INSTITUTO FEDERAL
Paraíba
Campus Campina Grande

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
CURSO SUPERIOR DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

AMANDA GABRIELY DA SILVA BARBOSA

LEMA DE TITU: UMA PODEROSA FERRAMENTA DA ÁLGEBRA LINEAR

CAMPINA GRANDE - PB
2023

B238l Barbosa, Amanda Gabriely da Silva.
Lema de Titu: uma poderosa ferramenta da álgebra linear / Amanda Gabriely da Silva Barbosa. - Campina Grande, 2023.
21 f.: il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Licenciatura em Matemática) - Instituto Federal da Paraíba, 2023.
Orientador: Prof. Me. Joab dos Santos Silva.

1. Matemática - olimpíada de matemática 2. Lema de Titu - forma de Engel 3. Desigualdade de Cauchy-Schwarz I.Silva, Joab dos Santos. II Título.

CDU 51

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
CAMPUS CAMPINA GRANDE

AMANDA GABRIELY DA SILVA BARBOSA

LEMA DE TITU: UMA PODEROSA FERRAMENTA DA ÁLGEBRA LINEAR

Trabalho de Conclusão de Curso, aprovado como requisito parcial para a obtenção de graduação em Licenciatura em Matemática pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba – Campus Campina Grande.

Habilitação: Licenciatura

Data da aprovação

22 / 06 / 2023.

BANCA EXAMINADORA:

Joab dos Santos Silva

ORIENTADOR: Prof. Me Joab dos Santos Silva – IFPB

Jonathas Jeronimo Barbosa

AVALIADOR: Prof..Dr Jonathas Jeronimo Barbosa – IFPB

Cicero da Silva Pereira

AVALIADOR: Prof. Me. Cicero da Silva Pereira – IFPB

AGRADECIMENTOS

A Deus pela minha vida, por me ajudar a ultrapassar todos os obstáculos encontrados ao longo do curso e ter me proporcionado chegar até aqui.

A minha mãe, que mesmo distante sempre acreditou em mim.

Hugo, sem você eu teria enlouquecido, obrigada por ser tão companheiro.

Agradeço a todos os meus mestres, que sempre estiveram dispostos a ajudar e contribuir para um melhor aprendizado, em especial ao meu professor e orientador.

Agradeço também a algumas amizades construídas no decorrer do curso, Elvira, Jessica, Yaggo, vocês foram essenciais na minha trajetória.

E por fim, agradeço a minha instituição por ter me dado a chance e ferramentas que permitiram chegar ao final desse ciclo de maneira satisfeita.

"A persistência é o caminho do êxito."
(Charles Chaplin)

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo apresentar o Lema de Titu, uma poderosa ferramenta na resolução de problemas envolvendo desigualdades em olimpíadas de matemática. Para isso realizamos uma revisão de literatura sobre espaço vetorial e produto interno, com maior destaque a Desigualdade de Cauchy-Bunyakovskii-Schwarz (CBS) e demonstramos o Lema de Titu, sendo este um caso particular da Desigualdade CBS. Como resultado do trabalho trazemos a aplicação do Lema de Titu na resolução de problemas olímpicos.

Palavras-chave: Lema de Titu. Desigualdade CBS. Desigualdades. Olimpíada. Matemática.

ABSTRACT

The present work aims to present Titu's Lemma, a powerful tool in solving problems involving inequalities in mathematics olympiads. For this, we performed a literature review on vector space and inner product, with greater emphasis on the Cauchy-Bunyakovskii-Schwarz Inequality (CBS) and demonstrated Titu's Lemma, which is a particular case of the CBS Inequality. As a result of the work we bring the application of Titu's Lemma in the resolution of olympic problems.

Keywords: Titu's Lemma. CBS inequality. Inequalities. Olympics. Mathematics.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O estudo da história do desenvolvimento da álgebra, aliado a uma análise das concepções de álgebra e de educação algébrica (FIORENTINI; FERNANDES; CRISTOVÃO, 2005), indica que as concepções vigentes, relacionadas ao ensino da álgebra, primam por duas características básicas: ressaltam o desenvolvimento da linguagem algébrica em detrimento do pensamento ou enfatizam o ensino de uma linguagem já constituída mediante a apropriação das manipulações algébricas. Segundo LINS (1997), os trabalhos desenvolvidos a partir da abordagem dos campos conceituais enquadram-se nestas características.

As atividades e os problemas sugeridos pelos pesquisadores tentam romper com a ênfase dada à assimilação da transformação algébrica. No entanto, consideram os movimentos regulares como início e fim do processo de ensino da álgebra, criando assim um ciclo fechado. Estes movimentos são modelados objetivando a elaboração de generalizações que possibilitem a compreensão dos conceitos desejados. Porém, estas propostas são insuficientes para levar os estudantes a uma compreensão de nexos conceituais algébricos que superem a formação de um pensamento empírico-discursivo (DAVYDOV, 1978), pois "a realidade não é composta apenas por movimentos regulares".

Porém, este caráter geral da equação dissipa-se quando estamos interessados em determinar um valor numérico para a variável. Em uma situação específica dentro do movimento de variação quantitativa sempre é possível determinar um momento particular e, dentro de um grupo de variáveis, podemos sempre determinar um valor numérico específico. Percebemos então que, se a variável constitui uma linguagem para os movimentos quantitativos gerais, as equações, por sua vez, representam a particularidade e, portanto, constituem uma linguagem particular, específica, um estado dos movimentos de controle das quantidades.

Apresentamos neste trabalho o Lema de Titu, que é uma desigualdade muito útil que aparece em vários contextos diferentes, tais como em análise, aplicando-se a séries infinitas e integração de produtos, e na teoria de probabilidades aplicando-se as variâncias e covariâncias. Essa desigualdade para somas foi publicada por Augustin Cauchy (1821), enquanto a correspondente desigualdade para integrais foi primeiro estabelecida por Viktor Yakovlevich Bunyakovsky (1859) e redescoberta por Hermann Amandus Schwarz (1888) (às vezes chamado erroneamente de "Schwartz").

2 CONCEITOS BASE

2.1 ESPAÇO VETORIAL

Um espaço vetorial real (sobre o conjunto $\mathbb{R}$) é um conjunto não vazio V com duas operações, a adição e a multiplicação por escalar, definidas por:

1. Adição: a cada par $u, v \in V$ corresponde um vetor $u + v \in V$;
2. Multiplicação por Escalar: a cada par $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u \in V$, corresponde um vetor $\alpha u \in V$.

As operações de adição e multiplicação por escalar satisfazem os seguinte axiomas:

a) $u + v = v + u$, $\forall\ u, v \in V$

b) $u + (v + w) = (u + v) + w$, $\forall\ u, v, w \in V$

c) Existe em V um vetor, denominado vetor nulo e denotado por 0, tal que $u + 0 = u$, $\forall\ u \in V$.

d) A cada vetor $u \in V$ existe um vetor em V, denominado oposto de u e denotado por $-u$, tal que $u + (-u) = 0$.

e) $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$, $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall\ u \in V$.

f) $1u = u$, $\forall\ u \in V$ (onde 1 é denominado elemento identidade de $\mathbb{R}$)

g) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$, $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall\ u, v \in V$

h) $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$, $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall\ u \in V$

Os espaços vetoriais V assim definidos são chamados espaços vetoriais reais e os seus elementos são chamados de vetores. Apresentamos a seguir alguns exemplos.

Exemplo 2.1.1. *O conjunto dos números reais* $\mathbb{R}$ *é um espaço vetorial sobre si mesmo.*

Exemplo 2.1.2. *O conjunto* $\mathbb{R}^2 = \{(x, y)|\ x, y \in \mathbb{R}\}$ *é um espaço vetorial com as operações de adição e multiplicação por um escalar real assim definidas:*

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) + (x_2, y_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ \alpha(x_1, y_1) &= (\alpha x_1, \alpha y_1) \end{aligned}$$

Exemplo 2.1.3. *O conjunto* $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z)|\ x, y, z \in \mathbb{R}\}$ *é um espaço vetorial com as operações de adição e multiplicação por um escalar real assim definidas:*

$$\begin{aligned} (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \\ \alpha(x_1, y_1, z_1) &= (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1) \end{aligned}$$

Podemos generalizar os exemplos anteriores para uma quantidade finita de entradas. Apresentamos no próximo exemplo essa generalização ela é chamada de Espaço das n-uplas ou Espaço $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 2.1.4. *Para cada $n \geq 1$, o conjunto $\mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n)|\ a_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n\}$ é um espaço vetorial com as operações definidas por:*

$$\begin{aligned}(a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)\\ \alpha(a_1, a_2, \ldots, a_n) &= (\alpha a_1, \alpha a_2, \ldots, \alpha a_n)\end{aligned}$$

2.2 PRODUTO INTERNO

Seja V um espaço vetorial real, um produto interno em V é uma função que associa a cada par de vetores u e v de V um número real denotado por $\langle u, v\rangle$, que satisfaz os seguintes axiomas:

1. $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$, $\forall\ u, v \in V$
2. $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$, $\forall\ u, v, w \in V$
3. $\langle \alpha u, v\rangle = \alpha\langle u, v\rangle$, $\forall\ u, v \in V$ e $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$
4. $\langle u, u\rangle \geq 0$, $\forall\ u \in V$, e $\langle u, u\rangle = 0$ se, e somente se, $u = 0$

Um espaço vetorial real com um produto interno é chamado de espaço euclidiano. Apresentamos a seguir alguns exemplos de produto interno.

Exemplo 2.2.1. *Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ e $u = (x_1, y_1), v = (x_2, y_2)$ em $\mathbb{R}^2$. A função definida por*

$$\langle u, v\rangle = x_1x_2 + y_1y_2$$

é um produto interno em $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 2.2.2. *Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ e $u = (x_1, y_1, z_1), v = (x_1, , y_2, z_2)$ em $\mathbb{R}^3$. A função definida por*

$$\langle u, v\rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

é um produto interno em $\mathbb{R}^3$.

Podemos mais uma vez generalizar.

Exemplo 2.2.3. *Sejam* $\mathbb{R}^n$ *e* $u = (x_1, \ldots, x_n), v = (y_1, \ldots, y_n)$ *em* $\mathbb{R}^n$*, a função definida por*

$$\langle u, v\rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$$

´é um produto interno em $\mathbb{R}^n$*.*

Os três últimos exemplos são chamados de produto interno canônico sobre $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^n$, respectivamente. Há infinitos produtos internos diferentes dos produtos internos canônicos. A seguir apresentamos dois exemplos de produto interno diferentes do produto interno canônico.

Exemplo 2.2.4. *Considere o espaço vetorial* $\mathbb{R}^2$ *e* $u = (x_1, y_1), v = (x_2, y_2)$ *em* $\mathbb{R}^2$*. A função definida por*

$$\langle u, v\rangle = 2x_1x_2 + 3y_1y_2$$

é um produto interno em $\mathbb{R}^2$*.*

Exemplo 2.2.5. *Dado o espaço vetorial* $\mathbb{R}^2$ *e* $u = (x_1, y_1), v = (x_2, y_2)$ *em* $\mathbb{R}^2$*. A função definida por*

$$\langle u, v\rangle = 3x_1x_2 - x_1y_2 - x_2y_1 + 7y_1y_2$$

é um produto interno em $\mathbb{R}^2$*.*

2.2.1 Norma

Seja V um espaço euclidiano, chama-se norma de um v em V, e denota-se por $\|v\|$, o número real definido por

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$$

Observe que a norma está bem definida, pois para todo v temos $\langle v, v\rangle \geq 0$. Essa é a norma proveniente do produto interno. O exemplo a seguir apresenta a norma proveniente do produto interno canônico em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 2.2.6. *Considere* $\mathbb{R}^2$ *e* $\mathbb{R}^3$ *com produto interno canônico. Então, a norma é dada por*

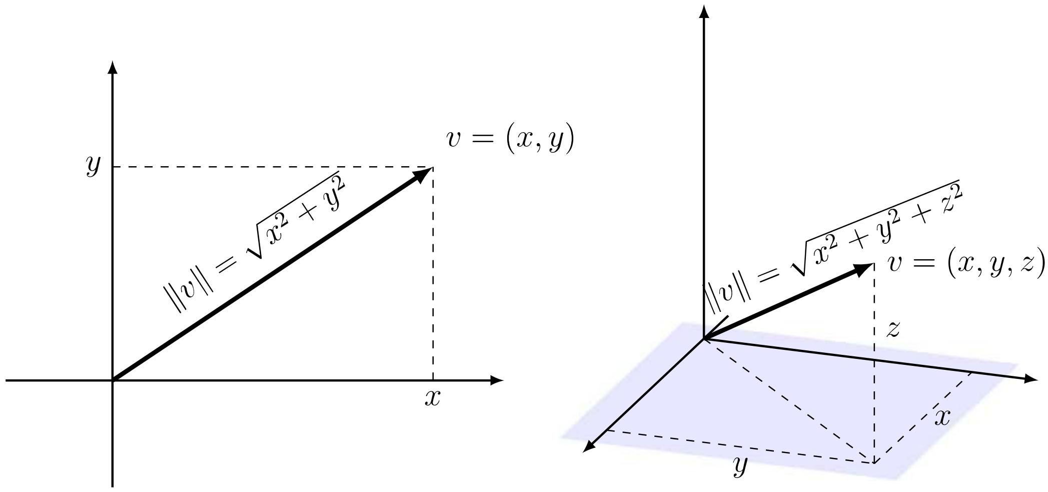
$$\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad , \quad v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\|(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad , \quad v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

Esta norma é chamada de norma euclidiana.

Uma interpretação geométrica para a norma euclidiana em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ é dada na Figura 1.

Figura 1 – Norma euclidiana em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.



O próximo exemplo apresenta o cálculo de da norma de alguns vetores.

Exemplo 2.2.7. *Considerando o espaço euclidiano* $\mathbb{R}^2$ *com a norma euclidiana, temos:*

$$\|(3,4)\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$
$$\|(-2,-1)\| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$$

2.2.2 Desigualdade de Cauchy-Bunyakovskii-Schwarz (CBS)

A desigualdade de Cauchy-Bunyakovskii-Schwarz, também conhecida como desigualdade de Cauchy-Schwarz, desigualdade de Schwarz ou desigualdade de Cauchy, é uma desigualdade muito útil que aparece em vários contextos diferentes, tais como em análise, aplicando-se a séries infinitas e integração de produtos, e na teoria de probabilidades aplicando-se as variâncias e covariâncias. A seguir iremos enunciar a Desigualdade CBS e demonstrá-la.

Teorema 2.2.1 (Desigualdade de Cauchy-Bunyakovskii-Schwarz (CBS))**.** *Seja V um espaço euclidiano, então para todo $u, v \in V$ tem-se*

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|$$

A igualdade vale se, e somente se, $\{u, v\}$ é linearmente dependente.

Demonstração. Se $u = 0$ ou $v = 0$, o resultado é imediato. De fato, digamos $v = 0$, então $\langle u, v\rangle = \langle u, 0\rangle = 0$ e $\|u\|\|v\| = \|u\|\|0\| = \|u\| \cdot 0 = 0$. Portanto, neste caso, tem-se a igualdade.

Suponhamos $u \neq 0$ e $v \neq 0$. Logo, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, vale a desigualdade $\|u+\alpha v\|^2 \geq 0$. Daí,

$$\begin{aligned} 0 \leq \|u+\alpha v\|^2 &= \langle u+\alpha v, u+\alpha v\rangle \\ &= \langle u,u\rangle + \langle u,\alpha v\rangle + \langle \alpha v, u\rangle + \langle \alpha v, \alpha v\rangle \\ &= \langle u,u\rangle + \alpha\langle u,v\rangle + \alpha\langle v,u\rangle + \alpha^2\langle v,v\rangle \\ &= \|v\|^2\alpha^2 + 2\langle u,v\rangle\alpha + \|u\|^2 \end{aligned}$$

Obtivemos assim um polinômio quadrático (pois $\|v\| \neq 0$) não negativo na incógnita α. Esta desigualdade implica que o polinômio

$$\|v\|^2\alpha^2 + 2\langle u,v\rangle\alpha + \|u\|^2$$

não tem raiz real ou tem raiz real dupla.

Portanto, seu discriminante deve ser menor ou igual a zero. Daí,

$$\begin{aligned} [2\langle u,v\rangle]^2 - 4\|v\|^2\|u\|^2 &\leq 0 \iff \\ 4\langle u,v\rangle^2 &\leq 4\|v\|^2\|u\|^2 \iff \\ \langle u,v\rangle^2 &\leq \|u\|^2\|v\|^2 \end{aligned}$$

Considerando agora a raiz quadrada positiva em ambos os membros da última desigualdade, tem-se que

$$|\langle u,v\rangle| \leq \|u\|\|v\|$$

para $u, v \in V$.

Mostremos que $|\langle u,v\rangle| = \|u\|\|v\|$ se, e somente se, $\{u,v\}$ é linearmente dependente. Se $u = 0$ ou $v = 0$, então $\{u,v\}$ é linearmente dependente. Suponhamos $u \neq 0$ e $v \neq 0$, então

$$|\langle u,v\rangle| = \|u\|\|v\| \iff \langle u,v\rangle^2 = \|u\|^2\|v\|^2 \iff 4\langle u,v\rangle^2 - 4\|u\|^2\|v\|^2 = 0$$

Mas, $4\langle u,v\rangle^2 - 4\|u\|^2\|v\|^2$ é o discriminante do trinômio em α

$$\|v\|^2\alpha^2 - 2\langle u,v\rangle\alpha + \|u\|^2$$

que, por sua vez, é igual a $\langle u-\alpha v, u-\alpha v\rangle$. Sendo o discriminante igual a zero, segue que o trinômio possui uma raiz real dupla $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$.

Considerando a raiz $\alpha = \dfrac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2}$ (dupla) do trinômio, temos

$$\langle u-\alpha v, u-\alpha v\rangle = 0$$

o que equivale a $u - \alpha v = 0$, e daí $u = \alpha v$. Portanto, $\{u,v\}$ é linearmente dependente.

Por outro lado, se $\{u, v\}$ é linearmente dependente, então um dos vetores é combinação linear do outro. Seja $u = \alpha v$, para algum $\alpha \in \mathbb{R}$. Então

$$\begin{aligned} |\langle u, v\rangle| &= |\langle \alpha v, v\rangle| = |\alpha\langle v, v\rangle| = |\alpha||\langle v, v\rangle| = |\alpha|\|v\|^2 \\ &\text{e} \\ \|u\|\|v\| &= \|\alpha v\|\|v\| = |\alpha|\|v\|\|v\| = |\alpha|\|v\|^2 \end{aligned}$$

Portanto, $|\langle u, v\rangle| = \|u\|\|v\|$. $\square$

Considerando os espaços euclidianos $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, a Desigualdade CBS é escrita como:

Seja $\mathbb{R}^2$ o espaço euclidiano, então para todo $(a, b), (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tem-se

$$|ax + by| \leq \sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{x^2 + y^2}$$

A igualdade ocorre se, e somente se, $\dfrac{a}{x} = \dfrac{b}{y}$.

Seja $\mathbb{R}^3$ o espaço euclidiano, então para todo $(a, b, c), (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tem-se

$$|ax + by + cz| \leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

A igualdade ocorre se, e somente se, $\dfrac{a}{x} = \dfrac{b}{y} = \dfrac{c}{z}$.

3 UMA FERRAMENTA PODEROSA

3.1 LEMA DE TITU

O Lema de Titu é também conhecido como desigualdade de Sedrakyan, desigualdade de Bergström ou forma de Engel, é uma consequência direta da Desigualdade de CBS.

Nairi Sedrayan, nascido em 1961 em Ninotsminda, antiga União Soviética é o matemático armênio vencedor do Prêmio Erdős 2022, envolvido em Olimpíadas nacionais e internacionais, incluindo American Mathematics Competitions (EUA) e IMO, tendo sido presidente das Olimpíadas de Matemática da Armênia, Líder da Equipe Armênia da IMO, membro do júri e membro do comitê de seleção de problemas da Olimpíada Internacional de Matemática, membro do júri e membro do comitê de seleção de problemas da Zhautykov International Mathematical Olympiad (IZhO), membro do júri e membro do comitê de seleção de problemas da Olimpíada Internacional das Metrópoles, presidente e organizador da Olimpíada Internacional de Matemática das Cidades na República da Armênia (1986-2013). No livro seu livro *Desigualdades Algébricas* são fornecidas várias generalizações da desigualdade que recebe seu nome.

Arthur Engel (12 de janeiro de 1928 - 11 de novembro de 2022) foi um professor de matemática alemão, pedagogo e autor prolífico. Sua obra foi traduzida para vários idiomas. Ele participava de competições matemáticas nacionais e internacionais desde 1970. Engel foi um dos primeiros a reconhecer o impacto das calculadoras eletrônicas e dos computadores no ensino da matemática. Ele viu que o foco deveria mudar de aprender como aplicar algoritmos, que agora poderiam ser feitos pela máquina, para aprender como construir e testar algoritmos. Ele também percebeu cedo o valor do uso de computadores para atrair o interesse e a compreensão dos alunos pela matemática.

Em seu artigo de 1970, *The Teaching of Probability in the Intermediate Grades*, Engel descreveu uma atividade na qual os alunos primeiro usariam um dispositivo giratório para gerar uma série aleatória de números e, em seguida, usariam dispositivos para criar uma série em que os *spins* não fossem independentes, simulando um Processo de Markov . Um professor australiano desenvolveu isso para apresentar aos alunos um modelo simples do clima.

Titu Andreescu, nascido em 19 de agosto de 1956, na cidade romena de Timișoara, é professor associado de matemática na Universidade do Texas em Dallas. Ele está firmemente envolvido em concursos e olimpíadas de matemática, tendo sido o Diretor das Competições de Matemática Americanas (conforme indicado pela Mathematical Association of America), Diretor do Programa de Olimpíadas de Matemática, Treinador Principal da Equipe da Olimpíada Internacional de Matemática dos Estados Unidos, e Presidente da Olimpíada de Matemática dos Estados Unidos da América. Ele também é autor de um grande número de livros sobre resolução de problemas e matemática de estilo olímpico.

Desde muito jovem, o interesse pela matemática de nível superior foi incentivado por seu pai e por seu tio Andrew, que era professor universitário aposentado. Como estudante do ensino médio, ele se destacou em matemática e, em 1973, 1974 e 1975, venceu os concursos nacionais romenos de resolução de problemas organizados pela revista Gazeta Matemática.

Passemos agora a enunciar a Lema de Titu (AGARWAL, 2020) e para demonstrá-la usaremos a Desigualdade CBS.

Lema 3.1.1 (Lema de Titu)**.** *Se a e b são números reais, e x e y são números reais positivos, então*

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\geq\frac{(a+b)^2}{x+y}$$

Demonstração. Sejam $u=(a,b), v=(x,y)\in\mathbb{R}^2$, com x e y positivos, da Desigualdade CBS temos

$$|ax+by|\leq\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{x^2+y^2}\quad\Longleftrightarrow$$

$$(|ax+by|)^2\leq\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2\quad\Longleftrightarrow$$

$$a^2x^2+2abxy+b^2y^2\leq(a^2+b^2)(x^2+y^2)\quad\Longleftrightarrow$$

$$a^2x^2+2abxy+b^2y^2\leq a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2\quad\Longleftrightarrow$$

$$a^2y^2-2abxy+b^2x^2\geq 0\quad\Longleftrightarrow$$

como $x>0$ e $y>0$, temos $xy(x+y)>0$, daí

$$\frac{a^2y^2-2abxy+b^2x^2}{xy(x+y)}\geq 0\quad\Longleftrightarrow$$

$$\frac{a^2xy+a^2y^2+b^2x^2+b^2xy-a^2xy-2abxy-b^2xy}{xy(x+y)}\geq 0\quad\Longleftrightarrow$$

$$\frac{a^2y(x+y)+b^2x(x+y)-xy(a^2+2ab+b^2)}{xy(x+y)}\geq 0\quad\Longleftrightarrow$$

$$\frac{a^2y(x+y)+b^2x(x+y)-xy(a+b)^2}{xy(x+y)}\geq 0\quad\Longleftrightarrow$$

$$\frac{a^2y(x+y)}{xy(x+y)}+\frac{b^2x(x+y)}{xy(x+y)}-\frac{xy(a+b)^2}{xy(x+y)}\geq 0\quad\Longleftrightarrow$$

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}-\frac{(a+b)^2}{(x+y)}\geq 0\quad\Longleftrightarrow$$

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\geq\frac{(a+b)^2}{(x+y)}$$

A igualdade ocorre quando $\dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}$. □

Assim como a Desigualdade CBS, o Lema de Titu pode ser generalizado para um número finito de variáveis. Para $\mathbb{R}^3$, temos

Se a, b e c são números reais, e x, y e z são números reais positivos, então

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\geq\frac{(a+b+c)^2}{(x+y+z)}$$

De fato,

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\geq\frac{(a+b)^2}{x+y}+\frac{c^2}{z}\geq\frac{[(a+b)+c]^2}{(x+y)+z}=\frac{(a+b+c)^2}{(x+y+z)}$$

A igualdade ocorre quando $\dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}=\dfrac{c}{z}$.

3.2 APLICAÇÕES EM PROBLEMA OLÍMPICOS

Nesta seção apresentamos o uso do Lema de Titu na resolução de problemas de olimpíadas de matemática envolvendo desigualdades.

Problema 3.2.1 (RMO, 2014)**.** *Sejam x, y e z números reais positivos. Mostre que*

$$\frac{y^2+z^2}{x}+\frac{z^2+x^2}{y}+\frac{x^2+y^2}{z}\geq 2(x+y+z)$$

De fato,

$$\frac{y^2+z^2}{x}+\frac{z^2+x^2}{y}+\frac{x^2+y^2}{z}=\left(\frac{y^2}{x}+\frac{z^2}{y}+\frac{x^2}{z}\right)+\left(\frac{z^2}{x}+\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}\right)$$

Aplicando o Lema de Titu, temos

$$\begin{aligned}\frac{y^2+z^2}{x}+\frac{z^2+x^2}{y}+\frac{x^2+y^2}{z} &= \left(\frac{y^2}{x}+\frac{z^2}{y}+\frac{x^2}{z}\right)+\left(\frac{z^2}{x}+\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}\right)\\ &\geq \frac{(y+z+x)^2}{x+y+z}+\frac{(z+x+y)^2}{x+y+z}\\ &= \frac{2\,(x+y+z)^2}{x+y+z}\\ &= 2\,(x+y+z)\end{aligned}$$

Problema 3.2.2 (Assam Maths Olympiad, 2014)**.** *Sejam x, y e z números reais positivos satisfazendo $x+y+z=1$. Mostre que*

$$xy(x+y)^2+yz(y+z)^2+zx(z+x)^2\geq 4xyz$$

De fato, dividindo ambos os membros da desigualdade por xyz, que é positivo por hipótese, temos

$$\frac{(x+y)^2}{z}+\frac{(y+z)^2}{x}+\frac{(z+x)^2}{y}\geq 4$$

Logo, mostrar a desigualdade proposta é equivalente a mostrar a desigualdade obtida a partir da divisão. Daí, aplicando o Lema de Titu, temos

$$\begin{aligned}
\frac{(x+y)^2}{z}+\frac{(y+z)^2}{x}+\frac{(z+x)^2}{y} &\geq \frac{(x+y+y+z+z+x)^2}{x+y+z}\\
&= \frac{[2(x+y+z)]^2}{x+y+z}\\
&= \frac{4(x+y+z)^2}{x+y+z}\\
&= 4(x+y+z)\\
&= 4\cdot 1\\
&= 4
\end{aligned}$$

Problema 3.2.3 (South Africa, 1995)**.** *Para números reais positivos a, b, c e d, mostre que*

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}\geq\frac{64}{a+b+c+d}$$

De fato,

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{2^2}{c}+\frac{4^2}{d}$$

Aplicando o Lema de Titu, temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d} &= \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{2^2}{c}+\frac{4^2}{d}\\
&\geq \frac{(1+1+2+4)^2}{a+b+c+d}\\
&= \frac{64}{a+b+c+d}
\end{aligned}$$

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho teve como interesse promover uma análise mais aprofundado sobre o Lema de Titu, uma consequência direta da Desigualdade CBS. Destacamos que em um primeiro curso de Álgebra Linear, a partir de uma abordagem axiomática, muitas vezes se caracteriza como a introdução dos estudantes na argumentação lógico-dedutiva. A aplicação dos conceitos e resultados nesse primeiro curso acaba não sendo estudado pelos alunos. Nesse trabalho tivemos a oportunidade de aplicar uma das mais importantes desigualdades da matemática, a Desigualdade CBS, estudada na disciplina de Álgebra Linear, na demonstração de um resultado importante e contemporâneo para olimpíadas de matemática, o Lema de Titu, e utilizar esse lema na resolução de alguns problemas olímpicos.

Com o Lema de Titu, demostrado neste trabalho, buscamos explorar desde a sua funcionalidade até a possibilidade de um melhor aproveitamento do tema, pois pode-se ser usado diretamente no ensino fundamental e médio, agregando ao aprendizado. Esse direcionamento para a educação básica e sua introdução na sala de aula fica como sugestão para trabalhos futuros.

REFERÊNCIAS

AGARWAL, P. Titu's lemma. *Ganit Bikash*, Senior Lecturer, FIIT-JEE, Delhi, India, v. 67, n. jul - dec, p. 36–43, 2020.

DAVYDOV, V. V. *Tipos de generalización en la enseñanza*. [S.l.]: Pueblo y educación, 1978.

FIORENTINI, D.; FERNANDES, F. L. P.; CRISTOVÃO, E. M. Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico. *Seminário Luso-brasileiro de investigações matemáticas no currículo e na formação do professor*, Universidade de Lisboa Lisboa, p. 1–22, 2005. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/seminÃąrio_lb.htm>. Acesso em: 05 jun. 2023.

LINS, R. *C; GIMENEZ, J. Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI.* [S.l.]: Campinas, SP: Papirus, 1997.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
Campus Campina Grande
R. Tranqüilino Coelho Lemos, 671, Dinamérica, CEP 58432-300, Campina Grande (PB)
CNPJ: 10.783.898/0003-37 - Telefone: (83) 2102.6200

Documento Digitalizado Ostensivo (Público)

Entrega da VERSÃO FINAL do trabalho de conclusão de curso.

Assunto:	Entrega da VERSÃO FINAL do trabalho de conclusão de curso.
Assinado por:	Amanda Gabriely
Tipo do Documento:	Anexo
Situação:	Finalizado
Nível de Acesso:	Ostensivo (Público)
Tipo do Conferência:	Cópia Simples