法政大学大学院紀要　理工学研究科編　Vol.64(2023 年 3 月)　法政大学

結合デジタルリターンマップの周期軌道の解析

ANALYSIS OF PERIODIC ORBITS IN COUPLED DIGITAL RETURN MAPS

木嶋佑堅
Yuken KIJIMA
指導教員　斎藤利通

法政大学大学院理工学研究科電気電子工学専攻修士課程

This paper considers periodic orbits in coupled digital spike maps. The digital spike map is a digital dynamical system defined by a set of points. The digital spike map can generate a variety of periodic orbits. Digital dynamical systems are suitable for precise numerical analysis, hardware implementation using FPGA and can be applied to various systems including neural networks. We can obtain the coupled digital spike map by mutual coupling of two digital spike maps. The coupled system can exhibit a variety of periodic orbits. First, we introduce typical examples generated by coupled digital spike maps. Next, we introduce two simple feature quantities for quantitative analysis of the behavior of periodic orbits. The first quantity evaluates complexity of periodic orbits. The second quantity evaluates stability of periodic orbits. We construct feature planes using two feature quantities for analysis. We focus on maximum periodic orbits because the phenomena are complex.
***Key Words** : return map, periodic orbit, coupled system*

1． はじめに

ロジスティックマップやアナログスパイクマップのような 1 次元の離散力学系は，簡素な式であるが複雑な現象を呈することが知られている[1]．これまで周期倍分岐やカオスなどの現象について広く研究されてきた[2][3][4]．また，これらのようなアナログリターンマップを離散化したデジタルリターンマップについても研究が行われてきた[5][6][7][8].

本論文ではデジタルスパイクマップ(Dmap)に着目した研究を行う．Dmap は，点の集合上で定義されたデジタル力学系である[9]．初期値やパラメータを変化させることで，様々な周期スパイク列を生成することができる．Dmap では，複数の周期スパイク列が初期値に対して共存できる．Dmap の定義域は有限個の点から成るのでカオスを発生しない．Dmap のようなデジタル力学系は，精密な数値解析，FPGA を用いたハードウェア実装[10]に適している．Dmap に関連するデジタル力学系として，セルオートマトン[11]，デジタルスパイキングニューラルネットワーク[10]などが挙げられる．Dmap の応用例としては，デジタル通信[12]，時系列近似[10]などが挙げられる．

代表的な 1 次元の離散力学系であるロジスティックマップ[1]を結合した系の詳細な研究が行われている[13]．カオスのネットワークの簡単な例として大域結合マップ(Globally coupled map, GCM)が用いられている．これは非常に簡素なモデルであるが，複雑な現象を呈することができる．本論文では，2 つの Dmap の結合により得られる結合デジタルマップ(CDM)を提案し，その基本動作を解析する．CDM は，基本的なアナログマップの結合系である GCM のデジタル版である．また，CDM は単体の Dmap では生成できない，より複雑な周期スパイク列を生成することができる．CDM の動作を定量的に評価するために，2 つの簡素な特徴量を導入する．1 つ目の特徴量は，周期スパイク列の複雑さを評価するものである．2 つ目の特徴量は，周期スパイク列の安定性を評価するものである．この 2 つの特徴量を用いて特徴量平面を構成する．この特徴量平面を用いて，2 種類の CDM について基本動作の比較を行う．1 つはベース信号が正弦波の分岐ニューロン[9]に基づくものである．もう 1 つは，ベース信号が三角波の分岐ニューロン[7]に基づくものである．

CDM の研究は，デジタル力学系の現象解析と工学的応用の研究を発展させるための基礎になると思われる．

2． アナログスパイクマップとデジタルスパイクマップ

まず，分岐ニューロンに基づくアナログスパイクマップ(Amap)を紹介する．Amap は様々なスパイク列を表すことができる．Amap は次式で記述される．

$$\phi_{n+1} = \phi_n + 1 - b(\phi_n) \bmod \equiv f_A(\phi_n) \tag{1}$$

ただし，ϕ_nは n 番目のスパイク位相，$b(\phi_n)$は周期 1 のベース信号である．分岐ニューロンに基づく Amap は，ベース信号とそのパラメータによって動作が変化する．次に 2 種類の Amap を紹介する．

(1) 正弦波ベース信号に基づくアナログスパイクマップ
正弦波のベース信号は次式で記述される．

$$b_1(\phi_n) = -k \sin 2\pi\phi_n \tag{2}$$

ただし，k は振幅パラメータである．分岐ニューロンの動作を図 1(1)に示す．

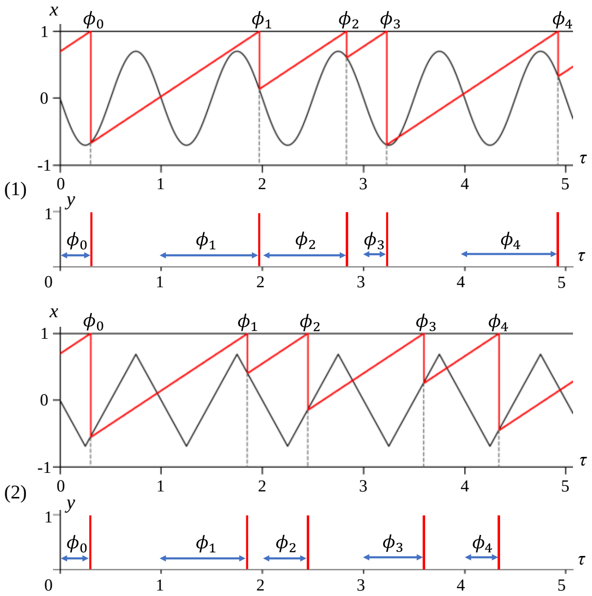


図 1 分岐ニューロンの動作，
ϕ_nは n 番目のスパイク位相．
(1) 正弦波ベース信号. (2) 三角波ベース信号.

式(2)に基づく Amap を以下のように表す．

$$\phi_{n+1} = f_{A1}(\phi_n) \tag{3}$$

.

(2) 三角波ベース信号に基づくアナログスパイクマップ
三角波のベース信号は次式で記述される．

$$b_2(\phi_n) = \begin{cases} -a\phi_n & \left(0 \le \phi_n < \frac{1}{4}\right) \\ a\left(\phi_n - \frac{1}{2}\right) & \left(\frac{1}{4} \le \phi_n < \frac{3}{4}\right) \\ -a(\phi_n - 1) & \left(\frac{3}{4} \le \phi_n < 1\right) \end{cases} \tag{4}$$

ただし，a は振幅パラメータである．分岐ニューロンの動作を図 1(2)に示す．また，式(4)に基づく Amap を以下のように表す．

$$\phi_{n+1} = f_{A2}(\phi_n) \tag{5}$$

ベース信号が三角波の Amap の例を図 2(1)に示す．

デジタルスパイクマップ(Dmap)は，点の集合で定義されるデジタル力学系である．定義域が有限の点からなるので，定常状態は必ず周期軌道となる．パラメータを変化させると，様々な周期スパイク列を呈する．また，複数の周期スパイク列が初期値に対して共存できる．Amap を N 個の点で離散化することで得られる以下の Dmap を考える:

$$\phi_{n+1} = g(f_A(\phi_n)) \equiv f_D(\phi_n) \tag{6}$$
$$g(\phi) = \frac{1}{N}\mathrm{INT}\left(N\phi + \frac{1}{2}\right) \tag{7}$$

ただし，$\phi_n \in \{0/N, \cdots, (N-1)/N\}$である．簡単のため以下では N=32 とする．

ここで，基本的な定義を与える．ある点 p が$p = f^l(p)$であり，$f(p)$から$f^l(p)$が全て異なるとき，p は周期 l の周期点という．ただし，f^lは f の l 回合成写像である．また，周期点の系列$\{p,\ f(p),\ \cdots, f^{l-1}(p)\ \}$を周期軌道という．

式(2)の正弦波ベース信号に基づく Dmap を以下のように表す．

$$\phi_{n+1} = f_{D1}(\phi_n) \tag{8}$$

式(4)の三角波ベース信号に基づく Dmap を以下のように表す．

$$\phi_{n+1} = f_{D2}(\phi_n) \tag{9}$$

三角波ベース信号の Dmap の例を図 2(2)に示す．

3．結合デジタルスパイクマップ

結合デジタルマップ(Coupled Digital Map, CDM)は，2 つの Dmap を結合することで得られる．これは，複雑な現象を呈する大域結合マップ(Globally Coupled Map, GCM)[13]の単純な場合のデジタル版と見なせる．CDM は次式で記述される．

$$\begin{cases} \phi_{n+1}(1) = g\left((1-\varepsilon)f_D(\phi_n(1)) + \varepsilon f_D(\phi_n(2))\right) \\ \phi_{n+1}(2) = g\left((1-\varepsilon)f_D(\phi_n(2)) + \varepsilon f_D(\phi_n(1))\right) \end{cases} \tag{10}$$

ただし，$0 < \varepsilon < 1$である．ここで，式(10)を，$\Phi_{n+1} = F(\Phi_n)$，$\Phi_n \equiv (\phi_n(1), \phi_n(2))$と略記する．$X = F^l(X)$であり，$F(X)$から$F^l(X)$が全て異なるとき，X を周期 l の周期点，$\{X, F(X), \cdots, F^{l-1}(X)\}$を周期軌道という．ただし，$F^l$は F の l 回合成写像である．CDM も Dmap と同様に，複数の周期軌道が初期値に対して共存できる．CDM の典型例を図 3 に示す．

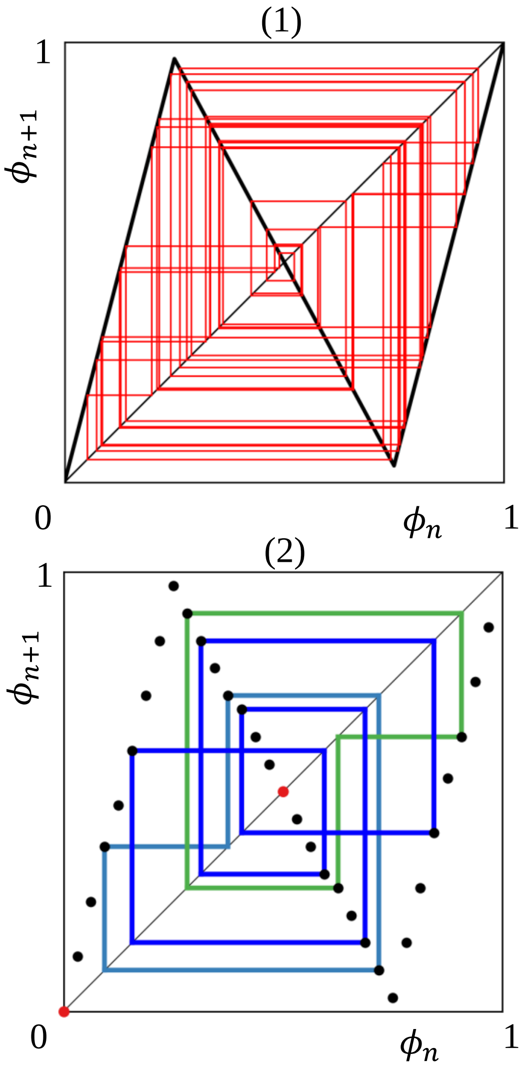


図 2 三角波ベース信号に基づく Amap と Dmap.
(1) Amap a=2.85. (2) Dmap a = 2.85, N=32.

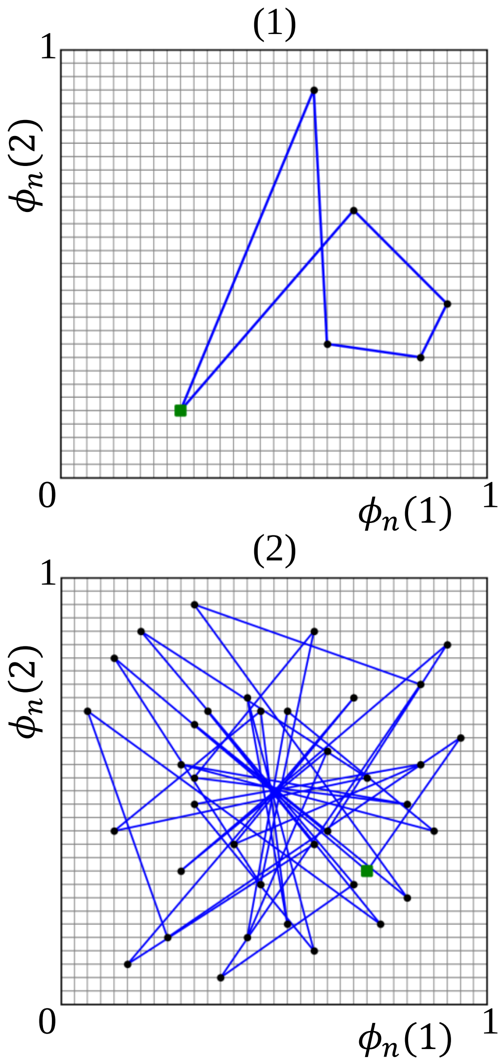


図 3 三角波ベース信号に基づく CDM の典型例.
(1) a=2.85, N=32, ε = 0.98. 6 周期.
(2) a=2.85, N=32, ε = 0.05, 38 周期.

4．特徴量と数値実験

複雑な CDM の周期軌道を解析するために 2 つの簡素な特徴量を導入する．初期値に依存して複数の周期軌道が存在する場合は，簡単のため最長周期軌道のみを対象とすることにする．

1 つ目の特徴量は最長周期軌道の複雑さを評価するものであり，次式で定義される．

$$P = \frac{\text{最長周期軌道の周期}}{N^2} \tag{11}$$

2 つ目の特徴量は最長周期軌道の安定性を評価するものであり，次式で定義される．

$$Q = \frac{\text{最長周期軌道に落ち込む初期値の数}}{N^2} \tag{12}$$

2 つの特徴量を用いて，特徴量平面を構成する．横軸が *P*，縦軸が Q である．振幅パラメータを固定し，結合強度 εを$0<\varepsilon<1$の範囲で変化させることで 1 つの特徴量平面が得られる．まず，正弦波ベース信号の Dmap(式(8))を結合して得られる CDM の特徴量平面の例を紹介する．図 4(1)は *P* が最大となる場合の特徴量平面(*k*=0.7)であり，このとき$(P,Q)=\left(\frac{45}{32^2},\frac{533}{32^2}\right)$である．図 4(2)は Q が最大となる場合の特徴量平面(*k*=0.71)であり，このとき$(P,Q)=\left(\frac{6}{32^2},\frac{944}{32^2}\right)$である．次に，三角波ベース信号の Dmap(式(9))を結合して得られる CDM の特徴量平面の例を紹介する．図 5(1)は *P* が最大となる場合の特徴量平面(*a*=2.75)であり，このとき$(P,Q)=\left(\frac{80}{32^2},\frac{354}{32^2}\right)$である．図 5(2)は Q が最大となる場合の特徴量平面(*a*=2.5)であり，このとき$(P,Q)=\left(\frac{6}{32^2},\frac{1016}{32^2}\right)$である．

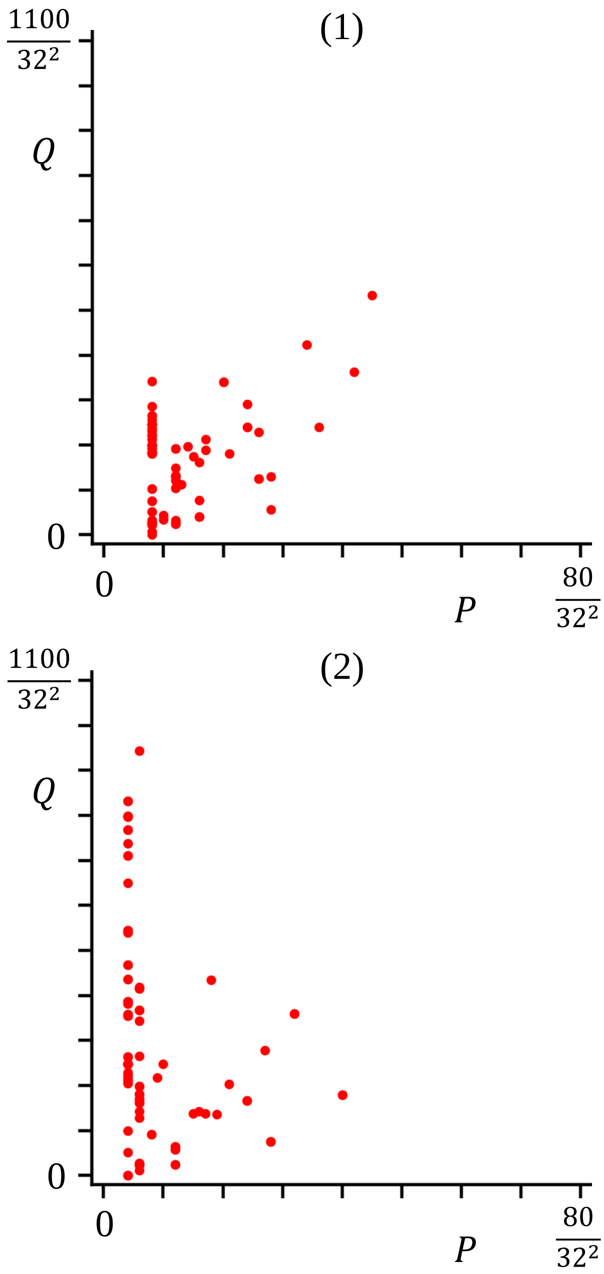
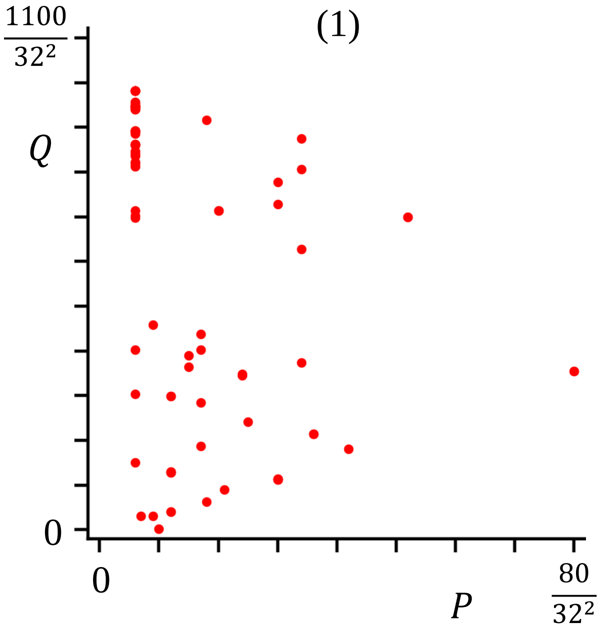


図 4 特徴量平面 (正弦波ベース信号)

(1) 正弦波ベース信号で P が最大となる特徴量平面, *k*=0.7.

(2) 正弦波ベース信号で Q が最大となる特徴量平面, *k*=0.71.



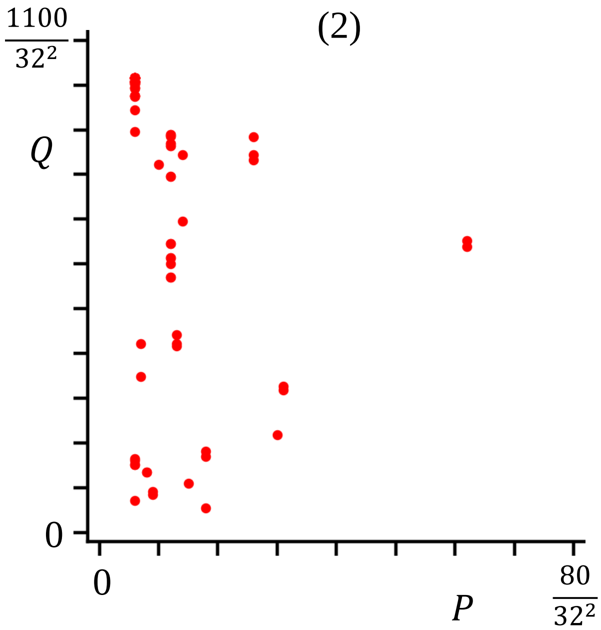


図 5 特徴量平面 (三角波ベース信号)
(1) 三角波ベース信号で P が最大となる特徴量平面, a=2.75.
(2) 三角波ベース信号で Q が最大となる特徴量平面, a=2.5.

5. むすび

Dmap の結合系である CDM を提案し，その基本動作を解析した．まず, CDM の基となる Amap と Dmap の定義を示し，それらの典型例を紹介した. CDM は Dmap の結合によって得られるという定義を示し，その典型例を紹介した．次に特徴量を用いた周期軌道の解析を行った. CDM の周期軌道は複雑であるため，最長周期軌道に着目した特徴量を 2 つ導入した. 1 つ目の特徴量は，最長周期軌道の複雑さを評価するものである. 2 つ目の特徴量は，最長周期軌道の安定性を評価するものである. 2 つの特徴量を用いて特徴量平面を構成し，数値実験を行った．正弦波ベース信号の CDM と三角波ベース信号の CDM を比較すると，三角波ベース信号の CDM の方がより複雑で，安定性の高い周期軌道を生成することがわかった.

今後の課題として，新たな特徴量を用いた周期軌道の解析, FPGA を用いたハードウェア実装，工学的応用が挙げられる.

本研究は著者が法政大学大学院理工学研究科電気電子工学専攻修士課程において非線形回路システム研究室にて行ったものである．指導教員の斎藤利通教授には同研究室で 3 年間研究活動を遂行するにあたり，大変御参考になる御指導･御鞭撻を沢山賜りました．ここに心から深く感謝致します.また，同研究室の皆様にはいろいろな有益なご討論･ご助言をいただきました．ここに感謝の意を表します.

参考文献

1) R. May, Simple mathematical models with very complicated dynamics, Nature, 261 (5560), pp. 459-467, 1976.
2) R. Perez and L. Glass, Bistability, period doubling bifurcations and chaos in a periodically forced oscillator, Phys. Lett., 90A, 9, pp. 441-443, 1982.
3) E. Ott, Chaos in dynamical systems, Cambridge, 1993.
4) L. O. Chua, A nonlinear dynamics perspective of Wolfram’s new kind of science, I, II. World Scientific, 2005.
5) H. Torikai, T. Saito, and W. Schwarz, Synchronization via multiplex pulse train, IEEE Trans. Circuits Syst. I, 46, 9, pp. 1072-1085, 1999.
6) A. Matoba, N. Horimoto, and T. Saito, Basic dynamics of the digital logistic map, IEICE Trans. Fundamentals, E96-A, 8, pp. 1808-1811, 2013.
7) H. Yamaoka and T. Saito, Steady-versus-transient plot for analysis of digital maps, IEICE Trans. Fundamentals, E99-A, 10, pp. 1806-1812, 2016.
8) Y. Sawano and T. Saito, SOM based learning of digital maps, Proc. of NOLTA, pp. 42-44, 2019.
9) N. Horimoto and T. Saito, Analysis of digital spike maps based on bifurcating neurons, NOLTA, IEICE, 3, 10, pp. 596-605, 2012.
10) H. Uchida, Y. Oishi and T. Saito, A simple digital spiking neural network: synchronization and spike-train approximation, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S., 14, 4, pp. 1479-1494, 2021.
11) S. Wolfram, A new kind of science, Wolfram Media, 2002.
12) T. Iguchi, A. Hirata and H. Torikai, Theoretical and heuristic synthesis of digital spiking neurons for spike-pattern-division multiplexing, IEICE Trans. Fundamentals, E93-A, 8, pp. 1486-1496, 2010.
13) 金子邦彦，津田一郎，朝倉書店，複雑系のカオス的シナリオ, 1996.