kjer je:

$$V(x_1) = \frac{1}{2}x_1^2,$$
$$\dot{V}(x_1) = x_1\dot{x}_1 = x_1\left(f(x) + g(x)\phi(x_1)\right) < -W(x_1), \quad W(x_1) > 0 \ .$$

Sistem enačb zapišemo v transformirani obliki:

$$\dot{x}_1 = f(x) + g(x)\phi(x_1) + g(x)(\underbrace{x_2 - \phi(x_1)}_{z_2}).$$



Slika 2: Uvedba virtualnega stanja.

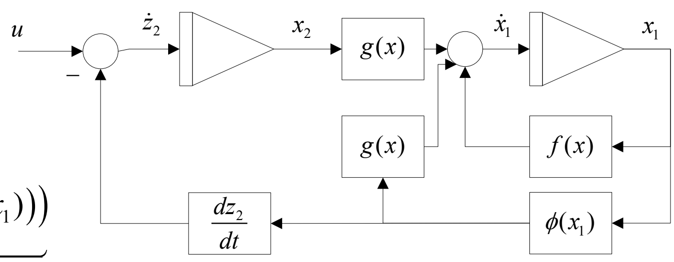
Uvedemo novo virtualno stanje z_2:

$$z_2 = x_2 - \phi(x_1).$$

Kjer je odvod funkcije z_2 enak:

$$\dot{z}_2 = \dot{x}_2 - \dot{\phi}(x_1),$$

$$\dot{z}_2 = \underbrace{u}_{\dot{x}_2} - \underbrace{\frac{\partial\phi(x_1)}{\partial x_1}\left(f(x) + g(x)\left(z_2 + \phi(x_1)\right)\right)}_{\dot{\phi}(x_1)}$$



Slika 3: Transformacija vhodnega vektorja.

Za celoten sistem uvedemo Lyapunov stabilnostni kriterij:

$$
\begin{aligned}
V(x_1, z_2) &= \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}z_2^2, \\
\dot{V}(x_1, z_2) &= x_1\dot{x}_1 + z_2\dot{z}_2 \\
&= \frac{\partial V(x_1, z_2)}{\partial x_1}\left(f(x) + g(x)\phi(x_1) + g(x)z_2\right) + \frac{\partial V(x_1, z_2)}{\partial z_2}\left(u - \dot{\phi}(x_1)\right) \\
&= -W(x_1) + z\left(u - \dot{\phi}(x_1) + g(x)\frac{\partial V(x_1)}{\partial x_1}\right) \le 0
\end{aligned}
$$

Vhod, ki asimptotično stabilizira sistem, je enak:

$$
u = \dot{\phi}(x_1) - g(x)\frac{\partial V(x_1)}{\partial x_1} - kz_2, \qquad k > 0
$$

Parameter k je prosti parameter za nastavitev dinamike zaprto-zančnega sistema.

Lyapunov stabilnosti kriterij pri izbiri takšnega vhodnega vektorja u je enak:

$$
\dot{V}(x_1, z_2) = -W(x_1) - kz^2 \le 0
$$

Primer 1:

Določite regulacijsko pravilo po metodi Backstepping za dani sistem v prostoru stanj tako, da bo sistem asimptotično stabilen.

$$\dot{x}_1 = x_1^2 + x_2$$
$$\dot{x}_2 = u$$
$$y = x_1$$

Rešitev:

Za stanje x_1 uvedemo virtualni regulacijsko funkcijo $\phi(x_1)$:

$$\dot{x}_1 = x_1^2 + \phi(x_1)$$

Po Lyapunovem stabilnostnem kriteriju določimo stabilizirajočo funkcijo $\phi(x_1)$. Izbrana Lyapunova funkcija je:

$$V(x_1) = \frac{1}{2}x_1^2,$$

kjer je odvod enak:

$$\dot{V}(x_1) = x_1\dot{x}_1 = x_1(x_1^2 + \phi(x_1)) \le 0 \quad \text{Izberemo: } \phi(x_1) = -x_1 - x_1^2$$
$$\dot{V}(x_1) = -x_1^2 \le 0$$

Določimo novo virtualno stanje z_2:

$$z_2 = x_2 - \phi(x_1),$$

kjer je:

$$x_2 = z_2 + \phi(x_1).$$

Zapišemo novo enačbo stanj $\dot{x}_1$, pri čemer upoštevamo stabilizirajočo funkcijo $\phi(x_1)$:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1^2 + x_2 \\ &= x_1^2 + z_2 + \phi(x_1) = x_1^2 \underbrace{-x_1 - x_1^2}_{\phi(x_1)} + z_2 = \underline{-x_1 + z_2}\end{aligned}$$

Odvod virtualnega stanja z_2 je enak:

$$\begin{aligned}\dot{z}_2 &= \dot{x}_2 - \dot{\phi}(x_1) \\ &= u - \dot{x}_1 - 2x_1\dot{x}_1 \\ &= u - (-x_1 + z_2) - 2x_1(-x_1 + z_2) = \underline{u + x_1 - z_2 + 2x_1^2 + 2x_1 z_2}\end{aligned}$$

Zapišemo novo Lyapunovo funkcijo za stanji x_1 in z_2:

$$\begin{aligned} V(x_1, z_2) &= \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}z_2^2, \\ \dot{V}(x_1, z_2) &= x_1\dot{x}_1 + z_2\dot{z}_2 \\ &= x_1(\underline{-x_1 + z_2}) + z_2(\underline{u + x_1 - z_2 + 2x_1^2 + 2x_1 z_2}) \end{aligned}$$

Določimo vhod u, ki stabilizira sistem:

$$\underline{u = -x_1 + z_2 - 2x_1^2 - 2x_1 z_2 - x_1 - kz_2}, \qquad k > 0, \qquad z_2 = x_2 - \phi(x_1) = x_1 + x_1^2 + x_2$$

$$u = -2x_1 - 2x_1^2 + (x_1 + x_1^2 + x_2)(1 - 2x_1) - k(x_1 + x_1^2 + x_2)$$

Preverimo, ali je sistem asimptotično stabiliziran pri vhodnem vektorju u:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_1, z_2) &= x_1(\underline{-x_1 + z_2}) + z_2(\underline{u + x_1 - z_2 + 2x_1^2 + 2x_1 z_2}) \\ &= -x_1^2 - kz_2^2 = -x_1^2 - k\left(x_1 + x_1^2 + x_2\right)^2 \le 0 \end{aligned}.$$

Primer 2:

Določite regulacijsko pravilo po metodi 'Backstepping' za sistem v nalogi 3.1 tako, da bo sistem asimptotično sledil referenčnim vrednostim.

$$\dot{x}_1 = x_1^2 + x_2$$
$$\dot{x}_2 = u$$
$$y = x_1$$

Rešitev:

Za izhod sistema uvedemo spremenljivko pogreška e:

$$e = ref - x_1$$

Odvod stanja e je enak:

$$\begin{aligned}\dot{e} &= \dot{ref} - \dot{x}_1 \\ &= \dot{ref} - x_1^2 - x_2\end{aligned}$$

Za stanje e uvedemo virtualni regulacijsko funkcijo $\phi(x_1)$

$$\dot{e} = \dot{ref} - x_1^2 + \phi(x_1)$$

Po Lyapunovem stabilnostnem kriteriju določimo stabilizirajočo funkcijo $\phi(x_1)$ za stanje e. Izbrana Lyapunova funkcija je:

$$V(e) = \frac{1}{2}e^2,$$

kjer je odvod enak:

$$\dot{V}(e) = e\dot{e} = e(\dot{ref} - x_1^2 + \phi(x_1)) \leq 0 \quad \text{Izberemo: } \phi(x_1) = -\dot{ref} + x_1^2 - ke$$
$$\dot{V}(e) = -ke^2 \leq 0$$

Določimo novo virtualno stanje z_2:

$$z_2 = -x_2 - \phi(x_1),$$

kjer je:

$$-x_2 = z_2 + \phi(x_1).$$

Zapišemo novo enačbo stanj $\dot{e}$, kjer upoštevamo stabilizirajočo funkcijo $\phi(x_1)$.

$$\dot{x}_1 = x_1^2 + x_2$$
$$\begin{aligned}\dot{e} &= \dot{ref} - x_1^2 - x_2 \\ &= \dot{ref} - x_1^2 - x_2 = \dot{ref} - x_1^2 + \underbrace{z_2 + \phi(x_1)}_{-x_2} = -ke + z_2\end{aligned}$$

Odvod virtualnega stanja z_2 je enak:

$$\begin{aligned}
\dot{z}_2 &= -\dot{x}_2 - \dot{\phi}(x_1) \\
&= -u - r\ddot{e}f - 2x_1\dot{x}_1 + k\dot{e} \\
&= -u - r\ddot{e}f - 2x_1\underbrace{(x_1^2 + x_2)}_{\dot{x}_1} + k\underbrace{(-ke + z_2)}_{\dot{e}}
\end{aligned}$$

Zapišemo novo Lyapunovo funkcijo za stanji e in z_2:

$$\begin{aligned}
V(x_1, z_2) &= \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}z_2^2, \\
\dot{V}(x_1, z_2) &= e\dot{e} + z_2\dot{z}_2 \\
&= e(-ke + z_2) + z_2(-u + r\ddot{e}f - 2x_1(x_1^2 + x_2) + k(-ke + z_2))
\end{aligned}$$

Določimo vhod u, ki stabilizira sistem:

$$u = r\ddot{e}f - 2x_1(x_1^2 + x_2) + k(-ke + z_2) - e, \qquad z_2 = -x_2 + r\dot{e}f - x_1^2 + ke$$

$$u = r\ddot{e}f - 2x_1(x_1^2 + x_2) - k^2 e + k(-x_2 + r\dot{e}f - x_1^2 + ke)) - e, \qquad k > 0$$

Preverimo, ali je sistem asimptotično stabilen glede na vhodi vektor u:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x_1, z_2) &= e(-ke + z_2) + z_2(-u + r\ddot{e}f - 2x_1(x_1^2 + x_2) + k(-ke + z_2)) \\
&= -ke^2 \le 0
\end{aligned}$$

Primer 3:

Določite regulacijsko pravilo po metodi Backstepping za dan sistem v prostoru stanj tako, da bo sistem asimptotično stabilen.

$$\dot{x}_1 = -x_1^3 + x_2$$
$$\dot{x}_2 = x_2^2 + u$$

Rešitev:

Za stanje x_1 uvedemo virtualni regulacijsko funkcijo $\phi(x_1)$:

$$\dot{x}_1 = -x_1^3 + \phi(x_1)$$

Po Lyapunovem stabilnostnem kriteriju določimo stabilizirajočo funkcijo $\phi(x_1)$. Izbrana Lyapunova funkcija je:

$$V(x_1) = \frac{1}{2}x_1^2,$$

kjer je odvod enak:

$$\dot{V}(x_1) = x_1\dot{x}_1 = x_1(-x_1^3 + \phi(x_1)) \le 0 \quad \text{Izberemo: } \phi(x_1) = -kx_1, \quad k > 0$$
$$\dot{V}(x_1) = -x_1^4 - kx_1^2 \le 0$$

Določimo novo virtualno stanje z_2.

$$z_2 = x_2 - \phi(x_1) = x_2 + kx_1$$

kjer je:

$$x_2 = z_2 - kx_1 .$$

Zapišemo novo enačbo stanj $\dot{x}_1$, kjer upoštevamo stabilizirajočo funkcijo $\phi(x_1)$.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1^3 + x_2 \\ &= -x_1^3 + z_2 + \phi(x_1) = -x_1^3 - kx_1 + z_2\end{aligned}$$

Odvod virtualnega stanja z_2 je enak:

$$\begin{aligned}\dot{z}_2 &= \dot{x}_2 - \dot{\phi}(x_1) \\ &= x_2^2 + u - k\dot{x}_1 \\ &= (z_2 - kx_1)^2 + u - k(-x_1^3 - kx_1 + z_2)\end{aligned}$$

Zapišemo novo Lyapunovo funkcijo za stanji x_1 in z_2:

$$\begin{aligned}V(x_1, z_2) &= \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}z_2^2, \\ \dot{V}(x_1, z_2) &= x_1\dot{x}_1 + z_2\dot{z}_2 \\ &= x_1(-x_1^3 - kx_1 + z_2) + z_2\underline{((z_2 - kx_1)^2 + u - k(-x_1^3 - kx_1 + z_2)})\end{aligned}$$

Določimo vhod u, ki stabilizira sistem:

$$u = -(z_2 - kx_1)^2 + k(-x_1^3 - kx_1 + z_2) - x_1, \qquad k > 0, \qquad z_2 = x_2 + kx_1$$

$$u = -x_2{}^2 + k(-x_1^3 + x_2) - x_1$$

Preverimo, ali je sistem asimptotično stabiliziran z vhodnim vektorjem u.

$$\begin{aligned}\dot{V}(x_1, z_2) &= x_1(-x_1^3 - kx_1 + z_2) + z_2\left(\underline{(z_2 - kx_1)^2 + u - k(-x_1^3 - kx_1 + z_2)}\right) \\ &= -x_1^4 - kx_1^2 \le 0\end{aligned}$$

Primer 4:

Določite regulacijsko pravilo po metodi Backstepping za dan sistem v prostoru stanj tako, da bo sistem asimptotično stabilen.

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_1 x_2^2$$
$$\dot{x}_2 = u$$

Rešitev:

Za stanje x_1 uvedemo virtualni regulacijsko funkcijo $\phi(x_1)$.

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_1\phi(x_1)$$

Po Lyapunovem stabilnostnem kriteriju določimo stabilizirajočo funkcijo $\phi(x_1)$. Izbrana Lyapunova funkcija je:

$$V(x_1) = \frac{1}{2}x_1^2,$$

kjer je odvod enak:

$$\dot{V}(x_1) = x_1\dot{x}_1 = x_1(-x_1 + x_1\phi(x_1)) \le 0 \quad \text{Izberemo: } \phi(x_1) = -x_1^2$$
$$\dot{V}(x_1) = -x_1^4 - x_1^2 \le 0$$

Določimo novo virtualno stanje z_2.

$$z_2 = x_2^2 - \phi(x_1) = x_2^2 + x_1^2$$

kjer je:

$$x_2^2 = z_2 - x_1^2,$$
$$x_2 = \sqrt{z_2 - x_1^2} = \left|\sqrt{z_2 - x_1^2}\right|.$$

Zapišemo novo enačbo stanj $\dot{x}_1$, kjer upoštevamo stabilizirajočo funkcijo $\phi(x_1)$.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + x_1 x_2^2 \\ &= -x_1 + x_1(z_2 - x_1^2) = -x_1 - x_1^3 + x_1 z_2\end{aligned}$$

Odvod virtualnega stanja z_2 je enak:

$$\begin{aligned}\dot{z}_2 &= 2x_2\dot{x}_2 + 2x_1\dot{x}_1 \\ &= 2(\ z_2 - x_1^2)^{\frac{1}{2}}u + 2x_1(-x_1 - x_1^3 + x_1 z_2\ )\end{aligned}$$

Zapišemo novo Lyapunovo funkcijo za stanji x_1 in z_2.

$$\begin{aligned}
V(x_1,z_2) &= \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}z_2^2,\\
\dot{V}(x_1,z_2) &= x_1\dot{x}_1 + z_2\dot{z}_2\\
&= x_1(-x_1 - x_1^3 + x_1 z_2\ ) + z_2(2(\ z_2 - x_1^2)^{\frac{1}{2}}u + 2x_1(-x_1 - x_1^3 + x_1 z_2\ ))
\end{aligned}$$

Določimo vhod u, ki stabilizira sistem:

$$u = \frac{1}{2}(\ z_2 - x_1^2)^{-\frac{1}{2}}\left(-2x_1(-x_1 - x_1^3 + x_1 z_2\ ) - x_1^2 - kz_2\right), \quad k > 0, \quad z_2 = x_2^2 + x_1^2$$

$$u = \frac{1}{2}(\ x_2^2)^{-\frac{1}{2}}\left(-2x_1(-x_1 - x_1^3 + x_1(x_2^2 + x_1^2)) - x_1^2 - k(x_2^2 + x_1^2)\right)$$

Preverimo, ali je sistem asimptotično stabiliziran pri vhodnem vektorju u.

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x_1,z_2) &= x_1(-x_1 - x_1^3 + x_1 z_2\ ) + z_2(2(\ z_2 - x_1^2)^{\frac{1}{2}}u + 2x_1(-x_1 - x_1^3 + x_1 z_2\ ))\\
&= -x_1^2 - x_1^4 - kz_2^2 \le 0
\end{aligned}$$

Primer 5:

Določite regulacijsko pravilo po metodi Backstepping za dan sistem v prostoru stanj tako, da bo sistem asimptotično stabilen.

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = x_3$$
$$\dot{x}_3 = u$$

Rešitev:

Za stanje x_1 uvedemo virtualni regulacijsko funkcijo $\phi(x_1)$.

$$\dot{x}_1 = \phi(x_1)$$

Po Ljapunovem stabilnostnem kriteriju določimo stabilizirajočo funkcijo $\phi(x_1)$. Izbrana Ljapunova funkcija je:

$$V(x_1) = \frac{1}{2}x_1^2,$$

kjer je odvod enak:

$\dot{V}(x_1) = x_1\dot{x}_1 = x_1(\phi(x_1)) \le 0$ Izberemo: $\phi(x_1) = -x_1$

$$\dot{V}(x_1) = -x_1^2 \le 0$$

Določimo novo virtualno stanje z_2.

$$z_2 = x_2 - \phi(x_1) = x_2 + x_1$$

kjer je:

$$x_2 = z_2 - x_1, .$$

Zapišemo novo enačbo stanj $\dot{x}_1$, kjer upoštevamo stabilizirajočo funkcijo $\phi(x_1)$.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ &= -x_1 + z_2\end{aligned}$$

Odvod virtualnega stanja z_2 je enak:

$$\begin{aligned}\dot{z}_2 &= \dot{x}_2 + \dot{x}_1 \\ &= x_3 - x_1 + z_2\end{aligned}.$$

Za virtualno stanje z_2 uvedemo novo virtualni regulacijsko funkcijo $\phi(z_2)$ za predhodno stanje x_3.

$$\dot{z}_2 = -x_1 + z_2 + x_3 = -x_1 + z_2 + \phi(z_2).$$

Zapišemo novo Ljapunovo funkcijo za stanji x_1 in z_2.

$$V(x_1, z_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}z_2^2,$$

$$\begin{aligned}\dot{V}(x_1, z_2) &= x_1\dot{x}_1 + z_2\dot{z}_2 \\ &= x_1(-x_1 + z_2) + z_2(-x_1 + z_2 + \phi(z_2))\end{aligned}$$

Določimo $\phi(z_2) = -z_2$

$$\dot{V}(x_1, z_2) = -x_1^2 < 0$$

Določimo novo virtualno stanje z_3.

$$z_3 = x_3 - \phi(z_2)$$

$$z_3 = x_3 + z_2 \;, \qquad x_3 = z_3 - z_2$$

Zapišemo preoblikovano stanje $\dot{z}_2$.

$$\begin{aligned}\dot{z}_2 &= -x_1 + z_2 + x_3 \\ &= -x_1 + z_2 + z_3 - z_2 = -x_1 + z_3\end{aligned}$$

Odvod stanj $\dot{z}_3$ je:

$$\begin{aligned}\dot{z}_3 &= \dot{x}_3 + \dot{z}_2 \\ &= u - x_1 + z_3\end{aligned}$$

Določimo Ljapunovo funkcijo za stanja x_1, z_2 in z_3.

$$V(x_1, z_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}z_2^2 + \frac{1}{2}z_3^2,$$

$$\begin{aligned}\dot{V}(x_1, z_2) &= x_1\dot{x}_1 + z_2\dot{z}_2 + z_3\dot{z}_3 \\ &= x_1(-x_1 + z_2) + z_2(-x_1 + z_3) + z_3(u - x_1 + z_3)\end{aligned}$$

Določimo vhod u, ki stabilizira sistem.

$$u = x_1 - z_2 - z_3 - kz_3, \quad k > 0, \quad z_2 = x_1 + x_2, \quad z_3 = x_1 + x_2 + x_3$$

$$u = -x_1 - 2x_2 - x_3 - k(x_1 + x_2 + x_3), \quad k > 0$$

Preverimo, ali je sistem asimptotično stabiliziran pri vhodnem vektorju u.

$$\begin{aligned}\dot{V}(x_1, z_2) &= x_1(-x_1 + z_2) + z_2(-x_1 + z_3) + z_3(u - x_1 + z_3) \\ &= -x_1^2 - k(x_1 + x_2 + x_3)^2 \le 0\end{aligned}$$

4. Načrtovanje regulatorja po metodi drsnega režima 'Sliding mode control-SMC'

Metoda drsnega režima je nelinearno zaprto-zančno vodenje, ki na osnovi trenutnih stanj sistema tega vodi po izbrani fazni drsni karakteristiki. Zaprto-zančno vzbujanje sistema je nezvezna funkcija, ki preklaplja med dvema ali več zveznimi karakteristikami. Regulator po metodi drsnega režima se imenuje tudi regulator z variabilno strukturo, saj preklopne zvezne karakteristike nimajo enakih lastnostih.

Za sistem v prostoru stanj:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u .$$

Pogoj obstoja drsnega režima

Lyapunova funkcija drsnega režima:

$$V(\sigma) = \frac{1}{2}\sigma(x)^2,$$

kjer je $\sigma(x)$ drsna spremenljivka, pri čemer velja, da stanja x, ki se nahajajo na karakteristiki $\sigma(x)$, izpolnjuje pogoj $\sigma(x) = 0$. Za stanja, ki se ne nahajajo na karakteristiki, velja $\sigma(x) \neq 0$. Zaprto-zančno previlo drsnega režima, preklaplja med stanjema glede na predznak in razdalje od drsne spremenljivke $\sigma(x)$.

Po Lyapunovem stabilnostnem kriteriju je zadosten pogoj obstoja drsnega režima izpolnjen s.

$$\begin{aligned}\dot{V}(\sigma) &= \sigma(x)\dot{\sigma}(x) \leq 0 \\ &= \underbrace{\underbrace{\sigma(x)}_{\frac{\partial V}{\partial \sigma}}\underbrace{\dot{\sigma}(x)}_{\frac{d\sigma}{dt}}}_{\frac{dV}{dt}}\end{aligned}$$

Zaprtozančno pravilo je izbrano tako, da vhodni signal $u(x)$ vpliva na $\dot{\sigma}(x)$ tako, da ta spreminja predznak glede na trenutno vrednost $\dot{\sigma}(x)$. Če je $\sigma(x)$ negativna, vhod $u(x)$ teži k temu, da $\sigma(x)$ postane pozitivna in obratno. Tako tvorimo drsni režim, ko se trajektorija stanja vije okrog drsne spremenljivke $\sigma(x)$ do pogoja $\sigma(x) = 0$.

$$\dot{\sigma}(x) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}\dot{x} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}\left(f(x) + g(x)u\right).$$

Vhodni signal ima direkten vpliv na karakteristiko $\dot{\sigma}(x)$.

Pogoj konvergence

Da zagotovimo konvergenco drsne spremenljivke v končnem času $\sigma(x)=0$, mora odvod funkcije Lyapunova $\frac{dV}{dt}$ biti omejena in ne ničelna funkcija, pri čemer velja:

$$\frac{dV}{dt} \leq -\alpha\left(\sqrt{V}\right)^{\eta} \leq -\alpha\left(\sqrt{V}\right),$$

kjer je $\alpha > 0$ in $0 < \eta \leq 1$.

Primer 1:

Določite regulacijsko pravilo po metodi drsnega režima za sistem:

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = u + f(x_1, x_2, t),$$

kjer je x_1 pozicija, x_2 hitrost in funkcija $f(x_1, x_2, t)$ predstavlja viskozno trenje odstopanje modela in ostale neznane vplive sistema. Predpostavimo, da je funkcija strogo omejena in velja $|f(x_1, x_2, t)| \le L > 0.$

Rešitev:

Izberemo dinamiko sistema, drsni režim $\sigma(x) = 0$.

$$x_2 + cx_1 = 0, \qquad c > 0.$$
$$\dot{x}_1 + cx_1 = 0, \qquad c > 0.$$

Izraz predstavlja diferencialno enačbo prvega reda, kjer je splošna rešitev enaka:

$$x_1(t) = x_1(0)e^{-ct},$$
$$x_2(t) = \dot{x}_1(t) = -cx_2(0)e^{-ct}.$$

Obe stanji asimptotično konvergirata proti nič le v primeru, če ne upoštevamo funkcije $f(x_1, x_2, t)$. Na osnovi postavljene dinamike vpeljemo novo spremenljivko ali funkcijo drsnega režima $\sigma(x)$.

$$\sigma(x) = x_2 + cx_1, \qquad c > 0.$$

Izberemo Lyapunovo funkcijo drsne spremenljivke:

$$V(\sigma) = \frac{1}{2}\sigma^2(x),$$

V smislu zagotovitve končne konvergence stanj $\sigma(x) = 0$ izberemo pogoj $\alpha > 0$ in $\eta = 1$.

$$\frac{dV}{dt} \le -\alpha\left(\sqrt{V}\right)^{\eta} = -\alpha V^{\frac{1}{2}}$$

Odvod Lyapunove funkcije $\dot{V}(\sigma)$ je enak:

$$\dot{V}(\sigma) = \sigma\dot{\sigma}$$
$$= \sigma(\dot{x}_2 + c\dot{x}_1) = \sigma\left(u + f(x_1, x_2, t) + cx_2\right) < 0$$

Določimo vhodni vektor u.

$$\underline{u=-cx_2+v},$$

kjer je odvod Lyapunove funkcije enak:

$$\begin{aligned}\dot{V}(\sigma)&=\sigma\left(-cx_2+v+f\left(x_1,x_2,t\right)+cx_2\right),\\ &=\sigma\left(f\left(x_1,x_2,t\right)+v\right),\\ &=\sigma f\left(x_1,x_2,t\right)+\sigma v\le\left|\sigma\right|L+\sigma v, \qquad \left|f\left(x_1,x_2,t\right)\right|\le L>0\end{aligned}$$

Za vhodni vektor v izberemo ***signum*** funkcijo:

$$\underline{v=-\rho sign(\sigma)}, \quad \rho>0$$

$$sign(\sigma)=\begin{cases}1 & ,\sigma>0\\ -1 & ,\sigma<0\end{cases}$$
$$sign(0)\in\left[-1,\ 1\right]$$

Za določitev koeficienta ρ uporabimo pogoj konvergence, kjer lahko odvod funkcije Ljapunova zapišemo kot:

$$\begin{aligned}\dot{V}(\sigma)&\le\left|\sigma\right|L+\sigma v\\ &\le\left|\sigma\right|L-\sigma\rho sign(\sigma)=\left|\sigma\right|L-\left|\sigma\right|\rho=-\left|\sigma\right|\left(\rho-L\right)\end{aligned}$$

Upoštevamo kriterij konvergence $V(\sigma)=\frac{1}{2}\sigma^2(x)\Rightarrow \; V(\sigma)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left|\sigma\right|$,

$$\dot{V}(\sigma)\le-\alpha V(\sigma)^{\frac{1}{2}}=-\alpha\frac{1}{\sqrt{2}}\left|\sigma\right|$$

Enačimo izraza za $\dot{V}(\sigma)$,

$$-\left|\sigma\right|\left(\rho-L\right)=-\alpha\frac{1}{\sqrt{2}}\left|\sigma\right|,$$

kjer je koeficient ρ enak:

$$\rho=\alpha\frac{1}{\sqrt{2}}+L$$

Regulacijsko pravilo drsnega režima je:

$$u = -cx_2 - \rho sign(\sigma)$$

$$u = -cx_2 - \left(\alpha \frac{1}{\sqrt{2}} + L \right) sign(x_2 + cx_1), \qquad c, \alpha > 0$$

Kvazi drsni režim zamenjamo s funkcijo signum,

$$sign(\sigma) \approx \frac{\sigma}{|\sigma| + \varepsilon}, \qquad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

Primer 2:

Določite regulacijsko pravilo po metodi drsnega režima za dani sistem tako, da bo ta sledil referenčnim vrednostim:

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = u + f(x_1, x_2, t),$$
$$y = x_1$$

kjer je x_1 pozicija, x_2 hitrost in funkcija $f(x_1, x_2, t)$ predstavlja viskozno trenje odstopanje modela in ostale neznane vplive. Predpostavimo, da je funkcija strogo omejena in velja $|f(x_1, x_2, t)| \leq L > 0.$

Rešitev:

Določimo napako vodenje.

$$e = ref - x_1$$

Izberemo dinamiko sistema, drsni režim za napako vodenje $\sigma(x) = 0$,

$$\dot{e} + ce = 0, \qquad c > 0.$$

$$\sigma(x) = \dot{e} + ce, \qquad c > 0\,.$$

Drsna karakteristika je z vpeljavo stanj x_1 in x_2 enaka:

$$\sigma(x) = \dot{e} + ce,$$
$$\sigma(x) = r\dot{e}f - \dot{x}_1 + c(ref - x_1),$$

Vpeljemo Lyapunovo funkcijo drsne spremenljivke.

$$V(\sigma) = \frac{1}{2}\sigma^2(x),$$

V smislu zagotovitve končne konvergence stanj $\sigma(x) = 0$ izberemo pogoj $\alpha > 0$ in $\eta = 1$.

$$\frac{dV}{dt} \leq -\alpha\left(\sqrt{V}\right)^{\eta} = -\alpha V^{\frac{1}{2}}$$

Odvod Lyapunove funkcije $\dot{V}(\sigma)$ je enak:

$$\begin{aligned}\dot{V}(\sigma) &= \sigma\dot{\sigma} \\ &= \sigma\left(r\ddot{e}f - \ddot{x}_1 + c(r\dot{e}f - \dot{x}_1)\right), \\ &= \sigma\left(r\ddot{e}f - \dot{x}_2 + c(r\dot{e}f - \dot{x}_1)\right), \\ &= \sigma\left(r\ddot{e}f \underbrace{-u - f\left(x_1, x_2, t\right)}_{\dot{x}_2} + c(r\dot{e}f - x_2)\right),\end{aligned}$$

Določimo vhodni vektor u.

$$\underline{u = r\ddot{e}f + c \cdot r\dot{e}f - cx_2 - v},$$

kjer je odvod Lyapunove funkcije enak:

$$\begin{aligned}\dot{V}(\sigma) &= \sigma\left(r\ddot{e}f - r\ddot{e}f - c \cdot r\dot{e}f + cx_2 + v - f\left(x_1, x_2, t\right) + c(r\dot{e}f - x_2)\right), \\ &= \sigma\left(-f\left(x_1, x_2, t\right) + v\right), \\ &= -\sigma f\left(x_1, x_2, t\right) + \sigma v \le |\sigma| L + \sigma v, \qquad \left|f\left(x_1, x_2, t\right)\right| \le L > 0\end{aligned}$$

Za vhodni vektor v izberemo signum funkcijo (Drsni režim).

$$\underline{v = -\rho sign(\sigma)}, \quad \rho > 0$$

Za določitev koeficienta ρ uporabimo pogoj konvergence, kjer lahko odvod funkcije Ljapunova zapišemo kot,

$$\begin{aligned}\dot{V}(\sigma) &\le |\sigma| L + \sigma v \\ &\le |\sigma| L - \sigma\rho sign(\sigma) = |\sigma| L - |\sigma| \rho = -|\sigma|(\rho - L)\end{aligned}$$

Upoštevamo kriterij konvergence $V(\sigma) = \frac{1}{2}\sigma^2(x) \Rightarrow \ V(\sigma)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}|\sigma|$,

$$\dot{V}(\sigma) \le -\alpha V(\sigma)^{\frac{1}{2}} = -\alpha \frac{1}{\sqrt{2}}|\sigma|$$

Enačimo izraza za $\dot{V}(\sigma)$,

$$-|\sigma|(\rho - L) = -\alpha \frac{1}{\sqrt{2}}|\sigma|,$$

kjer je koeficient ρ enak:

$$\rho = \alpha \frac{1}{\sqrt{2}} + L$$

Regulacijsko pravilo drsnega režima je:

$$u = r\ddot{e}f + c \cdot r\dot{e}f - cx_2 + \rho sign(\sigma)$$

$$u = r\ddot{e}f + c \cdot r\dot{e}f - cx_2 + \left(\alpha \frac{1}{\sqrt{2}} + L \right) sign(\dot{e} + ce)$$

Kvazi drsni režim zamenjamo s funkcijo signum,

$$sign(\sigma) \approx \frac{\sigma}{|\sigma| + \varepsilon}, \qquad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

Indeksno kazalo

Reference

1. Franklin G.,F.; Powell J.,D.; Workman M., L. Digital Control of Dynamic Systems, 3rd edition, Ellis-Kagle Press, 2006.
2. Proakis, J., G.; Manolakis, D., G. Digital Signal Processing: Principles, Algorithms, and Applcations, Prentice Hall, 2007.
3. Phillips, C., L.; Nagle, H., T., Chakrabortty, A. Digital Control System Analysis and Design, Pearson, 2015.
4. Kuo, B., C. Digital Control Systems, Oxford University Press, 1991.
5. Bemporad, A., Heemels, H., Johansson, M., Networked Control Systems, Springer Verlag, 2010.
6. Moreno, J., A.; Osorio, M. A Lyapunov approach to second-order sliding mode controller and observer. 47th IEEE Conference on Decision and Control, Cancun, Mexico 2008, 2856-2861.
7. Behera, A., K.; Bandyopadhyay, B. Steady-state behaviour of discretized terminal sliding mode. *Automatica*, 2015, 54, 176–181.