AKSIOMA: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika
Vol. 14, No. 1 April 2023
e-ISSN 2579-7646

Pewarnaan harmonis pada beberapa kelas graf berarah

[1]Nurul Jannah, [2]Nilamsari Kusumastuti, [3]Meliana Pasaribu

[1,2,3]Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Tanjungpura
Email: nilamsari@math.untan.ac.id

Abstrak

Pewarnaan graf merupakan suatu pemetaan dari elemen pada suatu graf G ke himpunan semua bilangan asli $\mathbb{N}$ sedemikian sehingga setiap elemen yang bertetangga tidak dipetakan ke bilangan yang sama. Pada pewarnaan graf, image dari elemen suatu graf disebut warna. Dimisalkan v_1 dan v_2 adalah simpul-simpul pada G dan a serta b adalah warna. Jika simpul v_1 diwarnai dengan a dan simpul v_2 diwarnai dengan b maka pasangan warna yang dihasilkan adalah pasangan warna (a, b). Pewarnaan harmonis menerapkan konsep pewarnaan simpul dalam mewarnai suatu graf dengan syarat satu pasang warna muncul paling banyak satu kali. Banyak warna yang paling minimum yang digunakan dalam pewarnaan harmonis disebut bilangan kromatik harmonis. Dalam penelitian ini, konsep pewarnaan harmonis akan diterapkan pada beberapa kelas graf berarah untuk melihat pola bilangan kromatik dari masing-masing kelas tersebut. Seperti diketahui, pada graf berarah $\vec{G}$, pasangan warna $(a, b) \neq (b, a)$ sehingga proses pewarnaan tersebut menjadi lebih kompleks. Adapun kelas graf yang dibahas adalah graf lili berarah $\vec{l}_n$, graf komplit berarah $\vec{K}_n$ dan graf kipas berarah $\vec{F}_n$. Didapat bilangan kromatik harmonis pada graf lili berarah $\vec{l}_n$ adalah maks$\{d_{in}(v), d_{out}(v)\} + 1$ dengan $n \geq 2$; bilangan kromatik harmonis pada graf komplit berarah $\vec{K}_n$ adalah n. Sedangkan bilangan kromatik harmonis pada pewarnaan graf kipas berarah $\vec{F}_n$ berada pada selang $\Delta + 1 \leq \overrightarrow{\chi_h}(\vec{F}_n) \leq q$.

Kata kunci: *bilangan kromatik harmonis; pasangan warna; pewarnaan simpul*

Abstract

Graph colouring is a mapping from an element in a graph G to the set of all natural numbers N such that every pair of adjacent elements is not assigned to the same number. In graph colouring, the image of the element of a graph is called colour. Let v_1 and v_2 be the vertices of G, and a and b are colours. If v_1 is coloured with a and v_2 is coloured with b, then the resulting colour pair is a colour pair (a, b). Harmonic colouring applies the concept of vertex colouring in colouring a graph with the condition that one colour pair appears at most once. The minimum number of colours used in harmonic colouring is called the harmonic chromatic number. In this study, the concept of harmonic colouring will be applied to several classes of directed graphs to see the chromatic number pattern of each class. In the directed graph $\vec{G}$, the colour pairs $(a, b) \neq (b, a)$. And then the colouring process becomes more complex. The classes of graphs discussed are directed lily graph $\vec{l}_n$, directed complete graph $\vec{K}_n$, and directed fan graph $\vec{F}_n$. The harmonic chromatic number in the directed lily graph $\vec{l}_n$ is max$\{d_in\ (v), d_out\ (v)\} + 1$ with $n \geq 2$; the harmonic chromatic number in a directed complete graph $\vec{K}_n$ is n. Meanwhile, the harmonic chromatic number for directed fan graph $\vec{F}_n$ is in the range $\Delta + 1 \leq \overrightarrow{\chi_h}(\vec{F}_n) \leq q$.

Keywords*: colour pair; harmonic chromatic number; vertex colouring*

A. Pendahuluan

Pewarnaan graf pertama kali diterapkan oleh Francis Guthrine pada tahun 1852. Francis Guthrine mencoba memberi warna pada daerah-daerah yang terdapat pada peta Inggris dengan syarat dua daerah yang berbatasan langsung tidak boleh diwarnai dengan warna yang sama. Pewarnaan graf adalah pemetaan elemen graf ke himpunan bilangan asli sedemikian sehingga tidak terdapat dua elemen yang bertetangga pada graf tersebut yang berwarna sama (Afriantini dkk., 2019). Elemen yang dimaksud dalam pewarnaan graf adalah simpul (*vertex*) dan sisi (*edge*). Oleh karena itu, pewarnaan graf dibagi menjadi pewarnaan simpul dan pewarnaan sisi serta terdapat pula pewarnaan wilayah. Pewarnaan simpul merupakan pemetaan himpunan simpul ke himpunan warna yang dinotasikan dengan himpunan bilangan $\{1, 2, 3, .., k\}$ dalam suatu graf dengan memperhatikan simpul yang bertetangga sehingga simpul yang bertetangga tidak berwarna sama (Munir, 2010). Pada penelitian ini dibahas penerapan pewarnaan simpul sebagai dasar pewarnaan harmonis.

Pewarnaan harmonis merupakan pewarnaan graf yang menggunakan konsep pewarnaan simpul dengan syarat setiap pasang warna paling banyak muncul satu kali. Pada pewarnaan harmonis terdapat bilangan kromatik harmonis yang menyatakan minimum warna yang dapat digunakan dalam pewarnaan suatu graf. Bilangan kromatik harmonis dinotasikan dengan $\chi_H(G)$ (Edwards, 2013).

Graf berarah merupakan graf yang setiap sisinya diberi orientasi arah yang dinotasikan $\vec{G}$. Sisi pada graf berarah disebut busur. Himpunan busur dinotasikan dengan $A(\vec{G})$. Misalkan terdapat busur yang menghubungkan simpul v_1 ke v_2, busur tersebut dapat dinotasikan dengan $\overrightarrow{v_1v_2}$. Jika v_1 dipetakan ke a dan v_2 dipetakan ke b maka pasangan warna yang dihasilkan adalah (a, b). Pada pewarnaan harmonis pada graf berarah, pasangan warna $(a, b) \neq (b, a)$(Kusumastuti dkk., 2021)

Beberapa penelitian yang membahas pewarnaan harmonis antara lain (Indriani & Budayasa, 2020) telah membahas pewarnaan harmonis pada graf berarah dan diperoleh bilangan kromatik harmonis harmonis pada graf *cycle* berarah ($\vec{C}_n$) dan graf lintasan berarah ($\vec{P}_n$). Sedangkan (Robiandi dkk., 2021) membahas pewarnaan harmonis pada graf sederhana dan diperoleh bilangan kromatik harmonis pada pada graf lili dan graf pertemanan. Selain itu, definisi graf kipas diperoleh dari penelitian yang ditulis oleh (Maro & Banabera, 2020) yang meneliti tentang pewarnaan titik pada korona graf kipas dengan graf kipas dan graf buku segitiga dengan graf buku segitiga berorder sama.

Pada penelitian sebelumnya telah dibahas pewarnaan harmonis untuk graf sederhana sedangkan pada penelitian ini dibahas pewarnaan harmonis pada graf berarah yang lebih kompleks. Graf yang diteliti pada penelitian ini adalah graf baru yang dihasilkan dari operasi graf. Pewarnaan harmonis pada graf berarah dipengaruhi oleh arah dari setiap busurnya. Selain itu pewarnaan harmonis pada graf berarah harus memperhatikan berbagai kemungkinan arah dari setiap busurnya. Dengan demikian, penelitian ini bertujuan menganalisis pewarnaan harmonis pada graf lili berarah ($\vec{l}_n$), graf komplit berarah ($\vec{K}_n$), dan graf kipas berarah ($\vec{F}_n$); menganalisis bilangan kromatik harmonis $\vec{l}_n$, $\vec{K}_n$, dan $\vec{F}_n$; serta merumuskan bilangan kromatik harmonis $\vec{l}_n$ dan $\vec{K}_n$.

B. Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur (kajian teori) dari beberapa buku dan artikel yang terkait sebagai landasan teori. Seperti teori graf secara umum dan berlanjut pada teori pewarnaan graf, khususnya pewarnaan graf harmonis pada graf berarah. Konsep tersebut diterapkan pada $\vec{l}_n$, $\vec{K}_n$, dan $\vec{F}_n$.

Secara umum, langkah-langkah yang dilakukan untuk mencari bilangan kromatik harmonis graf $\vec{l}_n$, $\vec{K}_n$, dan $\vec{F}_n$ sebagai berikut:

1. Mendefinisikan graf $\vec{l}_n$, $\vec{K}_n$, dan $\vec{F}_n$ serta menganalisis karakteristik dari masing-masing graf tersebut.
2. Menganalisis berbagai kemungkinan arah busur dari graf $\vec{l}_n$, $\vec{K}_n$, dan $\vec{F}_n$.
3. Membentuk fungsi-fungsi pewarnaan pada graf $\vec{l}_n$, $\vec{K}_n$, dan $\vec{F}_n$.
4. Membuktikan bahwa fungsi-fungsi perwarnaan yang dibentuk tersebut merupakan pewarnaan harmonis.
5. Mencari bilangan kromatik harmonis untuk beberapa nilai n, dan merumuskan dugaan sementara dari pola bilangan kromatik harmonis pada graf-graf berarah tersebut.
6. Membuktikan dugaan pola bilangan kromatik harmonis yang telah dirumuskan.

C. Hasil dan Pembahasan

1. Pewarnaan Harmonis pada Graf Berarah

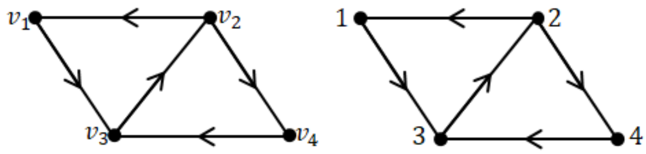
Definisi tentang pewarnaan harmonis pada graf berarah dijelaskan pada Definisi 1.

Definisi 1 (Edwards, 2013) *Diberikan graf berarah $\vec{G}$ dengan q simpul dan r busur dengan $q \in \mathbb{N}$ dan $r \in \mathbb{Z}^+$. Fungsi $f: V(\vec{G}) \to \{1, 2, 3, \dots, k\}$ dengan $k \leq q$ dikatakan pewarnaan harmonis pada $\vec{G}$ jika untuk setiap busur dari simpul u ke simpul v berlaku*

i. $f(u) \neq f(v)$, *dan*

ii. *Untuk setiap pasangan warna* (a, b) *terdapat paling banyak satu busur dari simpul* $\overrightarrow{uv}$ *sedemikian sehingga* $f(u) = a$ *dan* $f(v) = b$.

Contoh 2 Diberikan graf berarah $\vec{G}$ dengan $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V(\vec{G})$.



Gambar 1. (a) Graf $\vec{G}$ (b) pewarnaan harmonis pada graf $\vec{G}$

Pewarnaan graf berarah $\vec{G}$ pada Gambar 3 dapat diwarnai dengan 4 warna misal $1, 2, 3, 4$. Jika simpul v_1 diwarnai dengan warna 1, maka simpul v_2 diwarnai berbeda dari simpul v_1 katakan warna 2. Begitu pula pada simpul v_3 diberi warna berbeda dari simpul v_1 dan v_2, katakan warna 3. Lebih lanjut, simpul v_4 diberi warna berbeda dari simpul v_2 dan v_3, katakan warna 4. Derajat simpul pada graf berarah dibedakan menjadi derajat masuk $d_{in}(v)$ dan derajat keluar $d_{out}(v)$. Dalam pewarnaan harmonis, simpul pada graf berarah pada dapat diwarnai berdasarkan derajat maksimum dari semua simpul. Selanjutnya akan dijelaskan pada Teorema 3.

Teorema 3 (Hegde & Castelino, 2015) *Jika* $\vec{G}$ *adalah graf berarah dengan* q *simpul dan* $\Delta = maks\{d_{in}(v_i), d_{out}(v_i) | v_i \in V(\vec{G})\}$, *maka* $\Delta + 1 \leq \overrightarrow{\chi_h}(\vec{G}) \leq q$

Bukti Misalkan graf berarah $\vec{G}$ dengan q simpul dan $v \in V(\vec{G})$ sedemikian hingga $\Delta = maks\{d_{in}(v_i), d_{out}(v_i) | v_i \in V(\vec{G})\}$.

a) Kasus 1

Jika $d_{in}(v_i) \geq d_{out}(v_i)$, dalam hal ini $\Delta = d_{in}(v_i)$. Untuk pewarnaan harmonis pada $\vec{G}$ maka simpul v_i dan semua simpul yang langsung ke v_i di $\vec{G}$ harus diwarnai dengan warna berbeda. Sehingga diperlukan lebih dari atau sama dengan $\Delta + 1$ warna.

b) Kasus 2

Jika $d_{out}(v_i) \geq d_{in}(v_i)$, dalam hal ini $\Delta = d_{out}(v_i)$ untuk pewarnaan harmonis pada $\vec{G}$ maka simpul v_i dan semua simpul yang berhubungan langsung ke v_i di $\vec{G}$ harus diwarnai dengan warna berbeda. Sehingga diperlukan lebih dari atau sama dengan $\Delta + 1$ warna. Dari ilustrasi diatas diperoleh

$$\overrightarrow{\chi_h}(\vec{G}) \geq \Delta + 1 \tag{1}$$

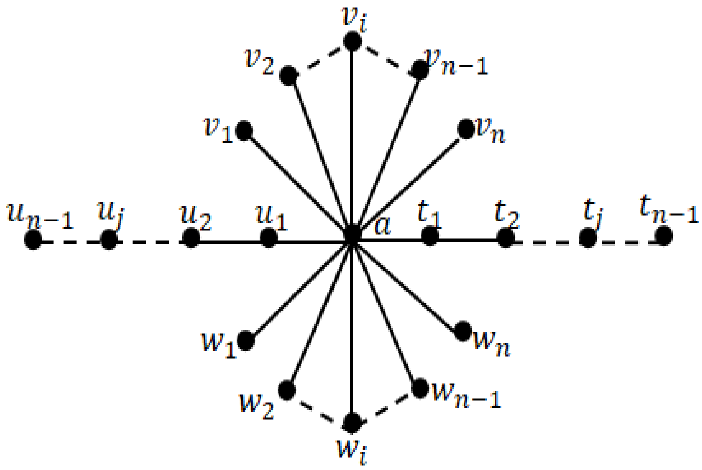
Jika semua simpul di $\vec{G}$ diwarnai dengan warna berbeda dan banyak simpul $\vec{G}$ adalah q, maka.

$$\overrightarrow{\chi_h}(\vec{G}) \leq q \tag{2}$$

Dari (1) dan (2) dapat disimpulkan bahwa

$$\Delta + 1 \leq \overrightarrow{\chi_h}(\vec{G}) \leq q. \blacksquare$$

2. Pewarnaan Harmonis pada Graf Lili Berarah ($\vec{l}_n$)



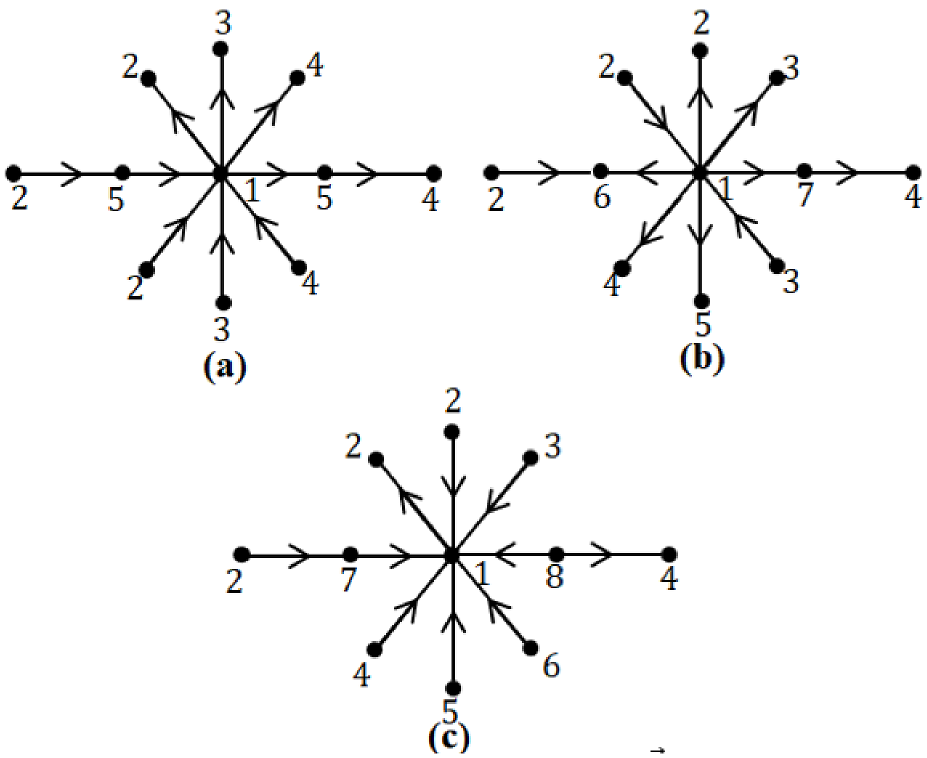
Gambar 2. Graf lili l_n

Graf lili berarah memiliki $|V(\vec{l}_n)| = 4n - 1$. Pada Gambar 2 dapat diketahui bahwa graf lili memiliki simpul pusat a yang bertetangga dengan simpul $t_1, u_1,\ v_1, \ldots, v_n$ dan $w_1, \ldots, w_n$. Selanjutnya, simpul $v_1, \ldots, v_n$ dan $w_1, \ldots, w_n$ disebut cabang karena bertetangga dengan simpul a (Samuel & Kalaivani, 2017). Pada penelitian ini, graf lili berarah diwarnai dari simpul pusatnya. Penjelasan mengenai pewarnaan harmonis pada graf lili berarah terdapat pada Teorema 4.

Dalam penelitian ini diasumsikan bahwa dua busur berbeda dikatakan searah jika dua busur tersebut memiliki arah yang sama, misalnya kedua busur yang berbeda memiliki arah masuk ke simpul a atau keduanya memiliki arah keluar dari simpul a. Sedangkan dua busur berbeda dikatakan berlawanan arah jika kedua busur tersebut memiliki arah yang berbeda, misalnya salah satu busurnya memiliki arah masuk ke simpul a dan simpul lainnya memiliki arah keluar dari simpul a.

Pewarnaan harmonis pada graf berarah dapat menggunakan warna yang sama jika arah busur dari simpul awal dan simpul tujuannya berbeda. Dengan demikian, terdapat dua pasangan warna yang menggunakan dua warna yang sama. Misalnya dua busur dengan arah yang berbeda di warnai dengan warna u dan v, sehingga warna yang dihasilkan adalah (u, v) dan (v, u). Selanjutnya pembuktian pewarnaan harmonis pada graf lili berarah dalam penelitian ini banyak pasang warna yang menggunakan (u, v) dan (v, u) dimisalkan dengan j.

Pewarnaan harmonis pada suatu graf memiliki syarat setiap simpul yang bertetangga harus diberi warna berbeda. Pada penelitian ini, warna yang digunakan berupa bilangan yakni himpunan bilangan asli. Sehingga dalam mewarnai simpul, misalnya simpul $v_1, \ldots, v_n$ dengan memperhatikan arah busurnya, simpul $v_1, \ldots, v_n$ dapat diwarnai dengan $1, 2, 3, \ldots, k$. Selanjutnya untuk meminimalisir warna yang digunakan, dengan memperhatikan arah busurnya, simpul $w_1, \ldots, w_n$ dapat diwarnai dengan bilangan yang sama dengan simpul $v_1, \ldots, v_n$ sehingga terdapat pasangan warna (u, v) dan (v, u) atau diwarnai menggunakan bilangan selanjutnya dari bilangan terbaru yang digunakan.



Gambar 3. Pewarnaan harmonis pada graf $\vec{l}_3$ dari beberapa kemungkinan arah

Teorema 4 *Bilangan kromatik harmonis pada graf lili berarah* $\vec{l}_n$ *untuk* $n \geq 2$ *adalah* $\overrightarrow{\chi_h}(\vec{l}_n) = \Delta + 1$.

Bukti Diberikan $\vec{l}_n$ adalah graf lili berarah untuk $n \geq 2$ dan diasumsikan Δ adalah derajat maksimum dari semua simpul pada suatu graf. Untuk membuktikan bahwa $\Delta + 1$ adalah bilangan kromatik, akan dibuktikan selanjutnya bahwa graf lili berarah memenuhi definisi pewarnaan harmonis pada graf berarah.

1. Diberikan fungsi $f: V(\vec{l}_n) \to \{1,2,3,\dots k\}$ dengan
   $f(a) = 1$

$$f(v_i) = \begin{cases} 2, \text{jika } i = 1. \\ i + (1 - j), \text{jika } \overrightarrow{av_i} \text{ searah dengan } \overrightarrow{av_1}, \text{ dengan } 1 \le i \le n. \\ 2 + j, \text{jika } \overrightarrow{av_i} \text{ berlawanan arah dengan } \overrightarrow{av_1}. \end{cases}$$

$$f(w_i) = \begin{cases} i + p - j + 1, \text{jika } \overrightarrow{aw_i} \text{ searah dengan busur yang memiliki simpul dengan bilangan dari warna terbaru.} \\ 2 + j, \text{jika } \overrightarrow{aw_i} \text{ berlawanan arah dengan busur yang memiliki simpul dengan bilangan dari warna terbaru.} \end{cases}$$

$$f(t_i) = \begin{cases} \ell + 1, \text{jika } i = 1 \text{ dan searah dengan busur yang memiliki simpul dengan bilangan dari warna terbaru.} \\ j + 1, \text{jika } i = 1 \text{ dan berlawanan arah dengan busur yang memiliki simpul dengan bilangan dari warna terbaru.} \\ i, \text{ jika } i = 2,3,\dots,n-1. \end{cases}$$

$$f(u_i) = \begin{cases} j + 1, \text{jika } i = 1 \text{ dan berlawanan arah dengan } \overrightarrow{at_1}. \\ \ell + 1, \text{jika } i = 1 \text{ searah dengan } \overrightarrow{at_1}, \text{ dengan } 1 \le i \le n. \\ i + 2, \text{jika } i = 2,3,\dots,n-1. \end{cases}$$

j = banyak pasang warna (u,v) dan (v,u) yang telah digunakan, dimana $j = 0,1,2,\dots$
p = banyaknya cabang v_i dan w_i dengan $i = 1,2,\dots,n$
ℓ = bilangan dari warna terbaru yang digunakan

Akan dibuktikan bahwa fungsi tersebut merupakan pewarnaan harmonis

(i) Untuk $f(u) \neq f(v)$.
dengan warna yang telah digunakan pada pewarnaan $f(v_n)$ dan $f(w_n)$. Terbukti bahwa $f(u) \neq f(v)$.
Akan dibuktikan bahwa untuk setiap simpul bertetangga tidak diwarnai dengan warna yang sama dan dipetakan tepat satu ke $\{1,2,\dots,k\}$.

1) Untuk simpul a
   Diketahui a merupakan simpul pusat $\vec{l_n}$ dengan $f(a) = 1$.
   Sehingga untuk setiap $n \geq 2$ simpul a selalu dipetakan ke 1. Jadi $f(a)$ dipetakan tepat satu ke $\{1, 2, \ldots, k\}$.
1) Untuk simpul v_i dengan $i = 1, 2, \ldots, n$
   Kasus 1: Jika $i = 1$
   Karena v_1 terhubung langsung dengan a, dengan demikian v_1 dapat diwarnai dengan warna 2. Sehingga v_1 dipetakan tepat satu ke $\{1, 2, \ldots, k\}$
   Kasus 2: Jika $\overrightarrow{av_i}$ searah dengan $\overrightarrow{av_1}$
   Simpul v_i bertetangga dengan simpul a. Dengan demikian, jika $\overrightarrow{av_i}$ searah dengan $\overrightarrow{av_1}$ maka simpul v_i diwarnai dengan warna berbeda. Sehingga, v_i diwarnai dengan warna $i + (1 + j)$ dengan $2 \leq i \leq n$ dan $j = 0,1, . . , k$. Jadi v_i dipetakan tepat satu ke $\{1, 2, \ldots, k\}$.
   Kasus 3: Jika $\overrightarrow{av_i}$ berlawanan arah dengan $\overrightarrow{av_1}$
   Simpul v_i bertetangga dengan simpul a. Sehingga, jika $\overrightarrow{av_i}$ berlawanan arah dengan $\overrightarrow{av_1}$ maka simpul v_i dapat diwarnai dengan warna $2 + j$ dengan $= 0,1, . . , k$. Jadi, v_i dipetakan tepat satu ke $\{1, 2, \ldots, k\}$.
2) Untuk simpul w_i dengan $i = 1, 2, \ldots, n$
   Kasus 1: Jika $\overrightarrow{aw_i}$ searah dengan busur yang memiliki simpul dengan warna terbaru
   Simpul w_i terhubung langsung dengan simpul a. Sehingga, $\overrightarrow{aw_i}$ yang searah dengan busur yang memiliki simpul dengan warna terbaru diberi warna berbeda. Karena simpul dengan warna terbaru pasti terhubung langsung dengan simpul a, akibatnya w_i diwarnai dengan warna $i + p - j$ dengan $1 \leq i \leq n$ dan $j = 0,1, . . , k$. Jadi, w_i dipetakan tepat satu ke $\{1, 2, \ldots, k\}$.
   Kasus 2: Jika $\overrightarrow{aw_i}$ berlawanan arah dengan busur yang memiliki simpul dengan warna terbaru.
   Simpul w_i terhubung langsung dengan simpul a, jadi $\overrightarrow{aw_i}$ yang berlawanan arah dengan busur yang memiliki simpul dengan warna terbaru diwarnai dengan warna $2 + j$ dengan $j = 0,1, . . , k$. Sehingga, w_i dipetakan tepat satu ke $\{1, 2, \ldots, k\}$.
3) Untuk simpul t_i dengan $i = 1, 2, \ldots, n$
   Kasus 1: Jika $i = 1$ dan searah dengan busur yang memiliki simpul dengan warna terbaru
   Simpul t_1 terhubung langsung dengan simpul a. Jika $\overrightarrow{at_1}$ searah dengan busur yang memiliki simpul dengan warna terbaru, maka simpul t_1

diwarnai dengan warna baru yaitu $\ell + 1$. Sehingga t_1 dipetakan tepat satu ke $\{1, 2, \dots, k\}$.

Kasus 2: Jika $i = 1$ dan berlawanan arah dengan busur yang memiliki simpul dengan warna terbaru

Simpul t_1 terhubung langsung dengan simpul a. Jika $\overrightarrow{at_1}$ berlawanan arah dengan busur simpul yang memiliki warna terbaru maka simpul t_1 diwarnai dengan warna $j + 1$. Sehingga t_1 dipetakan tepat satu ke $\{1, 2, \dots, k\}$.

Kasus 3: Jika $i = 2, 3, \dots, n - 1$

Karena t_i dengan $i = 2, 3, \dots, n - 1$ tidak bertetangga dengan simpul a, dengan demikian t_i dengan $i = 2, 3, \dots, n - 1$ dapat diwarnai dengan warna i. Sehingga t_i dipetakan tepat satu ke $\{1, 2, \dots, k\}$.

4) Untuk simpul u_i dengan $i = 1, 2, \dots, n$

Kasus 1: Jika $i = 1$ dan berlawanan arah dengan $\overrightarrow{at_1}$

Karena simpul u_1 terhubung langsung dengan simpul a, dengan demikian jika $\overrightarrow{au_1}$ berlawanan arah dengan $\overrightarrow{at_1}$ maka simpul u_1 diwarnai dengan warna $j + 1$. Sehingga u_1 dipetakan tepat satu ke $\{1, 2, \dots, k\}$.

Kasus 2: Jika $i = 1$ dan searah dengan $\overrightarrow{at_1}$

Karena simpul u_1 terhubung langsung dengan simpul a, dengan demikian jika $\overrightarrow{au_1}$ searah dengan $\overrightarrow{at_1}$ maka simpul u_1 diwarnai dengan warna $\ell + i$. Sehingga u_1 dipetakan tepat satu ke $\{1, 2, \dots, k\}$.

Kasus 3: Jika $i = 2, 3, \dots, n - 1$

Karena simpul u_i tidak terhubung langsung dengan simpul a, dengan demikian simpul u_i dapat diwarnai dengan $i + 2$ dengan $i = 2, 3, \dots, n - 1$. Sehingga u_i dipetakan tepat satu ke $\{1, 2, \dots, k\}$.

ii) Pasangan simpul $(a, v_1), (a, v_2), \dots, (a, v_n)$ hanya diwarnai dengan satu pasang warna. Karena pada graf berarah $(u, v) \neq (v, u)$, dengan demikian jika arah busur pada simpul $w_1, \dots, w_n$ berlawanan dengan arah busur pada simpul $v_1, \dots, v_n$, maka simpul $w_1, \dots, w_n$ dapat diwarnai dengan warna yang sama seperti warna pada simpul $v_1, \dots, v_n$. Sama halnya dengan pewarnaan pada simpul t_1 dan u_1. Untuk pewarnaan $t_2, \dots, t_{n-1}$ dan $u_2, \dots, u_{n-1}$, pasangan warna yang dihasilkan dapat diperoleh dengan mewarnai simpul $t_2, \dots, t_{n-1}$ dan $u_2, \dots, u_{n-1}$ dengan warna yang telah digunakan dengan memperhatikan arah dari busur yang menghubungkan antar simpul. Terbukti bahwa setiap pasang simpul hanya diwarnai dengan satu pasang warna.

Dengan demikian, pewarnaan pada graf $\vec{l}_n$ adalah pewarnaan harmonis.

2. Misalkan terdapat sebanyak g busur $d_{in}(v)$ dan h busur $d_{out}(v)$ yang terhubung langsung dengan a dimana a adalah simpul pusat dari $\vec{l}_n$. Selanjutnya misalkan I adalah himpunan busur $d_{in}(v)$ dan J adalah himpunan busur $d_{out}(v)$. Sehingga, $|I| = g$ dan $|J| = h$. Simpul a merupakan simpul pusat dari $\vec{l}_n$. Pewarnaan simpul yang terhubung langsung dengan simpul a dilihat dari arah busur yang menghubungkan antar simpul tersebut. Berdasarkan Definisi 1 simpul yang terhubung langsung dengan simpul a adalah $t_1, u_1, v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n$. Misalkan $f(a) = 1$. Berdasarkan Definisi 3 pada graf berarah berlaku $(u, v) \neq (v, u)$. Jika busur t_1 diwarnai dengan 1 maka dapat ditinjau untuk u_1 diwarnai dengan warna yang sama jika arah busurnya berlawanan dengan busur t_1 dan diwarnai dengan warna berbeda jika arah busurnya sama dengan busur t_1. Dengan cara yang sama, simpul $v_1, \dots, v_n$ dan $w_1, \dots, w_n$ diwarnai sesuai arah busurnya. Untuk simpul yang belum diwarnai diberi warna dengan warna yang sudah ada tanpa adanya penambahan warna. Sehingga diperoleh warna minimum sebanyak $g + 1$ warna apabila $d_{in}(v) > d_{out}(v)$ dan diwarnai dengan $h + 1$ apabila $d_{in}(v) < d_{out}(v)$. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa bilangan kromatik harmonis graf lili berarah adalah $\overrightarrow{\chi_h}(\vec{l}_n) = \Delta + 1$.

   Dengan demikian, Teorema 4 terbukti.∎

   Sebagai contoh, diberikan pewarnaan harmonis graf lili berarah $\vec{l}_3$ pada Gambar 3.

3. **Pewarnaan Harmonis pada Graf Komplit Berarah ($\vec{K}_n$)**

   Graf komplit (K_n) memiliki $|V(K_n)| = n$ dan $|E(K_n)| = \frac{n(n-1)}{2}$. Pewarnaan

graf komplit berarah dapat diwarnai dengan n warna harmonis. Lebih lanjut dijelaskan pada Teorema 5.

Teorema 5 *Jika $\vec{K}_n$ adalah graf komplit berarah, maka $\overrightarrow{\chi_h}(\vec{K}_n) = n$.*

Bukti

1. Diberikan fungsi $f: V(\vec{K}_n) \to \{1,2,3, \dots, k\}$ dengan $f(u_i) = i$ untuk $1 \leq i \leq n$ dan $n \geq 2$. Akan dibuktikan bahwa fungsi tersebut merupakan pewarnaan harmonis.

   Akan dibuktikan bahwa $\vec{K}_n$ untuk $n \geq 2$ adalah pewarnaan harmonis.

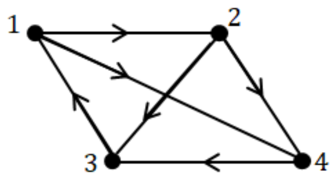
   (i) Untuk $f(u) \neq f(v)$.

   Graf komplit terdiri dari n simpul yang saling terhubung. Dengan demikian setiap simpul pada graf komplit diwarnai dengan warna berbeda. Misalkan jika simpul graf $\vec{K}_n$ dinotasikan dengan $u_1, u_2, u_3 \dots, u_n$, maka simpul pada graf $\vec{K}_n$ dapat diwarnai dengan $f(u_i) = i$, dengan $1 \leq i \leq n$. Sehingga u_i dengan $1 \leq i \leq n$ dipetakan tepat satu ke $\{1,2,3, \dots, k\}$.

(ii) Simpul graf $\vec{K}_n$ saling terhubung sehingga setiap simpulnya diwarnai dengan warna berbeda. Dengan demikian, pasangan warna pada simpul $(u_1, u_2), (u_2, u_3), \dots, (u_1, u_n)$ hanya terdapat satu pasang warna sehingga warna yang digunakan dapat dikatakan warna paling minimal.

Dengan demikian, pewarnaan pada graf $\vec{l}_n$ adalah pewarnaan harmonis

2. Misalkan $\vec{K}_n$ adalah graf komplit berarah yang memiliki n simpul. Berdasarkan Teorema 2 $\overrightarrow{\chi_h}(\vec{G}) \leq n$, sehingga $\overrightarrow{\chi_h}(\vec{K}_n) \leq n$. Andaikan $\overrightarrow{\chi_h}(\vec{K}_n) < n$. Karena $\overrightarrow{\chi_h}$ bilangan bulat, maka $\overrightarrow{\chi_h}(\vec{K}_n) \leq n - 1$. Berdasarkan Definisi 1 berarti ada pewarnaan harmonis. Katakan pewarnaan d. Karena simpul $\vec{K}_n$ sebanyak n, akibatnya ada dua simpul $\vec{K}_n$ yang berwarna sama, misalnya a dan b. Karena $a, b \in V(\vec{K}_n)$ dan $\overrightarrow{ab} \in A(\vec{K}_n)$ atau $\overrightarrow{ba} \in A(\vec{K}_n)$ dan menurut Definisi 1 setiap dua simpul yang terhubung langsung tidak boleh diberi warna sama, maka kontradiksi bahwa d pewarnaan harmonis. Sehingga $\overrightarrow{\chi_h}(\vec{K}_n) = n$.
   Dengan demikian, Teorema 5 terbukti.■
   Sebagai contoh, pewarnaan graf komplit berarah terdapat pada Gambar 4.



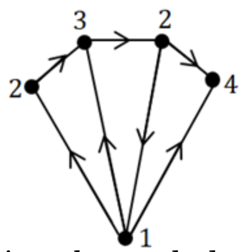
Gambar 4. Pewarnaan Harmonis pada $\vec{K}_4$

4. Analisis Bilangan Kromatik Harmonis pada Graf Kipas Berarah ($\vec{F}_n$)

Graf kipas (F_n) memiliki $|V(F_n)| = n + 1$ dan $|E(F_n)| = 2n - 1$ untuk $n \geq 2$. Misalkan $\vec{F}_n$ adalah sebuah graf hasil orientasi dari F_n. Tidak seperti graf lili berarah dan graf komplit berarah yang memiliki pola bilangan kromatik harmonisnya, bilangan kromatik harmonis pada graf berarah memiliki beberapa pola bergantung pada arah busur dari simpul pusatnya. Meskipun demikian, bilangan-bilangan kromatik harmonis dari graf kipas memenuhi setiap kasus pada pertidaksamaan yang terdapat pada Teorema 2. Berikut diberikan beberapa kondisi pada graf kipas berarah yang memenuhi masing-masing kasus pada Teorema 2.

a) $\overrightarrow{\chi_h}(\vec{F_n}) = \Delta + 1$

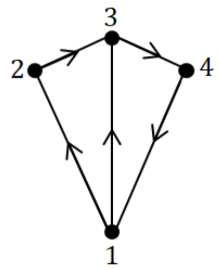
Diberikan graf kipas berarah $\vec{F_n}$ dengan $n \geq 2$, dimana $d_{in}(v) = s$ dan $d_{out}(v) = t$. Selanjutnya misalkan B adalah himpunan busur yang berarah masuk ke simpul v_1 dan C adalah himpunan busur yang berarah keluar dari simpul v_1. Sehingga, $|B| = s$ dan $|C| = t$. Berdasarkan Definisi 1 pada graf berarah berlaku $(u, v) \neq (v, u)$. Misalkan $f(v_1) = 1$, simpul yang terhubung langsung dengan simpul v_1 yaitu $v_2, \dots, v_{n+2}$ diwarnai berdasarkan arah busurnya. Simpul $v_2, \dots, v_{n+2}$ dapat memiliki derajat paling maksimum yaitu Δ= 3 untuk $\vec{F_2}$. Dengan demikian untuk $\vec{F_n}$dengan $n \geq 3$ dapat dilihat dari derajat simpul v_1. Jika $d_{in}(v) > d_{out}(v)$ maka $\vec{F_n}$ dapat diwarnai dengan warna paling minimum sebanyak $s + 1$ warna. Jika $d_{in}(v) < d_{out}(v)$ maka $\vec{F_n}$ dapat diwarnai dengan warna paling minimum sebanyak $t + 1$ warna. Jika $d_{in}(v) = d_{out}(v)$ maka $\vec{F_n}$ dapat diwarnai sebanyak $s + 1$ atau $t + 1$ warna.



Gambar 5. Graf kipas berarah dengan $\overrightarrow{\chi_h}(\vec{F_3}) = \Delta + 1$

b) $\overrightarrow{\chi_h}(\vec{F_n}) = q$

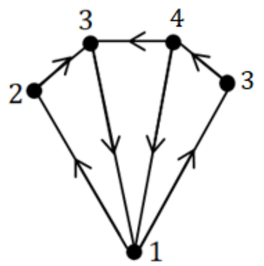
Pewarnaan harmonis pada graf kipas berarah tidak hanya memperhatikan arah busur yang terhubung langsung dengan simpul v_1, melainkan memperhatikan busur yang terhubung antar simpul $v_2, v_3, \dots, v_{n+2}$. Pada kondisi $\vec{F_2}$ dimana dua busur berarah masuk dan satu busur lainnya berarah keluar atau sebaliknya, serta memiliki *cycle* dengan panjang 3, pewarnaan harmonis pada graf kipas berarah hanya dapat diwarnai dengan warna paling minimum sebanyak jumlah simpulnya. Contoh pewarnaan harmonis graf kipas dengan $\overrightarrow{\chi_h}(\vec{F_n}) = q$ terdapat pada Gambar 6.



Gambar 6. Graf Kipas berarah dengan $\overrightarrow{\chi_h}(\vec{F}_2) = q$

c) $\Delta + 1 < \overrightarrow{\chi_h}(\vec{F}_n) < q$

Menurut Teorema 2, pada pewarnaan graf terdapat $\Delta + 1 < \overrightarrow{\chi_h}(\vec{G}) < q$. Bilangan kromatik harmonis pada graf kipas berarah tidak selalu bernilai $\Delta + 1$ atau q untuk $\vec{F}_n$ dengan n yang sama. Misalnya pada pewarnaan $\vec{F}_4$ dua busur berarah masuk dan busur lainnya berarah keluar serta memiliki *cycle* dengan panjang minimum 3 dapat diwarnai dengan minimum 4 warna. Contoh pewarnaan harmonis graf kipas dengan $\Delta + 1 < \overrightarrow{\chi_h}(\vec{G}) < q$ terdapat pada Gambar 7.



Gambar 7. Graf Kipas berarah dengan $\Delta + 1 < \overrightarrow{\chi_h}(\vec{F}_3) < q$

D. Simpulan

Jika $\vec{G}$ adalah graf berarah dengan n simpul dan $\Delta = maks\{d_{in}(v_i), d_{out}(v_i) | v_i \in V(\vec{G})\}$, maka $\Delta + 1 \le \overrightarrow{\chi_h}(\vec{G}) \le q$. Setelah menerapkan pewarnaan harmonis pada beberapa graf berarah yaitu graf lili berarah $\vec{l}_n$, graf komplit berarah $\vec{K}_n$ dan graf kipas berarah $\vec{F}_n$, dengan demikian diperoleh bilangan kromatik dari graf-graf tersebut antara lain $\overrightarrow{\chi_h}(\vec{l}_n) = \Delta + 1$ untuk graf lili berarah ($\vec{l}_n$) dan $\overrightarrow{\chi_h}(\vec{K}_n) = n$ untuk graf komplit berarah ($\vec{K}_n$). Selain itu, bilangan kromatik harmonis pada graf kipas berarah yaitu $\overrightarrow{\chi_h}(\vec{F}_n) = \Delta + 1$, $\overrightarrow{\chi_h}(\vec{F}_n) = q$ dan $\Delta + 1 < \overrightarrow{\chi_h}(\vec{F}_n) < q$.

E. Daftar Pustaka

Afriantini, Fran, F., & Helmi. (2019). Pewarnaan Simpul, Sisi, Wilayah Pada Graf Dan Penerapannya. *Bimaster: Buletin Ilmiah Matematika, Statistika dan Terapannya*, *8*(4), 773–782. https://doi.org/10.26418/bbimst.v8i4.36037

Edwards, K. J. (2013). Harmonious chromatic number of directed graphs. *Discrete Applied Mathematics*, *161*(3), 369–376.

Hegde, S. M., & Castelino, L. P. (2015). *Harmonious colorings of digraphs*.

Indriani, S., & Budayasa, I. K. (2020). Bilangan Pewarnaan Harmonis pada Graf Berarah. *Mathunesa: Jurnal Ilmiah Matematika*, *8*(1), 45–54.

Kusumastuti, N., Raventino, & Fran, F. (2021). The diachromatic number of double star graph. *Journal of Physics: Conference Series*, *2106*(1), 012024. https://doi.org/10.1088/1742-6596/2106/1/012024

Maro, L., & Banabera, C. (2020). Pewarnaan Titik pada Korona Graf Kipas dengan Graf Kipas dan Graf Buku Segitiga dengan Graf Buku Segitiga Berorder Sama. *Jurnal Axiomath: Jurnal Matematika Dan Aplikasinya*, *2*(2), 16–20.

Munir, R. (2010). *Matematika diskrit* (3 ed.). Informatika Bandung.

Robiandi, Nilamsari, K., & Fran, F. (2021). Pewarnaan Harmonis pada Graf Lili dan Graf Pertemanan. *Bimaster: Buletin Ilmiah Matematika, Statistika dan Terapannya*, *10*(3), 317–322.

Samuel, A. E., & Kalaivani, S. (2017). Square sum labeling for some lilly related graphs. *International Journal of Advanced Technology and Engineering Exploration*, *4*(29), 68.