PEWARNAAN *GRACEFUL* PADA GRAF HASIL OPERASI *COMB* GRAF SIKLUS DAN GRAF *STAR*

Mohammad Rudi[1], Abdul Aziz Wahab[2], Eko Waluyo[2]
Universias Islam Zainul Hasan Genggong, Indonesia
E-mail: ekowaluyo.inzah.tdm@gmail.com

ABSTRACT

Graceful coloring is a vertex coloring of a graph that induces edge coloring. side coloring in graceful coloring is obtained from the absolute value of the difference between the colors of the vertices adjacent to the side. This research is a type of exploratory research using axiomatic deductive methods and pattern detection methods. This study aims to determine the graceful coloring and chromatic numbers on a graph $C_n \rhd S_m$. This research produces a new theorem which consists of three cases regarding graceful chromatic numbers on graphs $C_n \rhd S_m$ that is $\chi_g(C_n \rhd S_m) = m + 7; for\ n \equiv 1\ mod\ 3, \chi_g(C_n \rhd S_m) = m + 7; for\ n \equiv 2\ mod\ 3, dan\ \chi_g(C_n \rhd S_m) = m + 6; for\ n \equiv 0\ mod\ 3$

Keyword : Pewarnaan Graf, Pewarnaan Graceful, Bilangan Kromatik

PENDAHULUAN

Perkembangan teknologi informasi telah mengalami perkembangan yang pesat selama ini. Perkembangan ini tidak terlepas dari permasalahan yang dihadapi manusia dalam kehidupan sehari-hari, dari yang sederhana hingga yang kompleks. Masalah apa pun dapat diselesaikan dengan menerapkan sains. Salah satu dari ilmu yang dapat dijadikan dasar pengembangan teknologi adalah matematika. Matematika, sebagai ilmu dasar, berperan penting dalam pengembangan ilmu alam, teknologi modern, dan pemikiran manusia. Matematika merupakan wahana berpikir untuk mengembangkan kemampuan berpikir, berpikir logis, sistematis dan kritis. Oleh karena itu, matematika dapat diterapkan pada masalah mulai dari yang sederhana hingga yang kompleks dengan mengamati penyebab masalah dan menemukan solusi untuk masalah tersebut secara konsisten.

Bidang matematika yang menarik untuk ditelaah lebih lanjut, salah satunya adalah teori graf. Graf adalah pasangan $(V(G), E(G))$ dengan $V(G)$ adalah himpunan tidak kosong dari objek-objek yang disebut titik, dan $V(G)$ adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di $V(G)$ yang disebut sisi [11]. Teori graf pertama kali diperkenalkan pada tahun 1736 oleh matematikawan Swiss, yakni Leonhard Euler. Melalui karyanya yang melibatkan usahanya untuk memecahkan masalah jembatan Konnisberg menggunakan graf. Teori graf mewakili objek diskrit visual sebagai poin. Objek ini kemudian dihubungkan antara objek titik diskrit dan objek titik diskrit lainnya yang direpresentasikan sebagai sisi [3].

Salah satu kajian teori graf yang dapat diterapkan untuk menyelesaikan berbagai permasalahan dalam kehidupan sehari-hari adalah pewarnaan graf. Pewarnaan graf adalah kegiatan memberikan warna yang berbeda pada setiap simpul, sisi, atau daerah yang berdekatan. Pewarnaan graf dibagi menjadi tiga jenis yaitu pewarnaan titik, sisi, dan

---

[1] Mahasiswa Universitas Islam Zainul Hasan Genggong
[2] Dosen Universitas Islam Zainul Hasan Genggong

©Kadikma, Vol.14, No.1, hal. 9-19, 2023

daerah. Pewarnaan titik adalah proses pemberian warna yang berbeda pada setiap titik pada graf agar titik-titik yang bertetangga tidak memiliki warna yang sama. Pewarnaan sisi kemudian diwarnai dengan cara memberi warna berbeda pada setiap sisi yang berdekatan sehingga sisi yang berdekatan tidak memiliki warna yang sama. Pewarnaan daerah juga mewarnai daerah yang berdekatan dengan warna yang berbeda sehingga daerah yang berdekatan tidak memiliki warna yang sama.

Dalam pewarnaan graf terdapat kasus khusus, yaitu pewarnaan *graceful*. Pewarnaan graceful pertama kali diperkenalkan pada tahun 2015 oleh Gary Chartrand [4]. Pewarnaan *graceful* adalah pewarnaan titik pada suatu graf yang menginduksi pewarnaan sisinya. Jadi, pewarnaan sisi pada pewarnaan graceful diperoleh dari nilai mutlak selisih antara warna titik yang bertetangga dengan sisi tersebut. Warna titik dan sisi yang digunakan dinyatakan dengan bilangan asli yang boleh berulang dengan syarat setiap titik dan sisi yang bertetangga harus memiliki warna yang berbeda. Kemudian, jumlah warna titik minimum yang terbentuk pada pewarnaan *graceful* dari graf G disebut bilangan kromatik *graceful* yang disimbolkan dengan $\chi_g(G)$ [9].

Misalkan G dan H adalah graf terhubung dan u adalah simpul di H. Operasi comb dari graf G dan graf H dinotasikan dengan $G \rhd H$ adalah graf yang diperoleh dengan mengambil satu kopian G dan $|G|$ kopian dari H dan melekatkan simpul u dari masingmasing graf H kopian ke-i pada simpul ke-i dari graf G [10].

Beberapa peneliti yang telah melakukan penelitian tentang pewarnaan *graceful* adalah (English & Zhang, 2017) tentang bilangan kromatik *graceful* pada graf pohon. Selanjutnya [1] menemukan bilangan kromatik *graceful* pada keluarga graf *unicyclic*, yaitu graf *tadpole*, graf *pan*, dan graf *sun*. Selanjutnya [8] tentang bilangan kromatik *graceful* pada beberapa kelas graf khusus. Selanjutnya [9] yang menemukan bilangan kromatik *graceful* pada keluarga graf *unicyclic*, yaitu graf *bull*, graf *net*, graf *cricket*, graf *caveman*, graf *peach*, dan graf *flowerpot*. Selanjutnya [7] menemukan bilangan kromatik *graceful* pada hasil operasi *comb* graf roda, yaitu graf roda dengan graf lintasan dan graf roda dengan graf lingkaran.

Berdasarkan hasil penelitian sebelumnya, penelitian ini tertarik untuk menganalisis bilangan kromatik *graceful* pada graf siklus *comb* graf *star*. Pemilihan pewarnaan *graceful* didasari oleh keunikannya, yaitu pada suatu graf G titik yang bertetangga harus memiliki warna yang berbeda yang menginduksi pewarnaan sisinya dimana warna sisinya diperoleh dari nilai mutlak selisih titik yang bertetangga dengan sisi tersebut. Sementara itu, pemilihan graf $C_n \rhd S_m$ didasari oleh proses generalisasi yaitu menjadikan topik pewarnaan *graceful* semakin umum melalui penelitian terkait bilangan kromatik *graceful* graf $C_n \rhd S_m$ yang belum pernah diteliti atau didapatkan sebelumnya. Oleh karena itu, judul dari penelitian ini adalah "Pewarnaan *Graceful* pada Graf Hasil Operasi *Comb* Graf Siklus dan Graf *Star*".

METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan jenis penelitian eksploratif. Penelitian eksploratori adalah penelitian yang dilakukan secara luas dan mendalam dengan tujuan menyelidiki atau menganalisis hal-hal baru, dan menggunakan hasilnya sebagai acuan untuk penelitian selanjutnya. Alasan penelitian ini bersifat eksploratori adalah karena penelitian ini bertujuan untuk memperkenalkan sesuatu yang baru dan diketahui oleh masyarakat luas, serta memberikan penjelasan dasar dan mengembangkan teori-teori yang dapat diperbaharui.

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode deduktif aksiomatik dan metode pendeteksi pola (*pattern recognition*). Metode deduktif aksiomatik adalah metode penelitian yang menggunakan prinsip-prinsip pembuktian deduktif yang berlaku dalam logika matematika dengan menggunakan aksioma atau teorema yang telah ada yang dapat diterapkan dalam pewarnaan *graceful* pada graf siklus *comb* graf *star*. Metode pendeteksi pola (*pattern recognition*) merupakan metode untuk mencari serta menemukan pola pewarnaan dan bilangan kromatik, sehingga diperoleh bilangan kromatik *graceful* pada graf siklus *comb* graf *star*.

Gambar 1. Prosedur Penelitian

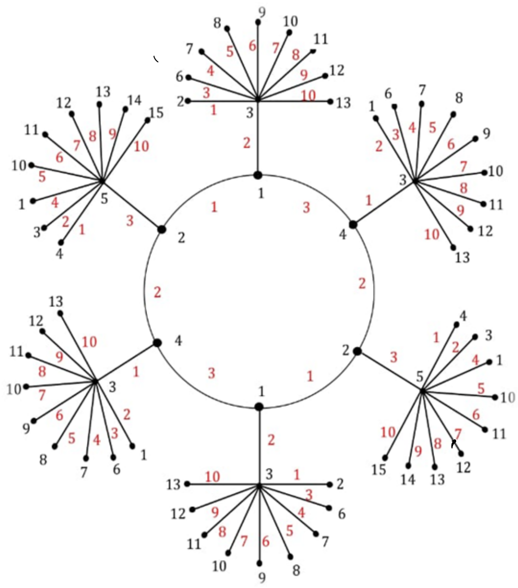
HASIL DAN PEMBAHASAN

Hasil dari penelitian ini adalah teorema pewarnaan *graceful* (*Graceful Coloring*) pada graf $C_n \triangleright S_m$ dengan syarat $n \geq 4,$ dan $m \geq 2$ Penelitian ini diawali dengan menentukan graf $C_n \triangleright S_m$. Kemudian menentukan kardinalitas dari graf $C_n \triangleright S_m$. Setelah itu, melakukan pewarnaan titik proper dan pewarnaan sisi proper pada graf yang telah ditentukan hingga memenuhi definisi pewarnaan *graceful* dan didapatkan bilangan kromatiknya.

Pada penelitian ini didapatkan satu teorema baru yang terdiri dari tiga kasus terkait pewarnan *graceful* $C_n \triangleright S_m$. Format penyajian temuan penelitian ini diawali dengan pernyataan teorema kemudian dilanjutkan dengan bukti dan ilustrasi sebagai validasi kebenaran teorema.

A. Hasil

Pada penelitian pewarnaan *graceful* pada graf $C_n \triangleright S_m$ ini diperoleh satu teorema. Pewarnaan ini dimulai dari memberikan warna pada setiap titik dan sisi sedemikian hingga setiap dua titik yang bertetangga berbeda dan setiap dua sisi yang bertetangga berbeda, dimana warna sisi diperoleh dari selisih warna dua titik yang berkaitan dengan sisi tersebut. Banyaknya warna minimum yang digunakan dalam pewarnaan titik *proper* disebut bilangan kromatik *graceful* dari graf G yang dinotasikan dengan $\chi_g(G)$. Jadi, bilangan kromatik *graceful* adalah bilangan k terkecil sehingga graf G dapat diwarnai dengan k warna.



Gambar 2. Graf $C_n \rhd S_m$

Teorema 3.1. Bilangan kromatik *graceful* pada graf $C_n \rhd S_m, n \geq 4, m \geq 2$ adalah

$$\chi_g(C_n \rhd S_m)\begin{cases} m+7; untuk\ n \equiv 1\ mod\ 3 \\ m+7; untuk\ n \equiv 2\ mod\ 3 \\ m+6; untuk\ n \equiv 0\ mod\ 3 \end{cases}$$

Bukti. Graf $C_n \rhd S_m$ memiliki $V(C_n \rhd S_m) = \{x_i, y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_{ij}; 1 \leq j \leq m\}$ dan $E(C_n \rhd S_m) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_n x_1\} \cup \{x_i y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i y_{ij}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$. Kardinalitas titik pada graf $(C_n \rhd S_m)$ adalah $|V(C_n \rhd S_m)| = n(2+m)$ dan kardinalitas sisi dari graf $(C_n \rhd S_m)$ adalah $|E(C_n \rhd S_m)| = n(2+m)$. Graf $(C_n \rhd S_m)$ juga memiliki $\Delta(C_n \rhd S_m) = m+1$ sedemikian hingga diperoleh lemma batas bawah $\chi_g(C_n \rhd S_m) \geq m+2$.

Kasus 1. Untuk $n \equiv 1\ mod\ 3$

Untuk membuktikan $\chi_g(C_n \rhd S_m) = m+7; untuk\ n \equiv 1\ mod\ 3$, harus ditentukan terlebih dahulu batas bawah dan batas atasnya. Berdasarkan Lema 1.1 $\chi_g(G) \geq \Delta(G) + 1$ diperoleh batas bawah $\chi_g(C_n \rhd S_m) \geq m+2$. Diasumsikan $\chi_g(C_n \rhd S_m) = m+6$, diberikan warna titik $y_m = m+6$, diperoleh sisi $y_i y_{ij}$ yang akan memiliki warna yang sama dengan salah satu sisi $y_i y_{ij}$ lainnya, hal ini kontradiksi dengan definisi pewarnaan *graceful* sedemikian hingga asumsi terdapat $m+6$ warna adalah salah. Karena asumsi $m+6$ salah, otomatis $m+2$ juga salah. Jadi terbukti bahwa $\chi_g(C_n \rhd S_m) \geq m+7$.

Selanjutnya dibuktikan batas atas bilangan kromatik *gracefull* graf $C_n \rhd S_m$. Didefinisikan $f: V(C_n \rhd S_m) \to \{1, 2, 3, \dots, m+7\}$ diberikan oleh:
Untuk $n \equiv 1 \; mod \; 3$

$$f[c(x_i)] \begin{cases} 1, untuk \; i \equiv 1 \; mod \; 3 \\ 4, untuk \; i \equiv 2 \; mod \; 3 \\ 2, untuk \; i \equiv 0 \; mod \; 3 \\ 3, untuk \; i = n \end{cases}$$

$$f[c(y_i)] \begin{cases} 2, untuk \; i = 1 \\ 3, untuk \; i \equiv 1 \; mod \; 3 \\ 5, untuk \; i \equiv 0 \; mod \; 3 \\ 6, untuk \; i = n \end{cases}$$

Dikarenakan $f[c(y_{ij})]$ pada $n \equiv 1 \; mod \; 3$ terdapat beberapa fungsi yang berbeda, agar lebih mudah dipahami peneliti membagi mejadi beberapa kasus berikut.

$$f[c(y_{ij})]\{ j+1, \; 1 \le i \le n, \; 3 \le j \le m, \; untuk \; x_1 \qquad \text{kasus 1}$$

$$f[c(y_{ij})] \begin{cases} j+1, \; 2 \le i \le n, \; 5 \le j \le m \\ 1, untuk \; i \equiv 2 \; mod \; 3, \; i = 1 \\ 2, untuk \; i \equiv 1 \; mod \; 3, \; i = 1 \end{cases} \qquad \text{kasus 2}$$

$$f[c(y_{ij})] \begin{cases} j+1, \; 4 \le i \le n, \; 9 \le j \le m \\ 4, untuk \; i \equiv 0 \; mod \; 3, \; i = 1 \\ 3, untuk \; i \equiv 0 \; mod \; 3, \; i = 2 \\ 1, untuk \; i \equiv 0 \; mod \; 3, \; i = 3 \end{cases} \qquad \text{kasus 3}$$

$$f[c(y_{ij})] \begin{cases} j+1, \; 5 \le i \le n, \; 11 \le j \le m \\ 5, untuk \; i = 1 \\ 4, untuk \; i = 2 \\ 2, untuk \; i = 3 \\ 1, untuk \; i = 4 \end{cases} , untuk \; x_n \qquad \text{kasus 4}$$

Dapat dilihat bahwa fungsi f juga menginduksi pewarnaan sisi proper dari graf $C_n \rhd S_m$ diberikan oleh:

$$f[c'(x_i x_{i+1})] \begin{cases} 3, untuk \; i \equiv 1 \; mod 3 \\ 2, untuk \; i \equiv 2 \; mod \; 3 \\ 1, untuk \; i \equiv 0 \; mod \; 3 \\ 2, untuk \; i = n \end{cases}$$

$$f[c'(x_i y_i)] \begin{cases} 2, untuk \; i \equiv 1 \; mod \; 3 \\ 1, untuk \; i \equiv 2 \; mod \; 3, i = 1 \\ 3, untuk \; i \equiv 0 \; mod \; 3, i = n \end{cases}$$

Dikarenakan $f[c'(y_i y_{ij})]$ pada $n \equiv 1 \; mod \; 3$ terdapat beberapa fungsi yang berbeda, agar lebih mudah dipahami peneliti membagi mejadi beberapa kasus berikut.

$$f[c'(y_i y_{ij})] \begin{cases} J+1, \; 3 \le i \le n, \; 3 \le J \le m \\ 2, untuk \; x_1, \; i = 1 \\ 3, untuk \; x_1, \; i = 2 \end{cases} \qquad \text{kasus 1}$$

$$f[c'(y_i y_{ij})]\begin{cases} J+1, & 3 \le i \le n, \quad 3 \le J \le m \\ 1, untuk\ i \equiv 1\ mod\ 3, & i=1 \\ 3, untuk\ i \equiv 1\ mod\ 3, & i=2 \end{cases} \qquad \text{kasus 2}$$

$$f[c'(y_i y_{ij})]\begin{cases} J+1, & 3 \le i \le n, \quad 3 \le J \le m \\ 2, untuk\ i \equiv 2\ mod\ 3, & i=1 \\ 3, untuk\ i \equiv 2\ mod\ 3, & i=2 \end{cases} \qquad \text{kasus 3}$$

$$f[c'(y_i y_{ij})]\begin{cases} J+1, & 3 \le i \le n, \quad 3 \le J \le m \\ 1, untuk\ i \equiv 0\ mod\ 3, & i=1 \\ 3, untuk\ i \equiv 0\ mod\ 3, & i=2 \end{cases} \qquad \text{kasus 4}$$

$$f[c'(y_i y_{ij})]\begin{cases} J+1, & 3 \le i \le n, \quad 3 \le J \le m \\ 1, untuk\ x_n, & i=1 \\ 2, untuk\ x_n, & i=2 \end{cases} \qquad \text{kasus 5}$$

Berdasarkan batas bawah dan batas atas bilangan kromatik *graceful* pada graf $C_n \triangleright S_m$ untuk $n \equiv 1\ mod\ 3$ diperoleh $m+7 \ge \chi_g(C_n \triangleright S_m) \ge m+7$, dengan kata lain $\chi_g(C_n \triangleright S_m) = m+7$ untuk $n \equiv 1\ mod\ 3$.

Kasus 2. Untuk $n \equiv 2\ mod\ 3$

Untuk membuktikan $\chi_g(C_n \triangleright S_m) = m+7; untuk\ n \equiv 2\ mod\ 3$, harus ditentukan terlebih dahulu batas bawah dan batas atasnya. Berdasarkan Lema 1.1 $\chi_g(G) \ge \Delta(G)+1$ diperoleh batas bawah $\chi_g(C_n \triangleright S_m) \ge m+2$. Diasumsikan $\chi_g(C_n \triangleright S_m) = m+6$, diberikan warna titik $y_m = m+6$, diperoleh sisi $y_i y_{ij}$ yang akan memiliki warna yang sama dengan salah satu sisi $y_i y_{ij}$ lainnya, hal ini kontradiksi dengan definisi pewarnaan *graceful* sedemikian hingga asumsi terdapat $m+6$ warna adalah salah. Karena asumsi $m+6$ salah, otomatis $m+2$ juga salah. Jadi terbukti bahwa $\chi_g(C_n \triangleright S_m) \ge m+7$.

Selanjutnya dibuktikan batas atas bilangan kromatik *gracefull* graf $C_n \triangleright S_m$. Didefinisikan $f: V(C_n \triangleright S_m) \to \{1, 2, 3, \dots, m+7\}$ diberikan oleh:
Untuk $n \equiv 2\ mod\ 3$

$$f[c(x_i)]\begin{cases} 1, untuk\ i \equiv 1\ mod\ 3 \\ 4, untuk\ i \equiv 2\ mod\ 3 \\ 2, untuk\ i \equiv 0\ mod\ 3 \\ 3, untuk\ i = n-1 \\ 5, untuk\ i = n \end{cases}$$

$$f[c(y_i)]\begin{cases} 2, untuk\ i = 1 \\ 3, untuk\ i \equiv 1\ mod\ 3 \\ 3, untuk\ i \equiv 2\ mod\ 3 \\ 5, untuk\ i \equiv 0\ mod\ 3 \\ 6, untuk\ i = n-1 \\ 4, untuk = n \end{cases}$$

Dikarenakan $f[c(y_{ij})]$ pada $n \equiv 2\ mod\ 3$ terdapat beberapa fungsi yang berbeda, agar lebih mudah dipahami peneliti membagi mejadi beberapa kasus berikut.

$$f[c(y_{ij})]\{\, j+1,\ 1 \le i \le n,\ 3 \le j \le m,\quad untuk\ x_1 \qquad \text{kasus 1}$$

$$f[c(Y_{ij})]\begin{cases} j+1,\ 2 \le i \le n,\ 5 \le j \le m \\ 1, untuk\ i\ \equiv\ 2\ mod\ 3,\ i=1 \\ 2, untuk\ i\ \equiv\ 1\ mod\ 3,\ i=1 \end{cases} \qquad \text{kasus 2}$$

$$f[c(y_{ij})]\begin{cases} j+1,\ 4\ \le\ i\ \le\ n,\ 9\ \le\ j\ \le\ m \\ 4, untuk\ i\ \equiv 0\ mod\ 3,\ i=1 \\ 3, untuk\ i\ \equiv\ 0\ mod\ 3,\ i=2 \\ 1, untuk\ i\ \equiv 0\ mod\ 3,\ i=3 \end{cases} \qquad \text{kasus 3}$$

$$f[c(y_{ij})]\begin{cases} j+1,\ 5\ \le\ i\ \le\ n,\ 11\ \le\ j\ \le\ m \\ 5, untuk\ i=1 \\ 4, untuk\ i=\ 2 \\ 2, untuk\ i=3 \\ 1, untuk\ i=4 \end{cases} \quad , untuk\ x_{n-1} \qquad \text{kasus 4}$$

$$f[c(y_{ij})]\begin{cases} j+1,\ 3\ \le\ i\ \le\ n,\ 7\ \le\ j\ \le\ m \\ 1\ untuk\ i\ \equiv\ 2 \\ 2\ untuk\ i\ \equiv\ 1 \end{cases} \quad , untuk\ x_n \qquad \text{kasus 5}$$

Dapat dilihat bahwa fungsi f juga menginduksi pewarnaan sisi proper dari graf $C_n \triangleright S_m$ diberikan oleh:

$$f[c'(x_i x_{i+1})]\begin{cases} 3, untuk\ i \equiv 1\ mod 3 \\ 2, untuk\ i \equiv 2\ mod\ 3 \\ 1, untuk\ i \equiv 0\ mod\ 3 \\ 2, untuk\ i = n-1 \\ 4, untuk\ i = n \end{cases}$$

$$f[c'(x_i y_i)]\begin{cases} 1, untuk\ i\ = 1 \\ 2, untuk\ i\ \equiv\ 1\ mod\ 3 \\ 1, untuk\ i\ \equiv\ 2\ mod\ 3 \\ 3, untuk\ i\ \equiv\ 0\ mod\ 3 \\ 3, untuk\ i\ = n-1 \\ 1, untuk\ i = n \end{cases}$$

Dikarenakan $f[c'(y_i y_{ij})]$ pada $n \equiv 2\ mod\ 3$ terdapat beberapa fungsi yang berbeda, agar lebih mudah dipahami peneliti membagi mejadi beberapa kasus berikut.

$$f[c'(y_i y_{ij})]\begin{cases} J+1,\ 3 \le i \le n,\ \ 3 \le J \le m \\ 2, untuk\ x_1,\ i=1 \\ 3, untuk\ x_1,\ i=2 \end{cases} \qquad \text{kasus 1}$$

$$f[c'(y_i y_{ij})]\begin{cases} J+1,\ 3 \le i \le n,\ \ 3 \le J \le m \\ 1, untuk\ i \equiv 1\ mod\ 3,\ i=1 \\ 3, untuk\ i \equiv 1\ mod\ 3,\ i=2 \end{cases} \qquad \text{kasus 2}$$

$$f[c'(y_i y_{ij})]\begin{cases} J+1,\ 3 \le i \le n,\ \ 3 \le J \le m \\ 2, untuk\ i \equiv 2\ mod\ 3,\ i=1 \\ 3, untuk\ i \equiv 2\ mod\ 3,\ i=2 \end{cases} \qquad \text{kasus 3}$$

$$f[c'(y_i y_{ij})]\begin{cases} J+1,\ 3 \le i \le n,\ \ 3 \le J \le m \\ 1, untuk\ i \equiv 0\ mod\ 3,\ i=1 \\ 3, untuk\ i \equiv 0\ mod\ 3,\ i=2 \end{cases} \qquad \text{kasus 4}$$

$$f[c'(y_i y_{ij})]\begin{cases} J+1,\ 3 \le i \le n,\ \ 3 \le J \le m \\ 1, untuk\ x_{n-1},\ i=1 \\ 2, untuk\ x_{n-1},\ i=2 \end{cases} \qquad \text{kasus 5}$$

 ©Kadikma, Vol.14, No.1, hal. 9-19, 2023

Berdasarkan batas bawah dan batas atas bilangan kromatik *graceful* pada graf $C_n \triangleright S_m$ untuk $n \equiv 2\ mod\ 3$ diperoleh $m+7 \geq \chi_g(C_n \triangleright S_m) \geq m+7$, dengan kata lain $\chi_g(C_n \triangleright S_m) = m+7$ untuk $n \equiv 2\ mod\ 3$.

Kasus 3. Untuk $n \equiv 0\ mod\ 3$

Untuk membuktikan $\chi_g(C_n \triangleright S_m) = m+6; untuk\ n \equiv 0\ mod\ 3,$ harus ditentukan terlebih dahulu batas bawah dan batas atasnya. Berdasarkan Lema 1.1 $\chi_g(G) \geq \Delta(G) + 1$ diperoleh batas bawah $\chi_g(C_n \triangleright S_m) \geq m+2$. Diasumsikan $\chi_g(C_n \triangleright S_m) = m+5$, diberikan warna titik $y_m = m+5$, diperoleh sisi $y_i y_{ij}$ yang akan memiliki warna yang sama dengan salah satu sisi $y_i y_{ij}$ lainnya. hal ini kontradiksi dengan definisi pewarnaan *graceful* sedemikian hingga asumsi terdapat $m+5$ warna adalah salah. Karena asumsi $m+5$ salah, otomatis $m+2$ juga salah. Jadi terbukti bahwa $\chi_g(C_n \triangleright S_m) \geq m+6$.

Selanjutnya dibuktikan batas atas bilangan kromatik *gracefull* graf $C_n \triangleright S_m$. Didefinisikan $f: V(C_n \triangleright S_m) \rightarrow \{1, 2, 3, \ldots, m+7\}$ diberikan oleh:
Untuk $n \equiv 0\ mod\ 3$

$$f[c(x_i)] \begin{cases} 1, untuk\ i \equiv 1\ mod\ 3 \\ 4, untuk\ i \equiv 2\ mod\ 3 \\ 2, untuk\ i \equiv 0\ mod\ 3 \end{cases}$$

$$f[c(y_i)] \begin{cases} 3, untuk\ i\ \equiv 1\ mod\ 3 \\ 3, untuk\ i\ \equiv 2\ mod\ 3 \\ 5, untuk\ i\ \equiv 0\ mod\ 3 \end{cases}$$

Dikarenakan $f[c(y_{ij})]$ pada $n \equiv 0\ mod\ 3$ terdapat beberapa fungsi yang berbeda, agar lebih mudah dipahami peneliti membagi mejadi beberapa kasus berikut.

$$f[c(y_{ij})] \begin{cases} J+1, 2 \leq i \leq n, 5 \leq J \leq m \\ 2, untuk\ i \equiv 1\ mod\ 3,\ i = 1 \\ 1, untuk\ i \equiv 2\ mod\ 3,\ i = 1 \end{cases} \qquad \text{Kasus 1}$$

$$f[c(y_{ij})] \begin{cases} J+1, 4 \leq i \leq n, 9 \leq J \leq m \\ 4, untuk\ i = 0\ mod\ 3, i = 1 \\ 3, untuk\ i = 0\ mod\ 3, i = 2 \\ 1, untuk\ i = 0\ mod\ 3, i = 3 \end{cases} \qquad \text{Kasus 2}$$

Dapat dilihat bahwa fungsi f juga menginduksi pewarnaan sisi *proper* dari graf $C_n \triangleright S_m$ diberikan oleh:

$$f[c'(x_i x_{i+1})] \begin{cases} 3, untuk\ i \equiv 1\ mod 3 \\ 2, untuk\ i \equiv 2\ mod\ 3 \\ 1, untuk\ i \equiv 0\ mod\ 3 \end{cases}$$

$$f[c'(x_i y_i)] \begin{cases} 2\ untuk\ i\ \equiv\ 1\ mod\ 3 \\ 1\ untuk\ i\ \equiv\ 2\ mod\ 3 \\ 3\ untuk\ i\ \equiv\ 0\ mod\ 3 \end{cases}$$

Dikarenakan $f[c'(y_i y_{ij})]$ pada $n \equiv 0\ mod\ 3$ terdapat beberapa fungsi yang berbeda, agar lebih mudah dipahami peneliti membagi mejadi beberapa kasus berikut.

$$f[c'(y_i y_{ij})]\begin{cases} J+1, & 3 \le i \le n,\ 3 \le J \le m \\ 1, untuk\ i \equiv 1\ mod\ 3, i = 1 \\ 3, untuk\ i \equiv 1\ mod\ 3, i = 2 \end{cases} \quad \text{kasus 1}$$

$$f[c'(y_i y_{ij})]\begin{cases} J+1, & 3 \le i \le n,\ 3 \le J \le m \\ 2, untuk\ i \equiv 2\ mod\ 3, i = 1 \\ 3, untuk\ i \equiv 2\ mod\ 3, i = 2 \end{cases} \quad \text{kasus 2}$$

$$f[c'(y_i y_{ij})]\begin{cases} J+1, & 3 \le i \le n,\ 3 \le J \le m \\ 1, untuk\ i \equiv 0\ mod\ 3, i = 1 \\ 2, untuk\ i \equiv 0\ mod\ 3, i = 2 \end{cases} \quad \text{kasus 3}$$

Berdasarkan batas bawah dan batas atas bilangan kromatik *graceful* pada graf $C_n \rhd S_m$ untuk $n \equiv 0\ mod\ 3$ diperoleh $m+6 \ge \chi_g(C_n \rhd S_m) \ge m+6$, dengan kata lain $\chi_g(C_n \rhd S_m) = m+6$ untuk $n \equiv 0\ mod\ 3$.

B. Pembahasan

Penelitian ini menghasilkan satu teorema baru yakni

$$\chi_g(C_n \rhd S_m)\begin{cases} m+7; untuk\ n \equiv 1\ mod\ 3 \\ m+7; untuk\ n \equiv 2\ mod\ 3 \\ m+6; untuk\ n \equiv 0\ mod\ 3 \end{cases}$$

Fungsi pewarnaan titik dilambangkan

$$f[c(x_i)]$$
$$f[c(y_i)]$$
$$f[c(y_{ij})]$$

Dan fungsi pewarnaan sisi dilambangkan

$$f[c'(x_i x_{i+1})]$$
$$f[c'(x_i y_i)]$$
$$f[c'(y_i y_{ij})]$$

Dalam membuktikan batas bawah teorema ini peneliti menggunakan lema 1.1 $\chi_g(G) \ge \Delta(G) + 1$. Diketahui $\Delta(C_n \rhd S_m) = m+1$ sedemikian hingga diperoleh lemma batas bawah $\chi_g(C_n \rhd S_m) \ge m+2$.

Pada pembuktian batas atas terdapat $f[c(y_{ij})]$ dan $f[c'(y_i y_{ij})]$ yang memuat beberapa fungsi yang berbeda pada setiap n modulonya, sehingga peneliti mebaginya ke dalam beberapa kasus agar memudahkan pembaca dalam memamahaminya.

Tabel 1. Hasil Penelitian Yang Relevan

Graf	Hasil $\chi_g(G)$	Keterangan
Graf Tadpole	$\chi_g(T_{nm}) = \begin{cases} 5, jika\ n = 5 \\ 4, jika\ n \ge 5 \end{cases}$	Alfarisi dkk, 2019
Graf Pan	$\chi_g(Pg_n) = \begin{cases} 5, jika\ n = 5 \\ 4, jika\ n \ge 5 \end{cases}$	Alfarisi dkk, 2019
Graf matahari	$\chi_g(m_n) = \begin{cases} 6, jika\ n = 5 \\ 5, jika\ n \ge 5 \end{cases}$	Alfarisi dkk, 2019

Graf	Hasil $\chi_g(G)$	Keterangan
Graf Diamon	$\chi_g(D) = 4$	Mincu dkk, 2019
Graf Spindle	$\chi_g(G) = 7$	Mincu dkk, 2019
Graf Rumah	$\chi_g(G) = 6$	Mincu dkk, 2019
Graf Jellyfish	$\chi_g(J_{n,m}) = n + 3$	Mincu dkk, 2019
Graf Payung	$\chi_g(U_{n,m}) = n + 2$	Mincu dkk, 2019
Graf Bull	$\chi_g(B_{3,m}) = 4$	Sania dkk, 2020

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan dari analisis graf $C_n \triangleright S_m$, peneliti menyimpulkan bahwa bilangan kromatik *graceful* diperoleh dari pewarnaan titik proper yang menginduksi pewarnaan sisi proper pada graf $C_n \triangleright S_m$. Dari penelitian ini menghasilkan satu teorema baru yang terdiri dari tiga kasus mengenai bilangan kromatik *graceful* pada graf $C_n \triangleright S_m$ yaitu bilangan kromatik $\chi_g(C_n \triangleright S_m) = m + 7; untuk\ n \equiv 1\ mod\ 3$, $\chi_g(C_n \triangleright S_m) = m + 7; untuk\ n \equiv 2\ mod\ 3$, dan $\chi_g(C_n \triangleright S_m) = m + 6; untuk\ n \equiv 0\ mod\ 3$.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Alfarisi, R., Dafik, Prihandini, R. M., Adawiyah, R., Albirri, E. R., & Agustin, I. H. (2019). Graceful Chromatic Number of Unicyclic Graphs. *Journal of Physics: Conference Series*, *1306*(1). https://doi.org/10.1088/1742-6596/1306/1/012039

[2] Asy'ari, M. L., Dafik, Agustin, I. H., Nisviasari, R., & Adawiyah, R. (2022). On graceful chromatic number of some graphs *Journal of Physics: Conference Series*, doi: 10.1088/1742-6596/2157/1/012013

[3] Aziz, T. A. (2021). Eksplorasi Justifikasi dan Rasionalisasi Mahasiswa dalam Konsep Teori Graf. *Jurnal Pendidikan Matematika Raflesia*, *06*(02), 40–54. https://ejournal.unib.ac.id/index.php/jpmr

[4] Bi, Z., Byers, A., English, S., Laforge, E., & Zhang, P. (2017). Graceful colorings of graphs. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, *101*.

[5] English, S., & Zhang, P. (2017). On graceful colorings of trees. *Mathematica Bohemica*, *142*(1). https://doi.org/10.21136/MB.2017.0035-15

[6] Khoirunnisa, S., Dafik, Kristiana, A. I., Alfarisi, R., & Albirri, E. R. (2021). On graceful chromatic number of comb product of ladder graph. *Journal of Physics: Conference Series*, *1836*(1). https://doi.org/10.1088/1742-6596/1836/1/012027

[7] Khoirunnisa, S., Dafik, Kristiana, A. I., Alfarisi, R., & Albirri, E. R. (2021). On graceful chromatic number of comb product of ladder graph. *Journal of Physics: Conference Series*, *1836*(1). https://doi.org/10.1088/1742-6596/1836/1/012027

[8] Mincu, R., Obreja, C., & Popa, A. (2019). The Graceful Chromatic Number for Some Particular Classes of Graphs. *Proceedings - 21st International Symposium on Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing, SYNASC 2019*.

https://doi.org/10.1109/SYNASC49474.2019.00024

[9] Sania, N. A., Dafik, D., & Fatahillah, A. (2020). Bilangan Kromatik Graceful pada Keluarga Graf Unicyclic. *CGANT JOURNAL OF MATHEMATICS AND APPLICATIONS*, *1*(2). https://doi.org/10.25037/cgantjma.v1i2.39

[10] Saputro, S. W., Mardiana, N., & Purwasih, I. A. (2017). The metric dimension of comb product graphs. *Matematicki Vesnik*, *69*(4).

[11] Umilasari, R., & Darmaji. (2015). Bilangan Dominasi Jarak Dua Pada Graf-Graf Hasil Opearasi Korona dan Comb. *Thesis, SM 142501*.