JOURNAL
de Théorie des Nombres
de BORDEAUX

anciennement Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux

Charlotte EUVRARD

Majoration explicite sur le nombre de coefficients suffisants pour déterminer une fonction L

Tome 29, n° 1 (2017), p. 51-83.

<http://jtnb.cedram.org/item?id=JTNB_2017__29_1_51_0>

Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **29** (2017), 51–83

Majoration explicite sur le nombre de coefficients suffisants pour déterminer une fonction L

par Charlotte EUVRARD

Résumé. Nous obtenons une borne explicite qui majore le nombre de coefficients suffisants pour déterminer une fonction L. Nous nous intéressons ensuite plus particulièrement aux fonctions L d'Artin.

Abstract. *Explicit bound to distinguish two L-functions.*
We obtain an explicit bound that gives a sufficient condition to distinguish two L-functions from their first coefficients. We will see the particular cases of Artin L-functions.

1. Introduction et notations

Le but de cet article est de donner une borne explicite sur le nombre de coefficients suffisants pour déterminer complètement une fonction L. Un théorème de Henryk Iwaniec et Emmanuel Kowalski [6], repris ici dans le théorème 1.4, donne une telle majoration sous certaines hypothèses, qui reste assez théorique. L'objectif de ce travail est de rendre explicite leur résultat.

Dans la première partie, nous rappelons les principales propriétés des fonctions L avant d'énoncer le théorème à démontrer. La partie 2 en donne la preuve en admettant, dans un premier temps, un résultat (le théorème 2.4) qui est central. Ensuite, dans la partie 3, nous adaptons la preuve du théorème aux fonctions L d'Artin et nous faisons quelques remarques appuyées par des expérimentations numériques.

Remerciements. Je tiens à remercier Christophe Delaunay et Christian Maire pour toutes les discussions et leurs conseils, ainsi que le rapporteur et Stéphane Louboutin dont les remarques, pertinentes et très utiles, ont permis d'améliorer significativement ce manuscrit. Je remercie également vivement Bill Allombert pour son aide précieuse qui m'a permis d'obtenir un programme PARI/GP pour les expérimentations.

Manuscrit reçu le 15 décembre 2014, révisé le 11 septembre 2015, accepté le 2 octobre 2015.
Mathematics Subject Classification. 11M06, 11M99.
Mots-clefs. Fonctions L, Fonctions L d'Artin, Formules explicites.

1.1. Invariants des fonctions *L*. Nous gardons la définition d'une fonction L ainsi que les notations du chapitre 5 de [6]. Cependant, pour faciliter la lecture, nous les rappelons brièvement.

Nous considérons qu'une fonction L est une fonction de la forme suivante

$$L(s,f)=\sum_{n\geq 1} a_f(n)n^{-s}$$

vérifiant les propriétés suivantes. Une fonction L complexe est absolument convergente pour $s\in\mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(s)>1$. Pour une fonction L, $L(s,f)$, de degré $d(f)$ (plus simplement noté d lorsque le contexte le permet), on désigne par $\alpha_i(p)$, $1\leq i\leq d$, ses paramètres locaux en un nombre premier p vérifiant $|\alpha_i(p)|<p$ pour tout p et

$$L(s,f)=\prod_p\prod_{i=1}^{d}(1-\alpha_i(p)p^{-s})^{-1} \quad \text{pour } \mathrm{Re}(s)>1.$$

La fonction L complétée est de la forme $\Lambda(s,f)=q(f)^{\frac{s}{2}}\gamma_f(s)L(s,f)$ où γ_f est le facteur gamma défini par

$$\gamma_f(s)=\pi^{-\frac{ds}{2}}\prod_{j=1}^{d}\Gamma\left(\frac{s+\kappa_j}{2}\right)$$

avec $\kappa_j\in\mathbb{C}$ et $q(f)\in\mathbb{N}^*$ est le conducteur. Celui-ci vérifie la propriété : lorsque p ne divise pas $q(f)$, $\alpha_i(p)\neq 0$ pour tout $1\leq i\leq d$. Les nombres κ_j sont appelés les paramètres locaux de $L(s,f)$ à l'infini. Nous supposerons que la partie réelle de chaque κ_j est strictement supérieure à -1 et que chacun de ces nombres est soit un réel soit un nombre complexe dont le conjugué est également un paramètre local de $L(s,f)$ à l'infini. La fonction $\Lambda(s,f)$ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec des pôles éventuels en $s=0$ et $s=1$ et vérifie l'équation fonctionnelle :

$$\Lambda(s,f)=\epsilon(f)\Lambda(1-s,\bar{f}), \tag{$\diamond$}$$

où $\epsilon(f)$ est un nombre complexe de module 1 et $\bar{f}$ est le dual de f pour lequel $a_{\bar{f}}(n)=\overline{a_f(n)}$, $\gamma_{\bar{f}}(s)=\gamma_f(s)$ et $q(\bar{f})=q(f)$.

On désigne par $r(f)$ (ou plus simplement r s'il n'y a pas de confusion possible) l'ordre du pôle de $\Lambda(s,f)$ en $s=1$. Par l'égalité ($\diamond$), il est égal à l'ordre du pôle de $\Lambda(s,f)$ en $s=0$. Puisque $\gamma_f(s)$ n'a ni zéro ni pôle pour $\mathrm{Re}(s)>0$, $r(f)$ est également l'ordre du pôle de $L(s,f)$ en $s=1$. De plus, on a $r(\bar{f})=r(f)$.

D'après l'équation fonctionnelle ($\diamond$), les zéros triviaux de $L(s,f)$ se situent aux entiers $-2n-\kappa_j\neq 0$ pour $n\in\mathbb{N}$. Les autres zéros de $L(s,f)$, appelés zéros non triviaux, sont situés dans la zone critique $0\leq\mathrm{Re}(s)\leq 1$, notons que ce sont des zéros de $\Lambda(s,f)$.

On définit le conducteur analytique par : $\mathfrak{q}(s,f) = q(f)\mathfrak{q}_\infty(s,f)$ où

$$\mathfrak{q}_\infty(s,f) = \prod_{j=1}^{d} (|s+\kappa_j| + 3)$$

et on notera simplement $\mathfrak{q}(f)$ à la place de $\mathfrak{q}(0,f)$.

On note Λ_f la fonction de Von Mangoldt associée à la fonction $L(s,f)$:

$$\Lambda_f(n) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{d} \alpha_i^k(p)\ln(p) & \text{si } n = p^k \\ \quad\quad 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

de telle sorte que

$$-\frac{L'}{L}(s,f) = \sum_{n\geq 1} \Lambda_f(n) n^{-s}.$$

Dans cet article, nous aurons parfois besoin de supposer vraie la conjecture de Riemann généralisée aux fonctions L que nous rappelons :

Conjecture 1.1 (Hypothèse de Riemann généralisée)**.** *Soit $L(s,f)$ une fonction L. Alors les zéros de $L(s,f)$ situés dans la bande critique* $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$ *sont sur la droite* $\mathrm{Re}(s) = 1/2$*.*

Intéressons-nous maintenant aux zéros ρ situés sur les bords de la bande critique. Puisque $\mathrm{Re}(-2n-\kappa_j) < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, aucune fonction L ne possède de zéros triviaux de partie réelle 1. D'autre part, les exemples de fonctions L étudiés ne possèdent pas de zéros non triviaux de partie réelle 1. Dans la suite, on supposera donc souvent qu'une fonction L n'a pas de zéro de partie réelle égale à 1. Notons qu'en supposant cette hypothèse vraie, les zéros de partie réelle égale à 0 d'une fonction L sont des zéros triviaux (sinon l'équation fonctionnelle donne $\Lambda(it,f) = 0 = \Lambda(1+it,f)$) et il y en a donc au plus d, le degré de la fonction L. En particulier, les zéros de la fonction complétée $\Lambda(s,f)$ se situent dans la bande $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$ et sont nécessairement des zéros de la fonction $L(s,f)$.

Dans un cas particulier, le théorème 35 de [1] démontre qu'une fonction L n'a effectivement pas de zéro de partie réelle 1.

Théorème 1.2 (Rankin (1939), Ogg (1969))**.** *Soit $L(s,f)$ une fonction L entière telle que $L(s,f\otimes\bar{f})$ existe et a un pôle simple en $s=1$. Alors la fonction L n'a pas de zéro de partie réelle égale à* 1*.*

Remarquons que si la fonction $L(s,f\otimes\bar{f})$ a un pôle d'ordre strictement supérieur à 1 en $s=1$, on peut souvent écrire la fonction $L(s,f)$ sous forme d'un produit de fonctions L et on pourra appliquer le théorème à chacune d'entre elles.

En ajoutant à l'hypothèse que nous faisons sur les zéros de partie réelle 1 l'hypothèse de Riemann généralisée, nous obtenons la conjecture suivante :

Conjecture 1.3. *À l'exception des éventuels zéros triviaux de partie réelle nulle, tous les zéros d'une fonction L situés dans la bande* $0 \leq \mathrm{Re}(s) \leq 1$ *sont situés sur la droite* $\mathrm{Re}(s) = 1/2$.

1.2. Convolution de Rankin–Selberg. La définition suivante de la convolution de Rankin–Selberg de deux fonctions L est celle donnée par H. Iwaniec et E. Kowalski dans [6] page 97.

Définition. Soit $L(s,f)$ et $L(s,g)$ deux fonctions L de degrés respectifs d et e dont les paramètres locaux à l'infini sont respectivement $(\kappa_i)_{1\leq i\leq d}$ et $(\nu_j)_{1\leq j\leq e}$ et les paramètres locaux $(\alpha_i(p))_{1\leq i\leq d}$ et $(\beta_j(p))_{1\leq j\leq e}$. On dit que f et g ont une convolution de Rankin–Selberg s'il existe une fonction L $L(s, f\otimes g)$ vérifiant :

- $L(s,f\otimes g)$ est une fonction L de degré de telle que :
$$L(s,f\otimes g) = \prod_{p\nmid q(f)q(g)} L_p(f\otimes g) \prod_{p\mid q(f)q(g)} H_p(p^{-s}),$$
où
$$L_p(f\otimes g) = \prod_{i,j}(1-\alpha_i(p)\beta_j(p)p^{-s})^{-1},$$
$$H_p(p^{-s}) = \prod_{j=1}^{de}(1-\gamma_j(p)p^{-s})^{-1},$$
avec $|\gamma_j(p)| < p$.
- Le facteur gamma de $L(s,f\otimes g)$ est donné par
$$\gamma_{f\otimes g}(s) = \pi^{-\frac{des}{2}} \prod_{i,j} \Gamma\left(\frac{s+\mu_{i,j}}{2}\right),$$
avec $\mathrm{Re}(\mu_{i,j}) \leq \mathrm{Re}(\kappa_i+\nu_j)$ et $|\mu_{i,j}| \leq |\kappa_i| + |\nu_j|$.
- Le conducteur $q(f\otimes g)$ divise $q(f)^e q(g)^d$.

De plus, on suppose que si $g = \bar{f}$, la fonction $L(s,f\otimes\bar{f})$ a un pôle en $s=1$. Et on supposera généralement que si $g \neq \bar{f}$, $L(s,f\otimes g)$ est entière. Par ailleurs, remarquons que si $L(s,f\otimes f)$ ou $L(s,f\otimes\bar{f})$ existe, alors les paramètres locaux vérifient : $|\alpha_i(p)| < \sqrt{p}$ pour $p \nmid q(f)$ et $\mathrm{Re}(\kappa_j) > -\frac{1}{2}$.

1.3. Théorème principal. Le but de ce papier est d'expliciter la constante C du théorème suivant dû à Henryk Iwaniec et Emmanuel Kowalski :

Théorème 1.4 (Iwaniec–Kowalski, [6, Proposition 5.22])**.** *Soit* $L(s,f)$ *et* $L(s,g)$ *deux fonctions L de même degré d. Supposons que* $L(s,f\otimes\bar{f})$ *et* $L(s,f\otimes\bar{g})$ *existent et que cette dernière soit entière. Supposons, de plus, que* *la conjecture 1.3 soit vraie pour ces deux fonctions L et que leurs paramètres locaux aux premiers divisant $q(f)q(g)$ soient de module inférieur à 1. Alors il existe un nombre premier $p \leq C\left(d \ln \mathfrak{q}(f)\, \mathfrak{q}(g)\right)^2$ vérifiant $p \nmid q(f)q(g)$ tel que les paramètres locaux de $L(s,f)$ et $L(s,g)$ en p sont différents, avec C une constante absolue.*

Comme nous l'avons expliqué dans l'introduction, nous avons rendu explicite la constante C :

Théorème 1.5. *Le théorème 1.4 est vérifié avec :*

$$C = 2,2 \times 10^9.$$

Cette constante a été obtenue grâce à la version plus précise donnée par le théorème 1.6 faisant apparaître l'ordre du pôle de $L(s, f \otimes \bar{f})$: quitte à majorer 1 par $r(f \otimes \bar{f})$, on peut négliger l'ordre du pôle et on a utilisé la fonction ϕ nulle en dehors de $]1,2[$ et définie par $\phi(x) = \exp\left((1-x)^{-1} + (x-2)^{-1}\right)$ sur $]1,2[$ pour laquelle on obtient :

$$\|\phi\|_\infty = \mathrm{e}^{-4}\ ;\ \|\phi\|_1 \geq 0,007\ ;\ C_{0,\phi} \leq 0,58\ ;\ C_{1,\phi} \leq 0,0048 \ \text{ et }\ C_{2,\phi} \leq 69,1.$$

Comme l'a fait remarquer le rapporteur, l'ordre du pôle n'apparaît pas dans la preuve donnée dans [6].

Théorème 1.6. *On se place dans les conditions du théorème 1.4. On note ϕ une fonction positive non nulle, $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $[1,2]$. Dans le théorème 1.4, on peut remplacer C par :*

$$C = \frac{51}{25\left(r(f\otimes\bar{f})\, \|\phi\|_1\right)^2}\Bigg(2C_{1,\phi} + 3C_{2,\phi} + \frac{13}{3} r(f\otimes\bar{f})\left(\pi \tanh\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2\right) + \frac{7}{2}\|\phi\|_\infty\, \omega'\big(q(f)q(g)\big)\Bigg)^2,$$

où

$$\omega'(n) = \begin{cases} \frac{\omega(n)}{\ln n} & \text{si } n \geq 2 \\ 0 & \text{si } n = 1, \end{cases}$$

avec $\omega(n)$, définie sur $\mathbb{N}^*$, désignant la fonction additive dénombrant le nombre total des facteurs premiers de n,

$$C_{0,\phi} = \int_1^2 |\phi''(x)| x^{\sigma+1}\, \mathrm{d}x$$

$$C_{1,\phi} = \int_1^2 \frac{\phi(x)}{x}\, \mathrm{d}x$$

$$C_{2,\phi} = C_{0,\phi}\left(\frac{46}{4\pi} + \frac{13}{5}\left(\frac{162}{25}\pi \tanh\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{261}{10}\right)\right).$$

Une étude classique de $\omega(n)$ (voir par exemple [11] page 380) permet d'obtenir une borne pour $n \geq 3$:

$$\omega'(n) \leq \frac{1,38402}{\ln(\ln n)}.$$

En fait, $\omega'(n) \leq \frac{3}{2}$ pour $n \geq 1$.

Le résultat suivant est l'application du théorème 1.6 aux formes modulaires primitives holomorphes sur $\Gamma_0(N)$. Dans ce cas, la fonction L associée est auto-duale, la convolution de Rankin–Selberg existe et $L(s\ , f \otimes\ h)$ possède un pôle simple en $s = 1$ si $h = \bar{f}$ et est entière sinon. De plus, l'hypothèse sur les paramètres locaux est vraie, d'après les travaux de M. Eichler, G. Shimura, Y. Ihara et P. Deligne, voir par exemple [8]. De même, l'hypothèse que la fonction L n'a pas de zéro de partie réelle égale à 1 est vérifiée donc la conjecture 1.3 peut-être remplacée par l'hypothèse de Riemann généralisée. La constante C reste la même que celle du théorème 1.4.

Corollaire 1.7. *Soit $L(s, f)$ et $L(s, g)$ deux fonctions L associées à des formes primitives holomorphes f et g de poids k_f et k_g, de niveau N_f et N_g sans facteurs carrés et premiers entre eux. Supposons que l'hypothèse de Riemann généralisée soit vraie pour les deux fonctions $L(s, f \otimes f)$ et $L(s, f \otimes g)$. Alors, pour $N = \max(N_f, N_g)$ et $k = \max(k_f, k_g)$, il existe un nombre premier p vérifiant*

$$p \nmid N_f N_g \quad et \quad p \leq 16\ C \ln^2\left(N\left(3 + \frac{k+1}{2}\right)^2\right),$$

tel que les paramètres locaux de $L(s, f)$ et $L(s, g)$ en p sont différents, avec C une constante absolue.

Grâce à la connaissance des paramètres locaux de la convolution de Rankin–Selberg, on peut procéder de la même manière que dans le cas des fonctions L d'Artin (détaillés dans la section suivante) pour obtenir le théorème suivant qui permet une légère amélioration de la constante, indépendamment de la divisibilité des conducteurs par le nombre premier. En l'appliquant à la fonction ϕ définie par $\phi(x) = \exp\left((1-x)^{-1} + (x-2)^{-1}\right)$ sur $]1, 2[$ et nulle ailleurs, on garde la majoration $C \leq 2,2 \times 10^9$.

Théorème 1.8. *Soit $L(s, f)$ et $L(s, g)$ deux fonctions L associées à des formes primitives holomorphes f et g de poids k_f et k_g, de niveau N_f et N_g sans facteurs carrés et premiers entre eux. Supposons que l'hypothèse de Riemann généralisée soit vraie pour les deux fonctions $L(s, f \otimes f)$ et $L(s, f \otimes g)$. Alors, pour $N = \max(N_f, N_g)$ et $k = \max(k_f, k_g)$, il existe un nombre premier*

$$p \leq 8C \ln^2\left(N\left(3 + \frac{k+1}{2}\right)^2\right),$$

tel que les paramètres locaux de $L(s,f)$ et $L(s,g)$ en p sont différents, avec

$$C = \frac{51}{25\,\|\phi\|_1^2}\left(2C_{1,\phi} + 3C_{2,\phi} + \frac{13}{3}\left(\pi\tanh\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2\right)\right)^2,$$

où

$$\begin{aligned} C_{0,\phi} &= \int_1^2 |\phi''(x)| x^{\sigma+1}\,\mathrm{d}x \\ C_{1,\phi} &= \int_1^2 \frac{\phi(x)}{x}\,\mathrm{d}x \\ C_{2,\phi} &= C_{0,\phi}\left(\frac{46}{4\pi} + \frac{13}{5}\left(\frac{162}{25}\pi\tanh\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{261}{10}\right)\right). \end{aligned}$$

Dans l'appendice de [2], Sam Chow et Alexandru Ghitza donnent des exemples de bornes : une forme nouvelle de poids 38 et de niveau 3 est déterminée par ses 2 premiers coefficients, ce qui est bien meilleur que la borne, de l'ordre de 10^{11}, obtenue ici. Cependant, la borne donnée par le corollaire 1.7 est en $\ln^2(Nk^2)$, ce qui est asymptotiquement meilleur que d'autres résultats inconditionnels déjà connus. Notamment, on sait que (voir, par exemple, [2]) pour f et g deux formes nouvelles sur $\Gamma_0(N)$, distinctes, de poids k et de niveau N, il existe

$$n \leq \frac{k}{12}[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma_0(N)] = \frac{Nk}{12}\prod_{p\mid N}\left(1 + \frac{1}{p}\right)$$

tel que $a_n(f) \neq a_n(g)$.

Remarque. On sait également qu'il existe des algorithmes polynomiaux permettant de calculer les coefficients de formes modulaires, notamment l'algorithme de Couveignes–Edixhoven–Schoof (voir [4]). Il serait intéressant de voir s'il est possible d'obtenir un résultat explicite, comme ici, avec leur travail.

2. Preuve du théorème 1.6

D'abord, nous commençons par prouver quelques propriétés des conducteurs pour des fonctions $L(s,f)$ et $L(s,g)$ de degrés respectifs d et e.

Proposition 2.1. *On a :*

(1) $\mathfrak{q}_\infty(s,f) \leq \mathfrak{q}(s,f)$, $\mathfrak{q}(f) \geq 3^d q(f)$ *et* $d \leq \ln\mathfrak{q}(f)$ *;*
(2) $\mathfrak{q}(s,f) \leq \mathfrak{q}(f)\,(|s|+3)^d$.

Démonstration. Le point *(1)* est direct. Pour le point *(2)*, on utilise $|s\kappa_j| \geq 0$ et on obtient la suite d'inégalités suivante :

$$\mathfrak{q}(f)\left(|s|+3\right)^d \geq \ q(f)\prod_{j=1}^{d} 3\left(|s|+|\kappa_j|+3\right) \geq \ \mathfrak{q}(s,f). \qquad \square$$

Proposition 2.2. *Pour des fonctions $L(s,f)$ et $L(s,g)$ possédant une convolution de Rankin–Selberg, on a :*

$$\mathfrak{q}(f\otimes g) \leq \mathfrak{q}(f)^e \mathfrak{q}(g)^d.$$

Démonstration. On utilise l'inégalité vérifiée par une convolution de Rankin–Selberg $q(f\otimes g) \leq q(f)^e q(g)^d$ ainsi que la définition du conducteur analytique et la majoration $|\mu_{i,j}| \leq |\kappa_i| + |\nu_j|$, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathfrak{q}(f\otimes g) &\leq q(f)^e q(g)^d \prod_{i=1}^{d}\prod_{j=1}^{e}(|\kappa_i|+3)(|\nu_j|+3)\\ &\leq q(f)^e q(g)^d \left(\prod_{i=1}^{d}(|\kappa_i|+3)\right)^e \left(\prod_{j=1}^{e}(|\nu_j|+3)\right)^d. \qquad \square\end{aligned}$$

Abordons maintenant la preuve du théorème 1.6. Dans la suite de cette partie, nous considérons deux fonctions L, $L(s,f)$ et $L(s,g)$, de même degré d telles que $L(s,f\otimes\bar{f})$ et $L(s,f\otimes\bar{g})$ existent. On note ϕ une fonction positive non nulle, $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $[1,2]$. On définit le réel $X \geq 1$ de façon à ce que les paramètres locaux de $L(s,f)$ et $L(s,g)$ coïncident pour tous les nombres premiers p inférieurs ou égaux à $2X$ tels que $p \nmid q(f)q(g)$. Nous cherchons donc à déterminer X.

Par hypothèse, on a $\Lambda_{f\otimes\bar{f}}(n) = \Lambda_{f\otimes\bar{g}}(n)$ pour tout entier $n \leq 2X$ tel que $(n, q(f)q(g)) = 1$ et $L(s,f\otimes\bar{f})$ est méromorphe avec un pôle d'ordre $r(f\otimes\bar{f}) \ \geq\ 1$ en $s=1$ et la fonction $L(s,f\otimes\bar{g})$ est entière.

2.1. Formule explicite. On adapte la formule explicite donnée dans le théorème 5.11 de [6] afin d'obtenir le résultat suivant :

Théorème 2.3 (Formule explicite)**.** *Soit ϕ une fonction positive non nulle, $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $[1,2]$ et $\hat{\phi}(s) = \int_1^2 \phi(x)x^{s-1}\,\mathrm{d}x$ sa transformée de Mellin. Soit $L(s,f)$ une fonction L. Alors on a :*

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq 2X}\Lambda_f(n)\phi\left(\frac{n}{X}\right) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\frac12-i\infty}^{\frac12+i\infty}\left(\frac{\gamma_f'}{\gamma_f}(s)+\frac{\gamma_f'}{\gamma_f}(1-s)\right)X^s\hat{\phi}(s)\,\mathrm{d}s\\ + \|\phi\|_1\, r(f)X - \sum_{\substack{\rho \text{ zéro de}\\ L(s,f)}} X^\rho\hat{\phi}(\rho)\,,\end{aligned}$$

où $\|\phi\|_1 = \int_1^2 \phi(x)\,\mathrm{d}x > 0$*,* $r(f)$ *correspond à l'ordre du pôle de* $L(s,f)$ *en* $s=1$ *et la somme porte sur les zéros, comptés avec multiplicité, de* $L(s,f)$ *dans la bande critique* $0 \le \mathrm{Re}(\rho) \le 1$.

On utilise cette formule explicite pour obtenir les majorations suivantes que nous démontrerons dans la partie 2.4.

Théorème 2.4. *En supposant que la conjecture 1.3 est vérifiée pour les fonctions* $L(s, f\otimes\bar{f})$ *et* $L(s, f\otimes\bar{g})$*, on a :*

$$\Big|\sum_n \Lambda_{f\otimes\bar{f}}(n)\phi\left(\frac{n}{X}\right) - r(f\otimes\bar{f})\,\|\phi\|_1\,X\Big|$$
$$\le d(f\otimes\bar{f})C_{1,\phi} + \sqrt{X}\ln\mathfrak{q}(f\otimes\bar{f})C_{2,\phi} + \frac{13}{3}r(f\otimes\bar{f})\left(\pi\tanh\left(\frac{\pi}{2}\right)+2\right)$$
$$\Big|\sum_n \Lambda_{f\otimes\bar{g}}(n)\phi\left(\frac{n}{X}\right)\Big| \le d(f\otimes\bar{g})C_{1,\phi} + \sqrt{X}\ln\mathfrak{q}(f\otimes\bar{g})C_{2,\phi},$$

où $C_{1,\phi}$ *et* $C_{2,\phi}$ *sont donnés au théorème 1.6.*

Ce sont $C_{1,\phi}$ et $C_{2,\phi}$ qui nous permettront finalement de démontrer le théorème 1.6, en notant que $d(f\otimes\bar{f}) = d(f\otimes\bar{g}) = d^2$.

Dans toute la suite, la lettre h sera utilisée pour remplacer f ou g lorsque le résultat est indépendant de la fonction considérée.

2.2. Conséquences du théorème 2.4. Dans cette partie, en admettant le théorème 2.4, démontré dans la partie 2.4, nous obtenons une majoration de $\sqrt{X}$ qui nous permettra de démontrer le théorème 1.6.

D'abord, nous simplifions l'énoncé du théorème 2.4 avec les notations :

$$\begin{aligned}
M &= r(f\otimes\bar{f})\,\|\phi\|_1\,X \\
E_1 &= d(f\otimes\bar{f})C_{1,\phi} + \sqrt{X}\ln\mathfrak{q}(f\otimes\bar{f})C_{2,\phi} + \frac{13}{3}r(f\otimes\bar{f})\left(\pi\tanh\left(\frac{\pi}{2}\right)+2\right) \\
E_2 &= d(f\otimes\bar{g})C_{1,\phi} + \sqrt{X}\ln\mathfrak{q}(f\otimes\bar{g})C_{2,\phi} \\
a(h) &= \sum_n \Lambda_{f\otimes\bar{h}}(n)\phi\left(\frac{n}{X}\right).
\end{aligned}$$

Nous avons donc : $|M - a(f)| \le E_1$ et $|a(g)| \le E_2$.

Pour majorer X, on cherche donc à majorer M. Grâce à l'inégalité triangulaire, on obtient :

$$0 \le M \le |M - a(f)| + |a(f) - a(g)| + |a(g)| \le E_1 + E_2 + |a(f) - a(g)|.$$

Il reste alors à majorer la différence $|a(f) - a(g)|$.

Proposition 2.5. *En supposant que les paramètres locaux de $L(s, f \otimes \bar{f})$ et $L(s, f \otimes \bar{g})$ aux premiers divisant $q(f)q(g)$ sont de module inférieur à 1, on a :*

$$\left|\sum_n \Lambda_{f\otimes\bar{f}}(n)\phi\left(\frac{n}{X}\right) - \sum_n \Lambda_{f\otimes\bar{g}}(n)\phi\left(\frac{n}{X}\right)\right| \\ \leq 2\left\|\phi\right\|_\infty d^2 \ln\left(q(f)q(g)\right) \times \ln(2X)\omega'(q(f)q(g)),$$

où $\omega'(n)$ est donné au théorème 1.6.

Démonstration. En effet, par définition de X, on a :

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_n \Lambda_{f\otimes\bar{f}}(n)\phi\left(\frac{n}{X}\right) - \sum_n \Lambda_{f\otimes\bar{g}}(n)\phi\left(\frac{n}{X}\right)\right| \\
&\qquad = \left|\sum_{\substack{n\leq 2X \\ (n,q(f)q(g))\neq 1}} \Lambda_{f\otimes\bar{f}}(n)\phi\left(\frac{n}{X}\right) - \sum_{\substack{n\leq 2X \\ (n,q(f)q(g))\neq 1}} \Lambda_{f\otimes\bar{g}}(n)\phi\left(\frac{n}{X}\right)\right| \\
&\qquad \leq \left\|\phi\right\|_\infty \sum_{\substack{n\leq 2X \\ (n,q(f)q(g))\neq 1}} \left(\left|\Lambda_{f\otimes\bar{f}}(n)\right| + \left|\Lambda_{f\otimes\bar{g}}(n)\right|\right).
\end{aligned}$$

Notons $(\gamma_j^h(p))_{j=1}^{d^2}$ les paramètres locaux de $L(s, f \otimes \bar{h})$ en p. Pour $n \leq 2X$ vérifiant $(n, q(f)q(g)) \neq 1$, on a :

$$\begin{aligned}
\left|\Lambda_{f\otimes\bar{h}}(n)\right| &\leq \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{d^2} |\gamma_j^h(p)|^k \ln(p) & \text{si } n = p^k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\
&\leq \begin{cases} d^2 \ln(p) & \text{si } n = p^k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{(d'après l'hypothèse sur les paramètres locaux en } p \mid q(f)q(g))
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{n\leq 2X \\ (n,q(f)q(g))\neq 1}} \left(\left|\Lambda_{f\otimes\bar{f}}(n)\right| + \left|\Lambda_{f\otimes\bar{g}}(n)\right|\right) &\leq 2d^2 \sum_{\substack{n\leq 2X \\ (n,q(f)q(g))\neq 1}} \Lambda(n) \\
&\leq 2d^2 \sum_{p\mid q(f)q(g)} \ln(p) \sum_{\substack{l\in\mathbb{N} \\ p^l\leq 2X}} 1 \\
&\leq 2d^2 \ln(2X)\omega\big(q(f)q(g)\big).
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\left|\sum_n \Lambda_{f\otimes\bar f}(n)\phi\left(\frac{n}{X}\right)-\sum_n \Lambda_{f\otimes\bar g}(n)\phi\left(\frac{n}{X}\right)\right|$$
$$\le 2\left\|\phi\right\|_\infty d^2\ln(2X)\times\ln\big(q(f)q(g)\big)\omega'\big(q(f)q(g)\big). \quad \square$$

On en déduit alors le résultat suivant :

Proposition 2.6. *Avec les notations précédentes et en supposant vraie la conjecture 1.3 pour les fonctions $L(s,f\otimes\bar f)$ et $L(s,f\otimes\bar g)$ et que les paramètres locaux de $L(s,f\otimes\bar f)$ et $L(s,f\otimes\bar g)$ aux premiers divisant $q(f)q(g)$ sont de module inférieur à* 1*, on a :*

$$\sqrt{X}\le\frac{1}{r(f\otimes\bar f)\left\|\phi\right\|_1}\Bigg(2d^2\Big(\frac{\ln(2X)}{\sqrt{X}}\ln\big(q(f)q(g)\big)\left\|\phi\right\|_\infty\omega'\big(q(f)q(g)\big)+C_{1,\phi}\Big)$$
$$+C_{2,\phi}\big(\ln\mathfrak{q}(f\otimes\bar f)+\ln\mathfrak{q}(f\otimes\bar g)\big)+\frac{13}{3}r(f\otimes\bar f)\Big(\pi\tanh\left(\frac{\pi}{2}\right)+2\Big)\Bigg),$$

où $C_{1,\phi}$ et $C_{2,\phi}$ sont définis au théorème 1.6.

2.3. Fin de la preuve du théorème 1.6. À l'aide du résultat précédent et des majorations $q(h)\le\mathfrak{q}(h)$, $\mathfrak{q}(f\otimes\bar f)\le\mathfrak{q}(f)^{2d}$, $\mathfrak{q}(f\otimes\bar g)\le(\mathfrak{q}(f)\mathfrak{q}(g))^d$ et $d\le\ln\big(\mathfrak{q}(f)\mathfrak{q}(g)\big)$, on obtient :

$$\sqrt{X}\le\frac{1}{r(f\otimes\bar f)\left\|\phi\right\|_1}d\ln\big(\mathfrak{q}(f)\mathfrak{q}(g)\big)\Bigg(3C_{2,\phi}+\frac{13}{3}r(f\otimes\bar f)\Big(\pi\tanh\left(\frac{\pi}{2}\right)+2\Big)$$
$$+2\Big(d\frac{\ln(2X)}{\sqrt{X}}\left\|\phi\right\|_\infty\omega'\big(q(f)q(g)\big)+C_{1,\phi}\Big)\Bigg).$$

Nous avons alors deux cas : si $\sqrt{X}\le d\ln(\mathfrak{q}(f)\mathfrak{q}(g))$, nous avons le résultat ; sinon $\sqrt{X}\ge d\ln(\mathfrak{q}(f)\mathfrak{q}(g))$, donc $X\ge d^2\ln^2(\mathfrak{q}(f)\mathfrak{q}(g))\ge 4$ (car $\mathfrak{q}(h)\ge 3$). Puisque la fonction $y\mapsto\frac{\ln(2y)}{\sqrt{y}}$ est décroissante pour $y\ge 4$ et $d\le\ln(\mathfrak{q}(f)\mathfrak{q}(g))$, on a :

$$\frac{\ln(2X)}{\sqrt{X}}\le\frac{\ln\big(2d^2\ln^2(\mathfrak{q}(f)\mathfrak{q}(g))\big)}{d\ln(\mathfrak{q}(f)\mathfrak{q}(g))}\le\frac{4\ln\big(2^{\frac14}\ln(\mathfrak{q}(f)\mathfrak{q}(g))\big)}{d\ln(\mathfrak{q}(f)\mathfrak{q}(g))}.$$

Ainsi,

$$\sqrt{X}\le\frac{d\ln(\mathfrak{q}(f)\mathfrak{q}(g))}{r(f\otimes\bar f)\left\|\phi\right\|_1}\Bigg(3C_{2,\phi}+2C_{1,\phi}+\frac{13}{3}r(f\otimes\bar f)\Big(\pi\tanh\left(\frac{\pi}{2}\right)+2\Big)$$
$$+\frac{\ln\big(2^{1/4}\ln(\mathfrak{q}(f)\mathfrak{q}(g))\big)}{\ln(\mathfrak{q}(f)\mathfrak{q}(g))}8\left\|\phi\right\|_\infty\omega'\big(q(f)q(g)\big)\Bigg).$$

Or, pour tout y, $\frac{\ln\left(2^{\frac{1}{4}}y\right)}{y} \leq \frac{2^{\frac{1}{4}}}{\mathrm{e}}$ donc

$$\sqrt{X} \leq \frac{d\ln(\mathfrak{q}(f)\mathfrak{q}(g))}{r(f\otimes\bar{f})\,\|\phi\|_1}\Bigg(3C_{2,\phi}+2C_{1,\phi}+\frac{13}{3}r(f\otimes\bar{f})\Big(\pi\tanh\left(\frac{\pi}{2}\right)+2\Big) + \frac{7}{2}\,\|\phi\|_\infty\,\omega'\big(q(f)q(g)\big)\Bigg).$$

2.4. Preuve du théorème 2.4. Nous cherchons à majorer chaque terme de la formule explicite du théorème 2.3 appliquée aux fonctions $L(s,f\otimes\bar{f})$ et $L(s,f\otimes\bar{g})$. Puisque $L(s,f\otimes\bar{g})$ n'a pas de pôle en $s=1$, autrement dit $r(f\otimes\bar{g})=0$, on obtient :

$$\sum_{n\leq 2X}\Lambda_{f\otimes\bar{f}}(n)\phi\left(\frac{n}{X}\right) = r(f\otimes\bar{f})\,\|\phi\|_1\,X - \sum_{\substack{\rho \text{ zéro de}\\ L(f\otimes\bar{f},s)}} X^\rho\hat{\phi}\,(\rho) + \frac{1}{2i\pi}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty}\left(\frac{\gamma'_{f\otimes\bar{f}}}{\gamma_{f\otimes\bar{f}}}\,(s)+\frac{\gamma'_{f\otimes\bar{f}}}{\gamma_{f\otimes\bar{f}}}\,(1-s)\right)X^s\hat{\phi}(s)\,\mathrm{d}s, \tag{2.1}$$

et

$$\sum_{n\leq 2X}\Lambda_{f\otimes\bar{g}}(n)\phi\left(\frac{n}{X}\right) = -\sum_{\substack{\rho \text{ zéro de}\\ L(f\otimes\bar{g},s)}} X^\rho\hat{\phi}\,(\rho) + \frac{1}{2i\pi}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty}\left(\frac{\gamma'_{f\otimes\bar{g}}}{\gamma_{f\otimes\bar{g}}}(s)+\frac{\gamma'_{f\otimes\bar{g}}}{\gamma_{f\otimes\bar{g}}}\,(1-s)\right)X^s\hat{\phi}(s)\,\mathrm{d}s, \tag{2.2}$$

où la somme porte sur les zéros ρ de $L(s,f\otimes\bar{h})$ tels que $0\leq\mathrm{Re}(\rho)\leq 1$.

Puisque les fonctions $L(s,f\otimes\bar{f})$ et $L(s,f\otimes\bar{g})$ sont des fonctions L (voir la définition de la section 1.2), nous allons énoncer les propriétés dans le cadre de fonctions L générales. Dans les paragraphes 2.4.1 à 2.4.4, notons que seules les propriétés induites par les fonctions L seront prises en comptes pour les invariants, notamment pour les paramètres κ_j. Ainsi, nous notons $L(s,f)$ une fonction L générique que nous spécifierons en $L(s,f\otimes\bar{f})$ et $L(s,f\otimes\bar{g})$ quand cela sera nécessaire pour notre étude.

2.4.1. ***Préliminaires.*** Les résultats suivants nous seront utiles dans les différentes majorations à considérer.

Lemme 2.7. *Pour* $s = \sigma + it \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$, *on a :*

$$\left|\hat{\phi}(s)\right| \leq \frac{C_{0,\phi}}{|s(s+1)|} \text{ avec } C_{0,\phi} := \int_1^2 |\phi''(x)|x^{\sigma+1}\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration. En effet, en exprimant $\hat{\phi}$ en fonction de ϕ'' grâce à une double intégration par parties, on a :

$$\hat{\phi}(s) = \frac{1}{s(s+1)}\int_1^2 \phi''(x)x^{s+1}\,\mathrm{d}x. \qquad \square$$

Soit $L(s, f)$ une fonction L quelconque vérifiant donc les propriétés énoncées dans la section 1.1. Le lemme suivant nous sert à contrôler $|(\Gamma'/\Gamma)(s)|$.

Lemme 2.8. *Pour* $s \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$, *on a :*

$$(\dagger)\quad \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = -\frac{1}{s} + \ln(1+s) - \frac{1}{2}\frac{1}{1+s} - \frac{1}{12}\frac{1}{(1+s)^2} + \int_1^{+\infty} B_2(\{t\})\frac{1}{(t+s)^3}\,\mathrm{d}t.$$

De plus, pour $s \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$ *tel que* $\mathrm{Re}(s) \geq -1$, *on obtient la majoration :*

$$\left|\frac{\Gamma'}{\Gamma}(s)\right| \leq \frac{\pi}{2} + \frac{1}{12}\frac{1}{(\mathrm{Re}(s)+1)^2} + \frac{1}{|s|} + \frac{1}{2}\frac{1}{|1+s|} + \frac{1}{12}\frac{1}{|1+s|^2} + \ln(|1+s|).$$

Démonstration. On utilise la formule donnée par H. Cohen dans la remarque page 81 de [3] pour obtenir $\ln(\Gamma(s))$ pour $s \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$. Puis on applique la formule d'Euler–Maclaurin à l'ordre 2 et en dérivant, on a :

$$\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = -\frac{1}{s} + \ln(1+s) - \frac{1}{2}\frac{1}{1+s} - \frac{1}{12}\frac{1}{(1+s)^2} + \int_1^{+\infty} B_2(\{t\})\frac{1}{(t+s)^3}\,\mathrm{d}t$$

d'où

$$\left|\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}\right| \leq \frac{1}{|s|} + \ln(|1+s|) + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{|1+s|} + \frac{1}{12}\frac{1}{|1+s|^2} + \frac{1}{6}\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(\mathrm{Re}(s)+t)^3},$$

puisque $|\ln(1+s)| = \left|\ln|1+s| + i\arcsin\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\right| \leq \ln(|1+s|) + \frac{\pi}{2}$ pour $1 + s = a + ib$ avec $a \geq 0$ et $|t+s|^3 \geq (\mathrm{Re}(s)+t)^3$. $\square$

Donnons une égalité concernant le facteur gamma d'une fonction L.

Lemme 2.9. *Soit*

$$\gamma_f(s) = \pi^{-\frac{ds}{2}} \prod_{j=1}^{d} \Gamma\left(\frac{s+\kappa_j}{2}\right)$$

le facteur gamma de la fonction $L(s,f)$. Posons $A_j(t) = \frac{\frac{1}{2}+it+\kappa_j}{2}$. Alors, pour $s = \frac{1}{2}+it$ de partie réelle $1/2$ on a

$$\frac{\gamma_f'}{\gamma_f}(s) + \frac{\gamma_f'}{\gamma_f}(1-s) = -d\ln\pi + \sum_{j=1}^{d} \mathrm{Re}\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}(A_j(t))\right).$$

Démonstration. Par dérivation logarithmique, on a

$$\frac{\gamma_f'}{\gamma_f}(s) = -\frac{d\ln\pi}{2} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s+\kappa_j}{2}\right) = -\frac{d\ln\pi}{2} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s+\overline{\kappa_j}}{2}\right),$$

la seconde égalité venant du fait que κ_j et son conjugué apparaissent avec la même multiplicité. Puisque $(\Gamma'/\Gamma)(\overline{s}) = \overline{(\Gamma'/\Gamma)(s)}$ et puisque pour $s = \frac{1}{2}+it$ de partie réelle $1/2$, on a $(1-s+\overline{\kappa_j})/2 = (\overline{s}+\overline{\kappa_j})/2 = \overline{(s+\kappa_j)/2}$, on obtient $(\gamma_f'/\gamma_f)(1-s) = \overline{(\gamma_f'/\gamma_f)(s)}$, d'où le résultat. □

2.4.2. *Majoration de l'intégrale des égalités (2.1) et (2.2).* Les résultats précédents nous permettent d'obtenir la majoration souhaitée :

Proposition 2.10. *Pour une fonction L quelconque, notée $L(s,f)$, de degré $d = d(f)$, vérifiant les propriétés énoncées dans la section 1.1, on a :*

$$\left|\frac{1}{2i\pi}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty}\left(\frac{\gamma_f'}{\gamma_f}(s) + \frac{\gamma_f'}{\gamma_f}(1-s)\right) X^s\hat{\phi}(s)\,\mathrm{d}s\right| \leq \frac{C_{0,\phi}}{4\pi}\left(39d + 7\ln\mathfrak{q}(f)\right)\sqrt{X},$$

où

$$C_{0,\phi} = \int_1^2 |\phi''(x)| x^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration. Nous devons borner en module

$$I = \frac{1}{2i\pi}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty}\left(\frac{\gamma_f'}{\gamma_f}(s) + \frac{\gamma_f'}{\gamma_f}(1-s)\right) X^s\hat{\phi}(s)\,\mathrm{d}s.$$

D'après le lemme 2.9, en gardant la notation $A_j(t) = \frac{\frac{1}{2}+it+\kappa_j}{2}$ et en utilisant la transformée inverse de Mellin, on obtient :

$$I = -d\ln\pi\phi\left(\frac{1}{X}\right) + \frac{\sqrt{X}}{2i\pi}\sum_{j=1}^{d}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{Re}\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}(A_j(t))\right) X^{it}\hat{\phi}\left(\frac{1}{2}+it\right)\,\mathrm{d}t$$

Enfin, puisque ϕ est à support compact dans $[1,2]$ (et $X \geq 2$) et d'après le lemme 2.7, on obtient :

$$|I| \leq \frac{C_{0,\phi}\sqrt{X}}{2\pi} \sum_{j=1}^{d} \int_{\mathbb{R}} \left|\mathrm{Re}\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}(A_j(t))\right)\right| \frac{\mathrm{d}t}{\left|\frac{1}{2}+it\right|\left|\frac{3}{2}+it\right|},$$

où $C_{0,\phi} = \int_1^2 |\phi''(x)| x^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x$.

Distinguons ensuite différents cas [1] :

- Pour les indices j tels que $\mathrm{Re}(\kappa_j) > -\frac{1}{2}$, $A_j(t) \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, on peut donc utiliser l'égalité (†) du lemme 2.8, on a alors :

$$\left|\mathrm{Re}\frac{\Gamma'}{\Gamma}(A_j(t))\right| \leq \frac{\mathrm{Re}\ A_j(t)}{|A_j(t)|^2} + \ln|1+A_j(t)| + \frac{1}{2|1+A_j(t)|} + \frac{1}{12|1+A_j(t)|^2} + \frac{1}{6}\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+\mathrm{Re}\ A_j(t))^3}.$$

  De plus, on a :

$$|1+A_j(t)| \geq \mathrm{Re}(1+A_j(t)) = \frac{5+2\mathrm{Re}\ \kappa_j}{4} \geq 1$$
$$\text{et} \quad \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+\mathrm{Re}\ A_j(t))^3} \leq \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3} = \frac{1}{2}$$

  donc :

$$\left|\mathrm{Re}\frac{\Gamma'}{\Gamma}(A_j(t))\right| \leq \frac{\mathrm{Re}\ A_j(t)}{|A_j(t)|^2} + \ln|1+A_j(t)| + \frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12}.$$

- Pour les indices j tels que $-1 < \mathrm{Re}(\kappa_j) \leq -\frac{1}{2}$, on utilise la formule $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ pour obtenir :

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}(z) = \frac{\Gamma'}{\Gamma}(1+z) - \frac{1}{z}.$$

  Ainsi, on peut majorer :

$$\left|\mathrm{Re}\frac{\Gamma'}{\Gamma}(A_j(t))\right| \leq \left|\mathrm{Re}\frac{\Gamma'}{\Gamma}(1+A_j(t))\right| + \frac{|\mathrm{Re} A_j(t)|}{|A_j(t)|^2}.$$

[1] Le problème est également traité de la sorte dans [10]. Remarquons que dans la classe de Selberg, la situation est plus simple puisque les parties réelles des paramètres locaux sont supposées positives, voir par exemple [7].

On peut alors appliquer l'égalité (†) du lemme 2.8 à $1 + A_j(t) \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$:

$$\left|\mathrm{Re}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(A_j(t)\right)\right| \leq \frac{\mathrm{Re}\ (1 + A_j(t))}{|1 + A_j(t)|^2} + \ln|2 + A_j(t)| + \frac{1}{2|2 + A_j(t)|} + \frac{1}{12|2 + A_j(t)|^2} + \frac{1}{6}\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x + 1 + \mathrm{Re}\ A_j(t))^3} + \frac{|\mathrm{Re}\ A_j(t)|}{|A_j(t)|^2}.$$

Puisque

$$\frac{\mathrm{Re}(1 + A_j(t))}{|1 + A_j(t)|^2} \leq \frac{1}{|1 + A_j(t)|},\ |2 + A_j(t)| \geq \frac{7}{4},\ |1 + A_j(t)| \geq \frac{3}{4}$$
$$\text{et} \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x + 1 + \mathrm{Re}\ A_j(t))^3} \leq \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x + \frac{3}{4})^3} = \frac{8}{49},$$

on a :

$$\left|\mathrm{Re}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(A_j(t)\right)\right| \leq \ln|2 + A_j(t)| + \frac{82}{49} + \frac{|\mathrm{Re}\ A_j(t)|}{|A_j(t)|^2}.$$

Ainsi, dans toutes les situations, nous pouvons majorer de la façon suivante :

$$\left|\mathrm{Re}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(A_j(t)\right)\right| \leq \ln|2 + A_j(t)| + \frac{82}{49} + \frac{|\mathrm{Re}\ A_j(t)|}{|A_j(t)|^2}.$$

Grâce à cette inégalité, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{d}\left|\mathrm{Re}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(A_j(t)\right)\right| &\leq d\frac{82}{49} + \ln\Big(\prod_{j=1}^{d}|2 + A_j(t)|\Big) + \sum_{j=1}^{d}\frac{|\mathrm{Re}\ A_j(t)|}{|A_j(t)|^2}\\ &\leq d\frac{82}{49} + \ln\Big(\prod_{j=1}^{d}(2 + |s + \kappa_j|)\Big) + \sum_{j=1}^{d}\frac{|\mathrm{Re}\ A_j(t)|}{|A_j(t)|^2}\\ &\leq d\frac{82}{49} + \ln\mathfrak{q}_\infty(s, f) + \sum_{j=1}^{d}\frac{|\mathrm{Re}\ A_j(t)|}{|A_j(t)|^2}.\end{aligned}$$

Notons que le cas $\mathrm{Re}(\kappa_j) = -\frac{1}{2}$ donne $\mathrm{Re}\ A_j(t) = 0$.

Ensuite, en utilisant la fonction arctangente, on obtient la majoration suivante :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \frac{|\mathrm{Re}\ A_j(t)|}{|A_j(t)|^2} \frac{\mathrm{d}t}{\left|\frac{1}{2}+it\right|\left|\frac{3}{2}+it\right|} &\leq \frac{4^2}{3}\int_{\mathbb{R}} \frac{|1+2\mathrm{Re}\ \kappa_j|}{(1+2\mathrm{Re}\ \kappa_j)^2+4(t+\mathrm{Im}\ \kappa_j)^2}\mathrm{d}t \\ &\leq \frac{16}{3}\frac{1}{|1+2\mathrm{Re}\ \kappa_j|}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+\left(\frac{2(t+\mathrm{Im}\ \kappa_j)}{|1+2\mathrm{Re}\ \kappa_j|}\right)^2}\mathrm{d}t \\ &\leq \frac{16}{3}\frac{\pi}{2} = \frac{8\pi}{3}.\end{aligned}$$

Finalement, en majorant $\mathfrak{q}_\infty(s,f)$ par $\mathfrak{q}(f)(|s|+3)^d$ (voir la proposition 2.1), on obtient :

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{2i\pi}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty}\left(\frac{\gamma_f'}{\gamma_f}(s)+\frac{\gamma_f'}{\gamma_f}(1-s)\right)X^s\hat{\phi}(s)\,\mathrm{d}s\right| \\ &\quad\leq \frac{C_{0,\phi}\sqrt{X}}{2\pi}\left(\frac{8\pi}{3}d+\int_{\mathbb{R}}\frac{d\left(\frac{82}{49}+\ln(\sqrt{\frac{1}{4}+t^2}+3)\right)+\ln\mathfrak{q}(f)}{\sqrt{\frac{1}{4}+t^2}\sqrt{\frac{9}{4}+t^2}}\ \mathrm{d}t\right) \\ &\quad\leq \frac{C_{0,\phi}\sqrt{X}}{2\pi}\left(\frac{39}{2}d+\frac{7}{2}\ln\mathfrak{q}(f)\right) \qquad \text{avec } C_{0,\phi}=\int_1^2|\phi''(x)|x^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x. \quad \square\end{aligned}$$

2.4.3. *Majoration de la somme $\sum \frac{1}{|\rho|^2}$ portant sur les zéros de $L(s,f)$.* Soit $L(s,f)$ une fonction L quelconque vérifiant les propriétés énoncées dans la section 1.1 et la conjecture 1.3. On cherche à majorer $\left|\sum_{\substack{\rho \text{ zéro de } L(s,f)\\ 0\leq \mathrm{Re}(\rho)\leq 1}} X^\rho\hat{\phi}(\rho)\right|$ apparaissant dans la formule explicite 2.3.

La conjecture 1.3 permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\left|\sum_{\substack{\rho \text{ zéro de } L(s,f)\\ 0\leq \mathrm{Re}(\rho)\leq 1}} X^\rho\hat{\phi}(\rho)\right| &\leq \left|\sum_{\substack{\rho \text{ zéro de } L(s,f)\\ 0< \mathrm{Re}(\rho)< 1}} X^\rho\hat{\phi}(\rho)\right| + \left|\sum_{\substack{\rho \text{ zéro de } L(s,f)\\ \mathrm{Re}(\rho)=0}} X^\rho\hat{\phi}(\rho)\right| \\ &\leq \left|\sum_{\substack{\rho \text{ zéro de } L(s,f)\\ 0< \mathrm{Re}(\rho)< 1}} X^\rho\hat{\phi}(\rho)\right| + \sum_{\substack{\rho \text{ zéro de } L(s,f)\\ \mathrm{Re}(\rho)=0}} |\hat{\phi}(\rho)| \\ &\leq \sqrt{X}\sum_{\substack{\rho \text{ zéro de } L(s,f)\\ 0< \mathrm{Re}(\rho)< 1}} |\hat{\phi}(\rho)| + \sum_{\substack{\rho \text{ zéro de } L(s,f)\\ \mathrm{Re}(\rho)=0}} |\hat{\phi}(\rho)|.\end{aligned}$$

Pour ρ de partie réelle nulle, puisque ϕ est une fonction positive à support compact dans $[1,2]$, on a :

$$|\hat{\phi}\,(\rho)\,| \leq \int_1^2 |x^{\rho-1}\phi(x)|\ \mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{\phi(x)}{x}\ \mathrm{d}x =: C_{1,\phi}.$$

D'après la conjecture 1.3, il existe au plus $d(f)$ zéros ρ vérifiant $\mathrm{Re}(\rho)=0$ donc

$$\sum_{\substack{\rho \text{ zéro de } L(s,f)\\ \mathrm{Re}(\rho)=0}} |\hat{\phi}\,(\rho)\,| \leq C_{1,\phi} d(f).$$

D'autre part, d'après l'hypothèse de Riemann généralisée et le lemme 2.7, on peut écrire :

$$\sum_{\substack{\rho \text{ zéro de } L(s,f)\\ 0<\mathrm{Re}(\rho)<1}} |\hat{\phi}\,(\rho)\,| = \sum_{\substack{\rho \text{ zéro de } L(s,f)\\ \mathrm{Re}(\rho)=\frac{1}{2}}} |\hat{\phi}\,(\rho)\,| \leq C_{0,\phi} \sum_{\substack{\rho \text{ zéro de } L(s,f)\\ \mathrm{Re}(\rho)=\frac{1}{2}}} \frac{1}{|\rho|^2},$$

ainsi,

$$\left| \sum_{\substack{\rho \text{ zéro de } L(s,f)\\ 0\leq\mathrm{Re}(\rho)\leq 1}} X^\rho \hat{\phi}\,(\rho) \right| \leq C_{0,\phi}\sqrt{X} \sum_{\substack{\rho \text{ zéro de } L(s,f)\\ \mathrm{Re}(\rho)=\frac{1}{2}}} \frac{1}{|\rho|^2} + C_{1,\phi} d(f),$$

avec $C_{0,\phi} = \int_1^2 |\phi''(x)| x^{\frac{3}{2}}\ \mathrm{d}x$ et $C_{1,\phi} = \int_1^2 \frac{\phi(x)}{x}\ \mathrm{d}x$.

Nous cherchons alors à majorer la somme

$$\sum_{\substack{\rho \text{ zéro de } L(s,f)\\ \mathrm{Re}(\rho)=\frac{1}{2}}} \frac{1}{|\rho|^2}.$$

Pour cela, nous avons besoin de résultats préliminaires.

On rappelle que si $L(s,f)$ est une fonction L alors $(s(1-s))^r\Lambda(s,f)$ est une fonction entière d'ordre 1 ne s'annulant ni en 0 ni en 1, il existe donc des constantes $a=a(f)$ et $b=b(f)$ telles que

$$(s(1-s))^r \Lambda(s,f) = \mathrm{e}^{a+bs} \prod_{\rho\neq 0,1} \left(1-\frac{s}{\rho}\right) \mathrm{e}^{\frac{s}{\rho}},$$

où ρ varie parmi les zéros de $\Lambda(s,f)$ différents de 0 et 1. D'où

$$(\star)\quad -\frac{L'}{L}(s,f) = \frac{1}{2}\ln q(f) + \frac{\gamma_f'}{\gamma_f}(s) - b + \frac{r(f)}{s} + \frac{r(f)}{s-1} - \sum_{\rho\neq 0,1}\left(\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{\rho}\right),$$

les deux expressions étant normalement convergentes dans les sous-ensembles compacts qui ne contiennent ni pôle ni zéro. La constante $b(f)$ vérifie

$$(\star\star)\qquad \mathrm{Re}(b(f)) = -\sum_{\rho\neq 0,1} \mathrm{Re}(\rho^{-1}),$$

où ρ varie parmi les zéros de $\Lambda(s,f)$ différents de 0 et 1.

Pour T et ℓ des réels positifs, on note $m_\ell(T,f)$ le nombre de zéros $\rho = \frac{1}{2} + it$, distincts de 0 et 1, de $\Lambda(s,f)$ pour une fonction L quelconque vérifiant les propriétés énoncées dans la section 1.1. La proposition suivante est une version explicite d'une propriété connue des fonctions L majorant ce réel, on pourra se référer par exemple à la proposition 5.7 de [6]. Dans la suite, nous aurons à considérer $\ell = \frac{1}{2}$.

Proposition 2.11. *Sous la conjecture 1.3 pour une fonction $L(s,f)$ quelconque, on a :*

$$m_{\frac{1}{2}}(T,f) \leq \frac{13}{5}\left(\frac{56}{25}d(f) + \frac{1}{2}\ln q(f) + \frac{1}{2}\ln \mathfrak{q}_\infty(3+iT,f) + \frac{5}{6}r(f)\right).$$

Démonstration. Nous adaptons donc la preuve de [6] afin de garder les termes plus précis. On pose $s = \sigma + iT$ avec $\sigma > 2$. On utilise l'égalité $(\star)$ en passant à la partie réelle, on obtient :

$$-\operatorname{Re}\frac{L'}{L}(s,f) = \frac{1}{2}\ln q(f) + \operatorname{Re}\frac{\gamma_f'}{\gamma_f}(s) - \operatorname{Re} b + r\operatorname{Re}\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1}\right) - \sum_{\rho\neq 0,1}\left(\operatorname{Re}\frac{1}{s-\rho} + \operatorname{Re}\frac{1}{\rho}\right),$$

avec ρ variant parmi les zéros de $\Lambda(s,f)$ différents de 0 et 1. On a donc

$$\sum_{\rho\neq 0,1}\operatorname{Re}\frac{1}{s-\rho} = \operatorname{Re}\frac{L'}{L}(s,f) + \frac{1}{2}\ln q(f) + \operatorname{Re}\frac{\gamma_f'}{\gamma_f}(s) + r\left(\frac{\sigma}{\sigma^2+T^2} + \frac{\sigma-1}{(\sigma-1)^2+T^2}\right) - \left(\operatorname{Re} b + \sum_{\rho\neq 0,1}\operatorname{Re}\frac{1}{\rho}\right).$$

Grâce à l'égalité $(\star\star)$ ci-dessus et puisque $T^2 \geq 0$, on en déduit :

$$\sum_{\rho\neq 0,1}\operatorname{Re}\frac{1}{s-\rho} \leq \left|-\frac{L'}{L}(s,f)\right| + \frac{1}{2}\ln q(f) + \left|\frac{\gamma_f'}{\gamma_f}(s)\right| + r\frac{2\sigma-1}{\sigma(\sigma-1)}.$$

D'abord, puisque $-\dfrac{L'}{L}(s,f) = \sum_{n\geq 1}\Lambda_f(n)n^{-s}$ et

$$\begin{aligned}
|\Lambda_f(n)| &\leq \begin{cases} \sum_{i=1}^{d}|\alpha_i^k(p)|\ln(p) & \text{si } n = p^k \\ 0 & \text{sinon}\end{cases} \\
&\leq \begin{cases} dp^k\ln(p) & \text{si } n = p^k \\ 0 & \text{sinon}\end{cases} \\
&\leq dn\Lambda(n),
\end{aligned}$$

on a :

$$\left|-\frac{L'}{L}(s,f)\right| \leq \sum_{n\geq 1}\frac{|\Lambda_f(n)|}{|n^s|} = \sum_{n\geq 1}\frac{|\Lambda_f(n)|}{n^\sigma}$$
$$\leq d\sum_{n\geq 1}\frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma-1}}.$$

Ensuite, puisque $\mathrm{Re}(s) > 2$ et $\mathrm{Re}(\kappa_j) > -1$, $\mathrm{Re}\left(\frac{s+\kappa_j}{2}\right) > 1/2$, on peut appliquer le lemme 2.8 :

$$\left|\frac{\gamma_f'}{\gamma_f}(s)\right| \leq \frac{d}{2}\ln\pi + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d}\left|\frac{\Gamma'\left(\frac{s+\kappa_j}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+\kappa_j}{2}\right)}\right|$$
$$\leq \frac{d}{2}\left(\ln\pi + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{12}\frac{4}{(\mathrm{Re}(s+\kappa_j)+2)^2}$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d}\left(\frac{2}{|s+\kappa_j|} + \frac{1}{|2+s+\kappa_j|} + \frac{1}{3|2+s+\kappa_j|^2} + \ln\left(\left|1+\frac{s+\kappa_j}{2}\right|\right)\right)$$
$$\leq \frac{d}{2}\left(\ln\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3(\sigma+1)^2} + \frac{2}{\sigma-1} + \frac{1}{\sigma+1} + \frac{1}{3(\sigma+1)^2}\right)$$
$$+\frac{1}{2}\ln\left(\prod_{j=1}^{d}|2+s+\kappa_j|\right)$$
$$\leq \frac{d}{2}\left(\ln\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\sigma-1} + \frac{1}{\sigma+1} + \frac{2}{3(\sigma+1)^2}\right) + \frac{1}{2}\ln\mathfrak{q}_\infty(s,f).$$

En supposant vraie la conjecture 1.3 pour $L(s,f)$, on peut écrire :

$$\sum_{\rho\neq 0,1}\mathrm{Re}\frac{1}{s-\rho} \geq \sum_{\substack{\rho=\frac{1}{2}+it\\ |t-T|\leq\ell}}\frac{\sigma-\frac{1}{2}}{\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)^2+\ell^2} = \frac{\sigma-\frac{1}{2}}{\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)^2+\ell^2}m_\ell(T,f).$$

Ainsi,

$$m_\ell(T,f) \leq \frac{\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)^2+\ell^2}{\sigma-\frac{1}{2}}\left(\frac{d}{2}\left(\ln\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\sigma-1} + \frac{1}{\sigma+1} + \frac{2}{3(\sigma+1)^2}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\ln\mathfrak{q}_\infty(\sigma+iT,f) + d\sum_{n\geq 1}\frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma-1}} + \frac{1}{2}\ln q(f) + r\frac{2\sigma-1}{\sigma(\sigma-1)}\right).$$

Grâce à une comparaison numérique, on s'aperçoit que $\sigma = 3$ est un bon candidat pour obtenir une majoration quasiment optimale de $m_{\frac{1}{2}}(T,f)$.

Dans ce cas,

$$m_{\frac{1}{2}}(T,f) \leq \frac{13}{5}\left(\frac{56}{25}d + \frac{1}{2}\ln q(f) + \frac{1}{2}\ln \mathfrak{q}_\infty(3+iT,f) + \frac{5}{6}r\right). \qquad \square$$

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème suivant :

Théorème 2.12. *En supposant vraie la conjecture 1.3 pour la fonction $L(s,f)$, on a :*

$$\sum_{\substack{\rho \text{ zéro de } L(s,f)\\ 0<\mathrm{Re}(\rho)<1}} \frac{1}{|\rho|^2} \leq C(d(f),\mathfrak{q}(f),q(f),r(f)),$$

où

$$C(d,\mathfrak{q},q,r) = \frac{13}{5}\Bigg(d\Big(\frac{112}{25}\pi\tanh\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{221}{10}\Big) \\ + \big(\ln\mathfrak{q} + \ln q + \frac{5}{3}r\big)\big(\pi\tanh\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2\big)\Bigg).$$

Remarque. En utilisant la majoration $d(f) \leq \ln\mathfrak{q}(f)$ des propriétés 2.1 et $\ln q(f) \leq \ln\mathfrak{q}(f)$, on peut majorer $C(d(f),\mathfrak{q}(f),q(f),r(f))$ par :

$$\frac{13}{5}\ln\mathfrak{q}(f)\Big(\frac{162}{25}\pi\tanh\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{261}{10}\Big) + \frac{13}{3}r(f)\Big(\pi\tanh\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2\Big).$$

Démonstration. Puisqu'on suppose la conjecture 1.3 vérifiée pour $L(s,f)$, un zéro ρ de $L(s,f)$ situé dans la bande $0 < \mathrm{Re}(\rho) < 1$ peut s'écrire sous la forme $\rho = 1/2 + it$. Le nombre de zéros triviaux est inférieur au degré $d(f)$ de la fonction $L(s,f)$ donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{\rho \text{ zéro de } L(s,f)\\ 0<\mathrm{Re}(\rho)<1}} \frac{1}{|\rho|^2} &\leq \sum_{\substack{\rho \text{ zéro de } \Lambda(s,f)\\ 0<\mathrm{Re}(\rho)<1}} \frac{1}{|\rho|^2} + \sum_{\substack{\rho \text{ zéro trivial de } L(s,f)\\ 0<\mathrm{Re}(\rho)<1}} \frac{1}{\frac{1}{4}+t^2}\\
&\leq \sum_{\substack{\rho \text{ zéro de } \Lambda(s,f)\\ 0<\mathrm{Re}(\rho)<1}} \frac{1}{|\rho|^2} + 4 \sum_{\substack{\rho \text{ zéro trivial de } L(s,f)\\ 0<\mathrm{Re}(\rho)<1}} 1\\
&\leq \sum_{\substack{\rho \text{ zéro de } \Lambda(s,f)\\ 0<\mathrm{Re}(\rho)<1}} \frac{1}{|\rho|^2} + 4\ d(f).
\end{aligned}$$

Par ailleurs, on obtient :

$$\sum_{\substack{\rho \text{ zéro de } \Lambda(s,f) \\ \rho=\frac{1}{2}+it}} \frac{1}{|\rho|^2} \leq \sum_{n=-\infty}^{-1} \sum_{\substack{\rho=\frac{1}{2}+it \\ |n-t|\leq\frac{1}{2}}} \frac{1}{\frac{1}{4}+t^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{\substack{\rho=\frac{1}{2}+it \\ |n-t|\leq\frac{1}{2}}} \frac{1}{\frac{1}{4}+t^2} + \sum_{\substack{\rho=\frac{1}{2}+it \\ |t|\leq\frac{1}{2}}} \frac{1}{\frac{1}{4}+t^2}$$

$$\leq \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{m_{\frac{1}{2}}(n,f)}{n^2+n+\frac{1}{2}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{m_{\frac{1}{2}}(n,f)}{n^2-n+\frac{1}{2}} + 4m_{\frac{1}{2}}(0,f).$$

En utilisant la proposition 2.11, on a :

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{\rho \text{ zéro de } \Lambda(s,f) \\ \rho=\frac{1}{2}+it}} \frac{1}{|\rho|^2} \\
&\leq \frac{13}{5}\left(\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{\frac{56}{25}d(f)+\frac{1}{2}\ln q(f)+\frac{1}{2}\ln \mathfrak{q}_\infty(3+in,f)+\frac{5}{6}r(f)}{n^2+n+\frac{1}{2}} \right. \\
&\quad + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\frac{56}{25}d(f)+\frac{1}{2}\ln q(f)+\frac{1}{2}\ln \mathfrak{q}_\infty(3+in,f)+\frac{5}{6}r(f)}{n^2-n+\frac{1}{2}} \\
&\quad \left. + 4\left(\frac{56}{25}d(f)+\frac{1}{2}\ln q(f)+\frac{1}{2}\ln \mathfrak{q}_\infty(3,f)+\frac{5}{6}r(f)\right)\right) \\
&\leq \frac{13}{5}\left(d(f)\left(\frac{112}{25}\pi\tanh\left(\frac{\pi}{2}\right)+\frac{224}{25}\right)+\ln q(f)\left(\pi\tanh\left(\frac{\pi}{2}\right)+2\right)\right. \\
&\quad + \frac{5}{3}r(f)\left(\pi\tanh\left(\frac{\pi}{2}\right)+2\right)+2\ln \mathfrak{q}_\infty(3,f) \\
&\quad \left. + \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{\ln \mathfrak{q}_\infty(3+in,f)}{n^2+n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln \mathfrak{q}_\infty(3+in,f)}{n^2-n+\frac{1}{2}}\right).
\end{aligned}$$

où on a utilisé l'égalité

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2-n+\frac{1}{2}} = \pi\tanh\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

adaptée de la formule (1) de la proposition 9.6.24 de [3].

On majore $\mathfrak{q}_\infty(3+in,f)$ et $\mathfrak{q}_\infty(3-in,f)$ par $\mathfrak{q}(f)(|3+in|+3)^{d(f)}$, ainsi

$$\ln \mathfrak{q}_\infty(3\pm in,f) \leq \ln \mathfrak{q}(f) + d(f)\ln(|3+in|+3).$$

D'où,

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{\rho \text{ zéro de } L(s,f)\\ 0<\mathrm{Re}(\rho)<1}} \frac{1}{|\rho|^2}\\
&\leq \frac{13}{5}\Bigg(d(f)\Bigg(\frac{112}{25}\pi\tanh\left(\frac{\pi}{2}\right)+\frac{224}{25}+4+2\ln 6+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln\left(|3+in|+3\right)}{n^2-n+\frac{1}{2}}\Bigg)\\
&\qquad +\ln\mathfrak{q}(f)\pi\tanh\left(\frac{\pi}{2}\right)+2\ln\mathfrak{q}(f)\\
&\qquad +\ln q(f)\left(\pi\tanh\left(\frac{\pi}{2}\right)+2\right)+\frac{5}{3}r(f)\left(\pi\tanh\left(\frac{\pi}{2}\right)+2\right)\Bigg)\\
&\leq \frac{13}{5}\Bigg(d(f)\left(\frac{112}{25}\pi\tanh\left(\frac{\pi}{2}\right)+\frac{221}{10}\right)\\
&\qquad +\left(\ln\mathfrak{q}(f)+\ln q(f)+\frac{5}{3}r(f)\right)\left(\pi\tanh\left(\frac{\pi}{2}\right)+2\right)\Bigg). \qquad \square
\end{aligned}$$

Remarque. En excluant les premiers zéros, par exemple les zéros de partie imaginaire dont la valeur absolue est inférieure à un réel ℓ, on obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{\rho \text{ zéro de } \Lambda(s,f)\\ |t|\geq\ell}} \frac{1}{|\rho|^2} &\leq 2\sum_{n=\ell}^{+\infty}\frac{m_{\frac{1}{2}}(n,f)}{n^2-n+\frac{1}{2}}\\
&\leq \sum_{n=\ell}^{+\infty}\frac{1}{n^2-n+\frac{1}{2}}\Bigg(\left(\frac{1456}{125}+\frac{13}{5}\ln\left(|3+in|+3\right)\right)d(f)\\
&\qquad +\frac{13}{5}\left(\ln\mathfrak{q}(f)+\ln q(f)\right)+\frac{13}{3}r(f)\Bigg).
\end{aligned}$$

Ceci peut nous permettre de faire des calculs explicites, voir par exemple le résultat numérique sur les zéros dans la partie traitant des fonctions L d'Artin.

Corollaire 2.13. *Avec le même paramètre que dans le théorème précédent, on a, sous la conjecture 1.3 pour $L(s,f)$:*

$$\left|\sum_{\substack{\rho \text{ zéro de } L(s,f)\\ 0\leq\mathrm{Re}(\rho)\leq1}} X^\rho\hat{\phi}(\rho)\right| \leq \sqrt{X}C_{0,\phi}C(d(f),\mathfrak{q}(f),q(f),r(f))+\ d(f)C_{1,\phi},$$

avec $C_{0,\phi}=\int_1^2|\phi''(x)|x^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x$ *et* $C_{1,\phi}=\int_1^2\frac{\phi(x)}{x}\,\mathrm{d}x$.

2.4.4. *Fin de la preuve du théorème 2.4.* En reportant dans les inégalités (2.1) et (2.2), les résultats de la proposition 2.10 et du corollaire 2.13 en prenant soin de remplacer $d(f)$ par $d(f \otimes \bar{f})$ ou $d(f \otimes \bar{g})$ (qui valent $d(f)^2$ puisque $d(f) = d(g)$), on obtient :

$$\begin{aligned}
&\Big|\sum_n \Lambda_{f\otimes\bar{f}}(n)\phi\left(\frac{n}{X}\right) - r(f\otimes\bar{f})\,\|\phi\|_1\,X\Big| \\
&\qquad \leq d(f\otimes\bar{f})C_{1,\phi} + \sqrt{X}C_{0,\phi}\Bigg(\frac{39d(f\otimes\bar{f}) + 7\ln\mathfrak{q}(f\otimes\bar{f})}{4\pi} \\
&\qquad\qquad + C(d(f\otimes\bar{f}),\mathfrak{q}(f\otimes\bar{f}),q(f\otimes\bar{f}),r(f\otimes\bar{f}))\Bigg)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Big|\sum_n \Lambda_{f\otimes\bar{g}}(n)\phi\left(\frac{n}{X}\right)\Big| \\
&\qquad \leq d(f\otimes\bar{g})C_{1,\phi} + \sqrt{X}C_{0,\phi}\Bigg(\frac{39d(f\otimes\bar{g}) + 7\ln\mathfrak{q}(f\otimes\bar{g})}{4\pi} \\
&\qquad\qquad + C(d(f\otimes\bar{g}),\mathfrak{q}(f\otimes\bar{g}),q(f\otimes\bar{g}),0)\Bigg),
\end{aligned}$$

où

$$C_{0,\phi} = \int_1^2 |\phi''(x)|x^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x \quad ; \quad C_{1,\phi} = \int_1^2 \frac{\phi(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

et

$$\begin{aligned}
C(d,\mathfrak{q},q,r) = \frac{13}{5}\Bigg(&d\left(\frac{112}{25}\pi\tanh\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{221}{10}\right) \\
&+ \left(\ln\mathfrak{q} + \ln q + \frac{5}{3}r\right)\left(\pi\tanh\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2\right)\Bigg).
\end{aligned}$$

En utilisant la majoration $d(f) \leq \ln\mathfrak{q}(f)$ et la remarque suivant le théorème 2.12, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\Big|\sum_n \Lambda_{f\otimes\bar{f}}(n)\phi\left(\frac{n}{X}\right) - r(f\otimes\bar{f})\,\|\phi\|_1\,X\Big| \\
&\quad \leq d(f\otimes\bar{f})C_{1,\phi} + \sqrt{X}\ln\mathfrak{q}(f\otimes\bar{f})C_{2,\phi} + \frac{13}{3}r(f\otimes\bar{f})\left(\pi\tanh\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2\right)
\end{aligned}$$

$$\Big|\sum_n \Lambda_{f\otimes\bar{g}}(n)\phi\left(\frac{n}{X}\right)\Big| \leq d(f\otimes\bar{g})C_{1,\phi} + \sqrt{X}\ln\mathfrak{q}(f\otimes\bar{g})C_{2,\phi},$$

avec

$$C_{2,\phi} := C_{0,\phi}\left(\frac{46}{4\pi} + \frac{13}{5}\left(\frac{162}{25}\pi\tanh\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{261}{10}\right)\right).$$

3. Cas particulier des fonctions L d'Artin

Dans ce cas, on se place sur une extension galoisienne L/K de corps de nombres. Nous devrons donc ajuster les preuves, notamment en remplaçant les nombres premiers par des idéaux premiers ou encore le degré d des représentations par le degré $d[K:\mathbb{Q}]$ des fonctions L d'Artin sur $\mathbb{Q}$. Nous aurons parfois également besoin de supposer vraie la conjecture suivante :

Conjecture 3.1 (Conjecture d'Artin). *Pour un caractère χ irréductible et non trivial, la fonction L d'Artin $L(s,\chi,L/K)$ se prolonge en une fonction entière.*

Sous cette hypothèse, la conjecture 1.3 est équivalente à l'hypothèse de Riemann généralisée. Le théorème 1.6 devient alors :

Théorème 3.2. *Soit L/K une extension galoisienne de groupe de Galois G. Soient χ_1 et χ_2 deux caractères irréductibles de G de même degré d de représentation respective (ρ_1, V_1) et (ρ_2, V_2). On suppose vraies la conjecture d'Artin et l'hypothèse de Riemann généralisée pour les deux fonctions L d'Artin $L(s,\chi_1 \otimes \bar{\chi}_i)$, $i = 1$ ou 2. Alors il existe un idéal premier $\mathfrak{p}$ de K, de norme inférieure ou égale à $C\left(d \ln \mathfrak{q}(\chi_1)\, \mathfrak{q}(\chi_2)\right)^2$, tel que les paramètres locaux de $L(s,\chi_1)$ et $L(s,\chi_2)$ en $\mathfrak{p}$ sont différents, avec*

$$C = \frac{51}{25\,\|\phi\|_1^2}\left(185 C_{0,\phi} + 2 C_{1,\phi}\right)^2,$$

où ϕ est une fonction positive non nulle, $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $[1,2]$,

$$C_{0,\phi} \;=\; \int_1^2 |\phi''(x)| x^{\sigma+1}\,\mathrm{d}x \ \textit{ et } C_{1,\phi} = \int_1^2 \frac{\phi(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Corollaire 3.3. *Le théorème précédent est vrai pour $C = 4{,}8 \times 10^8$.*

Démonstration. On effectue les calculs de la constante C avec la fonction ϕ définie par $\phi(x) = \exp\left((1-x)^{-1} + (x-2)^{-1}\right)$ sur $]1,2[$ et nulle ailleurs permettant d'obtenir les majorations : $C_{0,\phi} \le 0{,}58$ et $C_{1,\phi} \le 0{,}0048$. □

Avant de prouver le théorème 3.2, rappelons la définition d'une fonction L d'Artin ainsi que ses principales propriétés.

3.1. Définitions. Soit L/K une extension galoisienne de groupe de Galois G, (ρ, V) une représentation de G de caractère χ. Pour $\mathfrak{p}$ un idéal premier de K, on note $D_\mathfrak{p}$ le groupe de décomposition et $I_\mathfrak{p}$ le groupe d'inertie d'un idéal premier de $\mathcal{O}_L$ au-dessus de $\mathfrak{p}$. Soit $\varphi_\mathfrak{p}$ l'automorphisme de Frobenius, générateur du quotient $D_\mathfrak{p}/I_\mathfrak{p}$. On note $V^{I_\mathfrak{p}}$ le sous-espace vectoriel de V stable par $I_\mathfrak{p}$: $V^{I_\mathfrak{p}} = \{v \in V \,:\, \forall i \in I_\mathfrak{p},\, \rho(i)(v) = v\}$. L'action de $\rho_{|D_\mathfrak{p}}$ sur $V^{I_\mathfrak{p}}$ se factorise à travers le quotient $D_\mathfrak{p}/I_\mathfrak{p}$, nous notons $(\tilde{\rho}, V^{I_\mathfrak{p}})$ la représentation de $D_\mathfrak{p}/I_\mathfrak{p}$ associée. Pour tout $s \in \mathbb{C}$, on peut montrer que

$\det(\mathrm{Id} - \mathrm{N}(\mathfrak{p})^{-s}\varphi_{\mathfrak{p}}; V^{I_{\mathfrak{p}}})$ ne dépend ni du choix d'un idéal premier de $\mathcal{O}_L$ au-dessus de $\mathfrak{p}$ ni de la représentation choisie isomorphe à (ρ, V).

La fonction L d'Artin est alors définie par :

$$L(s, \chi, L/K) = \prod_{\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_K} \frac{1}{\det(\mathrm{Id} - \mathrm{N}(\mathfrak{p})^{-s}\varphi_{\mathfrak{p}}; V^{I_{\mathfrak{p}}})}, \qquad \mathrm{Re}(s) > 1,$$

où le produit porte sur les idéaux premiers non nuls de K.

Lorsqu'il n'y pas de confusion possible, nous noterons simplement $L(s, \chi)$.

Proposition 3.4. *Soit $L(s, \chi, L/K)$ une fonction L d'Artin, soit d le degré de la représentation (ρ, V) et d' celui de $(\widetilde{\rho}, V^{I_{\mathfrak{p}}})$. Notons $\alpha_{i,\rho}(\mathfrak{p})$, $1 \leq i \leq d$, les valeurs propres de $\widetilde{\rho}(\varphi_{\mathfrak{p}})$ avec la convention $\alpha_{i,\rho}(\mathfrak{p}) = 0$ si $d' < i \leq d$. Alors :*

$$L(s, \chi, L/K) = \prod_{\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_K} \prod_{i=1}^{d} \left(1 - \alpha_{i,\rho}(\mathfrak{p})\mathrm{N}(\mathfrak{p})^{-s}\right)^{-1} = \sum_{n \geq 1} a_{\chi}(n) n^{-s},$$

le produit portant sur les idéaux premiers non nuls de K. En particulier,

$$|\alpha_{i,\rho}(\mathfrak{p})| = 1 \quad \textit{pour tout} \quad 1 \leq i \leq d'.$$

Démonstration. Le dernier point provient du fait que les valeurs propres sont des racines de l'unité. □

Notons que le degré sur K de la fonction L d'Artin $L(s, \chi, L/K)$ correspond au degré de la représentation ρ, noté $\deg(\rho)$, tandis que son degré sur $\mathbb{Q}$ est $\deg(\rho)[K : \mathbb{Q}]$.

On définit la fonction Λ_{χ} associée à une fonction L d'Artin de la façon suivante :

Proposition 3.5. *Avec les notations précédentes, on a pour* $\mathrm{Re}(s) > 1$ *:*

$$-\frac{L'}{L}(s, \chi) = \sum_{n \geq 1} \Lambda_{\chi}(n) n^{-s},$$

avec

$$\Lambda_{\chi}(n) = \sum_{\substack{\mathfrak{p}, k \\ n = \mathrm{N}(\mathfrak{p})^k}} \sum_{i=1}^{d} \alpha_{i,\rho}^{k}(\mathfrak{p}) \ln \mathrm{N}(\mathfrak{p}).$$

3.2. Équation fonctionnelle. Nous rappelons simplement la forme du conducteur d'Artin et des facteurs gamma correspondant aux places infinies de K pour une fonction L d'Artin. Ce sont ces éléments qui complètent la fonction L et permettent d'obtenir une équation fonctionnelle. On pourra se référer au chapitre 10 de [9] pour plus de détails ou à la partie dédiée aux exemples numériques dans le cas d'extensions $K/\mathbb{Q}$.

Le conducteur d'Artin associé au caractère χ est un idéal $f(\chi)$ de K pouvant s'écrire sous la forme suivante :

$$f(\chi) = \prod_{\mathfrak{p} \nmid \infty} \mathfrak{p}^{f_{\mathfrak{p}}(\chi)},$$

où le produit porte sur les idéaux premiers non nuls de K et $f_{\mathfrak{p}}(\chi)$ est un entier naturel dépendant des groupes de ramification d'un idéal premier de L au-dessus de l'idéal $\mathfrak{p}$. Le facteur gamma peut s'exprimer sous la forme :

$$\gamma_\chi(s) = \pi^{-\frac{sd[K:\mathbb{Q}]}{2}} \prod_{j=1}^{d[K:\mathbb{Q}]} \Gamma\left(\frac{s+\kappa_j}{2}\right),$$

avec $\kappa_j \in \{0,1\}$.

Théorème 3.6 (Equation fonctionnelle)**.** *Soit $\Lambda(s,\chi)$ la fonction L complétée définie par $\Lambda(s,\chi) = q(\chi)^{\frac{s}{2}}\gamma_\chi(s)L(s,\chi,L/K)$ pour $\mathrm{Re}(s) > 1$, où $q(\chi) = |\mathrm{disc}(K)|^d \mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(f(\chi))$ est le conducteur de $\Lambda(s,\chi)$. Alors $\Lambda(s,\chi)$ admet un prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec des pôles éventuels en $s = 0$ et $s = 1$ et vérifie l'équation fonctionnelle*

$$\Lambda(1-s,\chi) = W(\chi)\Lambda\left(s,\bar{\chi}\right),$$

où $\bar{\chi}$ est le conjugué complexe du caractère χ et $W(\chi)$ est un nombre complexe de module 1.

3.3. Convolution de Rankin–Selberg. Pour deux fonctions L d'Artin $L(s,\chi_1)$ et $L(s,\chi_2)$, où les représentations (ρ_1, V_1) et (ρ_2, V_2) associées sont irréductibles, la convolution de Rankin–Selberg correspond à la fonction L d'Artin $L(s,\chi_{V_1\otimes V_2}) = L(s,\chi_1\chi_2)$.

Plus précisément, si

$$L(s,\chi_1) = \prod_{\mathfrak{p}\subset\mathcal{O}_K} \prod_{i=1}^{d} \left(1-\alpha_{i,\rho_1}(\mathfrak{p})\mathrm{N}(\mathfrak{p})^{-s}\right)^{-1}$$

$$L(s,\chi_2) = \prod_{\mathfrak{p}\subset\mathcal{O}_K} \prod_{j=1}^{e} \left(1-\beta_{j,\rho_2}(\mathfrak{p})\mathrm{N}(\mathfrak{p})^{-s}\right)^{-1}$$

alors $L(s,\chi_{V_1\otimes V_2}) = \prod_{\mathfrak{p}\subset\mathcal{O}_K} \prod_{i=1}^{d}\prod_{j=1}^{e} \left(1-\alpha_{i,\rho_1}(\mathfrak{p})\beta_{j,\rho_2}(\mathfrak{p})\mathrm{N}(\mathfrak{p})^{-s}\right)^{-1}$, les produits portant sur les idéaux premiers non nuls de K. Sous la conjecture d'Artin, pour des représentations irréductibles, la convolution de Rankin–Selberg possède un pôle simple en $s = 1$ si et seulement si V_2 est isomorphe à V_1^* si et seulement si $\chi_2 = \overline{\chi_1}$. Le facteur gamma s'écrit :

$$\gamma_{\chi_{V_1\otimes V_2}}(s) = \pi^{-\frac{de[K:\mathbb{Q}]s}{2}} \prod_{i=1}^{de[K:\mathbb{Q}]} \Gamma\left(\frac{s+\kappa_i}{2}\right),$$

avec $\kappa_i \in \{0,1\}$.

Propriétés 3.7. *On peut vérifier que dans le cas de fonctions L d'Artin :*

$$q(\chi_{V_1\otimes V_2}) \mid q(\chi_1)^e q(\chi_2)^d$$
$$\mathfrak{q}(s,\chi_{V_1\otimes V_2}) \leq \mathfrak{q}(s,\chi_1)^e \mathfrak{q}(s,\chi_2)^d.$$

Démonstration. Le second point découle du premier.

Donnons quelques idées de la preuve de la première propriété : puisque $\deg(\chi_{V_1\otimes V_2}) = \deg(\chi_1)\deg(\chi_2)$, on sait que :

$$q(\chi_{V_1\otimes V_2}) = |\mathrm{disc}(K)|^{de}\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(f(\chi_{V_1\otimes V_2})).$$

Par ailleurs, en utilisant la définition des conducteurs d'Artin, on peut montrer que $\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(f(\chi_{V_1\otimes V_2}))$ divise $\mathrm{N}^d_{K/\mathbb{Q}}(f(\chi_1))\mathrm{N}^e_{K/\mathbb{Q}}(f(\chi_2))$. □

3.4. Preuve du théorème 3.2. Dans le cas des fonctions L d'Artin, on remplace le degré d par $d[K:\mathbb{Q}]$ et d^2 par $d^2[K:\mathbb{Q}]$ dans les résultats de la partie 2. De la même façon, on suppose que les paramètres locaux de $L(s,\chi_1)$ et $L(s,\chi_2)$ coïncident pour tous les idéaux premiers $\mathfrak{p}$ de K de norme p^f inférieure ou égale à $2X$ tel que $p \nmid q(\chi_1)q(\chi_2)$. On cherche à majorer X. De plus, grâce aux informations supplémentaires connues ($\kappa_i \in \{0,1\}$ ou encore la convolution de Rankin–Selberg), on a des résultats plus précis.

Proposition 3.8. *On a :*

$$\left|\frac{1}{2i\pi}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty}\left(\frac{\gamma'_\chi}{\gamma_\chi}(s)+\frac{\gamma'_\chi}{\gamma_\chi}(1-s)\right)X^s\hat{\phi}(s)\,\mathrm{d}s\right| \leq \frac{57C_{0,\phi}}{20}\chi(1)[K:\mathbb{Q}]\sqrt{X},$$

où $C_{0,\phi} = \int_1^2 |\phi''(x)|x^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x$.

La proposition suivante remplace la proposition 2.11 du cadre général. Nous avons pu utiliser le fait que les paramètres locaux aux premiers d'une fonction L d'Artin sont toujours de module inférieur à 1.

Proposition 3.9. *Soit $m_\ell(T,\chi)$ le nombre de zéros $\rho = \frac{1}{2}+it$ de $\Lambda(s,\chi)$ tels que $|t-T| \leq \ell$. Si l'hypothèse de Riemann est vraie pour la fonction L d'Artin $L(s,\chi)$, on a :*

$$m_{\frac{1}{2}}(T,\chi) \leq \frac{5}{3}\left(\frac{14}{5}d[K:\mathbb{Q}]+\frac{1}{2}\ln q(\chi)+\frac{d[K:\mathbb{Q}]}{2}\ln\sqrt{25+T^2}+\frac{3}{2}r(\chi)\right).$$

Théorème 3.10. *En supposant vraie l'hypothèse de Riemann généralisée pour une fonction L d'Artin $L(s,\chi)$, on majore la somme sur les zéros non triviaux de $L(s,\chi)$ par :*

$$\sum_{\rho=\frac{1}{2}+it}\frac{1}{|\rho|^2} \leq 60\chi(1)[K:\mathbb{Q}]+\frac{17}{2}\ln q(\chi)+25r(\chi).$$

Comme dans le cas général, nous pouvons obtenir un résultat en excluant les petits zéros, par exemple, pour $\ell = 10$, nous pouvons apprécier la précision gagnée :

$$\sum_{\substack{\rho=\frac{1}{2}+it \\ |t|\geq 10}} \frac{1}{|\rho|^2} \leq \frac{41}{25} d^2[K:\mathbb{Q}] + \frac{19}{100}\ln q(\chi) + \frac{14}{25} r(\chi).$$

Finalement, nous obtenons une version plus précise du théorème 2.4 pour des fonctions L d'Artin :

Théorème 3.11. *Si les conjectures de Riemann et d'Artin sont vérifiées pour les fonctions $L(s,\chi_1\otimes\chi_i)$ ($i = 1$ ou 2), on a :*

$$\left|\sum_{n\leq 2X} \Lambda_{\chi_1\otimes\overline{\chi_1}}(n)\phi\left(\frac{n}{X}\right) - \|\phi\|_1 X\right|$$
$$\leq C_{1,\phi} d^2[K:\mathbb{Q}] + C_{0,\phi}\sqrt{X}\left(\frac{1257}{20} d^2[K:\mathbb{Q}] + \frac{17}{2}\ln q(\chi_1\otimes\overline{\chi_1}) + 25\right)$$
$$\left|\sum_{n\leq 2X} \Lambda_{\chi_1\otimes\overline{\chi_2}}(n)\phi\left(\frac{n}{X}\right)\right|$$
$$\leq C_{1,\phi} d^2[K:\mathbb{Q}] + C_{0,\phi}\sqrt{X}\left(\frac{1257}{20} d^2[K:\mathbb{Q}] + \frac{17}{2}\ln q(\chi_1\otimes\overline{\chi_2})\right),$$

où $C_{0,\phi} = \int_1^2 |\phi''(x)| x^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x$ *et* $C_{1,\phi} = \int_1^2 \frac{\phi(x)}{x}\,\mathrm{d}x$.

Démonstration. On reprend la preuve de la proposition 2.10 en utilisant cette fois l'inégalité de la proposition 3.8 :

$$\left|\frac{1}{2i\pi}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty}\left(\frac{\gamma'_{\chi_1\otimes\bar{\chi}_i}}{\gamma_{\chi_1\otimes\bar{\chi}_i}}(s) + \frac{\gamma'_{\chi_1\otimes\bar{\chi}_i i}}{\gamma_{\chi\otimes\bar{\chi}_i}}(1-s)\right) X^s\hat{\phi}(s)\,\mathrm{d}s\right|$$
$$\leq \frac{57 C_{0,\phi}}{20} d^2[K:\mathbb{Q}]\sqrt{X}.$$

On sait qu'une fonction L d'Artin ne possède pas de zéro de partie réelle 1, elle peut donc avoir au plus $d[K:\mathbb{Q}]$ zéros de partie réelle nulle, correspondant aux éventuels pôles du facteur gamma (ce serait en fait des réels nuls). Ainsi, on obtient :

$$\left|\sum_{\substack{\rho \text{ zéro de } L(s,\chi) \\ 0\leq \mathrm{Re}(\rho)\leq 1}} X^\rho\hat{\phi}(\rho)\right| \leq \left|\sum_{\substack{\rho \text{ zéro de } L(s,\chi) \\ 0< \mathrm{Re}(\rho)< 1}} X^\rho\hat{\phi}(\rho)\right| + \left|\sum_{\substack{\rho \text{ zéro de } L(s,\chi) \\ \mathrm{Re}(\rho)=0}} X^\rho\hat{\phi}(\rho)\right|$$
$$\leq C_{0,\phi}\sqrt{X}\sum_{\substack{\rho \text{ zéro de } L(s,\chi) \\ \mathrm{Re}(\rho)=\frac{1}{2}}} \frac{1}{|\rho|^2} + C_{1,\phi}\chi(1)[K:\mathbb{Q}].$$

Puisque les caractères χ_1 et χ_2 sont irréductibles, sous la conjecture d'Artin, $r(\chi_1 \otimes \overline{\chi_1}) = 1$ et $r(\chi_1 \otimes \overline{\chi_2}) = 0$. Le théorème 3.10 donne donc :

$$\sum_{\substack{\rho \text{ zéro de} \\ \Lambda(\chi_1 \otimes \overline{\chi_1}, s)}} \frac{1}{|\rho|^2} \leq 60 d^2 [K:\mathbb{Q}] + \frac{17}{2} \ln q(\chi_1 \otimes \bar{\chi_1}) + 25$$

$$\text{et} \quad \sum_{\substack{\rho \text{ zéro de} \\ \Lambda(\chi_1 \otimes \overline{\chi_2}, s)}} \frac{1}{|\rho|^2} \leq 60 d^2 [K:\mathbb{Q}] + \frac{17}{2} \ln q(\chi_1 \otimes \bar{\chi_2}).$$

D'après (2.1) et (2.2), on a alors :

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{n \leq 2X} \Lambda_{\chi_1 \otimes \overline{\chi_1}}(n) \phi\left(\frac{n}{X}\right) - \|\phi\|_1 X \right| \\
&\quad \leq \frac{57 C_{0,\phi}}{20} \sqrt{X} d^2 [K:\mathbb{Q}] + C_{1,\phi} d^2 [K:\mathbb{Q}] \\
&\qquad + C_{0,\phi} \sqrt{X} \left(60 d^2 [K:\mathbb{Q}] + \frac{17}{2} \ln q(\chi_1 \otimes \bar{\chi_1}) + 25 \right) \\
&\quad \leq C_{1,\phi} d^2 [K:\mathbb{Q}] + C_{0,\phi} \sqrt{X} \left(\frac{1257}{20} d^2 [K:\mathbb{Q}] + \frac{17}{2} \ln q(\chi_1 \otimes \overline{\chi_1}) + 25 \right) \\
&\left| \sum_{n \leq 2X} \Lambda_{\chi_1 \otimes \overline{\chi_2}}(n) \phi\left(\frac{n}{X}\right) \right| \\
&\quad \leq \frac{57 C_{0,\phi}}{20} \sqrt{X} d^2 [K:\mathbb{Q}] + C_{1,\phi} d^2 [K:\mathbb{Q}] \\
&\qquad + C_{0,\phi} \sqrt{X} \left(60 d^2 [K:\mathbb{Q}] + \frac{17}{2} \ln q(\chi_1 \otimes \bar{\chi_2}) \right) \\
&\quad \leq C_{1,\phi} d^2 [K:\mathbb{Q}] + C_{0,\phi} \sqrt{X} \left(\frac{1257}{20} d^2 [K:\mathbb{Q}] + \frac{17}{2} \ln q(\chi_1 \otimes \overline{\chi_2}) \right). \qquad \square
\end{aligned}$$

En utilisant le théorème 3.11 et les propriétés suivantes des conducteurs : $d^2[K : \mathbb{Q}] \leq \ln \mathfrak{q}(\chi_1 \otimes \bar{\chi}_2)$ et $q(\chi_1 \otimes \overline{\chi_i}) \leq (q(\chi_1)q(\chi_i))^d$, on obtient finalement :

$$\|\phi\|_1 X \leq 2 C_{1,\phi} d^2 [K:\mathbb{Q}] + 185 C_{0,\phi} \sqrt{X} d \ln(\mathfrak{q}(\chi_1)\mathfrak{q}(\chi_2)).$$

D'où

$$\sqrt{X} \leq \frac{d \ln(\mathfrak{q}(\chi_1)\mathfrak{q}(\chi_2))}{\|\phi\|_1} (185 C_{0,\phi} + 2 C_{1,\phi}).$$

3.5. Cas particulier où $K = \mathbb{Q}$. Dans le cas général, pour deux caractères χ et χ', l'égalité entre les coefficients $a_\chi(p)$ et $a_{\chi'}(p)$ des séries de Dirichlet des fonctions L d'Artin $L(s, \chi, L/K)$ et $L(s, \chi', L/K)$ n'impliquent pas l'égalité des paramètres locaux en p. D'ailleurs, lorsque $K = \mathbb{Q}$, nous donnerons des contre-exemples grâce aux exemples numériques qui suivent.

Dans ce cas, nous avons, néanmoins, le résultat suivant qui permet de relier les paramètres locaux aux coefficients de la série de Dirichlet d'une fonction L d'Artin.

Proposition 3.12. *Dans le cas où $K = \mathbb{Q}$, si les paramètres locaux en p de χ sont différents de ceux de χ', il existe au moins un entier $j \in [\![1, d]\!]$ tel que $a_\chi(p^j) \neq a_{\chi'}(p^j)$.*

Démonstration. Pour p un nombre premier, $a_\chi(p^j) = h_j(\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ lorsque $K = \mathbb{Q}$, où h_j est le polynôme symétrique complètement homogène de degré j. □

Exemples numériques. Nous utilisons le logiciel PARI/GP ([13]) pour créer un programme donnant les coefficients de la série de Dirichlet ou les paramètres locaux d'une fonction L d'Artin. Nous avons d'abord besoin d'exprimer les représentations. Pour cela, nous faisons appel à GAP ([12]) qui donne sous forme de matrice l'image des représentations irréductibles pour les différents éléments du groupe de Galois.

Ensuite, dans le cas de premiers ramifiés, on peut soit utiliser la restriction de la matrice $\rho(\varphi_p)$ à V^{I_p} soit utiliser la définition de $\widetilde{\rho}$. Dans les deux cas, on doit cependant calculer V^{I_p} afin de vérifier s'il est réduit à $\{0\}$ ou non. Nous devons également trouver l'automorphisme de Frobenius φ_p (il est donné dans le cas de premiers non ramifiés). Pour cela, on revient à sa définition : pour tout $x \in \mathcal{O}_L$, $\varphi_p(x) \equiv x^p \pmod{\mathfrak{p}}$, où $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de K au-dessus de p. On cherche l'égalité pour tous les éléments de la base de l'anneau $\mathcal{O}_L$.

Afin de compléter la fonction L d'Artin, nous utilisons le programme de Dokchitser (voir [5]), nous devons donc donner le conducteur ainsi que les facteurs gamma.

Le conducteur est :

$$q(\chi) = \prod_p p^{f_p(\chi)}, \text{ avec } f_p(\chi) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{|G_i|}{|G_0|} \operatorname{codim} V^{G_i},$$

où pour $i \geq 0$, $G_i = \{\sigma \in G \,|\, \forall x \in \mathcal{O}_L,\, v_L(\sigma(x) - x) \geq i + 1\}$ est le i-ème groupe de ramification d'un idéal premier de K au-dessus de p, G_0 étant le groupe d'inertie.

Le facteur gamma est :

$$\gamma_\chi(s) = \pi^{-\frac{sd}{2}} \left(\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\right)^{\dim V^+} \left(\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\right)^{\dim V^-}.$$

Il faut donc trouver les dimensions des espaces vectoriels V^- et V^+ définis de la façon suivante : à chaque place w de L au-dessus de la place réelle infinie, correspond un groupe de décomposition $G(w) = \{g \in G \mid \rho(g)(w) = w\}$ d'ordre 1 ou 2. On décompose V en somme directe $V = V_v^+ \oplus V_v^-$ et

$\dim V_v^+ = \frac{1}{2}\left(d + \chi(\sigma_w)\right)$ donc $\dim V_v^- = \frac{1}{2}\left(d - \chi(\sigma_w)\right)$, où σ_w est le générateur de $G(w)$. Dans la pratique, on cherche la conjugaison complexe.

Grâce à ces programmes, on peut calculer les invariants de fonctions L d'Artin et obtenir les exemples suivants illustrant la proposition 3.12.

Les coefficients $a_\chi(p)$ peuvent être égaux même si les paramètres locaux sont différents. Par exemple, pour $K = \mathbb{Q}$, si L est le corps de nombres défini par le polynôme irréductible $P = x^{12} - 24x^{10} + 120x^8 - 206x^6 + 120x^4 - 24x^2 + 1$, et χ_1, χ_2 les caractères irréductibles de degré 2 du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$, les coefficients $a_{\chi_1}(2) = a_{\chi_2}(2) = 0$ mais les paramètres locaux en 2 sont différents : $\alpha_{1,\chi_1}(2) = \alpha_{2,\chi_1}(2) = 0$ et $\alpha_{1,\chi_2}(2) = -1$ ($\alpha_{2,\chi_2}(2) = 1$). Dans ce cas, d'après la propriété 3.12, les coefficients $a_{\chi_1}(2^2)$ et $a_{\chi_2}(2^2)$ sont forcément différents. Dans cet exemple, $a_{\chi_1}(4) = 1$ tandis que $a_{\chi_2}(4) = 0$.

Deux représentations χ_1 et χ_2 de degré 2 du polynôme $P = x^{32} + 40x^{28} + 204x^{24} + 728x^{20} + 1190x^{16} + 728x^{12} + 204x^8 + 40x^4 + 1$ ont des paramètres locaux en 3 différents : $\{-1, 1\} \neq \{-i, i\}$. Mais les premiers coefficients distincts sont $a_{\chi_1}(3^2) = -1 \neq 1 = a_{\chi_2}(3^2)$.

Les représentations χ_1 et χ_2 de degré 3 d'un polynôme P de degré 27 ont des paramètres locaux en 2 différents mais les premiers coefficients qui diffèrent sont $a_{\chi_1}(2^3)$ et $a_{\chi_2}(2^3)$.

Par ailleurs, on peut également obtenir des exemples de calculs du type $\displaystyle\sum_{\substack{\rho=\frac{1}{2}+it,\ |t|\leq L\\ \text{zéro de } L(s,\chi)}} \frac{1}{|\rho|^2}$. Par exemple, toujours en utilisant le logiciel PARI/GP, pour le corps défini par le polynôme $P = x^8 - 4x^7 - 8x^6 + 24x^5 + 30x^4 - 16x^3 - 20x^2 + 2$ et un caractère χ réel de degré 1, on a :

$$\sum_{\substack{\rho=\frac{1}{2}+it\\ \text{zéro de } L(s,\chi)}} \frac{1}{|\rho|^2} = \sum_{\substack{\rho=\frac{1}{2}+it\\ \text{zéro de } L(s,\chi)\\ |t|\leq 50}} \frac{1}{|\rho|^2} + \sum_{\substack{\rho=\frac{1}{2}+it\\ \text{zéro de } L(s,\chi)\\ 50<|t|}} \frac{1}{|\rho|^2} \leq 0,54 + 0,48 \leq 1,02.$$

En utilisant le théorème 3.10, on obtient

$$\sum_{\substack{\rho=\frac{1}{2}+it\\ \text{zéro de } L(s,\chi)}} \frac{1}{|\rho|^2} \leq 89,$$

c'est donc loin d'être une majoration optimale. La différence entre le résultat théorique et le calcul exact vient principalement des zéros de petite partie imaginaire. Par exemple, en enlevant les zéros de partie imaginaire plus petite que 2,5 (on peut vérifier qu'il n'y en a pas), on obtient :

$$\sum_{\substack{\rho=\frac{1}{2}+it \\ |t|\geq 2{,}5}} \frac{1}{|\rho|^2} \leq 9.$$

Bibliographie

[1] A. Akbary, « Lectures on classical analytic theory of L-functions », Institute for Research in Fundamental Sciences, Iran (2006), `http://www.cs.uleth.ca/~akbary/publications.html`.

[2] S. Chow & A. Ghitza, « Distinguishing newforms », `http://arxiv.org/abs/1404.4508`.

[3] H. Cohen, *Number theory Volume II : Analytic and modern tools*, Springer, New York, 2007.

[4] J.-M. Couveignes & B. Edixhoven, *Computational aspects of modular forms and Galois representations*, Princeton University Press, Princeton, 2011.

[5] T. Dokchitser, « ComputeL - Computing special values of L-functions », `http://www.maths.bris.ac.uk/~matyd/computel/`.

[6] I. Iwaniec & E. Kowalski, *Analytic Number Theory*, American Mathematical Society, Providence, 2004.

[7] J. Kaczorowski & A. Perelli, « On the structure of the Selberg class, I : $0 \leq d \leq 1$ », *Acta Math.* **182** (1999), n° 2, p. 207-241.

[8] E. Kowalski, P. Michel & J. VanderKam, « Rankin-Selberg L-functions in the level aspect », *Duke Mathematical Journal* **114** (2002), n° 1, p. 123-191.

[9] J. Neukirch, *Algebraic number theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[10] A. Odžak & L. Smajlović, « On asymptotic behavior of generalized Li coefficients in the Selberg class », *Journal of Number Theory* **131** (2011), n° 3, p. 519-535.

[11] G. Robin, « Estimation de la fonction de Tchebychef θ sur le k-ième nombre premier et grandes valeurs de la fonction $\omega(n)$ nombre de diviseurs premiers de n », *Acta Arithmetica* **42** (1983), n° 4, p. 367-389.

[12] The GAP group, « GAP - Groups, Algorithms, Programming - version 4.7. », `http://www.gap-system.org/`.

[13] The PARI Group, « PARI/GP version 2.6.1. », `http://pari.math.u-bordeaux.fr/`.

Charlotte Euvrard
Laboratoire de Mathématiques de Besançon
CNRS UMR 6623
Université de Bourgogne Franche-Comté
16, route de Gray
25030 Besançon Cedex, France
E-mail: `charlotte.euvrard@univ-fcomte.fr`
URL: `http://lmb.univ-fcomte.fr/`