

# 仮想臨床神経補綴試験を目的とした エルゴード的セルオートマトン神経細胞モデル

ERGODIC CELLULAR AUTOMATON NEURON MODEL  
FOR A VIRTUAL CLINICAL TRIAL OF NEURAL PROSTHESIS

鈴木陽大

Haruo SUZUKI

指導教員 鳥飼弘幸

法政大学大学院理工学研究科電気電子工学専攻修士課程

A novel cellular automaton neuron model and its cellular differentiation method are presented. It is shown that the differentiation method enables the neuron model to reproduce typical nonlinear responses of a given neuron model. Then a virtual clinical trial of neural prosthesis is executed, i.e., a target neuron model in a network composed of biologically plausible differential equation neuron models is replaced with the presented neuron model that is differentiated to reproduce the target neuron model. The presented neuron model is implemented in a field programmable gate array and the virtual clinical trial is validated by experiments. The results show the presented neuron model is much more hardware-efficient compared to a simplified differential equation neuron model.

**Key Words** : Ergodic, Cellular automaton, Neuron model, Neural prosthesis, FPGA

## 1. はじめに

本研究では、エルゴード的セルオートマトン(CA)神経細胞モデルの設計に取り組む。第1章では、仮想臨床神経補綴試験の前段階としてエルゴード的 CA 神経細胞モデルが生物学的に妥当な神経細胞モデルの模倣するための分化方法を提案する。第2章では、神経補綴のための分化方法を提案し、エルゴード的 CA 神経細胞モデルを用いて仮想臨床神経補綴試験を実行する。本稿では、第2章のエルゴード的 CA 神経細胞モデルを用いた仮想臨床神経補綴試験について示す。

怪我や病気などで損失した生体神経系の機能を回復させるために、様々な神経補綴デバイスが開発されている[1]-[12]。近年では、ネズミの脳の神経補綴[8]、チンチラの脳神経補綴[9]、猿の脳神経補綴[10]、人の脳神経補綴[11]のための補綴デバイスが開発されている。脳神経補綴デバイス開発のための回路・システムの基礎研究として、生物学的妥当な神経ネットワーク(Hodgkin-Huxley型微分方程式神経細胞ネットワーク)に着目し、図1に図示するように仮想臨床試験に取り組む。補綴デバイスを開発するためには、補綴対象となる神経細胞の非線形ダイナミクスを再現できる電子回路による神経細胞モデルを設計することが重要である。電子回路による神経細胞モデルに関して、生物模倣型電子回路モデルはモデルのダイナ

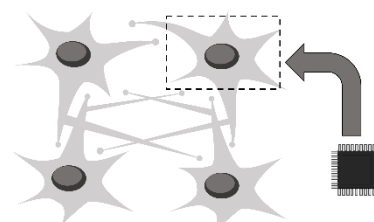


図1 本研究の問題設定

ミクスの基本特性(時間および状態空間の連続性)に基づき、以下の3つのクラスに分類することができる[13]。

- 連続時間と連続状態 (CTCS) を持つモデル: 連続した時間と連続した状態空間を持ち、一般にアナログのダイナミック回路で実装される常時偏微分方程式の生物模倣モデル。
- 離散時間と連続状態 (DTCS) を持つモデル: 離散的な時間と連続的な状態空間を持ち、一般的にスイッチトキャパシタ回路で実装される差分方程式による生物模倣モデル。
- 離散時間と離散状態 (DTDS) を持つモデル: 離散的な時間と離散的な状態空間を持ち、デジタルプロセッサによって実装されるデジタルプロセッサで実装された数値積分生物模倣モデル。

一方、以下の第4のクラスに属する生物模倣モデルも

多く開発されている。

- 連続時間と離散状態 (CTDS) を持つモデル: 連続時間と離散状態空間を持ち、通常、エルゴード的順序論理回路で実装される生物模倣モデル。

エルゴード的離散差分方程式生物模倣モデルは、デジタル実装された数値積分生物模倣モデルに比べて回路素子数が少なく、消費電力が低いことが示されている[13]-[18]。上記の脳補綴デバイスとエルゴード的順序論理回路生物模倣モデルの背景を踏まえ、以下のようにエルゴード的セルオートマトン(CA)神経細胞モデルを提示し、脳神経補綴デバイスの仮想臨床試験を実行する。第2節では、エルゴード的CA神経細胞モデルを提示する。その結果、エルゴード性が神経細胞の非線形ダイナミクスの再現に重要な役割を果たすことを示す。第3節では、提示する神経細胞モデルに対して置き換える神経細胞モデルの非線形応答を再現するための細胞分化法を提案する。さらに、分化させたエルゴード的CA神経細胞モデルを用いて、図1に示すような脳神経補綴の仮想臨床試験を実施する。そして、広いパラメータ範囲において生物学的に妥当な神経ネットワークモデルの典型的な神経動作を、汎化能力をもって回復できることを示す。第4節では、本モデルをFPGAに実装し、仮想臨床試験を検証する。その結果、一般的に用いられる微分方程式神経細胞モデルと比較して、本モデルは回路素子数が非常に少なく、消費電力も非常に低いことを示す。

## 2. エルゴード的CA神経細胞モデル

仮想臨床神経補綴試験のためのエルゴード的CA神経細胞モデルについて図2(a)に示す。本モデルは神経細胞の膜電位を示す離散変数 $V \in \{0, 1, \dots, 2^N - 1\}$ と回復変数 $U \in \{0, 1, \dots, 2^M - 1\}$ を持つ。ここで、 $N$ と $M$ はレジスタのビット長である。図2(a)と(b)に示すように本モデルは周期的な内部クロック

$$C = \sum_{n=0}^{\infty} p(t - nT_C)$$

を持つ。ここで、 $p(0) = \uparrow$ はクロックの立ち上がりを示し、 $t \neq 0$ ならば $p(t) = 0$ 、 $T_C > 0$ はクロック $C$ の周期である。さらに、本モデルはスイッチ信号

$$S_V(t) = \sum_{n=0}^{\infty} q(t - nT_V - \Phi_V, \Theta_V),$$

$$S_U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} q(t - nT_U - \Phi_U, \Theta_U)$$

を受け取る。 $q(t, \theta)$ は $t \in [0, \theta]$ のとき $q(t, \theta) = 1$ 、 $t \notin [0, \theta]$ のとき $q(t, \theta) = 0$ と定義される矩形波であり、 $T_V > 0$ と $T_U > 0$ はスイッチ信号の周期、 $\Phi_V \in [0, T_V]$ と $\Phi_U \in [0, T_U]$ はパルス持続時間、そして $\Phi_V \in [0, T_V]$ と $\Phi_U \in [0, T_U]$ は初期位相である。そして、内部クロック $C$ は次の離散変数 $V$

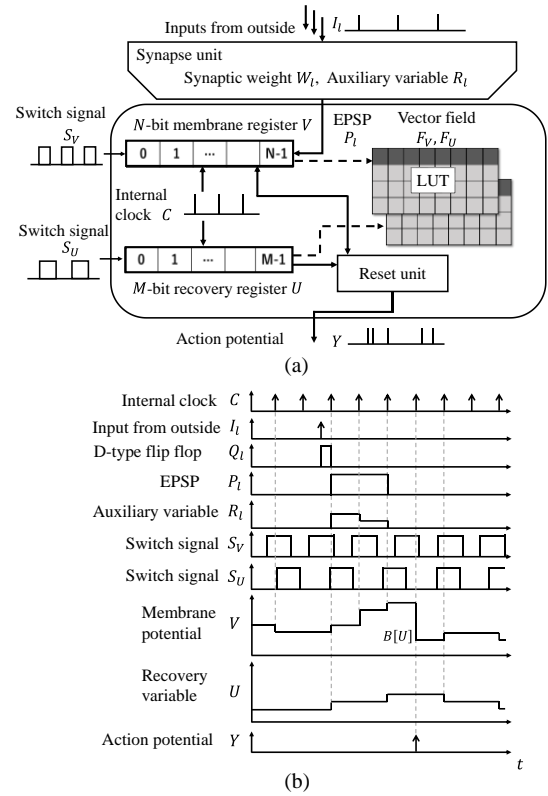


図2(a) エルゴード的セルオートマトン神経細胞モデルの回路の概略図。(b) エルゴード的セルオートマトン神経細胞モデルのタイミングチャート。

と $U$ の遷移を引き起こす。

If  $C = \uparrow$  and  $V < V_{th}$ , then

$$V := V + S_V F_V(V, U) + \sum_{l=1}^L P_l, \quad (1)$$

$$U := U + S_U F_U(V, U),$$

ここで、記号“:=”は即時状態遷移を示し、 $V_{th} = 2^N - 1$ は神経細胞の発火しきい値である。また、 $F_V: \mathbf{N} \times \mathbf{M} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ と $F_U: \mathbf{N} \times \mathbf{M} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ は以下で定義される離散関数である。

$$F_V(V, U) = 1 \quad \text{if } (V, U) \in \mathbf{D}^{++} \cup \mathbf{D}^{+-},$$

$$F_V(V, U) = -1 \quad \text{if } (V, U) \in \mathbf{D}^{-+} \cup \mathbf{D}^{--},$$

$$F_V(V, U) = 0 \quad \text{if } (V, U) \in \mathbf{D}^0,$$

$$F_U(V, U) = 1 \quad \text{if } (V, U) \in \mathbf{D}^{++} \cup \mathbf{D}^{-+},$$

$$F_U(V, U) = -1 \quad \text{if } (V, U) \in \mathbf{D}^{+-} \cup \mathbf{D}^{--},$$

$$F_U(V, U) = 0 \quad \text{if } (V, U) \in \mathbf{D}^0,$$

$$\mathbf{D}^{++} \equiv \{(V, U) | U < f_V(V), U \leq f_U(V)\},$$

$$\mathbf{D}^{-+} \equiv \{(V, U) | U \geq f_V(V), U < f_U(V)\},$$

$$\mathbf{D}^{+-} \equiv \{(V, U) | U \leq f_V(V), U > f_U(V)\},$$

$$\mathbf{D}^{--} \equiv \{(V, U) | U > f_V(V), U \geq f_U(V)\},$$

$$\mathbf{D}^0 \equiv \{(V, U) | (V, U) \notin \mathbf{D}^{++} \cup \mathbf{D}^{+-} \cup \mathbf{D}^{-+} \cup \mathbf{D}^{--}\}.$$

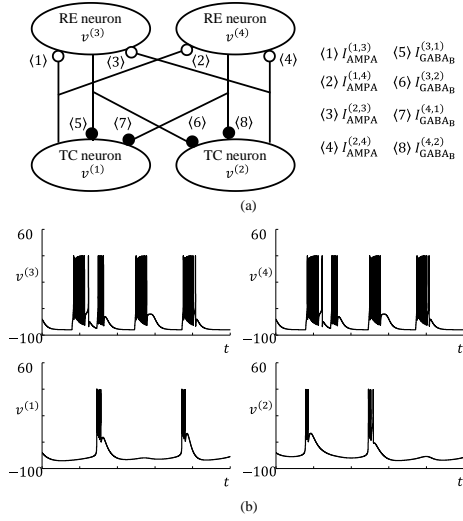


図 4 補綴対象の神経細胞ネットワーク [20].  
(a) ネットワークの模式図。(b) 数値シミュレーションで得られたバースト現象。

ここで、 $f_V(V) = [\alpha V^2 + \beta V + \gamma]$ 、 $f_U = [\rho V + \eta]$ 、 $[\cdot]$ は床関数を示し、 $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$ 、 $\rho$ 、そして $\eta$ はパラメータである。本モデルは、膜電位 $V$ が発火しきい値 $V_{th}$ に達したときに以下の $V$ のリセットを実行する。

$$\text{If } C = \uparrow, V = V_{th}, \text{ and } S_V = 1, \text{ then } V := B(U). \quad (2)$$

ここで、 $B: \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{N}$ はリセットの動作を示す離散関数である。リセット時、本モデルは神経細胞の活動電位を示す以下のパルスの立ち上がり $Y = \uparrow$ を出力する。

$$Y = \begin{cases} \uparrow, & \text{if } C = \uparrow, V = V_{th}, \text{ and } S_V = 1, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (3)$$

図 2 に示すように、本モデルは $L$ のシナプスユニットを通して入力 $I_l \in \{0, \uparrow\}$ 、 $l \in \{1, 2, \dots, L\}$ を受け取る。ここで、 $L \geq 0$ は入力数である。 $P_l \in \{0, 1\}$ は $l$ 番目のシナプスユニットの興奮性シナプス後電位(EPSP)であり、 $R_l \in \{0, 1, \dots, 2^k - 1\}$ は補助変数、そして $W_l \in \{0, 1, \dots, 2^j - 1\}$ はシナプス荷重である。そして、シナプスユニットは以下の EPSP  $P_l$ を生成する。

$$P_l = \begin{cases} 0, & \text{if } R_l = 0, \\ 1, & \text{if } R_l > 0, \end{cases} \quad (4)$$

$$\text{If } C = \uparrow, \text{ then } \begin{cases} R_l := R_l + W_l, & \text{if } Q_l = 1, \\ R_l := R_l - 1, & \text{if } R_l > 0. \end{cases}$$

ここで、 $Q_l \in \{0, 1\}$ は D フリップフロップの状態、入力 $I_l$ でプリセットされる。なお、本モデルはクロック $C$ とスイッチ信号 $S_V$ と $S_U$ によって駆動するため二つのモデルに分類される。その分類とモデルの優位性についての詳細は修士論文にて説明する。

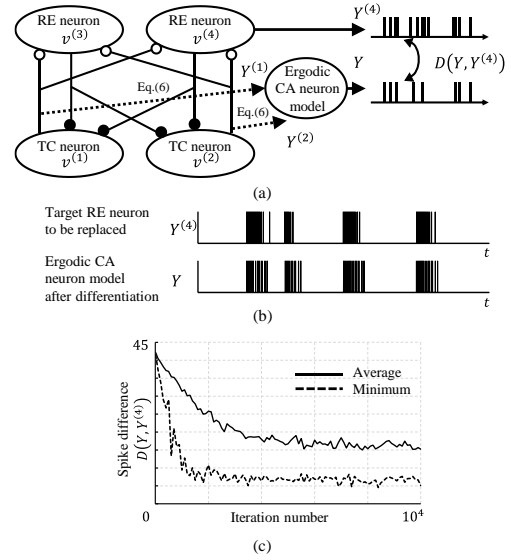


図 3 (a) 細胞分化法のスケッチ。右の視床網様細胞を対象の神経細胞として選択する。(b) 数値シミュレーションで得られた対象の神経細胞時間モデルの時間波形。ネットワークのパラメータ値は図 3(b)と等しい。(c) 数値シミュレーションで得られたエルゴード的 CA 神経細胞モデルの分化後の典型的な時間波形。

### 3. 仮想臨床神経補綴試験

#### (1) 補綴対象の神経ネットワーク

仮想臨床神経補綴試験の対象となる神経ネットワークとして、以下の生物学的に妥当な視床皮質神経細胞ネットワークモデル [19] を採用する。(図 3(a) を参照)。

$$C_m^{(i)} v^{(i)} / dt = -g_L^{(i)} (v^{(i)} - E_L^{(i)}) - I_{Na}^{(i)} - I_K^{(i)} - I_T^{(i)} - I_h^{(i)} - I_{KL}^{(i)} - I_{GABA_{AT}}^{(i,j)} - I_{GABA_B}^{(i,j)}, \quad (5)$$

$$C_m^{(j)} v^{(j)} / dt = -g_L^{(j)} (v^{(j)} - E_L^{(j)}) - I_{Na}^{(j)} - I_K^{(j)} - I_{Ts}^{(j)} - I_{AMPA}^{(j,i)} - I_{GABA_{AR}}^{(j,i)}.$$

ここで、 $v^{(i)}$ と $v^{(j)}$ はそれぞれ視床皮質(TC)細胞と視床毛様(RE)細胞の膜電位を示し、 $i \in \{1, 2\}$ と $j \in \{3, 4\}$ は神経細胞モデルの番号である。また、 $C_m^{(i)}$ は膜容量を示し、 $g_L^{(i)}$ は漏れコンダクタンスを示し、 $E_L^{(i)}$ は反転電位を示し、 $I_{Na}^{(i)}$ 、 $I_K^{(i)}$ 、 $I_T^{(i)}$ 、 $I_{Ts}^{(i)}$ 、 $I_h^{(i)}$ 、そして $I_{KL}^{(i)}$ は膜電位により変化するゲート電流を示す。さらに、 $I_{GABA_{AT}}^{(i,j)}$ と $I_{GABA_B}^{(i,j)}$ は視床毛様細胞によって引き起こされる視床皮質細胞のシナプス電流を示し、 $I_{AMPA}^{(j,i)}$ と $I_{GABA_{AR}}^{(j,i)}$ は視床皮質細胞によって引き起こされる視床毛様細胞のシナプス電流を示す。図 3(b)に対象のネットワークの典型的な振る舞いを示す。

#### (2) 神経補綴のための細胞分化方法

本節では、エルゴード的 CA 神経細胞モデルの細胞分化法を用いて補綴対象の神経細胞ネットワークにおける一つの神経細胞モデルの非線形応答を再現する。図 4(a)

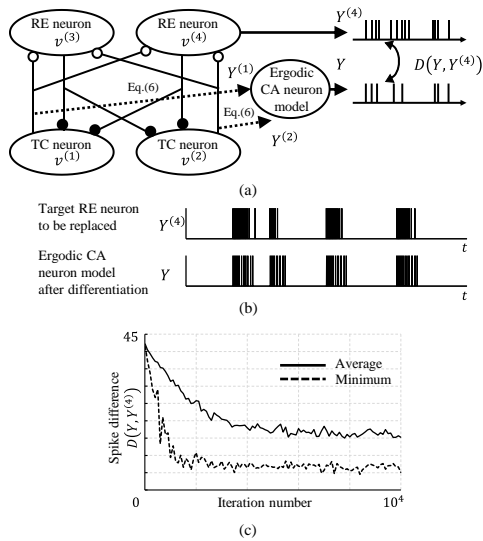


図 5 補綴対象のネットワークのパラメータは  $(g_{h1}, g_{h2})$  を除いて図 3(b) と同じである。(a) 仮想臨床試験の概念図。右の視床網様細胞を分化後のエルゴード的 CA 神経細胞モデルと置き換える。(b) 補綴後の対象の神経細胞ネットワークの時間波形 (c) 総スパイク距離  $\Delta$  の特性。

に細胞分化法のスケッチを示す。本研究では膜電位  $v^{(4)}$  を持つ右の視床毛様細胞を対象の神経細胞モデルとする。細胞分化法の準備として、以下の視床皮質細胞と視床網様細胞の活動電位  $Y^{(k)}, k \in \{1, 2, 3, 4\}$  を定義する。

$$Y^{(k)} = \begin{cases} \uparrow, & \text{when } v^{(l)} \text{ exceeds } 0 \text{ from below,} \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (6)$$

図 4(a) に示すように視床皮質細胞の活動電位  $Y^{(1)}$  と  $Y^{(2)}$  をエルゴード的 CA 神経細胞モデルに入力する。エルゴード的 CA 神経細胞モデルの活動電位  $Y$  と補綴対象の神経細胞モデルの活動電位  $Y^{(4)}$  の差を測るために以下のスパイク距離  $D$  を用いる。

$$D(Y, Y^{(4)}) = \sum_{n=1}^{N_D} |F_n - G_n| / N_D \quad (7)$$

ここで、 $F_{n+1} = F_n - 1$  if  $C = \uparrow$ ,  $F_n := F_n + \kappa$  if  $Y^{(4)} = \uparrow$ ,  $G_{n+1} = G_n - 1$  if  $C = \downarrow$ ,  $G_n := G_n + \kappa$  if  $Y = \uparrow$ ,  $F_0 = G_0 = 0$ ,  $F_n$  と  $G_n$  は 0 で飽和し、非負であると仮定する。さらに、 $\kappa$  はスパイク距離  $D$  のパラメータを示し、 $N_D$  は観測期間を決定する。このスパイク距離  $D$  を小さくするために離散関数  $B$  をシミュレーテッドアニーリング法に基づき更新する。図 4(b) に対象の神経細胞モデルと細胞分化後のエルゴード的 CA 細胞モデルの時間波形を示す。さらに、図 4(c) に分化法の反復回数に対するスパイク距離  $D$  の特性を示す。以上より、細胞分化法によってエルゴード的 CA 神経細胞モデルが視床皮質細胞に対する対象の神経細胞

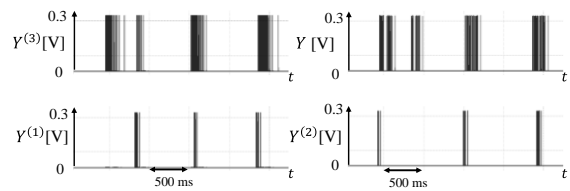


図 6 オシロスコープから得た図 5(b) に対応する補綴後の対象のネットワークの時間波形。

表 1 比較

Neuron model after differentiation	Presented ergodic CA	Simplified differential equation
#Logic slices	139	406
#LUTs	467	1161
#FFs	238	108
on-chip power	4 [mW]	35 [mW]

モデルの非線形応答を再現できることを確認した。

### (3) 仮想臨床神経補綴試験

本節では、図 5(a) に示す仮想的な神経補綴に取り組む。二つのパラメータセット  $(g_{h1}, g_{h2}) = (0.015, 0.010)$  と  $(0.020, 0.015)$  における対象のネットワークを用いてエルゴード的 CA 神経細胞モデルを分化させる。そして、対象の神経細胞をエルゴード的 CA 神経細胞モデルで置き換える。図 5(b) に補綴後のネットワークの時間波形を示す。図 3(b) と比較すると補綴前後で同じバースト現象を示すことが確認できる。補綴の性能を評価するため、総スパイク距離  $\Delta = \sum_{i=1}^3 D(Y_{before}^{(i)}, Y_{after}^{(i)})$  を用いる。ここで、 $Y_{before}^{(i)}$  と  $Y_{after}^{(i)}$  はそれぞれ補綴前と補綴後の活動電位を示す。図 5(c) に補綴対象のネットワークのパラメータ  $(g_{h1}, g_{h2})$  に対する総スパイク距離  $\Delta$  の特性を示す。広い範囲のパラメータ値に対して補綴後の総スパイク距離  $\Delta$  は補綴前の総スパイク距離よりも常に小さいことが確認でき、提案した補綴法は汎化能力を有すると結論付けることができる。

## 4. 実装と比較

分化後のエルゴード的 CA 神経細胞モデル(式(1)-(4))を Verilog-HDL のソースコードとして手書きし、Xilinx's design suite Vivado 2020.1 でコンパイルした。そして、出力ファイルを Xilinx 社の FPGA (XC7A100TCSG324) に実装した。また、対象の神経細胞モデル以外の対象ネットワーク(式(5))の力学方程式を 4 次のルンゲクッタ式に変換し、シングルボードコンピュータ Raspberry Pi 4 Model B に実装した。そして、シングルボードコンピュータ上の補綴対象のネットワークと FPGA 上のエルゴード的 CA 神経細胞モデルを GPIO 経由で接続した。図 6 に補綴後の対象のネットワークの時間波形を示す。図 5 と比べて実験的な神経補綴は成功していることが確認できる。比較対象として対象の神経細胞モデルを模倣するために微分方程式神経細胞モデル[20]を分化させ、同じ FPGA に

実装した。表 1 比較結果をまとめる。これより、微分方程式神経細胞モデルに比べてエルゴード的 CA 神経細胞モデルはハードウェア効率が良いことが確認できる。

## 5. 結論

本稿では、細胞分化法を用いて提示した神経細胞モデルが生物学的に妥当な神経細胞モデルを再現できることを示した。また、提示した補綴法は、汎化能力を持って生物学的に妥当な神経細胞ネットワークの神経動作を回復できることを示した。さらに、提案モデルを FPGA に実装し、一般的に用いられている微分方程式神経細胞モデルと比較して、よりハードウェア効率が良いことを確認した。したがって、本モデルは、低消費電力かつ小面積の神経補綴デバイスを開発するための重要な要素になると結論付けることができる。そして、そのような将来の補綴装置を開発するための課題として、(a) エルゴード的セルオートマトン神経細胞モデルの大規模ネットワークの系統的設計法の開発、(b) 大規模なエルゴード的セルオートマトン神経細胞ネットワークの理論的かつ効率的な数値解析手法の開発、が挙げられる。

**謝辞:** 本研究を進めるにあたり、研究の内容、方針についてご丁寧な指導を受け賜りました鳥飼弘幸教授には、心より深く感謝いたします。

## 参考文献

- 1) C. D. Schuman et al., "A Survey of Neuromorphic Computing and Neural Networks in Hardware," arXiv:1705.06963v1.
- 2) J. Yu, M. Tan, J. Chen and J. Zhang, "A Survey on CPG-Inspired Control Models and System Implementation," IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, vol. 25, no. 3, pp. 441-456, 2014.
- 3) B. Wilson et al. "Better speech recognition with cochlear implants." Nature, vol. 352, pp. 236-238, 1991.
- 4) F. -G. Zeng et al., "Cochlear Implants: System Design, Integration, and Evaluation," IEEE Reviews in Biomedical Engineering, vol. 1, pp. 115-142, 2008.
- 5) M. D. Linderman et al., "Signal Processing Challenges for Neural Prostheses," IEEE Signal Processing Magazine, vol. 25, no. 1, pp. 18-28, 2008.
- 6) Gilja V et al., "A high-performance neural prosthesis enabled by control algorithm design," Nature Neuroscience, vol. 15, pp. 1752-1757, 2012.
- 7) D. Song et al., "Nonlinear Dynamic Modeling of Spike Train Transformations for Hippocampal-Cortical Prostheses," IEEE Transactions on Biomedical Engineering, vol. 54, no. 6, pp. 1053-1066, 2007.
- 8) T. W. Berger et al., "A cortical neural prosthesis for restoring and enhancing memory," J. Neural Eng., vol. 8, no. 4, 046017, 2011.
- 9) C. C. Della Santina et al., "A Multichannel Semicircular Canal Neural Prosthesis Using Electrical Stimulation to Restore 3-D Vestibular Sensation," IEEE Transactions on Biomedical Engineering, vol. 54, no. 6, pp. 1016-1030, 2007.
- 10) R. E. Hampson, D. Song, et al., "Facilitation of Memory Encoding in Primate Hippocampus by a Neuroprosthesis that Promotes Task Specific Neural Firing," J. Neural Eng., vol. 10, no. 6, 066013, 2013.
- 11) R. E. Hampson, D. Song, et al., "Developing a hippocampal neural prosthetic to facilitate human memory encoding and recall," J. Neural Eng., vol. 15, no. 3, 036014, 2018.
- 12) T. W. Berger et al., "A Hippocampal Cognitive Prosthesis: Multi-Input, Multi-Output Nonlinear Modeling and VLSI Implementation," IEEE Transactions on Neural Systems and Rehabilitation Engineering, vol. 20, no. 2, pp. 198-211, 2012.
- 13) K. Takeda and H. Torikai, "A novel asynchronous CA neuron model: Design of neuron-like nonlinear responses based on novel bifurcation theory of asynchronous sequential logic circuit," IEEE Transactions on Circuits and Systems I, vol. 67, no. 6, pp. 1989-2001, 2020.
- 14) T. Matsubara and H. Torikai, "An Asynchronous Recurrent Network of Cellular Automaton-Based Neurons and Its Reproduction of Spiking Neural Network Activities," IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, vol. 27, no. 4, pp. 836-852, 2016.
- 15) K. Takeda and H. Torikai, "A Novel Hardware-Efficient Central Pattern Generator Model Based on Asynchronous Cellular Automaton Dynamics for Controlling Hexapod Robot," IEEE Access, vol. 8, pp. 139609-139624, 2020.
- 16) K. Takeda and H. Torikai, "A Novel Hardware-Efficient Cochlea Model Based on Asynchronous Cellular Automaton Dynamics: Theoretical Analysis and FPGA Implementation," IEEE Transactions on Circuits and Systems II, vol. 64, no. 9, pp. 1107-1111, 2017.
- 17) T. Noguchi and H. Torikai, "Ghost Stochastic Resonance from Asynchronous Cellular Automaton Neuron Model," IEEE Transactions on Circuits and Systems II, vol. 60, no. 2, pp. 111-115, 2013.
- 18) S. Shirafuji and H. Torikai, "A Novel Ergodic Cellular Automaton Model of Gene-Protein Network: Theoretical Nonlinear Analyses and Efficient FPGA Implementation," IEEE Access, vol. 11, pp. 300-312, 2023.
- 19) A. Destexhe et al., "Ionic Mechanisms Underlying Synchronized Oscillations and Propagating Waves in a Model of Ferret Thalamic Slices," Journal of neurophysiology, vol. 76, no. 3, pp. 2049-2070, 1996.
- 20) E. M. Izhikevich, "Dynamical Systems in Neuroscience: The Geometry of Excitability and Bursting," Cambridge, MA: MIT Press, 2007.