JOURNAL
de Théorie des Nombres
de BORDEAUX

anciennement Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux

Thomas DE LA ROCHEFOUCAULD

Signes locaux et nombres de Tamagawa

Tome 28, nº 1 (2016), p. 1-38.

<http://jtnb.cedram.org/item?id=JTNB_2016__28_1_1_0>

Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **28** (2016), 1–38

Signes locaux et nombres de Tamagawa

par Thomas DE LA ROCHEFOUCAULD

Résumé. Cet article porte sur des questions liées à la conjecture de parité. On démontre une formule pour les signes locaux des représentations essentiellement symplectiques et modérément ramifiées du groupe de Weil. Cette formule généralise celle, déjà connue, pour les courbes elliptiques ayant potentiellement bonne réduction. On fait alors un premier pas vers la généralisation de résultats de p-parité obtenus par les frères Dokchitser en comparant les nombres de Tamagawa et les constantes de régulation pour certains prémotifs.

Abstract. In this article, questions related to the parity conjecture are studied. We show a formula for root numbers of essentially symplectic and tamely ramified representations of the Weil group. This result generalizes the one already known for elliptic curves with potentially good reduction. Then, a first step is made toward the generalization on p-parity results (by Dokchitser brothers) whith the comparison of Tamagawa numbers and regulator constants for a premotif (with a few restrictions).

1. Introduction

1.1. Prémotifs, conjecture de Bloch-Kato et conjectures de parité. Soit E un corps de nombres, $M = \{\sigma_\mathfrak{p} : G_K \longrightarrow GL_n(E_\mathfrak{p})\}$ un prémotif (voir les définitions 2.2 et 2.8) et ι un plongement de E dans $\mathbb{C}$. On associe au prémotif M, la représentation $\sigma_{\iota M,v}$ du groupe de Weil-Deligne (voir le paragraphe précédent la définition 2.2) et la fonction L “complète” $\Lambda(\iota M, s)$ (voir la définition 2.4). On a alors les conjectures suivantes :

Conjecture 1.1. (1) *La fonction $\Lambda(\iota M, s)$ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$.*
(2) *Soit $W(\iota M) = \prod_v W(\sigma_{\iota M,v})$ (c'est une constante de module 1), la fonction $\Lambda(\iota M, s)$ vérifie l'équation fonctionnelle :*

$$\Lambda(\iota M, s) = W(\iota M)\Lambda(\iota M^*, k - s)$$

Manuscrit reçu le 1er novembre 2012, révisé le 22 octobre 2014, accepté le 15 avril 2015.
Mathematics Subject Classification. 10G05, 10G07, 10G10, 11F80, 11R42, 11S40.
Mots-clefs. Elliptic curves, abelian varieties, Birch and Swinnerton-Dyer conjecture, parity conjecture, p-parity conjecture, root numbers, regulator constant, Tamagawa numbers, premotifs, Weil group, Weil-Deligne group, L-functions.

où $k = w + 1$.
Dans le cas d'un prémotif essentiellement auto-dual de poids impair w*, on obtient :*

$$\Lambda(\iota M, s) = W(\iota M)\Lambda(\iota M, w + 1 - s)$$

où $W(\iota M) \in \{\pm 1\}$.

Soit $H^1_f(K, M_\mathfrak{p})$ le groupe

$$\ker\left[H^1(K, V_\mathfrak{p}/T_\mathfrak{p}) \overset{\prod \mathrm{Res}_v}{\longrightarrow} \prod_v \left(H^1(K_v, V_\mathfrak{p}/T_\mathfrak{p})/H^1_f(K_v, V_\mathfrak{p}/T_\mathfrak{p})\right)\right]$$

où $T_\mathfrak{p}$ est un $\mathcal{O}_{E_\mathfrak{p}}$-réseau G_K-stable de $V_\mathfrak{p}$. Le groupe $H^1_f(K, M_\mathfrak{p})$ est un groupe de Selmer de $M_\mathfrak{p}$ (il dépend du choix de $T_\mathfrak{p}$, voir §1.3 de [17]).

Conjecture 1.2 (Bloch-Kato)**.** *Soit* $M = \{\sigma_\mathfrak{p} : G_K \longrightarrow GL(V_\mathfrak{p})\}$ *un prémotif essentiellement auto-dual de poids impair* w *sur* K *et* $T_\mathfrak{p}$ *un* $\mathcal{O}_{E_\mathfrak{p}}$*-réseau* G_K*-stable de* $V_\mathfrak{p}$ *alors si* $rg_\mathfrak{p} M := \dim_{E_\mathfrak{p}} H^1_f(K, M_\mathfrak{p})$ *alors* $rg_\mathfrak{p} M$ *ne dépend pas du choix de* $T_\mathfrak{p}$ *et*

$$rg_\mathfrak{p} M = ord_{s=\frac{w+1}{2}} \Lambda(\iota M, s).$$

Remarque 1.3. La conjecture implique en particulier que l'ordre d'annulation de $\Lambda(\iota M, s)$ en $s = \frac{w+1}{2}$ ne dépend pas de ι (si M provient d'un motif, c'est la conjecture de Deligne-Gross, voir Conjecture 2.7 (ii) p.323 de [6]).

Conjecture 1.4. *Soit* $M = \{\sigma_\mathfrak{p}\}$ *un prémotif essentiellement auto-dual de poids impair* w *sur* K *alors :*

$$(-1)^{rg_\mathfrak{p} M} = W(\iota M).$$

Remarque 1.5. Rohrlich a montré que $W(\iota M)$ est indépendant de ι (sous réserve d'une condition sur le déterminant des $\sigma_{\iota M,v}$ qui est satisfaite si M est essentiellement symplectique) dans [15].

Soit L/K une extension finie et τ une E-représentation auto-duale du groupe de Galois $G_{L/K} := Gal(L/K)$, $M \otimes \tau = \left\{\sigma_\mathfrak{p} \otimes \tau : G_K \longrightarrow GL(V'_\mathfrak{p})\right\}$ et $T'_\mathfrak{p}$ un $\mathcal{O}_{E_\mathfrak{p}}$-réseau G_K-stable de $V'_\mathfrak{p}$ alors si on note $H^1_f(K, M_\mathfrak{p} \otimes \tau) := H^1_f(K, V'_\mathfrak{p}/T'_\mathfrak{p})$, $\Lambda(M, \tau, s) = \prod_v L(\sigma_{M,v} \otimes \tau, s)$ et $W(M, \tau) = \prod_v W(\sigma_{M,v} \otimes \tau)$, on obtient la conjecture suivante :

Conjecture 1.6. *Soit* $M = \{\sigma_\mathfrak{p}\}$ *un prémotif essentiellement auto-dual de poids impair* w *sur* K *et* τ *est une représentation auto-duale de* $G(L/K)$ *alors :*

$$\Lambda(M, \tau, s) = W(M, \tau)\Lambda(M, \tau, w + 1 - s).$$

De plus, si m_τ *désigne la multiplicité de* τ *dans* $H^1_f(L, M_\mathfrak{p})$ *alors (Bloch-Kato avec twist) :*

$$m_\tau = ord_{s=\frac{w+1}{2}} \Lambda(M/K, \tau, s)$$

et (conjecture de p-parité avec twist),

$$(-1)^{m_\tau} = W(M/K, \tau).$$

Dans l'article [7], les frères Dokchitser démontrent ce résultat pour le prémotif associé à une courbe elliptique (avec quelques légères restrictions). La démonstration de ce résultat repose sur deux résultats clef de nature locale :

(1) Le lien entre m_τ et les nombres de Tamagawa d'une part.
(2) Le lien entre les signes locaux et les nombres de Tamagawa d'autre part. Ce second lien se décompose lui-même en deux parties :
  (a) Une formule de Rohrlich pour les signes locaux pour une courbe elliptique avec un twist (auto-dual) τ.
  (b) Un lien entre les nombres de Tamagawa et les constantes de régulation.

Cet article se propose de démontrer les résultats 2.a et 2.b dans le cas de certains prémotifs essentiellement auto-duaux dans le cas où $v \nmid p$. L'article est composé de trois parties :

(1) La première partie définit et rappelle certaines propriétés concernant les prémotifs, les signes locaux et les constantes de régulations.
(2) La seconde partie est consacrée à la généralisation (aux représentations modérément ramifiées du groupe de Weil) de la formule de D.Rohrlich sur les signes locaux des courbes elliptiques .
(3) Enfin dans la troisième partie, on utilise cette formule pour établir un lien entre les nombres de Tamagawa et les constantes de régulation généralisant en partie le lien entre les nombres de Tamagawa et les constantes de régulation établi par les frères Dokchitser.

Donnons tout de suite quelques précisions sur ces résultats.

1.2. Une généralisation de la formule de Rohrlich pour les signes locaux. Les résulats obtenus dans [7] reposent de façon essentielle (comme on l'a rappellé ci-dessus) sur une formule de Rohrlich pour $W(E/K_v, \tau)$ où τ est une représentation auto-duale. Le résultat clef que Rohrlich a démontré dans [14] est le théorème suivant :

Théorème 1.7. *Soit E une courbe elliptique sur K_v et τ une représentation auto-duale de G_K alors :*

(1) *Si E a réduction potentiellement multiplicative alors :*

$$W(E/K_v, \tau) = (\det \tau)(-1)\chi(-1)^{\dim \tau}(-1)^{\langle \chi, \tau \rangle}$$

*où χ est le caractère de $K_v^\times$ associé à l'extension $K_v(\sqrt{c_6})$ de K_v (*i.e.* le corps où E acquiert réduction multiplicative déployée).*

(2) *Si E a potentiellement bonne réduction alors $\sigma'_{E/K_v} = \sigma_{E/K_v}$ est une représentation de $\mathcal{W}_{K_v}$ et si $l_v \geq 5$ alors $W(E/K_v,\tau))$ est égal à :*

$$\begin{cases}(\det\tau)(-1)(-W(E/K_v))^{\dim\tau}(-1)^{\langle 1+\eta+\hat{\sigma},\tau\rangle} & \textit{si } \sigma_{E/K} \textit{ est irréd,}\\ (\det\tau)(-1)(W(E/K_v))^{\dim\tau} & \textit{sinon.}\end{cases}$$

La quantité $W(E/K_v,\tau) := W(\sigma'_{E/K}\otimes\tau)$ étant définie à l'aide de la représentation essentiellement symplectique du groupe de Weil-Deligne $\sigma'_{E/K_v} : \mathcal{WD}_{K_v} \longrightarrow GL(V_l(E)^*)$, il est légitime de chercher une formule équivalente dans le cas d'une représentation essentiellement symplectique plus générale de $\mathcal{WD}_{K_v}$. Nous donnons dans la première partie de cet article une formule qui généralise le théorème précédent. En effet, on montre une formule dans le cas où la représentation de $\mathcal{WD}_{K_v}$ se factorise à travers une représentation essentiellement symplectique, modérement ramifiée du groupe de Weil $\mathcal{W}_{K_v}$. Précisément, on obtient :

Théorème 1.8. *Soit σ est représentation essentiellement symplectique de poids w et modérement ramifiée de $\mathcal{W}_{K_v}$ et $\tilde{\sigma} = \sigma\otimes\omega^{w/2}$ alors pour toute représentation (complexe) auto-duale τ de G_{K_v}, $W(\sigma\otimes\tau)$ est égal à :*

$$\begin{cases}(\det\tau(-1))^{\frac{\dim\sigma}{2}}(-W(\sigma))^{\dim\tau}(-1)^{\langle 1\oplus\eta_{nr}\oplus\rho,\tau\rangle} & \textit{si } \tilde{\sigma} \textit{ est sympl et irréd,}\\ (\det\tau(-1))^{\frac{\dim\sigma}{2}}W(\sigma)^{\dim\tau} & \textit{si } \tilde{\sigma} = \theta\oplus\theta^*\end{cases}$$

Remarque 1.9. Si E/K_v est une courbe ayant potentiellement bonne réduction alors si $l_v \geq 5$, la représentation σ'_{E/K_v} est une représentation modérément ramifiée de dimension 2 de $\mathcal{W}_{K_v}$ et dans ce cas le théorème ci-dessus est précisément le 2. du théorème de Rohrlich.

1.3. Nombres de Tamagawa et constantes de régulation. D'importants résultats sur les conjectures de p-parité et de p-parité avec twist ont été obtenus par les frères Dokchitser dans [7]. Ces résultats reposent notamment sur le résultat clef de cet article (le théorème 3.2) qui lie (à l'aide de la formule de Rohrlich) les nombres de Tamagawa et ce qu'ils appellent les constantes de régulation. Ce théorème (un peu technique) de nature locale repose notamment sur la connaissance de la forme explicite du groupe de Galois du corps sur lequel la courbe admet une réduction semi-stable. Ces groupes, peu nombreux, ont pour cardinal une puissance de 2 fois une puissance de 3 (en particulier, il en est de même pour leurs sous-groupes d'inertie).

Partant d'une courbe elliptique sur un corps de nombres, il s'avère que le fait que la famille des représentations σ'_{E/K_v} pour les différentes places v de K soit prémotivique (ou fortement compatible, voir la définition 2.2) impose cette condition sur le cardinal du groupe d'inertie. En suivant les idées mises en avant dans [7], nous généralisons le lien entre nombres de

Tamagawa et constantes de régulation à un prémotif essentiellement symplectique quelconque dans le cas modéré où $p \neq l_v$.

2. Prémotifs, signes locaux et constantes de régulation

2.1. Prémotifs. Soit K un corps de nombres et v une place finie de K. On note K_v le complété de K en v, $\mathcal{O}_{K_v}$ son anneau des entiers et $q_v = l_v^d$ le cardinal de son corps résiduel.

Soit E un corps de nombres et $E_\mathfrak{p}$ le complété de E en $\mathfrak{p}$ ($\mathfrak{p} \mid p$). On note $\mathcal{O}_{E_\mathfrak{p}}$ son anneau des entiers. On appelle représentation $\mathfrak{p}$ -adique de dimension n de $Gal(\overline{K}/K) = G_K$ un morphisme continu de G_K dans $GL_n(E_\mathfrak{p})$. Une famille $\{\sigma_\mathfrak{p}\}$ de représentations $\mathfrak{p}$-adiques de $Gal(\overline{K}/K)$ est une famille de représentations (de même dimension) telle que pour chaque place $\mathfrak{p}$ de E, $\sigma_\mathfrak{p}$ est une représentation $\mathfrak{p}$-adique. De plus, si σ est une représentation de G_K et v est une place de K alors si on choisit une place de $\overline{K}$ au-dessus de v, on peut identifier le sous-groupe de décomposition correspondant avec G_{K_v} et la classe d'isomorphie de la représentation $\sigma\,|G_{K_v}$ de G_{K_v} est indépendante du choix de la place de $\overline{K}$ au-dessus de v.

Définition 2.1. Une famille $\{\sigma_\mathfrak{p}\}$ de représentations $\mathfrak{p}$-adiques de G_K est dite *faiblement compatible* si elle vérifie les trois conditions suivantes :

(1) Il existe un ensemble fini S de places de K, indépendant de $\mathfrak{p}$, tel que $\sigma_\mathfrak{p}$ est non ramifiée en dehors de $S \cup \{w \mid w \text{ divise } p\}$ (p est la caractéristique résiduelle de $E_\mathfrak{p}$).

(2) Si on fixe une place (finie) $\mathfrak{q}$ de K tel que $\mathfrak{q} \nmid p$ alors le polynôme $B_\mathfrak{q}(x) = \det(1 - x\sigma_\mathfrak{p}(\Phi_\mathfrak{q}) \mid V_\mathfrak{p}^I)$ (où $\Phi_\mathfrak{q}$ est un Frobenius géométrique en $\mathfrak{q}$) est à coefficients dans E et est indépendant de $\mathfrak{p}$ (autrement dit, si $\mathfrak{p}' \mid p'$ est une autre place de E telle que $\mathfrak{q} \nmid p'$ alors $\det(1 - x\sigma_\mathfrak{p}(\Phi_\mathfrak{q}) \mid V_\mathfrak{p}^I) = \det(1 - x\sigma_{\mathfrak{p}'}(\Phi) \mid V_{\mathfrak{p}'}^I)$.

(3) Si v est une place de K alors $\forall g \in Gal(\overline{K}_v/K_v) = G_{K_v}$ tel que son image dans G_{K_v}/I_v soit une puissance entière du Frobenius alors le polynôme caractéristique de $\sigma_\mathfrak{p}(g)$ est à coefficients dans E et est indépendant de $\mathfrak{p}$ pour toute place $\mathfrak{p}$ tel que $\mathfrak{p} \nmid l_v$.

Si on part d'une famille faiblement compatible M (avec les notations ci-dessus), si la caractéristique résiduelle $l_\mathfrak{p}$ de $E_\mathfrak{p}$ est différente de la caractéristique résiduelle l_v de K_v, alors la représentation $\sigma_{\mathfrak{p},v} = \sigma_\mathfrak{p}\,|G_{K_v}$ donne lieu à une représentation $\sigma =(\sigma, N)$ de $\mathcal{WD}_{K_v}$ sur $E_\mathfrak{p}$ et par suite à la représentation $\sigma^{ss}{=}(\sigma^{ss}, N)$ de $\mathcal{WD}_{K_v}$ sur $E_\mathfrak{p}$. Pour obtenir une représentation sur $\mathbb{C}$, il suffit de fixer un plongement $\iota_\mathfrak{p}$ de $E_\mathfrak{p}$ dans $\mathbb{C}$. Comme on voit E comme un sous-corps de $E_\mathfrak{p}$, on peut demander que $\iota_\mathfrak{p}$ fixe E (où E est identifié à un sous-corps de $\mathbb{C}$ par un plongement ι). En étendant les scalaires de $E_\mathfrak{p}$ à $\mathbb{C}$ on obtient une représentation $((\sigma^{ss})^{\iota_\mathfrak{p}}, N^{\iota_\mathfrak{p}})$ de $\mathcal{WD}_{K_v}$ sur $\mathbb{C}$. Il semble alors naturel de poser $\sigma_{\iota M,v} := ((\sigma^{ss})^{\iota_\mathfrak{p}}, N^{\iota_\mathfrak{p}})$.

Définition 2.2. On appellera prémotif (ou famille fortement compatible), une famille faiblement compatible telle que, pour tout v, la classe d'isomorphie de $\sigma_{\iota M,v}$ est indépendante des choix de $\mathfrak{p}$ et $\iota_{\mathfrak{p}}$.

Remarque 2.3.
(1) Il serait agréable de savoir que toute famille faiblement compatible est fortement compatible (*i.e.* est un prémotif). D'importants résultats dans ce sens ont été démontrés par T.Barnet-Lamb, T.Gee, D.Geraghty et R.Taylor sur des corps totalement réel ou CM (voir le théorème 5.4.3 de [2]).
(2) La famille faiblement compatible associée à une courbe elliptique (resp. à une variété abélienne) est un prémotif grâce à la description explicite de $((\sigma^{ss})^{\iota_{\mathfrak{p}}}, N^{\iota_{\mathfrak{p}}})$ dans ces cas (voir §14-15 de [13] et la proposition 1.10 de [18] respectivement)

Soit $M = \{\sigma_{\mathfrak{p}}\}$ un prémotif sur K et ι un plongement de E dans $\mathbb{C}$. On a vu que pour toute place v de K, on peut définir une représentation $\sigma_{\iota M,v}$ de $\mathcal{WD}_K$ (à partir de n'importe quel $\sigma_{\mathfrak{p}}$ tel que $l_v \neq l_{\mathfrak{p}}$ et $\iota_{\mathfrak{p}}$ plongement de $E_{\mathfrak{p}}$ dans $\mathbb{C}$ qui prolonge ι) qui est indépendante des choix de $\mathfrak{p}$ et $\iota_{\mathfrak{p}}$.

Définition 2.4. On définit la fonction L locale de $\sigma_{\iota M,v} = (\sigma_v, N_v)$ (où v est une place non archimédienne) par

$$L(\sigma_{\iota M,v}, s) = \frac{1}{\det(1 - \sigma_v(\Phi)q^{-s} \Big| V^I_{N_v})}, \text{ où } V^I_{N_v} = V^I \cap \ker N_v$$

et la fonction L “complète” (globale) par

$$\Lambda(\iota M, s) = \prod_v L(\sigma_{\iota M,v}, s)$$

où pour la définition de $L(\sigma_{\iota M,v}, s)$ aux places archimédiennes, on pourra consulter par exemple p.429 de [16].

Définition 2.5. On dit que le prémotif M est de poids w, si pour $\alpha \in \mathbb{C}^\times$ tel que $B_{\mathfrak{q}}(\alpha^{-1}) = 0$ et pour tout $\tau \in Aut(\mathbb{C})$, on a :

$$|\tau(\alpha)| = (N\mathfrak{q})^{w/2} \text{ si } \mathfrak{q} \notin S$$

où S est l'ensemble des places qui apparait dans la définition d'une famille faiblement compatible de représentation.

Remarque 2.6.
(1) Cette définition permet de dire que la fonction L “complète” $\Lambda(\iota M, s)$ associée au prémotif M est convergente pour $\mathrm{Re}\, s > w/2 + 1$.
(2) Le fait que ce soit “pour tout $\tau \in Aut(\mathbb{C})$” permet que la définition du poids ne dépende pas du choix du plongement de E dans $\mathbb{C}$.

Définition 2.7. Une représentation σ de $\mathcal{W}_K$ est dite essentiellement auto-duale de poids w si :

$$\sigma \simeq \sigma^* \otimes \omega^{-w}.$$

Définition 2.8. On dit que le prémotif M est essentiellement auto-dual de poids w si :

$$\text{pour toutes places } v \text{ de } K, \sigma_{\iota M,v} \simeq \sigma^*_{\iota M,v} \otimes \omega^{-w}.$$

Remarque 2.9.
(1) Un prémotif essentiellement auto-dual de poids w est un prémotif de poids w.
(2) Si l'isomorphisme ci-dessus est donné par un accouplement symétrique (resp. symplectique), on dira que le prémotif est essentiellement orthogonale (resp. symplectique) de poids w.

Les définitions ci-dessus permettent d'énoncer les conjectures de l'équation fonctionnelle, de Bloch-Kato et de parité (voir les conjectures 1, 1.2, 1.4 et 1.6 rappellées en introduction).

2.2. Signes locaux. Soit K corps local.

Proposition 2.10. *Il existe une fonction $\varepsilon(*,*,*)$ vérifiant :*
(1) *$\varepsilon(*,\psi,dx)$ est multiplicative sur les suites exactes courtes.*
(2) *Soit L/K une extension finie et $\rho : \mathcal{W}(\bar{K}/L) \longrightarrow GL(V)$ une représentation alors (pour toute mesure de Haar dx_L sur L) :*

$$\varepsilon(Ind_{L/K}\rho, \psi, dx) = \varepsilon(\rho, \psi \circ tr_{L/K}, dx_L) \left(\frac{\varepsilon(Ind_{L/K}1_L, \psi, dx)}{\varepsilon(1_L, \psi \circ tr_{L/K}, dx_L)}\right)^{\dim \rho}.$$

(3) *Si χ est un quasi-caractère de $L^\times$ (identifié à une rep de dimension 1 de $\mathcal{W}(\bar{K}/L)$) et ψ_L un caractère additif de L alors :*

$$\varepsilon(\chi, \psi_L, dx_L) = \begin{cases} \chi\omega^{-1}(c) \int\limits_{\mathcal{O}_L} dx_L & \textit{si } \chi \textit{est non ramifié,} \\ \int\limits_{c^{-1}\mathcal{O}_L^\times} \chi^{-1}(x)\psi_L(x)dx_L & \textit{si } \chi \textit{ est ramifié,} \end{cases}$$

où c est un élément de $L^\times$ de valuation $n(\psi_L) + a(\chi)$ et $n(\psi_L)$ est le plus grand entier m tel que ψ_L est trivial sur $\pi_L^{-m}\mathcal{O}_L$.

Donnons tout de suite quelques propriétés de ce facteur epsilon.

Proposition 2.11. *Pour $\alpha \in K^\times$, on note ψ_α le caractère $x \longrightarrow \psi(\alpha x)$.*
(1) $\varepsilon(\sigma, \psi_\alpha, dx) = (\det \sigma)(\alpha)\omega(\alpha)\varepsilon(\sigma, \psi, dx)$.
(2) $\varepsilon(\sigma, \psi, r dx) = r^{\dim \sigma}\varepsilon(\sigma, \psi, dx)$.
(3) $\varepsilon(\sigma \otimes \omega^s, \psi, dx) = \varepsilon(\sigma, \psi, dx) q^{-s(n(\psi)\dim(\sigma)+a(\sigma))}$ *où $n(\psi)$ est l'entier défini dans la proposition 2.10.*

Donnons maintenant la définition de ε pour les représentations de $\mathcal{WD}_K$:

Définition 2.12. Soit $\sigma' = (\sigma, N)$ une représentation de $\mathcal{WD}_K$, on pose :

$$\varepsilon(\sigma', \psi, dx) = \varepsilon(\sigma, \psi, dx)\delta(\sigma')$$

où $\begin{cases} \varepsilon(\sigma, \psi, dx) \text{ est défini par la proposition préc édente} \\ \delta(\sigma') = \det(-\sigma(\Phi)\,\Big|V^I/V_N^I) \end{cases}$

Proposition 2.13. *La fonction ε définie sur $\mathcal{WD}_K$ vérifie les mêmes propriétés que la fonction ε originale sur $\mathcal{W}_K$.*

(1) *$\varepsilon(*, \psi, dx)$ est multiplicative sur les suites exactes courtes.*
(2) *Soit L/K une extension finie et $\sigma' : \mathcal{WD}(\bar{K}/L) \longrightarrow GL(V)$ une représentation alors ($\forall\ dx_L$ mesure de Haar sur L) :*

$$\varepsilon(Ind_{L/K}\sigma', \psi, dx) = \varepsilon(\sigma', \psi \circ tr_{L/K}, dx_L)\left(\frac{\varepsilon(Ind_{L/K}1_L, \psi, dx)}{\varepsilon(1_L, \psi \circ tr_{L/K}, dx_L)}\right)^{\dim \sigma'}.$$

(3) *Si $\sigma' = (\sigma, N)$ est de dimension 1 alors $\sigma' = (\sigma, 0)$ et $\varepsilon(\sigma', \psi, dx) = \varepsilon(\sigma, \psi, dx)$ où le second membre est défini comme au 3. de la proposition 2.10.*

Démonstration. Voir les §11 et §12 de [13]. □

Définition 2.14. On appelle signe local (ou “root number”) le nombre complexe de module 1 suivant :

$$W(\sigma', \psi) = \frac{\varepsilon(\sigma', \psi, dx)}{|\varepsilon(\sigma', \psi, dx)|}$$

Remarque 2.15. Comme le suggère la notation, $W(\sigma', \psi)$ ne dépend pas de la mesure de Haar choisie (d'après le point 2. de la proposition 2.11).

Proposition 2.16. *(Propriétés de $\varepsilon(\sigma', \psi, dx)$ et $W(\sigma', \psi)$).*
Soit $n(\psi)$ comme précédemment et dx_ψ la mesure auto-duale relativement à ψ

(1) $\varepsilon(\sigma, \psi, dx_\psi)\varepsilon(\sigma^*, \psi, dx_\psi) = (\det \sigma)(-1)q^{n(\psi)\dim(\sigma)+a(\sigma)}$.
(2) $\delta(\sigma')\delta(\sigma'^*) = q^{b(\sigma')}$.
(3) $\varepsilon(\sigma', \psi, dx_\psi)\varepsilon(\sigma'^*, \psi, dx_\psi) = (\det \sigma)(-1)q^{n(\psi)\dim(\sigma')+a(\sigma')}$.
(4) *Si σ' est essentiellement orthogonale alors $W(\sigma', \psi) \in \{\pm 1, \pm i\}$.*
(5) *Si σ' est essentiellement symplectique alors $W(\sigma', \psi)$ ne dépend pas de ψ et $W(\sigma') = \pm 1$.*

Démonstration. Voir le lemme p.144 et la proposition p.145 de [13]. □

Proposition 2.17. *Soit σ une représentation de $\mathcal{WD}_K$. Si τ est une représentation non-ramifiée de $\mathcal{WD}_K$ alors :*

$$\varepsilon(\sigma \otimes \tau, \psi, dx) = \varepsilon(\sigma, \psi, dx)^{\dim \tau} \det \tau\left(\varpi_K^{a(\sigma)+n(\psi)\dim \sigma}\right)$$

Démonstration. Voir le point (3.4.6) de [21] ou le corollaire 5 p.115 de [20]. □

Corollaire 2.18. *Soit σ une représentation de $\mathcal{WD}_K$ alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a :*

$$W(\sigma \otimes \omega^{\alpha}, \psi) = W(\sigma, \psi).$$

Proposition 2.19. *Soit σ une représentation de $\mathcal{WD}_K$ modérément ramifiée. Si τ est une représentation totalement sauvagement ramifiée (c'est à dire une représentation dont aucun de ses constituants n'est modérément ramifié) alors il existe un élément $\gamma \in K^{\times}$ tel que :*

$$\varepsilon(\sigma \otimes \tau, \psi, dx) = \varepsilon(\tau, \psi, dx)^{\dim \sigma} (\det \sigma)(\gamma).$$

Démonstration. Voir la proposition 4.13 de [4]. □

2.3. Les constantes de régulation. On considère un corps K de caractéristique 0. On trouvera plus de détails et notamment les démonstrations des résultats énoncés ci-dessous dans l'article [7].

Définition 2.20. Soit $\Theta = \sum_i n_i H_i$ un élément de l'anneau de Burnside de G. On dit que Θ est une G-relation si le caractère $\sum_i n_i \chi_{\mathbb{C}[G/H_i]}$ est nul où $\chi_{\mathbb{C}[G/H_i]}$ est le caractère de la représentation $Ind_{H_i}^{G} 1_{H_i}$.

Définition 2.21. Soit G un groupe fini, ρ une $K[G]$-représentation auto-duale et $\Theta = \sum_i n_i H_i$ une G-relation. On choisit un accouplement K-bilinéaire non-dégénéré et G -invariant $\langle , \rangle$ sur ρ à valeurs dans L/K et on pose :

$$C_{\Theta}(\rho) = \prod_i \det \left(\frac{1}{|H_i|} \langle , \rangle \Big| \rho^{H_i} \right)^{n_i} \in K^{\times}/K^{\times 2},$$

où $\det (\langle , \rangle | V) := \det(\langle e_i, e_j \rangle_{i,j})$ pour toute base de V sur K.

Remarque 2.22. La constante de régulation $C_{\Theta}(\rho)$ est bien définie, non nulle et indépendante du choix de $\langle , \rangle$ (voir [7] pour plus de détails).

Théorème 2.23. *Soit ρ une $K[G]$-représentation auto-duale si elle vérifie l'un des critères suivants :*

1. *La représentation $\rho \otimes_K \bar{K}$ est une $\bar{K}[G]$-représentation symplectique.*
2. *La représentation $\rho \otimes_K \bar{K} \simeq \tau \oplus \tau^*$ pour une $\bar{K}[G]$-représentation τ.*
3. *Aucune des composantes irréductibles sur $\bar{K}$ de $\rho \otimes_K \bar{K}$ n'est auto-duale.*

Alors

$$C_{\Theta}(\rho) = 1 \text{ pour toutes } G\text{-relations } \Theta.$$

Lemme 2.24. *Soit ρ une $K[G]$-représentation auto-duale et $\Theta = \sum_i n_i H_i$ une G-relation. Si aucune des composantes irréductibles de $\rho \otimes_K \bar{K}$ n'est une des composantes irréductibles d'un $\bar{K}[G/H_i]$ alors $C_\Theta(\rho) = 1$ pour toute G-relation Θ.*

Proposition 2.25. *Soit G un groupe fini, K un corps local (extension finie de $\mathbb{Q}_p$), $\mathcal{O}_K$ son anneau des entiers et $\mathfrak{p}$ son unique idéal maximal. Si $\rho : G \longrightarrow GL(V) \simeq GL_n(K)$ est une $K[G]$-représentation auto-duale et p ne divise pas $|G|$ alors :*

$$ord_{\mathfrak{p}} C_\Theta(\rho) \equiv 0 \mod 2$$

pour toute G-relation Θ.

Démonstration. Après un changement de base éventuelle, ρ est à valeurs dans $GL_n(\mathcal{O}_K)$ (voir le lemme 4.7). D'après la proposition 43 de [19], pour $p \nmid |G|$, la théorie des représentations de G sur K est “la même” que celle sur k_K. En particulier, on a un accouplement non-dégénéré sur k_K qui se relève en un accouplement $\langle , \rangle : T \times T \longrightarrow \mathcal{O}_K$ où T est $\mathcal{O}_K[G]$-réseau de V. Si on prend cet accouplement $\langle , \rangle : T \times T \longrightarrow \mathcal{O}_K$ (qui se réduit donc en un accouplement non-dégénéré de $\bar{T} \times \bar{T} \longrightarrow k_K$ où $\bar{T}$ est un $k_K[G]$-module) pour calculer $C_\Theta(\rho)$, on obtient que $C_\Theta(\rho)$ est bien défini comme élément de $K^\times / \left(\mathcal{O}_K^\times\right)^2$ et que $C_\Theta(\rho \otimes k_K) \equiv C_\Theta(\rho) \bmod \mathfrak{p}_K$. Comme $C_\Theta(\rho \otimes k_K) \in k_K^\times$, on en déduit que $C_\Theta(\rho) \notin \mathfrak{p}_K$ et $C_\Theta(\rho)$ est une unité de $\mathcal{O}_K$ (à muliplication par un élement de $\left(\mathcal{O}_K^\times\right)^2$ près) donc de valuation triviale. Par conséquent, $ord_{\mathfrak{p}} C_\Theta(\rho) \equiv 0 \bmod 2$. ☐

Définition 2.26. L'anneau de Burnside de G est l'anneau $\mathbb{Z}S$ où S est l'ensemble des sous-groupes de G à conjugaison près.
Une fonction linéaire φ sur l'anneau de Burnside de G est une application de $\mathbb{Z}S$ dans un groupe abélien (noté multiplicativement) tel que $\varphi(\sum_i n_i H_i) = \prod_i \varphi(H_i)^{n_i}$. De plus, on dira que :

(1) φ est trivial sur $\Psi \in \mathbb{Z}S$ si $\varphi(\Psi) = 1$.
(2) $\varphi \sim \varphi'$ si φ/φ' est trivial sur toutes les G-relations.

Définition 2.27. Soit G un groupe fini et D un sous-groupe de G. Une fonction linéaire φ sur l'anneau de Burnside de G sera dite D-locale s'il existe une fonction linéaire φ_D sur l'anneau de Burnside de D telle que :

$$\varphi(H) = \varphi_D(\mathrm{Res}_D\, H) \left(= \prod_{x \in H \backslash G / D} \varphi_D(H^{x^{-1}} \cap D) \right)$$

On notera $\varphi = (D, \varphi_D)$.

Définition 2.28. Soit G un groupe fini, D un sous-groupe de G et I un sous-groupe distingué de D tel que D/I est cyclique. Soit $\psi(e, f)$ une fonction de deux variables $e, f \in \mathbb{N}$. On définit :

$$(D, I, \psi) : H \to \prod_{x \in H\backslash G/D} \psi\left(\frac{|I|}{|H \cap I^x|}, \frac{[D : I]}{[H \cap D^x : I \cap I^x]}\right).$$

C'est une fonction D-locale sur l'anneau de Burnside de G, plus précisément

$$(D, I, \psi) = \left(D, U \to \psi\left(\frac{|I|}{|U \cap I|}, \frac{|D|}{|UI|}\right)\right).$$

Théorème 2.29. *Soit G un groupe fini, D un sous-groupe de G et I un sous-groupe distingué de D tel que D/I est cyclique.*

1. *Si $\varphi = (D, \varphi_D)$ et φ_D est trivial sur les D-relations alors φ est trivial sur les G-relations.*
2. *Si $N \lhd G$ et $\varphi(H) = \varphi_{G/N}(HN/N)$ pour une application $\varphi_{G/N}$ sur l'anneau de Burnside de G/N qui est trivial sur les G/N-relations alors φ est trivial sur les G -relations.*
3. *Si $D_1 < D_2 < G$, $\varphi = (D_2, \varphi_2)$ et $\varphi_2 = (D_1, \varphi_1)$ alors $\varphi = (D_1, \varphi_1)$*
4. *Si $\psi(e, f)$ ne dépend pas de e alors $(D, I, \psi) \sim 1$.*
5. *Si $I_0 \subset I$ est distingué dans D tel que D/I_0 est cyclique et $\psi(e, f)$ est une fonction du produit ef alors $(D, I, \psi) = (D, I_0, \psi)$.*
6. *Si D_0 est un sous-groupe de D contenant I et si pour m divisant f et $[D : D_0]$, on a $\psi(e, f) = \psi(e, f/m)^m$ alors $(D, I, \psi) = (D_0, I, \psi)$.*
7. *Soit $N \lhd G$ tel que $p \nmid [G : N]$. Soit φ et ϕ deux applications sur les anneaux de Burnside de G et N respectivement alors :*

$$\varphi = (N, \phi) \iff \begin{cases} \varphi(H) = \prod_{x \in G/D} \phi(H^x), H \subset N, \\ \varphi(H) = \phi(H \cap N) \text{ sinon.} \end{cases}$$

Définition 2.30. Pour une $K[G]$-représentation auto-duale ρ munie d'un accouplement bilinéaire $\langle , \rangle$ non-dégénéré, G-invariant et à valeurs dans K, on définit :

$$\mathcal{D}_\rho : H \longrightarrow \det\left(\frac{1}{|H|}\langle , \rangle \,\Big|\rho^H\right) \in K^\times/K^{\times 2}.$$

Remarque 2.31. L'application $\mathcal{D}_\rho$ est bien définie (car $\langle , \rangle$ est G-invariant) et si Θ est une G-relation alors $\mathcal{D}_\rho(\Theta) = C_\Theta(\rho)$.

Proposition 2.32. *Si $D < G$ et si ρ est une $K[D]$-représentation auto-duale alors $\mathcal{D}_{Ind_D^G \rho} \sim (D, \mathcal{D}_\rho)$ comme fonctions à valeurs dans $K^\times/K^{\times 2}$.*

Lemme 2.33. *Si H est un sous-groupe cyclique de G alors $C_\Theta(K[G/H]) = 1$ pour toutes G-relations Θ (autrement dit, $\mathcal{D}_{K[G/H]} \sim 1$).*

3. Généralisation d'une formule de Rohrlich

Dans tout cet article K est un corps local, extension finie de $\mathbb{Q}_l$ et q est le cardinal du corps résiduel de K.

3.1. Les représentations irréductibles, modérément ramifiées, du groupe de Weil.

3.1.1. ***Représentations irréductibles et modérément ramifiées.*** Soit ρ une représentation irréductible modérement ramifiée du groupe de Weil $\mathcal{W}_K = \mathcal{W}(\overline{K}/K)$. Dans ce cas, ρ se factorise à travers $\mathcal{W}_K/G_1(L/K)$ où G_1 désigne le groupe d'inertie sauvage et donc ρ se factorise à travers un groupe $G = C_n \rtimes \mathbb{Z}$ (où $C_n = \langle c \rangle$ représente l'inertie modérée donc $\mathrm{pgcd}(q,n) = 1$ et $\mathbb{Z} = \langle \Phi \rangle$ est le groupe engendré par le Frobenius géométrique Φ). On a de plus $c^n = 1$ et $c^i\Phi^j = \Phi^j c^{iq^j}$. Le groupe G agit par conjugaison sur les caractères de C_n : $({}^g\chi)(a) = \chi(g^{-1}ag)$ (en particulier $({}^\Phi\chi)(c) = \chi(c)^q$).

Déterminons les représentations irréductibles de $G = C_n \rtimes \mathbb{Z}$.
Soit $\chi : C_n \longrightarrow \mu_n$, $G_\chi = C_n \rtimes m\mathbb{Z}$ son stabilisateur où $\xi = \chi(c) \in \mu_n$, $O(\xi)$ est l'ordre de ξ et
$$\begin{aligned} m &= \min_i \{i \geq 1 \,|\, \xi^{q^i} = \xi\} \\ &= \min_i \{i \geq 1 \,|\, q^i \equiv 1 \ (\mathrm{mod}(O(\xi)))\} \end{aligned}.$$
On étend χ à G_χ en $\tilde{\chi}$ par $\tilde{\chi}(c^i\Phi^{mj}) = \xi^i$ ($\tilde{\chi}$ est à valeur dans $\mu_{O(\xi)} \subset \mu_n$).
Pour tout $\varphi \in Hom_{Ab}(\Phi^{m\mathbb{Z}}, \mathbb{C}^*)$, on obtient $\tilde{\chi}\varphi = \tilde{\chi}(\varphi \circ \pi) : G_\chi \longrightarrow \mathbb{C}^*$.
On pose alors $V_{\xi,\alpha} = V_{\chi,\varphi} = Ind_{G_\chi}^G \tilde{\chi}\varphi$. La représentation $V_{\xi,\varphi}$ est irréductible de dimension m et ne dépend que de l'orbite de $\chi = \{{}^\Phi\chi, {}^{\Phi^2}\chi, \dots, {}^{\Phi^m}\chi = \chi\}$. On a noté $\xi = \chi(c)$ et $\alpha = \varphi(\Phi^m)$.

Donnons des formules explicites pour $V_{\xi,\alpha}$:

$$V_{\xi,\alpha}(\Phi) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \alpha \\ 1 & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots\, 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad V_{\xi,\alpha}(c) = \begin{pmatrix} \xi^q & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \xi^{q^2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \xi^{q^m} \end{pmatrix}$$

où $\xi^{q^m} = \xi$.

3.1.2. ***Représentations irréductibles, modérément ramifiées et auto-duales.*** Notons tout d'abord que la représentation $\rho = V_{\xi,\alpha}$ est auto-duale si et seulement si il existe une matrice $A \in GL_m(\mathbb{C})$ telle que

$$\begin{cases} {}^t\rho(\Phi)A\rho(\Phi) = A, \\ {}^t\rho(c)A\rho(c) = A. \end{cases}$$

On a immédiatement que ${}^t\rho(c)A\rho(c) = (\xi^{q^i+q^j}A_{i,j})_{1\leq i,j\leq m}$, on en déduit que :

$${}^t\rho(c)A\rho(c) = A \Longleftrightarrow (\xi^{q^i+q^j}A_{i,j})_{1\leq i,j\leq m} = (A_{i,j})_{1\leq i,j\leq m}.$$

Ainsi si ${}^t\rho(c)A\rho(c) = A$ et $A_{i,j} \neq 0$ alors $O(\xi) \mid q^i + q^j$. En particulier, si $A_{ii} \neq 0$ alors $O(\xi) \mid 2q^i$ puis $O(\xi) \mid 2$ et $q \equiv 1 \bmod(O(\xi))$ donc $m = 1$. Autrement dit, si $m \geq 2$ alors $A_{ii} = 0$.

De plus, si $i \neq j$ $(i < j)$ et $A_{i,j} \neq 0$ alors $O(\xi) \mid q^i + q^j = q^i(1 + q^{j-i})$ et donc $O(\xi) \mid 1 + q^{j-i}$ et $q^{j-i} \equiv -1 \bmod(O(\xi))$ et par conséquent $2(j-i) = m$. Ainsi m est paire et on a nécessairement $|j-i| = \frac{m}{2}$. On peut donc synthétiser les résultats de la façon suivante :

(1) Si $2 \nmid m$ alors $\xi = \pm 1$, $m = 1$ et $\alpha = \pm 1$.

(2) Si $2 \mid m$ alors $A = \begin{pmatrix} 0 & C \\ B & 0 \end{pmatrix}$ avec B et C des matrices diagonales de $GL_{\frac{m}{2}}(\mathbb{C})$.

Comme ${}^t\rho(\Phi)A\rho(\Phi) = A$, on a $B = dI_{\frac{m}{2}}$ et $C = \alpha d I_{\frac{m}{2}}$ avec $\alpha = \pm 1$. Réciproquement, $\forall d \in \mathbb{C}^*$, si $\alpha = \pm 1$ alors $A = d\begin{pmatrix} 0 & I_{\frac{m}{2}} \\ \alpha I_{\frac{m}{2}} & 0 \end{pmatrix}$ défini une application bilinéaire non-dégénérée et G-invariante de $V_{\xi,\alpha} \times V_{\xi,\alpha} \longrightarrow \mathbb{C}$ qui est symétrique si $\alpha = 1$ et antisymétrique si $\alpha = -1$.

Finalement, on a la proposition suivante :

Proposition 3.1. *Une représentation irréductible, modérément ramifiée et auto-duale de $\mathcal{W}_K$ est de la forme :*

$$V_{\xi,1} \text{ ou } V_{\xi,-1}$$

selon qu'elle est orthogonale ou symplectique respectivement.

Remarque 3.2. La représentation $V_{\xi,1}$ (resp $V_{\xi,-1}$) se factorise à travers le produit semi-direct du groupe cyclique d'ordre $O(\xi)$ (correspondant à l'inertie) par un groupe cyclique d'ordre m (resp $2m$) car Φ^m (resp Φ^{2m}) agit trivialement sur $V_{\xi,1}$ (resp $V_{\xi,-1}$).

Proposition 3.3. *Soit K'/K une extension finie. On a alors :*

$$\dim(V_{\xi,1}^{\mathcal{W}_{K'}}) = \begin{cases} 0 & si\ O(\xi) \nmid e, \\ \mathrm{pgcd}(f,m) & si\ O(\xi) \mid e, \end{cases}$$

où e et f sont respectivement l'indice de ramification et le degré résiduel de K'/K.

Démonstration. Cela découle de la description explicite de $V_{\xi,1}$. En effet, si $O(\xi) \nmid e$ alors il n'y a pas d'invariants par le sous-groupe d'inertie de $\mathcal{W}_{K'}$. Par contre, si $O(\xi) \mid e$ alors l'inertie agit trivialement et l'action de $\mathcal{W}_{K'}$ se factorise à travers l'action du groupe cyclique engendré par Φ^f. □

3.1.3. *Lien entre les représentations orthogonales et symplectiques.* Si on considère une représentation irréductible auto-duale $V_{\xi,\alpha}$ (donc orthogonale ou symplectique), on peut supposer que $V_{\xi,\alpha}$ est symplectique quitte à tensoriser par un caractère non ramifié.

En effet, soit $ur_\beta : G \longrightarrow \mathbb{C}^*$ tel que $ur_\beta(c) = 1$ et $ur_\beta(\Phi) = \beta$ alors $\rho \otimes ur_\beta(c) = \rho(c)$ et $\rho \otimes ur_\beta(\Phi) = \beta\rho(\Phi)$.

Si on pose β tel que $\beta^m = -1$ et $b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \beta & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \beta^{m-1} \end{pmatrix}$ alors :

$$b^{-1}\rho(c)b = \rho(c)$$

et

$$b^{-1}\rho(\Phi)b = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \alpha\beta^m \\ 1 & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \\ 0 & \cdots\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -\alpha \\ 1 & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \\ 0 & \cdots\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En particulier, $\det V_{\xi,-1} = 1$ et $\det V_{\xi,1} = ur_{-1} = \eta_{ur}$ le caractère non-ramifié d'ordre 2.

On a donc obtenu la proposition suivante :

Proposition 3.4. *Soit σ une réprésentation, symplectique, irréductible et modérement ramifiée du groupe de Weil alors il existe un caractère non-ramifié ur_β de G et une représentation orthogonale ρ de G tel que $\sigma = \rho \otimes ur_\beta$.*

Remarque 3.5. Ce résultat nous a été fait remarquer par Guy Henniart.

3.2. Classes de Stiefel-Whitney et signes locaux.

Définition 3.6. Un fibré vectoriel ζ sur $\mathbb{R}$ est un triplet (E, π, B) où

(1) E (l'espace total) et B (la base) sont des espaces topologiques.
(2) $\pi : E \longrightarrow B$ (la projection) est une application continue.
(3) $\forall b \in B$, $\pi^{-1}(b)$ est muni d'une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel qui vérifie :
$\forall b \in B$, il existe un voisinage ouvert U de b, un entier k et un homéomorphisme

$$\varphi : U \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \pi^{-1}(U)$$

tel que :

(a) $\forall x \in U$, $(\varphi \circ \pi)(x,v) = x$ pour tout $v \in \mathbb{R}^k$.
(b) L'application $v \longrightarrow \varphi(x,v)$ est un isomorphisme entre $\mathbb{R}^k$ et $\pi^{-1}(x)$.

Remarque 3.7. Remarque si on peut choisir $U = B$, le fibré vectoriel est dit trivial.

Définition 3.8 (Classes de Stiefel-Whitney)**.** Pour tout fibré vectoriel réel $\zeta = (E, \pi, B)$, il existe des classes de cohomologie $w_n(\xi) \in H^n(B, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, $n \in \mathbb{N}$ vérifiant les axiomes suivants :

(1) $w_0(\zeta) = 1$.
(2) $w_n(\zeta) = 0$ pour n strictement supérieur à la dimension des fibres.
(3) Si $f : B' \longrightarrow B$ est une application continue, alors :

$$f^*(w_n(\zeta)) = w_n(f^*(\zeta)).$$

(4) Si ζ et ζ' sont deux fibrés vectoriels de base B alors pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$w_k(\zeta \oplus \zeta') = \sum_{i=1}^{k} w_i(\zeta) \cup w_{k-i}(\zeta')$$

où $\zeta \oplus \zeta'$ désigne la somme de Whitney de ζ et ζ'.
(5) $w_1(\gamma^1) \neq 0$ où γ^1 désigne le fibr é en droite canonique sur $\mathbb{R}P^1$ (l'espace projectif réel de dimension 1).

Donnons quelques propriétés des classes de Siefel-Whitney

Proposition 3.9. *Soit ζ et η deux fibrés vectoriels réels alors :*

(1) *Si η est isomorphe à ζ alors pour tout $i \in \mathbb{N}$, $w_i(\zeta) = w_i(\eta)$.*
(2) *Si ζ est trivial alors $w_i(\zeta) = 0$ $\forall i > 0$.*
(3) *Si η est trivial alors pour tout $i \in \mathbb{N}$, $w_i(\zeta \oplus \eta) = \eta$.*

Définition 3.10. Soit G un groupe fini et $\rho : G \longrightarrow O(V)$ est une représentation orthogonale (*i.e.* réalisable sur $\mathbb{R}$) alors on peut lui associer le fibré vectoriel suivant :

$$\zeta_V : \begin{array}{c} V \times_G E_G \\ \downarrow \\ B_G \end{array} \quad \text{défini par} \quad \begin{tikzcd} V \times_G E_G \arrow[r] \arrow[dr, dotted] & E_G \arrow[d] \\ & B_G \end{tikzcd}$$

où B_G désigne l'espace classifiant de G et $\begin{array}{c} E_G \\ \downarrow \\ B_G \end{array}$ son fibré universel.

Définition 3.11. On appelle classe de Stiefel-Whitney de $\rho : G \longrightarrow O(V)$ la classe de Stiefel-Whitney de ζ_V, autrement dit w_* est le morphisme composé suivant :

$$R(G,\mathbb{R}) \longrightarrow KO(B_G) \xrightarrow{w_*} H^*(B_G, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\times = H^*(G, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\times$$

où $R(G,\mathbb{R})$ désigne les représentations de G réalisable sur $\mathbb{R}$ et $KO(B_G)$ le groupe de Grothendieck des fibr és vectoriels sur B_G.

Remarque 3.12.
(1) L'isomorphisme $H^1(G, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq Hom(G, \{\pm 1\})$, nous permet d'identier $w_1(V)$ au caractère $g \mapsto \det \rho(g)$.
(2) Le groupe $H^2(G, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ classifie les extensions centrales de G par le groupe à 2 éléments. Si $w_1(V) = 0$ alors $w_2(V)$ est la classe de l'extension image réciproque par ρ du revêtement double $Spin(V,Q)$ de $SO(V,Q)$ où Q est une forme quadratique G-invariante définie positive quelconque sur V.

Définition 3.13. Soit $K/\mathbb{Q}_l$ une extension finie, L/K une extension finie galoisienne de groupe $G = Gal(L/K)$ et $\rho : G \longrightarrow O(V)$ est une représentation orthogonale. On identifie $w_1(\rho) = \det \rho$ à un élément u de $K^\times/K^{\times 2}$ par le morphisme injectif suivant :

$$H^1(G, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \overset{\text{infl}}{\hookrightarrow} H^1(G_K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq K^\times/K^{\times 2}$$

On notera Cl l'application composée suivante :

$$H^2(G, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \overset{\text{infl}}{\to} H^2(G_K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \overset{\alpha}{\simeq} H^2(G_K, \bar{K}^*)[2] \overset{\text{inv}}{\to} (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\,[2] \overset{x \to e^{2i\pi x}}{\to} \{\pm 1\}$$

où α se déduit de $\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \longrightarrow & \bar{K}^* \\ n & \to & (-1)^n \end{array}$ et inv est donné par la théorie du corps de classe local (voir par exemple le théorème 2.1 de [10]). On notera souvent encore $w_2(V) = w_2(\zeta_V) \in \{\pm 1\}$ l'image de $w_2(V) = w_2(\zeta_V)$ par Cl.

Théorème 3.14. *Si V est une représentation orthogonale de dimension* 0 *et de déterminant trivial d'un groupe fini G (et ζ_V le fibré vectoriel sur l'espace classifiant BG de G associé à V) alors*

$$W(V) = w_2(\zeta_V)$$

où $W(V)$ est le signe local (ou "root number").

Démonstration. C'est le théorème 1.5 de [5]. □

Corollaire 3.15. *Soit K un corps local, K' une extension galoisienne finie de K, $G := Gal(K'/K)$ et ψ est un caractère additif de K. Si V est une représentation orthogonale de G alors*

$$W(V, \psi) = W(\det V, \psi) w_2(\zeta_V)$$

Démonstration. On a que $V = V' \oplus (n-1).1 \oplus \det V$, donc $W(V,\psi) = W(V',\psi)W((n-1).1,\psi)W(\det V,\psi)$ (où $n = \dim V$). Par ailleurs, $W((n-1).1,\psi) = W(1,\psi)^{n-1} = 1$ et $W(V',\psi) = w_2(\zeta_{V'})$ d'après le théorème (car V' est de dimension 0 et de déterminant trivial. De plus $w_2(V') = w_2(V)$. En effet,

$$\begin{aligned} w_2(V) &= w_2(V' \oplus (n-1).1 \oplus \det V) \\ &= w_2(V') + w_1(V')w_1((n-1).1 \oplus \det V)) + w_2((n-1).1 \oplus \det V). \end{aligned}$$

On a $w_2((n-1).1 \oplus \det V) = w_2((n-1).1) + w_1((n-1).1)w_1(\det V) + w_2(\det V)$. Or $w_2((n-1).1) = w_1((n-1).1) = 0$ (car $w_2(1) = w_1(1) = 0$) et $w_2(\det V) = 0$ (car $\det V$ est de dimension 1). Enfin $w_1(\det V') = 0$ (car $\det V'$ est trivial). Finalement, $w_2(V) = w_2(V')$. □

Proposition 3.16. *Soient V_1 et V_2 deux représentations orthogonales (de dimension n et m respectivement) de G et ζ_{V_1} et ζ_{V_2} les fibrés vectoriels associés alors*

$$\begin{aligned} w_2(\zeta_{V1} \otimes \zeta_{V_2}) = n.w_2(\zeta_{V_1}) + m.w_2(\zeta_{V_2}) + \frac{n(n-1)}{2}.w_1(\zeta_{V_1}) \cup w_1(\zeta_{V_1}) \\ + \frac{m(m-1)}{2} w_1(\zeta_{V_2}) \cup w_1(\zeta_{V_2}) \\ + (mn-1)w_1(\zeta_{V_1}) \cup w_1(\zeta_{V_2}). \end{aligned}$$

Démonstration. Voir le problème 7C p.87 de [11]. □

On rappelle que le cup-produit

$$H^1(G_K, \{\pm 1\}) \times H^1(G_K, \{\pm 1\}) \longrightarrow H^2(G_K, \{\pm 1\})$$

s'identifie au symbole de Hilbert $(,-)_2 : K^\times/K^{\times 2} \times K^\times/K^{\times 2} \longrightarrow \{\pm 1\}$ (voir par exemple la section III.4 de [10]).

Proposition 3.17. *Soit K un corps local, K' une extension galoisienne finie de K, $G := Gal(K'/K)$ et ψ est un caractère additif de K. Soient V_1 et V_2 deux représentations orthogonales (de dimension n et m respectivement) de G, alors $\frac{W(V_1 \otimes V_2,\psi)}{W(\det(V_1 \otimes V_2),\psi)}$ est égal à :*

$$\left(\frac{W(V_1,\psi)}{W(\det V_1,\psi)}\right)^m \left(\frac{W(V_2,\psi)}{W(\det V_2,\psi)}\right)^n (u,-1)_2^{\frac{m(m-1)}{2}} (u',-1)_2^{\frac{n(n-1)}{2}} (u,u')_2^{mn-1}$$

où u et v sont des éléments de $K^\times/K^{\times 2}$ qui correspondent respectivement à $w_1(V_1)$ et $w_1(V_2)$ dans l'identification faite dans la définition 3.13.

Démonstration. C'est simplement la traduction en termes de root numbers de la proposition précédente et du fait que

$$w_1(\zeta_V) \cup w_1(\zeta_V),\ w_1(\zeta_W) \cup w_1(\zeta_W) \text{ et } w_1(\zeta_V) \cup w_1(\zeta_W)$$

coincident avec le symbole de Hilbert de

$$(u,u)_2 = (u,-1)_2,\ (u',u')_2 = (u',-1)_2 \text{ et } (u,u')_2$$

respectivement (par l'identification rappelée ci-dessus). $\square$

3.3. Signe local d'une représentation essentiellement symplectique modérément ramifiée du groupe de Weil tensorisée par une représentation auto-duale. Soit σ une représentation (complexe) de $\mathcal{W}_K$ modérement ramifiée, essentiellement symplectique de poids w et $\tilde{\sigma} = \sigma \otimes \omega^{w/2}$ est une représentation symplectique. On notera notamment que $\det \tilde{\sigma}$ est trivial et donc que $\frac{\det \sigma}{|\det \sigma|} = 1$.

Si σ est irréductible, elle se factorise à travers $G = C_m \rtimes C$ (où C_m est un groupe cyclique d'ordre m représentant l'inertie modérée et C est le groupe cyclique infini engendré par le Frobenius). On considère par ailleurs une représentation complexe auto-duale τ de G_K. L'objectif de cette partie est de donner une formule pour $W(\sigma \otimes \tau) = W(\tilde{\sigma} \otimes \tau)$ qui généralise la formule de Rohrlich (qui est précisément le cas où $\dim \sigma = 2$).

On rappelle que le signe local n'est pas sensible à la semi-simplification et on peut donc supposer que σ et $\tilde{\sigma}$ sont semi-simples.

Proposition 3.18. *Si σ est une représentation semi-simple, essentiellement symplectique de poids w de $\mathcal{W}_K$ alors il existe des représentations λ et θ de $\mathcal{W}_K$ tel que*

$$\sigma \simeq \left(\lambda \otimes \omega^{-w/2}\right) \oplus \left(\theta \oplus (\theta^* \omega^{-w})\right)$$

ou encore

$$\tilde{\sigma} = \sigma \otimes \omega^{w/2} = \lambda \oplus \left(\theta' \oplus \theta'^*\right)$$

*où λ est une représentation symplectique de type galoisienne (*i.e.* se factorise à travers un groupe de Galois fini) et $\theta' = \theta \otimes \omega^{w/2}$.*

Démonstration. Voir la proposition 6 de [15]. $\square$

Comme la tensorisation par une puissance réelle de ω ne modifie pas le signe local (voir le corollaire 2.18) et que $W(\sigma_1 \oplus \sigma_2) = W(\sigma_1)W(\sigma_2)$ on en déduit que pour déterminer $W(\sigma \otimes \tau)$ où σ est une représentation (complexe) de $\mathcal{W}_K$ modérement ramifiée, essentiellement symplectique de poids w, il suffit de le faire dans le cas où $\tilde{\sigma} = \sigma \otimes \omega^{w/2}$ est symplectique et irréductible et dans le cas où $\tilde{\sigma} = \theta \oplus \theta^*$.

3.3.1. *Le cas où $\tilde{\sigma} = \theta \oplus \theta^*$.*

Proposition 3.19. *Si $\tilde{\sigma} = \theta \oplus \theta^*$ alors*

$$W(\sigma \otimes \tau) = (\det \tau(-1))^{\frac{\dim \sigma}{2}} W(\sigma)^{\dim \tau}$$

Démonstration. On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
W(\sigma\otimes\tau) &= W(\tilde\sigma\otimes\tau)\\
&= W((\theta\oplus\theta^*)\otimes\tau)\\
&= W((\theta\otimes\tau)\oplus(\theta^*\otimes\tau))\\
&= W((\theta\otimes\tau)\oplus(\theta\otimes\tau)^*) \quad (\text{car } \tau \text{ est auto} - \text{duale})\\
&= \det(\theta\otimes\tau)(-1)\\
&= (\det\theta(-1))^{\dim\tau}(\det\tau(-1))^{\dim\theta}\\
&= (\det\tau(-1))^{\frac{\dim\sigma}{2}} W(\sigma)^{\dim\tau}.
\end{aligned}$$

□

3.3.2. ***Le cas où $\tilde\sigma$ est symplectique et irréductible.*** On rappelle (voir la proposition 3.4) que comme $\tilde\sigma$ est symplectique, irréductible et modérément ramifiée, il existe ur_β un caractère non-ramifié de G et une représentation ρ orthogonale de G tel que $\tilde\sigma=\rho\otimes ur_\beta$ et $(ur_\beta)^{\dim\sigma}=ur_{-1}=\eta_{nr}$. Avec les notations précédentes, on a $\tilde\sigma=V_{\xi,-1}$ et $\rho=V_{\xi,1}$.

Soit τ une réprésentation auto-duale de G.

(1) Si $\tau=\theta\oplus\theta^*$ alors

$$W(\sigma\otimes\tau)=W(\tilde\sigma\otimes\tau)=(\det\tilde\sigma(-1))^{\frac{\dim\tau}{2}}W(\tau)^{\dim\tilde\sigma}=(\det\tau(-1))^{\frac{\dim\sigma}{2}}.$$

(2) Si τ est symplectique alors $W(\sigma\otimes\tau)=W(\tilde\sigma\otimes\tau)=1$ (voir la proposition 2 de [14]).

(3) Si τ est orthogonale (et irréductible) alors :

   (a) Si τ est non-ramifiée :

$$\begin{aligned}
W(\sigma\otimes\tau) &= W(\sigma)^{\dim\tau}(\det\tau)(\pi^{a(\sigma)}) \quad (\text{voir la proposition 2.17}),\\
&= W(\sigma)^{\dim\tau}
\end{aligned}$$

   où la dernière égalité découle du fait que $(V_{\xi,-1})^{I_K}=0$ et donc $a(\sigma)=\dim\sigma$ est paire.

   (b) Si τ est sauvagement ramifiée. Dans ce cas, on peut utiliser la formule de Deligne-Henniart (voir la proposition 2.19) qui nous dit (comme ρ est modérément ramifiée et τ est plus ramifiée que ρ) qu'il existe $\gamma\in K^\times$ tel que

$$\varepsilon(\sigma\otimes\tau,\psi,dx)=\varepsilon(\tau,\psi,dx)^{\dim\sigma}(\det\sigma)(\gamma)$$

et donc :

$$\begin{aligned}
W(\sigma\otimes\tau) &= W(\tau)^{\dim\sigma}\frac{(\det\sigma)(\gamma)}{|(\det\sigma)(\gamma)|}\\
&= W(\tau)^{\dim\sigma} && (\sigma \text{ est essent. symplectique})\\
&= \det\tau(-1)^{\frac{\dim\sigma}{2}} && (2\mid\dim\sigma \text{ et } \tau \text{ auto}-\text{duale})
\end{aligned}$$

(c) Si τ est modérément ramifiée. On pose $\tilde\sigma = \rho\otimes ur_\beta$ (avec ρ orthogonale et ur_β est non-ramifié d'ordre $2\dim\sigma$). On pose $n_\rho = \dim\rho = \dim\sigma$, $n_\tau = \dim\tau$, $\det\rho = u_\rho K^{*2}$, $\det\tau = u_\tau K^{*2}$ (avec l'identification de la définition 3.13) et ψ un caractère additif tel que $n(\psi)=0$ on a :

$$\begin{aligned}
W(\sigma\otimes\tau) &= W(\tilde\sigma\otimes\tau)\\
&= W(\tilde\sigma\otimes\tau,\psi)\\
&= W(\rho\otimes\tau\otimes ur_\beta,\psi)
\end{aligned}$$

puis

$$W(\sigma\otimes\tau) = W(\rho\otimes\tau,\psi)ur_\beta(\pi^{a(\rho\otimes\tau)})$$

car $\dim ur_\beta = 1$, ur_β est non ramifié (voir la proposition 2.17) et $n(\psi)=0$. Ci-dessous, on note $W(\rho)$ pour $W(\rho,\psi)$ (où ψ est le caractère additif tel que $n(\psi)=0$ choisi ci-dessus) et de même pour $W(\tau)$, $W(\rho\otimes\tau)$, $W(\det\rho)$, $W(\det\tau)$ et $W(\det(\rho\otimes\tau))$.

Commençons par montrer que :

$$ur_\beta(\pi^{a(\rho\otimes\tau)}) = \begin{cases} 1 & \text{si } 2\mid \mathrm{n}_\tau \text{ et } \tau\neq\rho,\\ -1 & \text{si } \mathrm{n}_\tau = 1 \text{ ou } \tau=\rho.\end{cases}$$

On a tout d'abord $a(\rho\otimes\tau) = \mathrm{codim}(\rho\otimes\tau)^I = \dim(\rho\otimes\tau) - \dim(\rho\otimes\tau)^I$. De plus, ρ et τ sont des représentations irréductibles et orthogonales (représentations dont on a donné une description précise en 3.1, en particulier $n_\tau = 1$ ou n_τ est pair). Si $\rho = V_{\xi,1}$ et $\tau = V_{\xi',1}$ alors les coefficients diagonaux de $(\rho\otimes\tau)\,(c)$ sont de la forme $\xi^{q^i}\xi'^{q^j}$ qui est différent de 1 sauf dans le cas où $\xi=\xi'$ et $q^{\frac{n_\rho}{2}}+1$ divise q^i+q^j ce qui arrive lorsque $|j-i| = \frac{n_\rho}{2}$ c'est à dire précisément n_ρ fois. Par conséquent

$$\dim(\rho\otimes\tau)^I = \begin{cases} 0 & \text{si } \tau\neq\rho,\\ n_\rho & \text{si } \tau=\rho,\end{cases}$$

et donc

$$a(\rho\otimes\tau)=\begin{cases} n_\rho n_\tau & \text{si } \tau\neq\rho,\\ n_\rho(n_\rho-1) & \text{si } \tau=\rho.\end{cases}$$

Enfin, $ur_\beta(\pi^{2n_\rho})=1$ et $ur_\beta(\pi^{n_\rho})=-1$ (car ur_β est d'ordre $2n_\rho$) et finalement on en déduit que

$$ur_\beta(\pi^{a(\rho\otimes\tau)})=\begin{cases} 1 & \text{si } 2\mid \mathrm{n}_\tau \text{ et } \tau\neq\rho,\\ -1 & \text{si } \mathrm{n}_\tau=1 \text{ ou } \tau=\rho.\end{cases}$$

Montrons maintenant que :

$$W(\rho\otimes\tau)=(\det\tau(-1))^{\frac{n_\rho}{2}}W(\rho)^{n_\tau}(u_\rho,u_\tau),$$

où on note $(,)$ pour le symbole de Hilbert $(,)_2$. D'après la proposition 3.17, on a que $W(\rho\otimes\tau)$ est égale à :

$$W(\det(\rho\otimes\tau))W_\rho^{n_\tau}W_\tau^{n_\rho}(u_\rho,-1)^{\alpha_\tau}(u_\tau,-1)^{\alpha_\rho}(u_\rho,u_\tau)$$

où $W_\rho=\frac{W(\rho)}{W(\det\rho)}$, $W_\tau=\frac{W(\tau)}{W(\det\tau)}$, $\alpha_\tau=\frac{n_\tau(n_\tau-1)}{2}$ et $\alpha_\rho=\frac{n_\rho(n_\rho-1)}{2}$.

On a par ailleurs les égalités suivantes :

- $W(\det\rho)=W(\eta_{nr})=1$.
- $W(\det(\rho\otimes\tau))=W((\det\rho)^{n_\tau}(\det\tau)^{n_\rho})=W((\det\rho)^{n_\tau})=W(\eta_{nr}^{n_\tau})=1$.
- $(u_\rho,-1)=\det\rho(-1)=\eta_{nr}(-1)=1$.
- n_ρ est pair et $\frac{W(\tau)}{W(\det\tau)}\in\{\pm1\}$ donc $\left(\frac{W(\tau)}{W(\det\tau)}\right)^{n_\rho}=1$.
- $(u_\tau,-1)^{\frac{n_\rho(n_\rho-1)}{2}}=(\det\tau(-1))^{\frac{n_\rho(n_\rho-1)}{2}}=(\det\tau(-1))^{\frac{n_\rho}{2}}$ (car n_ρ est pair).

On en déduit que :

$$W(\rho\otimes\tau)=(\det\tau(-1))^{\frac{n_\rho}{2}}W(\rho)^{n_\tau}(u_\rho,u_\tau).$$

Déterminons $W(\rho\otimes\tau)$:

- Si $2\mid n_\tau$ alors $W(\rho)^{n_\tau}=1$ et $\det\tau=\eta_{nr}$ (d'après la description des représentations orthogonales faites en 3.1). On a (grâce aux propriétés du symbole de Hilbert, voir par exemple [12] p.333) alors $(u_\rho,u_\rho)=(u_\rho,-1)=\eta_{nr}(-1)=1$ et donc
$$W(\rho\otimes\tau)=(\det\tau(-1))^{\frac{n_\rho}{2}}.$$
- Si $n_\tau=1$ alors $(u_\rho,u_\tau)=\eta_{nr}(u_\tau)=(-1)^{v_K(u_\tau)}$ et donc

$$W(\rho\otimes\tau)=(\det\tau(-1))^{\frac{n_\rho}{2}}W(\rho)(-1)^{v_K(u_\tau)}.$$

Finalement,

$$
\begin{aligned}
W(\sigma\otimes\tau) &= W(\rho\otimes\tau)ur_\beta(\pi^{a(\rho\otimes\tau)})\\
&= (\tau_{-1})^{\frac{n_\rho}{2}}\begin{cases}-1 & \text{si } \rho=\tau,\\ -W(\rho)(-1)^{v_K(u_\tau)} & \text{si } \dim\tau=1,\\ \ \ 1 & \text{sinon.}\end{cases}\\
&= (\tau_{-1})^{\frac{n_\rho}{2}}\begin{cases}-1 & \text{si } \rho=\tau,\\ -W(\rho)(-1)^{v_K(u_\tau)} & \text{si } \tau\in\left\{1,\eta_{\mathrm{K}(\sqrt{\mathrm{u}_\tau})/\mathrm{K}}\right\},\\ \ \ 1 & \text{sinon.}\end{cases}
\end{aligned}
$$

où $\tau_{-1}=\det\tau(-1)$ et $\eta_{K(\sqrt{u_\tau})/K}$ désigne un caractère quadratique modérément ramifié ou le caractère non-ramifié (qu'on note aussi η_{nr}).

Enfin, en remarquant que $W(\sigma)=W(\rho\otimes ur_\beta)=W(\rho)ur_\beta(\pi^{a(\rho)})=-W(\rho)$, on peut synthésiser le point 3. ci-dessus dans le théoreme suivant :

Théorème 3.20. *Si σ est une représentation essentiellement symplectique irréductible modérément ramifiée de $\mathcal{W}_K$ alors pour toute représentation auto-duale et irréductible τ, $W(\sigma\otimes\tau)$ est égal à :*

$$
(\tau_{-1}))^{\frac{n_\rho}{2}}\begin{cases}-1 & \textit{si } \rho=\tau\\ W(\sigma)(-1)^{v_K(u_\tau)} & \textit{si } \tau=1 \textit{ ou } \tau=\eta_{K(\sqrt{u_\tau})/K}\\ \ \ 1 & \textit{sinon}\end{cases}
$$

où $\tau_{-1}=\det\tau(-1)$

On déduit de ce théorème (et des points 1. et 2.), le corollaire suivant :

Corollaire 3.21. *Si σ est une représentation essentiellement symplectique irréductible modérément ramifiée de $\mathcal{W}_K$ alors pour toute représentation auto-duale τ, on a :*

$$
W(\sigma\otimes\tau)=(\det\tau(-1))^{\frac{\dim\sigma}{2}}(-1)^{\langle\mathcal{V},\tau\rangle}
$$

où $\cdot\ \mathcal{V}=\rho\oplus\begin{cases}\bigoplus\limits_{\eta\in X_{nr}}\eta & \textit{si } W(\sigma)=-1,\\ \bigoplus\limits_{\eta\in X_{mr}}\eta & \textit{si } W(\sigma)=1.\end{cases}$

$\cdot\ X_{nr}=\{\eta:\mathcal{W}_K\longrightarrow\{\pm1\}$ *non ramifié*$\}$.

$\cdot\ X_{mr}=\{\eta:\mathcal{W}_K\longrightarrow\{\pm1\}$ *totalement modérement ramifié*$\}$.

Démonstration. En effet, si $\tau=\bigoplus\limits_i\tau_i$ avec τ_i irréductible auto-duale ou de la forme $\theta\oplus\theta^*$ alors $W(\sigma\otimes\tau)=\prod_i W(\sigma\otimes\tau_i)$. Comme le membre de droite de l'égalité du théorème est multiplicative en τ, il suffit de vérifier l'égalité

pour τ irréductible auto-duale ou de la forme $\theta \oplus \theta^*$.
Si $\tau = \theta \oplus \theta^*$ (resp. τ est symplectique) alors $\langle \mathcal{V}, \tau \rangle = 0$ et l'égalité se déduit du 1. (resp 2.) ci-dessus.
Si $2 \mid n_\tau$ alors

$$\langle \mathcal{V}, \tau \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } \tau = \rho \\ 0 & \text{si } \tau \neq \rho \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathrm{W}(\sigma \otimes \tau) = \begin{cases} -\left(\det \tau(-1)\right)^{\frac{n_\rho}{2}} & \text{si } \tau = \rho \\ \left(\det \tau(-1)\right)^{\frac{n_\rho}{2}} & \text{si } \tau \neq \rho \end{cases}$$

Si $\tau = 1 \in X_{nr}$ (resp. $\tau = \eta_{K(\sqrt{u_\tau})/K} \in X_{mr}$) alors $v_K(u_\tau) \equiv 0 \bmod 2$ (resp. $v_K(u_\tau) \equiv 1 \bmod 2$) et le théorème ci-dessus permet de conclure. □

Corollaire 3.22. *Si σ est une représentation essentiellement symplectique irréductible modérément ramifiée de $\mathcal{W}_K$ alors pour toute représentation auto-duale τ , on a :*

$$W(\sigma \otimes \tau) = (\det \tau(-1))^{\frac{\dim \sigma}{2}} (-W(\sigma))^{\dim \tau} (-1)^{\langle 1 \oplus \eta_{nr} \oplus \rho, \tau \rangle}$$

Démonstration. On distingue le cas où $l \neq 2$ et le cas où $l = 2$.

(1) Le cas où $l \neq 2$. On commencera par remarquer qu'il n'existe pas de représentation irréductible, auto-duale, non triviale, sauvagement ramifiée et de dimension impaire. En effet, le groupe d'inertie sauvage est un groupe d'ordre impair et un groupe fini d'ordre impair n'a aucune représentation irréductible auto-duale non-triviale. Il suffit ensuite de vérifier que dans les autres cas on a bien :

$$(-1)^{\langle \mathcal{V}, \tau \rangle} = (-W(\sigma))^{\dim \tau} (-1)^{\langle 1 \oplus \eta_{nr} \oplus \rho, \tau \rangle}.$$

(2) Le cas où $l = 2$. Dans ce cas, il suffit de montrer qu'on a $W(\sigma) = -1$ pour toute représentation symplectique irréductible modérément ramifiée σ. Une telle représentation est de la forme (d'après ce qui précède) :

$$\sigma = Ind_{M/K}(\chi\varphi) = Ind_{F/K}(Ind_{M/F}(\chi\varphi))$$

où M/F est l'extension quadratique correspondant aux groupes $C_n \rtimes m\mathbb{Z}$ et $C_n \rtimes 2m\mathbb{Z}$, φ est le caractère non ramifié de M et $Ind_{M/F}(\chi)$ est orthogonale irréductible. D'après le théorème de Frölich-Queyrut (voir le théorème 3 de [9]), on a $W(\sigma) = -W(\chi) = -\chi(u)$, où $M = F(u)$ et $u^2 \in 1 + \mathfrak{p}_F$ (car M/F est non-ramifié). De plus, le groupe multiplicatif du corps résiduel de M est d'ordre impair (car $l = 2$) donc $u \in 1 + \mathfrak{p}_M$. Or χ est modéré donc $\chi(u) = 1$ et $W(\sigma) = -1$.

Remarque 3.23. Dans le cas où $\dim \sigma = 2$, on retrouve le théorème de Rohrlich.

□

3.3.3. ***Le cas général d'une représentation symplectique modérément ramifiée.*** On a vu (proposition 3.18) que si σ est une représentation, modérément ramifiée, essentiellement symplectique de poids w de $\mathcal{W}_K$ et $\tilde{\sigma} = \sigma \otimes \omega^{w/2}$ alors on peut écrire :

$$\tilde{\sigma}^{ss} = (\theta \oplus \theta^*) \oplus \bigoplus_{i=1}^{r} \tilde{\sigma}_i$$

où θ est une représentation (pas nécéssairement irréductible) et les $\tilde{\sigma}_i$ sont irréductibles et symplectiques (et se factorisent à travers des groupes finis G_i). On a alors le théorème suivant :

Théorème 3.24. *Soit σ une représentation de $\mathcal{W}_K$ comme ci-dessus et τ une représentation (complexe) auto-duale de G_K alors :*

$$W(\sigma \otimes \tau) = W(\tilde{\sigma}^{ss} \otimes \tau) = (\det \tau(-1))^{\frac{\dim \tilde{\sigma}}{2}} (\det \theta(-1))^{\dim \tau} (-1)^{\langle \mathcal{V}, \tau \rangle}$$

où $\mathcal{V} = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{V}_i$, $\mathcal{V}_i = \rho_i \oplus \begin{cases} \bigoplus_{\eta \in X_{nr}} \eta & si\ W(\tilde{\sigma}_i) = -1 \\ \bigoplus_{\eta \in X_{mr}} \eta & si\ W(\tilde{\sigma}_i) = 1 \end{cases}$ *et* $\tilde{\sigma}_i = \rho_i \otimes ur_{\beta_i}$ *(avec ur_{β_i} un caractère non-ramifié de G_i et ρ_i une représentation orthogonale de G_i).*

Remarque 3.25. Si de plus, τ est une représentation de dimension paire et de déterminant trivial alors :

$$W(\tilde{\sigma} \otimes \tau) = (-1)^{\langle \mathcal{V}, \tau \rangle}.$$

C'est le cas notamment (voir [7]) des représentations appartenant à

$$T_{\Theta,p} = \left\{ \begin{array}{l} \sigma \text{ une } \overline{\mathbb{Q}}_p[G]\text{-représentation} \\ \text{auto-duale} \end{array} \middle| \begin{array}{l} \langle \sigma, \rho \rangle \equiv ord_p C_\Theta(\rho) \pmod 2 \\ \forall \rho \text{ une } \mathbb{Q}_p[G]\text{-rep. auto-duale} \end{array} \right\}.$$

Corollaire 3.26. *Soit σ une représentation de $\mathcal{W}_K$ comme ci-dessus et τ une représentation (complexe) auto-duale de G_K alors :*

$$W(\sigma \otimes \tau) = (\det \tau(-1))^{\frac{\dim \sigma}{2}} \prod_{i=1}^{r} (-W(\sigma_i))^{\dim \tau} (-1)^{\left\langle \bigoplus_{i=1}^{r} (1 \oplus \eta_{nr} \oplus \rho_i), \tau \right\rangle}$$

Dans le cas, d'une courbe elliptique sur un corps K ($[K : \mathbb{Q}_l] < +\infty$ et $l \neq 2, 3$) qui a potentiellement bonne réduction, alors la représentation $\sigma'_{E/K}$ du groupe de Weil-Deligne se factorise à travers le groupe de Weil en une représentation $\sigma_{E/K}$ modérément ramifiée (car $l \neq 2, 3$) et donc $\tilde{\sigma}_{E/K}$ est symplectique et irréductible de degré 2 ou de la forme $\theta \oplus \theta^*$ (où θ est caractère). On obtient le corollaire suivant :

Corollaire 3.27. *Si E/K est une courbe elliptique ($[K:\mathbb{Q}_l] < +\infty$ et $l \neq 2,3$) alors $W(\sigma_{E/K} \otimes \tau)$ est égal à :*

$$\begin{cases} \tau_{-1}(-W(E/K))^{\dim\tau}(-1)^{\langle 1\oplus\eta_{nr}\oplus\rho,\tau\rangle} & \textit{si } \tilde{\sigma}_{E/K} \textit{ est sympl et irréd,} \\ \tau_{-1}W(E/K)^{\dim\tau} & \textit{si } \tilde{\sigma} = \theta\oplus\theta^*. \end{cases}$$

où $\tau_{-1} = \det\tau(-1)$

Remarque 3.28. Le corollaire précédent est précisément la formule de Rohrlich.

4. Compatibilité entre signes locaux et nombres de Tamagawa

L'objectif de cette section est de démontrer une généralisation de la compatibilité entre les signes locaux et les nombres de Tamagawa qui est le résultat clef de l'article “Regulator constants and the parity conjecture” (voir le théorème 3.2 de [7]). Il est à noter qu'on est seulement capable de gérer les cas où $v \nmid p$ (le cas où $v \mid p$ avec $p \neq 2,3$ est traité pour les courbes elliptiques dans [7], pour nous il reste pour le moment hors d'atteinte). Cette restriction apporte des simplifications notables, on remarquera notamment que notre $C_v(\Theta)$ est simplement le produit des nombres de Tamagwa (pour traiter le cas $v \mid p$, il faudrait introduire une puissance de $p = l_v$ qui généralise le ω de [7]).

4.1. Nombres de Tamagawa.

Soient K et E des corps de nombres, $\sigma_{\mathfrak{p}} : G_K \longrightarrow GL(V) \simeq GL_n(E_{\mathfrak{p}})$ une représentation $\mathfrak{p}$ -adique, $\sigma_{\mathfrak{p},v} : G_{K_v} \longrightarrow GL_n(E_{\mathfrak{p}})$ sa restriction à K_v et T un $\mathcal{O}_{E_{\mathfrak{p}}}$-sous-réseau stable de V.

Définition 4.1 (Nombres de Tamagawa)**.**

(1) Si v est une place archimédienne, on pose $Tam(\sigma_{\mathfrak{p},v}) = \#H^1(K_v, T)$.

(2) Si v est une place finie telle que $v \nmid p$ (*i.e.* $l_v \neq p$), on note

$$L_f(K_v, V) = \det_{E_{\mathfrak{p}}} H^0(K_v, V) \otimes \left(\det_{E_{\mathfrak{p}}} H^1_f(K_v, V)\right)^{-1}$$

c'est un $E_{\mathfrak{p}}$-espace vectoriel de dimension 1. On a alors

$$\iota_V : L_f(K_v, V) \simeq E_{\mathfrak{p}}$$

où ι_V provient de la suite exacte suivante :

$$0 \to H^0(K_v, V) \to V^{I_{K_v}} \xrightarrow{Fr_v - 1} V^{I_{K_v}} \to H^1_f(K_v, V) \to 0.$$

De même, on note

$$L_f(K_v, T) = \det_{\mathcal{O}_{E_{\mathfrak{p}}}} H^0(K_v, T) \otimes \left(\det_{\mathcal{O}_{E_{\mathfrak{p}}}} H^1_f(K_v, T)\right)^{-1}$$

où $H^1_f(K_v, T)$ est l'image réciproque de $H^1_f(K_v, V)$ dans $H^1(K_v, T)$. C'est un $\mathcal{O}_{E_{\mathfrak{p}}}$-module libre de rang 1 et il existe un isomorphisme canonique entre $L_f(K_v, T) \otimes_{\mathcal{O}_{E_{\mathfrak{p}}}} E_{\mathfrak{p}}$ et $L_f(K_v, V)$. On définit alors

$Tam(\sigma_{\mathfrak{p},v})$ comme l'unique puissance de $\varpi_{E_\mathfrak{p}}$ (une uniformisante de $\mathcal{O}_{E_\mathfrak{p}}$) telle que :

$$\iota_V(L_f(K_v,T)) = Tam(\sigma_{\mathfrak{p},v})\mathcal{O}_{E_\mathfrak{p}}$$

Remarque 4.2. (1) Si $E = \mathbb{Q}$ et $\mathfrak{p} = p$ est un nombre premier alors $Tam(\sigma_{\mathfrak{p},v})$ est une puissance de p.
(2) Il est important de noter que, même si la notation ne le montre pas explicitement, $Tam(\sigma_{\mathfrak{p},v})$ dépend du choix du réseau T. Dans les cas que nous considérerons ensuite $Tam(\sigma_{\mathfrak{p},v})$ sera indépendant de T et vaudra même 1.

Proposition 4.3. *On a la formule suivante pour $Tam(\sigma_{\mathfrak{p},v})$ (avec v finie et $l_v \neq p$) :*

$$Tam(\sigma_{\mathfrak{p},v}) = \varpi_{E_\mathfrak{p}}^{l_\mathfrak{p}\left((H^1(I_{K_v},T)^{G_{K_v}})_{tors}\right)}.$$

En particulier si $E = \mathbb{Q}$ et $\mathfrak{p} = p$ alors $Tam(\sigma_{p,v}) = \#(H^1(I_{K_v},T)^{G_{K_v}})_{tors}$.

Démonstration. Voir la proposition 4.2.2 p.636 de [8]. □

Proposition 4.4. *Si $V^{I_{K_v}} = \{0\}$ alors $(V/T)^{I_{K_v}}$ est fini et*

$$Tam(\sigma_{\mathfrak{p},v}) = \varpi_{E_\mathfrak{p}}^{\alpha}$$

où $\alpha = l_\mathfrak{p}\left((V/T)^{G_{K_v}}\right)$.

Démonstration. On a la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow T \longrightarrow V \longrightarrow V/T \longrightarrow 0$$

qui donne lieu à la suite exacte :

$$0 \longrightarrow T^{I_{K_v}} \longrightarrow V^{I_{K_v}} \longrightarrow (V/T)^{I_{K_v}} \longrightarrow H^1(I_{K_v},T) \longrightarrow H^1(I_{K_v},V).$$

Or $V^{I_{K_v}} = \{0\}$, $(V/T)^{I_{K_v}}$ est de torsion et $H^1(I_{K_v},V)$ est sans torsion donc $(V/T)^{I_{K_v}} \simeq H^1(I_{K_v},T)_{tors}$. On en déduit que $(V/T)^{I_{K_v}}$ est fini et $(V/T)^{G_{K_v}} \simeq (H^1(I_{K_v},T)^{G_{K_v}})_{tors}$ ce qui donne le résultat. □

Le lien avec le plus "traditionnel" nombre de Tamagawa est le suivant :

Proposition 4.5. *Si $l_v \neq p$ et $\sigma_{p,v} := \sigma_{A/K_v} : G_{K_v} \longrightarrow GL(V_p) \simeq GL_{2d}(\mathbb{Q}_p)$ est la représentation p-adique de G_{K_v} associée à la variété abélienne A (de dimension d) alors :*

$$Tam(\sigma_{p,v}) = (A(K_v)/A_0(K_v))_p$$

où $A_0(K_v)$ désigne l'ensemble des points de $A(K_v)$ dont la réduction est non-singulière et $(*)_p$ signifie la partie p-primaire de $*$. C'est une puissance de p.

4.2. Nombres de Tamagawa et signes locaux. Soit E un corps de nombres et $E_{\mathfrak{p}}$ le complété de E en $\mathfrak{p}$ ($\mathfrak{p} \mid p$ et $p \neq 2$) On note $\mathcal{O}_{E_{\mathfrak{p}}}$ son anneau des entiers et $q = N(\mathfrak{p})$ le cardinal de son corps résiduel. On commence par rappeler le théorème suivant :

Théorème 4.6. *Soit G un sous-groupe fini de $GSp_n(\mathcal{O}_{E_{\mathfrak{p}}})$ (où $n = 2m$ et $p \neq 2$) alors l'ordre de G divise*

$$S_{n,\mathfrak{p}}(E) = q^{m^2+1} \prod_{i=1}^{m} (q^{2i} - 1).$$

Démonstration. Voir [1] Chap III p.147. □

4.2.1. *Détermination des "mauvais" nombres premiers.* Soit un prémotif essentiellement symplectique $M = \{(\sigma_{\mathfrak{p}}, V_{\mathfrak{p}})\}_{\mathfrak{p}}$ sur K.

Soit v une place de K (et ι un plongement de E dans $\mathbb{C}$), on considère les représentations $\sigma_{v,\mathfrak{p}} = \sigma_{\mathfrak{p}|G_{K_v}} : G_{K_v} \longrightarrow GL_n(E_{\mathfrak{p}})$ (pour $\mathfrak{p} \nmid l_v$) qui donnent toutes naissance à la même représentation $\sigma_{\iota M,v} : \mathcal{WD}_{K_v} \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ (car M est un prémotif).

Lemme 4.7. *Si G est un groupe compact et $\rho : G \longrightarrow GL_n(E_{\mathfrak{p}})$ est une représentation $\mathfrak{p}$-adique alors ρ est équivalente à une représentation $\mathfrak{p}$-adique à valeurs dans $GL_n(\mathcal{O}_{E_{\mathfrak{p}}})$.*

Démonstration. Le sous-groupe $GL_n(\mathcal{O}_{E_{\mathfrak{p}}})$ est un sous-groupe ouvert de $GL_n(E_{\mathfrak{p}})$ donc $H = \rho^{-1}(GL_n(\mathcal{O}_{E_{\mathfrak{p}}}))$ est un sous-groupe ouvert (car ρ est continu) donc H est d'indice fini dans G (car G est compact). Alors si on voit $GL_n(E_{\mathfrak{p}})$ comme le groupe des automorphismes linéaires de $E_{\mathfrak{p}}^n$ alors $\sum_{g \in H\backslash G} \rho(g)(\mathcal{O}_{E_{\mathfrak{p}}}^n)$ est un $\mathcal{O}_{E_{\mathfrak{p}}}$-réseau dans $E_{\mathfrak{p}}^n$ stable par G, ce qui nous fournit la représentation équivalente souhaitée. □

Proposition 4.8. *Soient M un prémotif, v une place de K et $\sigma_{\iota M,v}$ une représentation essentiellement symplectique. S'il existe $\mathfrak{p} \nmid 2, l_v$ tel que $J = \sigma_{v,\mathfrak{p}}(I_{K_v})$ est fini alors J est indépendant de $\mathfrak{p}$ ($\mathfrak{p} \nmid 2, l_v$) et*

$$|J| \mid S_n(E)_v \text{ où } S_n(E)_v := \underset{\mathfrak{p} \nmid 2, l_v}{\mathrm{pgcd}} S_{n,\mathfrak{p}}(E).$$

Démonstration. L'action de $\sigma_{\iota M,v}$ sur I_{K_v} se factorise à travers $J = \sigma_{v,\mathfrak{p}}(I_{K_v})$ et par conséquent pour tout $\mathfrak{p} \nmid 2, l_v$ on a $J = \sigma_{v,\mathfrak{p}}(I_{K_v})$ et J est indépendant de $\mathfrak{p}$. Si on pose $\sigma_{v,\mathfrak{p}|I_{K_v}}$ pour la restriction de $\sigma_{v,\mathfrak{p}}$ à I_{K_v} alors la représentation $\sigma_{v,\mathfrak{p}|I_{K_v}}$ peut être considérée comme à coefficients dans $\mathcal{O}_{E_{\mathfrak{p}}}$ (d'après le lemme ci-dessus, car I_{K_v} est un groupe compact) et même à valeurs dans $GSp_n(\mathcal{O}_{E_{\mathfrak{p}}})$ car $\sigma_{v,\mathfrak{p}}$ est essentiellement symplectique. On en déduit que pour tout $\mathfrak{p} \nmid 2, l_v$, J s'injecte dans chacun des $GSp_n(\mathcal{O}_{E_{\mathfrak{p}}})$ (car M est un prémotif) et donc $|J| \mid S_{n,\mathfrak{p}}(E)$ pour tout $\mathfrak{p} \nmid 2, l_v$. □

Corollaire 4.9. *Les nombres premiers qui divisent $|J|$ divisent $S_n(E) := \operatorname{pgcd}_{\mathfrak{p}\nmid 2} S_{n,\mathfrak{p}}(E)$ (qui est indépendant de l_v).*

Démonstration. Soit $\mathfrak{p}_v \mid l_v$ et l un diviseur de $S_{n,\mathfrak{p}_v}(E)$ alors d'après le théorème de Dirichlet il existe p premier (différent de l_v) tel que $l \mid p-1$ et donc $\forall r \in \mathbb{N}^*$, $l \mid p^r - 1$. En particulier, si $\mathfrak{p}$ est idéal premier au-dessus de p, l divise $S_{n,\mathfrak{p}}(E)$. Ainsi les diviseurs premiers de $S_n(E)_v := \operatorname{pgcd}_{\mathfrak{p}\nmid 2,l_v} S_{n,\mathfrak{p}}(E)$ sont les mêmes que ceux de $S_n(E) := \operatorname{pgcd}_{\mathfrak{p}\nmid 2} S_{n,\mathfrak{p}}(E)$. □

Exemple 4.10.
(1) Pour $E = \mathbb{Q}$ et $n = 2$ (le cas des courbes elliptiques), on obtient que pour tout nombre premier p (avec $p \neq 2$), $|J| \mid p^2(p^2 - 1)$. Ce nombre est toujours divisible par $2^3 \times 3 = 24$ et on montre que $S(\mathbb{Q}) := S_2(\mathbb{Q}) = 24$ (car $S_{2,3}(\mathbb{Q}) = 3 \times 24$ et $S_{2,5}(\mathbb{Q}) = 5^2 \times 24$). Donc dans ce cas les "mauvais" nombres premiers sont 2 et 3.
(2) Pour $E = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ et $n = 2$, on montre facilement (grâce à la loi de réciprocité quadratique et à la décompositon des idéaux premiers dans une extension quadratique de $\mathbb{Q}$) que les "mauvais" nombres premiers sont $2, 3$ et 5.

Remarque 4.11.
(1) Pour E quelconque et $p \leq n + 1$ on a que p divise $S_n(E)$ (petit théorème de Fermat). Ainsi tout les nombres premiers inférieurs ou égaux à $n+1$ sont des "mauvais" nombres premiers. Ce ne sont bien sûr pas les seuls (voir l'exemple ci-dessus $E = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ et $n = 2$ où 5 est un "mauvais" nombre premier).
(2) Pour $E = \mathbb{Q}$, les "mauvais" nombres premiers sont précisément les nombres premiers inférieurs ou égaux à $n + 1$. En effet, si $p > n + 1 = 2m + 1$ alors $\forall i \in \{1, .., m\}$, $p - 1 \nmid 2i$. On choisit alors un nombre premier p' tel que p' est une racine primitive modulo p (c'est possible grâce au théorème de Dirichlet), on obtient $p \nmid p'^{2i} - 1$ $\forall i \in \{1, .., m\}$ et par conséquent $p \nmid S_n(\mathbb{Q})$. C'est ce cas là qui nous servira pour les prémotifs sur $\mathbb{Q}$ (notamment les courbes elliptiques et les variétés abéliennes).
(3) Pour E quelconque peut-on donner précisément les "mauvais" nombres premiers ? une borne (intéressante) ? On notera que si les diviseurs premiers de $S_2(\mathbb{Q}(\sqrt{5}))$ sont 2, 3 et 5, ceux de $S_2(\mathbb{Q}(\sqrt{7}))$ sont simplement 2 et 3.

4.2.2. ***Détermination des nombres de Tamagawa.*** On a toujours $M = \{(\sigma_\mathfrak{p}, V_\mathfrak{p})\}_\mathfrak{p}$ un prémotif essentiellement symplectique sur K. On suppose dorénavant que p ne fait pas partie des "mauvais" nombres premiers (*i.e.* $p \nmid S_n(E)$ et en particulier $p \nmid |J|$).

On rappelle la proposition générale suivante :

Proposition 4.12. *Si G est un groupe, M un G-module et H un sous-groupe distingué d'indice fini de G. Si $[G:H]$ est inversible dans M alors :*

$$H^1(G,M) \simeq H^1(H,M)^{G/H}.$$

Démonstration. Voir la proposition 10.4 p.85 de [3]. □

Proposition 4.13. *Si $\sigma_{\mathfrak{p},v}(I_{K_v})$ est fini et $p \nmid S_n(E)$ alors $p \nmid |J|$ et :*

$$Tam(\sigma_{\mathfrak{p},v}) = 1.$$

Démonstration. D'après la proposition 4.3, le nombre de Tamagawa associé à une telle représentation $\sigma_{\mathfrak{p},v}$ est donné par

$$Tam(\sigma_{\mathfrak{p},v}) = \varpi_{E_\mathfrak{p}}^{\alpha}$$

où $\alpha = l_\mathfrak{p}\left((H^1(I_{K_v},T)^{G_{K_v}})_{tors}\right)$.
On a la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow I^0 \longrightarrow I_{K_v} \longrightarrow J \longrightarrow 0$$

donc d'après la proposition précédente avec $G = I_{K_v}$, $H = I^0$, $G/H = J$ et $M = T$ ($p \nmid |J|$ donc $|J|$ est inversible dans T) on déduit que $H^1(I_{K_v},T) \simeq H^1(I^0,T)^J$.
Or comme I^0 agit trivialement sur T, on a $H^1(I^0,T) \simeq Hom_{cont}((I^0)^{ab},T)$ qui est sans p-torsion. Par conséquent, $\alpha = 0$ et $Tam(\sigma_{\mathfrak{p},v}) = \varpi_{E_\mathfrak{p}}^0 = 1$. □

Corollaire 4.14. *Si $\sigma_{\mathfrak{p},v}(I_{K_v})$ est fini, $p \nmid S_n(E)$, L_w est une extension galoisienne finie de K_v et si on pose $\sigma_{\mathfrak{p},w} : G_{L_w} \longrightarrow GL(V_\mathfrak{p})$ alors :*

$$Tam(\sigma_{\mathfrak{p},w}) = Tam(\sigma_{\mathfrak{p},v}) = 1,$$

autrement dit le nombre de Tamagawa reste inchangé lorsqu'on passe à une extension galoisienne finie de K_v.

4.2.3. *Compatibilité entre nombres de Tamagawa et constantes de régulation.* Soit $M = \{(\sigma_\mathfrak{p}, V_\mathfrak{p})\}$ un prémotif sur K à coefficients dans E (avec $\sigma_\mathfrak{p} : G_K \longrightarrow GL(V_\mathfrak{p}) \simeq GL_n(E_\mathfrak{p})$. On fait les hypothèses suivantes :

- Soit v une place de K ($v \mid l_v$) telle que $\sigma_v := \sigma_{\iota M,v}$ est une représentation essentiellement symplectique de poids w, modérément ramifiée du groupe de Weil $\mathcal{W}_{K_v}$.
- Soit $\mathfrak{p} \mid p$ une place de E telle que $p \neq l_v$ et $p \nmid S_n(E)$ (en particulier $p > n+1$).
- L'image $\sigma_{v,\mathfrak{p}}(I_{K_v})$ est finie. Ainsi les facteurs premiers de $\sigma_{\mathfrak{p},v}(I_{K_v})$ divisent $S_n(E)$ (d'après le corollaire 4.9) et $\sigma_{\mathfrak{p},v}(I_{K_v})$ est d'ordre premier à l_v (car σ_v est modérément ramifié). En particulier $p \nmid |\sigma_{\mathfrak{p},v}(I_{K_v})|$.

On utilise les notations suivantes :

- La représentation $\tilde{\sigma}_v = \sigma_v \otimes \omega^{w/2}$ est une représentation symplectique modérément ramifiée du groupe de Weil $\mathcal{W}_{K_v}$.
- On écrit la décomposition de $\tilde{\sigma}_v^{ss}$ sous la forme suivante :

$$\tilde{\sigma}_v^{ss} = (\theta \oplus \theta^*) \oplus \bigoplus_{i=1}^{r} \tilde{\sigma}_i$$

  où $\tilde{\sigma}_i = V_{\xi_i,-1}$.
- On a $\tilde{\sigma}_i = \rho_i \otimes ur_{\beta_i}$ où ur_{β_i} un caractère non-ramifié de G_i et $\rho_i = V_{\xi_i,1}$ une représentation orthogonale de G_i

Définition 4.15. On définit l'extension finie L/K_v comme le compositum de :

- toutes les extensions quadratiques de K_v qui sont non ramifiées ou modérément ramifiées.
- toutes les extensions modérément ramifiées L_i telle que $\rho_i = V_{\xi_i,1}$ se factorise par $Gal(L_i/K_v)$.

Remarque 4.16. L'ordre de ξ_i divise $|\sigma_{\mathfrak{p},v}(I_{K_v})|$ et donc $p \nmid |Gal(L_i/K_v)|$. Par conséquent, $p \nmid [L : K_v]$.

On pose enfin $G' = Gal(L/K_v) \simeq C \rtimes \langle \Phi \rangle$.

Soit τ une représentation auto-duale de $G = Gal(F/K_v)$ (où F est une extension finie de K_v) et r_G la représentation régulière de G.

On se ramènera au cas où $L \subset F$ (voir le corollaire 4.24 ci-dessous) et donc au cas où on peut voir σ_v^{ss} comme une représentation de G.

On applique le corollaire 3.26 à σ_v (et le fait que $\dim \tau = \langle r_G, \tau \rangle$) et on obtient :

$$W(\sigma_v \otimes \tau) = (\det \tau(-1))^{\frac{\dim \sigma}{2}} (-1)^{\langle \tau, \mathcal{V} \rangle}$$

où $\mathcal{V} = \bigoplus_i \mathcal{V}_i$ avec $\mathcal{V}_i = 1 \oplus \eta_{nr} \oplus \gamma_i \oplus \rho_i$, $\tilde{\sigma}_i = \rho_i \otimes ur_{\beta_i}$ (où ur_{β_i} est un caractère non-ramifié de G_i et $\rho_i = V_{\xi_i,1}$ une représentation orthogonale de G_i) et $\gamma_i = \begin{cases} r_G & \text{si } W(\sigma_i) = -1, \\ 0 & \text{si } W(\sigma_i) = 1. \end{cases}$

Remarque 4.17. La représentation $\mathcal{V}$ est une représentation sur $GL_n(E')$ avec E'/E une extension finie telle que $\mathfrak{p}$ ne se ramifie pas dans E'. En effet, $\rho_i = V_{\xi_i,1}$ où l'ordre de ξ_i divise $|\sigma_{\mathfrak{p},v}(I_{K_v})|$ et donc ρ_i se factorise à travers le groupe de Galois d'une extension de degré d_i de K_v avec $p \nmid d_i$ et p est non ramifié dans $\mathbb{Q}(\xi_i)/\mathbb{Q}$. L'extension E' compositum de E avec les $\mathbb{Q}(\xi_i)$ est une extension finie de E où $\mathcal{V}$ est réalisable et $\mathfrak{p}$ ne se ramifie pas dans E'.

On rappelle que si $\Theta = \sum_i n_i H_i$ est une G-relation alors

$$\mathcal{D}_{\mathcal{V}}(\Theta) = C_\Theta(\mathcal{V}) = \prod_i \det \left(\frac{1}{|H_i|} \langle , \rangle \Big| \mathcal{V}^{H_i} \right)^{n_i} \in E'^{\times}/E'^{\times 2}$$

et si $\mathfrak{P}$ est une place de E' au-dessus de $\mathfrak{p}$, on notera $ord_{\mathfrak{p}}(\mathcal{D}_{\mathcal{V}}(\Theta))$ pour $ord_{\mathfrak{P}}(\mathcal{D}_{\mathcal{V}}(\Theta))$. De plus, on notera $C_v(\Theta) = \prod_i Tam(\sigma_{\mathfrak{p},v_i})^{n_i}$ où v_i est une place de F^{H_i} au-dessus de v. On a $C_v(\Theta) = 1$ d'après le corollaire 4.14.

L'objectif de ce qui suit est de démontrer le résultat principal de cette section sous la forme du théorème suivant (ici on ne suppose pas que $L \subset F$) :

Théorème 4.18. *Si Θ une G-relation, $\mathfrak{p} \mid p$ et $p \nmid l_v S_n(E)$ alors :*

$$ord_{\mathfrak{p}}(C_v(\Theta)) \equiv ord_{\mathfrak{p}}(\mathcal{D}_{\mathcal{V}}(\Theta)) \equiv 0 \bmod 2$$

où $\mathcal{V}$ est défini ci-dessus. On notera parfois,

$$C_v \sim_{\mathfrak{p}} \mathcal{D}_{\mathcal{V}} \sim_{\mathfrak{p}} 1.$$

Remarque 4.19. On a d'après ce qui précède $C_v \sim_{\mathfrak{p}} 1$. L'objectif est donc de montrer que $\mathcal{D}_{\mathcal{V}} \sim_{\mathfrak{p}} 1$.

Dans le cas d'une courbe elliptique A sur K (un corps de nombres) avec $E = \mathbb{Q}$, $\mathfrak{p} = p$, $\sigma_{v,\mathfrak{p}} = V_p(A)^*$, $n = 2$, $p \geq 5$, $v \nmid p$ et A admet bonne réduction sur une extension modérément ramifiée de K_v (c'est automatique si $v \nmid 6$) on a la légère amélioration suivante (pour $p \geq 5$) du théorème 1.6 de [7] :

Corollaire 4.20. *Soit $p \geq 5$. Si L/K est une extension galoisienne de corps de nombres et A/K est une courbe elliptique qui admet bonne réduction sur une extension modérément ramifiée de K_v pour chaque place $v \mid 6$ de réduction additive où le groupe de décomposition en v de L/K n'est pas cyclique. Pour toute $G_{L/K}$-relation Θ on a :*

$$(-1)^{\langle \tau, S_p(E/K) \rangle} = W(E/K, \tau) \text{ pour } \tau \in T_{\Theta,p}$$

Remarque 4.21. On pouvait en fait déjà déduire ce résultat en utilisant, une version légèrement plus forte de la formule de Rohrlich (qui pouvait se déduire de sa démonstration).

Réduction au cas où $L \subset F$

Comme promis, expliquons rapidement pourquoi on peut supposer que $L \subset F$. On rappelle que $G = Gal(F/K_v)$

Lemme 4.22. *Supposons que $\mathcal{V}$ est $E[G]$-module et que M/K_v est une extension galoisienne contenue dans F (avec $H = Gal(F/M)$) alors on a :*

$$ord_{\mathfrak{p}}(\mathcal{D}_{\mathcal{V}^H}(\Theta)) \equiv ord_{\mathfrak{p}}(\mathcal{D}_{\mathcal{V}}(\tilde{\Theta})) \mod 2 \text{ pour toutes } G/H\text{-relations } \Theta$$

où $\mathcal{V}' = \mathcal{V}^{Gal(F/M)}$, $\tilde{\Theta}$ est le relevé de Θ dans G et $G/H = Gal(M/K_v)$.

Démonstration. Soit $\Theta = \sum_i n_i H_i$ une G/H-relation. On a la G-relation $\tilde{\Theta}$: le relevé de Θ dans G. Comme les composantes $\bar{K}_v$-irréductibles de $\mathcal{V}^H$ sont précisément les $\bar{K}_v$-irréductibles de $\mathcal{V}$ qui se factorise par G/H, les composantes $\bar{K}_v$-irréductibles de $\mathcal{V} \ominus \mathcal{V}^H$ n'apparaissent dans aucun des $K_v[Gal(M/K_v)/H_i]$ et donc (d'après le lemme 2.24) $C_{\tilde{\Theta}}(\mathcal{V} \ominus \mathcal{V}^H) = 1$ puis $C_\Theta(\mathcal{V}^H) = C_{\tilde{\Theta}}(\mathcal{V})$ et $ord_{\mathfrak{p}}(\mathcal{D}_{\mathcal{V}}(\tilde{\Theta})) \equiv ord_{\mathfrak{p}}(\mathcal{D}_{\mathcal{V}^H}(\Theta))$. □

Remarque 4.23. En combinaison avec la remarque 4.19, on a obtenu que : Si $ord_{\mathfrak{p}}(C_v(\tilde{\Theta})) \equiv ord_{\mathfrak{p}}(\mathcal{D}_{\mathcal{V}}(\tilde{\Theta})) \bmod 2$ pour toutes G -relations $\tilde{\Theta}$ alors : $ord_{\mathfrak{p}}(C_v(\Theta)) \equiv ord_{\mathfrak{p}}(\mathcal{D}_{\mathcal{V}^H}(\Theta)) \bmod 2$ pour toutes $Gal(M/K_v)$-relations Θ.

Corollaire 4.24. *On peut supposer que F contient L.*

Démonstration. En effet, si L n'est pas inclu dans F alors $L \subset FL \subset (FL)^{Gal} = F'$ (clotûre galoisienne de FL). Et d'après le lemme précédent, si on montre le résultat pour F' alors il vrai aussi pour F (car F/K_v est une extension galoisienne contenue dans F'). □

Dorénavant, on suppose donc que $L \subset F$, on rappelle que $G = Gal(F/K_v)$ et on pose $G' = G/N = Gal(L/K_v)$.

Démonstration du théorème 4.18

Soit Θ une G-relation. On rappelle qu'on a supposé que $\mathfrak{p} \mid p$, $p \nmid S_n(E)$ (*i.e.* p ne fait pas partie des “mauvais” nombres premiers) et $p \neq l_v$.

On a que $\mathcal{V}$ est une représentation du groupe $G' = C \rtimes \langle \Phi \rangle$ (où C est un groupe fini qui représente l'inertie, en particulier les diviseurs premiers de $|C|$ sont des diviseurs premiers de $S_n(E)$ donc distincts de p par hypothèse).

Lemme 4.25. *Pour démontrer le théorème 4.18, on peut se ramener au cas où le degré résiduel de F/K_v est une puissance de* 2 *.*

Démonstration. Le nombre de Tamagawa reste trivial dans toute extension (voir le corollaire 4.14). On a alors $C_v = (D, C_v)$ en itérant le 7. du théorème 2.29 (où $D \lhd G$ est le sous-groupe distingué tel que l'extension non-ramifiée maximale de degré impair de K dans F soit le corps fixe par D). Montrons que $\mathcal{D}_{\mathcal{V}} \sim (D, \mathcal{D}_{\mathrm{Res}_D \mathcal{V}})$.
Tout d'abord, d'après 2.32 $(D, \mathcal{D}_{\mathrm{Res}_D \mathcal{V}}) \sim \mathcal{D}_{Ind_D^G \mathrm{Res}_D \mathcal{V}}$. Or

$$Ind_D^G \mathrm{Res}_D \mathcal{V} \simeq \mathcal{V} \otimes Ind_D^G 1_D \simeq \mathcal{V} \oplus R$$

où $R = \mathcal{J} \oplus \mathcal{J}^*$ sur $\bar{\mathbb{Q}}$ et donc $\mathcal{D}_R \sim 1$ d'après le 2. du corollaire 2.23. Finalement,

$$(D, \mathcal{D}_{\mathrm{Res}_D \mathcal{V}}) \sim \mathcal{D}_{Ind_D^G \mathrm{Res}_D \mathcal{V}} \sim \mathcal{D}_{\mathcal{V} \oplus R} \sim \mathcal{D}_{\mathcal{V}} \mathcal{D}_R \sim \mathcal{D}_{\mathcal{V}}.$$

Maintenant, d'après le 1. du théorème 2.29, pour montrer que

$$C_v = (D, C_v) \sim_{\mathfrak{p}} (D, \mathcal{D}_{\mathrm{Res}_D \mathcal{V}}) \sim \mathcal{D}_{\mathcal{V}}$$

il suffit de montrer que $\mathcal{D}_{\mathrm{Res}_D \mathcal{V}}$ et C_v coïncident sur les D-relations (c'est à dire lorsque le degré résiduel de F/K_v est une puissance de 2). Autrement dit, pour montrer que $ord_{\mathfrak{p}}(C_v(\Theta)) \equiv ord_{\mathfrak{p}}(\mathcal{D}_{\mathcal{V}}(\Theta)) \equiv 0 \bmod 2$, il suffit de se resteindre au cas où le degré résiduel de F/K_v est une puissance de 2. □

Proposition 4.26. *Avec les hypothèses ci-dessus, si Θ est une G-relation alors :*

$$ord_{\mathfrak{p}}(C_{\Theta}(\mathcal{V})) \equiv 0 \bmod 2.$$

On pose $a(\Theta) = \prod_i \det(\langle , \rangle \mid \mathcal{V}^{H_i})^{n_i}$ et $d(\Theta) = \prod_i |H_i|^{-n_i \dim \mathcal{V}^{H_i}}$. On a donc

$$\mathcal{D}_{\mathcal{V}}(\Theta) = C_{\Theta}(\mathcal{V}) = a_{\mathcal{V}}(\Theta) d_{\mathcal{V}}(\Theta).$$

Lemme 4.27. *Avec les hypothèses ci-dessus, si Θ est une G-relation alors :*

$$ord_{\mathfrak{p}}(a_{\mathcal{V}}(\Theta)) \equiv 0 \bmod 2.$$

Démonstration. $a_{\mathcal{V}}(\Theta) = C_{\mathrm{Proj}_{G'}\Theta}(\mathcal{V}) \prod_i |H_i N/N|^{n_i \dim \mathcal{V}^{H_i}}$. Or d'après la proposition 2.25 $ord_{\mathfrak{p}}(C_{\mathrm{Proj}_{G'}\Theta}(\mathcal{V})) \equiv 0 \bmod 2$ et par ailleurs $p \nmid |G'|$ (en effet, $p \nmid |C|$, $p \neq 2$ et le degré résiduel de F/K_v est une puissance de 2) donc $ord_{\mathfrak{p}}(\prod_i |H_i N/N|^{-n_i \dim \mathcal{V}^{H_i}}) \equiv 0 \bmod 2$. Finalement, on obtient $ord_{\mathfrak{p}}(a_{\mathcal{V}}(\Theta)) \equiv 0 \bmod 2$. □

On va maintenant s'atteler à démontrer que

$$ord_{\mathfrak{p}}(d_{\mathcal{V}}(\Theta)) \equiv 0 \bmod 2 \text{ ou encore } d_{\mathcal{V}} \sim_{\mathfrak{p}} 1.$$

Lemme 4.28. *Avec les hypothèses ci-dessus, on a :*

$$ord_{\mathfrak{p}}(d_{\mathcal{V}}(\Theta)) \equiv ord_{\mathfrak{p}}\left(\prod_i (e_{H_i} f_{H_i})^{\dim \mathcal{V}^{H_i}}\right) \bmod 2$$

où e_H et f_H sont respectivement l'indice de ramification et le degré résiduel de F^H/K_v.

Démonstration. On pose $d_{\mathcal{V}}(H) = |H|^{-\dim \mathcal{V}^H}$ ($= |H|^{\dim \mathcal{V}^H}$ modulo les carrés). Montrons que $ord_{\mathfrak{p}}(d_{\mathcal{V}}(H)) \equiv 0 \bmod 2$. On peut remplacer $|H|$ par $[G : H]$. En effet si $\Theta = \sum\limits_i n_i H_i$ alors $d_{\mathcal{V}}(\Theta) = \prod_i |H_i|^{n_i \dim \mathcal{V}^{H_i}}$. Or comme $\sum\limits_i n_i \dim \mathcal{V}^{H_i} = 0$, on a :

$$\prod_i |H_i|^{n_i \dim \mathcal{V}^{H_i}} \prod_i [G : H_i]^{n_i \dim \mathcal{V}^{H_i}} = \prod_i |G|^{n_i \dim \mathcal{V}^{H_i}} = |G|^{\sum\limits_i n_i \dim \mathcal{V}^{H_i}} = 1.$$

On en déduit que $\prod_i |H_i|^{n_i \dim \mathcal{V}^{H_i}} = \prod_i [G : H_i]^{n_i \dim \mathcal{V}^{H_i}}$ modulo les carrés. De plus, comme $[G : H_i] = e_{H_i} f_{H_i}$, on obtient :

$$\begin{aligned} ord_{\mathfrak{p}}(d_{\mathcal{V}}(\Theta)) &\equiv ord_{\mathfrak{p}}\left(\prod_i [G : H_i]^{\dim \mathcal{V}^{H_i}}\right) \bmod 2 \\ &\equiv ord_{\mathfrak{p}}\left(\prod_i (e_{H_i} f_{H_i})^{\dim \mathcal{V}^{H_i}}\right) \bmod 2. \end{aligned}$$

□

D'après le lemme 2.33, on sait que $\mathcal{D}_{r_G}(\Theta) \sim 1$ et donc que

$$\mathcal{D}_{1\oplus\eta_{nr}\oplus\rho\oplus r_G}(\Theta) \sim \mathcal{D}_{1\oplus\eta_{nr}\oplus\rho}(\Theta).$$

Ainsi pour démontrer que $d_{\mathcal{V}} \sim_{\mathfrak{p}} 1$ dans le cas général, il suffit de le montrer dans le cas où $\tilde{\sigma} = \rho\otimes ur_\beta$ (avec $\rho = V_{\xi,1}$ pour un certain ξ) et $\mathcal{V} = 1\oplus\eta_{nr}\oplus\rho$. On suppose donc désormais que :

$$\tilde{\sigma} = \rho \otimes ur_\beta \text{ et } \mathcal{V} = 1 \oplus \eta_{nr} \oplus \rho$$

On a (voir la proposition 3.3) que si $H \supset Gal(F/L)$ (*i.e.* F^H est un sous-corps de L) alors :

$$\dim(\rho^H) = \dim(V_{\xi,1}^H) = \begin{cases} 0 & \text{si } O(\xi) \nmid e_H \\ \mathrm{pgcd}(f_H, m) & \text{si } O(\xi) \mid e_H \end{cases}$$

où $O(\xi) = |C|$ et e_H et f_H sont respectivement l'indice de ramification et le degré résiduel de F^H/K_v. Par ailleurs, on a que $\dim \eta_{nr}^H = 1 \iff 2 \mid f_H$ et que f_H est une puissance de 2. D'après la définition de L,

$$2 \mid f_{F^H/K_v} \iff 2 \mid f_{F^H\cap L/K_v} \text{ et } O(\xi) \mid e_{F^H/K_v} \iff O(\xi) \mid e_{F^H\cap L/K_v}.$$

On en déduit que :

$$d_{\mathcal{V}} \sim_{\mathfrak{p}} \left(H \longrightarrow (e_H f_H)^{\dim \mathcal{V}^H}\right) = \left(G, I, \begin{cases} 1 & \text{si } 2 \mid f \text{ ou } O(\xi) \mid e \\ ef & \text{sinon} \end{cases}\right)$$

où I est le sous-groupe d'inertie de G. Par ailleurs on a :

$$\left(G, I, \begin{cases} 1 & \text{si } 2 \mid f \text{ ou } O(\xi) \mid e \\ ef & \text{sinon} \end{cases}\right) \overset{(6)}{\sim} \left(I, I, \begin{cases} 1 & \text{si } O(\xi) \mid e \\ e & \text{sinon} \end{cases}\right)$$
$$\overset{(5)}{\sim} \left(I, W, \begin{cases} 1 & \text{si } O(\xi) \mid ef \\ ef & \text{sinon} \end{cases}\right)$$

où (n) correspond au point n du Théorème 2.29. On a alors dans le dernier terme que e est une puissance de l_v donc est premier avec $O(\xi)$, on en déduit que

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{V}} &\sim_{\mathfrak{p}} \left(I, W, \begin{cases} 1 & \text{si } O(\xi) \mid f \\ ef & \text{sinon} \end{cases}\right) \\ &= \left(I, W, \begin{cases} 1 & \text{si } O(\xi) \mid f \\ e & \text{sinon} \end{cases}\right) \left(I, W, \begin{cases} 1 & \text{si } O(\xi) \mid f \\ f & \text{sinon} \end{cases}\right) \\ &\overset{(4)}{\sim} \left(I, W, \begin{cases} 1 & \text{si } O(\xi) \mid f \\ e & \text{sinon} \end{cases}\right) \\ &\sim_{\mathfrak{p}} 1 \end{aligned}$$

Ceci conclut la démonstration de la proposition 4.26 (et donc du théorème 4.18), en effet

$$ord_{\mathfrak{p}}(C_\Theta(\mathcal{V})) = ord_{\mathfrak{p}}(a(\Theta)) + ord_{\mathfrak{p}}(d(\Theta)) \equiv 0 \mod 2.$$

puis

$$\mathcal{D}_{\mathcal{V}} \sim_{\mathfrak{p}} 1 \sim_{\mathfrak{p}} C_v.$$

On peut maintenant énoncer le résultat suivant :

Théorème 4.29. *Soit $\{(\sigma_{\mathfrak{p}}, V_{\mathfrak{p}})\}$ un prémotif de $Gal(\overline{K}/K)$ et v une place de K tel que $\sigma_{\iota M,v}$ soit une représentation modérement ramifiée, essentiellement symplectique du groupe de Weil $\mathcal{W}_K$. Si $n = \dim \sigma_{\mathfrak{p}}$, on demande que $p \nmid S_n(E)$ et $p \neq l_v$. Si F/K_v est une extension galoisienne de groupe G alors il existe un $E[G]$-module $\mathcal{V}$ tel que :*

1. $\frac{W(\sigma_{\mathfrak{p},v}\otimes\tau)}{W(\tau)^n} = (-1)^{\langle\tau,\mathcal{V}\rangle}$ *pour toute représentation auto-duale τ de G.*
2. *On a la congruence suivante :*

$$ord_{\mathfrak{p}}(\mathcal{D}_{\mathcal{V}}(\Theta)) \equiv ord_{\mathfrak{p}}(C_v(\Theta)) \equiv 0 \mod 2 \textit{ pour toute } G\textit{-relation } \Theta,$$

où $\mathcal{D}_{\mathcal{V}}(\Theta) = C_\Theta(\mathcal{V}) = a(\Theta)d(\Theta)$, $C_v(\Theta) = Tam(\sigma_{\mathfrak{p},v})(\Theta)$ avec $Tam(\sigma_{\mathfrak{p},v})(H) = Tam(\sigma_{\mathfrak{p},w_H})$ pour w_H une place de F^H au-dessus de v et $\sigma_{\mathfrak{p},w_H} : G_{(F^H)_{w_H}} \hookrightarrow G_{K_v} \longrightarrow GL(V_{\mathfrak{p}})$.

On a vu que si $p > n+1$ alors $p \nmid S_n(\mathbb{Q})$, ce qui nous permet, en combinaison avec le théorème 3.2 de [7], de donner le théorème suivant dans le cas d'une variété abélienne.

Théorème 4.30. *Soit $K/\mathbb{Q}_l$ un corps local, F/K une extension galoisienne de groupe G, A/K une variété abélienne de dimension d qui acquière bonne réduction sur une extension modérément ramifiée de K (ce qui est automatique si $l > 2d+1$) et p un nombre premier tel que $p > 2d+1$ et $p \neq l$. Alors il existe un $\mathbb{Q}[G]$-module $\mathcal{V}$ tel que :*

1. $\frac{W(A/K,\tau)}{W(\tau)^{2d}} = (-1)^{\langle\tau,\mathcal{V}\rangle}$ *pour toute représentation auto-duale τ de G.*
2. $ord_p(\mathcal{D}_{\mathcal{V}}(\Theta)) \equiv ord_p(C_v(\Theta)) \equiv 0 \mod 2$ *pour toute G-relation Θ.*

4.2.4. *Un résultat global.* Soient un corps local K_v, F_w/K_v une extension galoisienne, A/K_v une variété abélienne et p un nombre premier vérifiant les hypothèses du théorème 4.30. Alors si $\tau \in T_{\Theta,p}$ (voir la remarque 3.25) on a :

$$W(A/K,\tau) = \frac{W(A/K,\tau)}{W(\tau)^{2d}} = (-1)^{\langle\tau,\mathcal{V}\rangle} = (-1)^{ord_p C_\Theta(\mathcal{V})} = (-1)^{ord_p(C_v(\Theta))}$$

car si $\tau \in T_{\Theta,p}$ alors $W(\tau)^2 = 1$.

Corollaire 4.31. *Soit F/K une extension galoisienne de corps de nombres de groupe de Galois G, A/K une variété abélienne, v une place de K, z une place de F au-dessus de v et p un nombre premier. Supposons que A/K_v, F_z/K_v et p satisfont les hypothèses du théorème 4.30 alors pour tout G-relation Θ et $\tau \in T_{\Theta,p}$ on a :*

$$W(A/K_v, \mathrm{Res}_{Gal(F_z/K_v)}\,\tau) = (-1)^{ord_p C_{w|v}(\Theta)}$$

où $C_{w|v}(H) = \prod_{w|v} C_w(A/F^H)$, $C_w(A/F^H) = c_w(A/F^H)\omega(H)$, $c_w(A/F^H)$ est le nombre de Tamagawa local et $\omega(H) = \left|\frac{\omega^0_{A/K_v}}{\omega^0_{A/\left(F^{H_i}\right)_w}}\right|_{\left(F^{H_i}\right)_w}$ où ω^0_{A/K_v} est une différentielle invariante minimale.
De plus, si ces hypothèses sont vérifiées pour toutes places v de K alors

$$W(A/K_v, \tau) = (-1)^{ord_p C(\Theta)}$$

où $C(\Theta) = \prod_i (C_{E/F^{H_i}})^{n_i}$, $C_{E/F^{H_i}} = \prod_v C_{w|v}(H^i)$.

Démonstration. Voir le corollaire 3.4 p.48 de [7]. □

Ce passage du local au global combiné avec le théorème 1.14 de [7] (qui lie $(-1)^{\langle \tau, S_p(A/K)\rangle}$ et $(-1)^{ord_p C(\Theta)}$) permet de déduire le théorème (global) suivant :

Théorème 4.32. *Soient p premier, $p > 2d+1$, L/K une extension galoisienne de corps de nombres et A/K une variété abélienne de dimension d. Si on suppose que les places finies suivantes ont un groupe de décomposition cyclique :*

- *les places v de réduction additive, au-dessus des nombres premiers inférieur ou égaux à $2d+1$;*
- *les places v où A n'a pas réduction semi-stable et A a mauvaise réduction sur l'extension modérément ramifiée maximale de K_v ;*
- *les places $v \mid p$;*

alors pour toute $G_{L/K}$-relation Θ on a :

$$(-1)^{\langle \tau, S_p(A/K)\rangle} = W(A/K, \tau) \text{ pour } \tau \in T_{\Theta,p}.$$

Remerciements : Je tiens avant tout à remercier mon directeur de thèse Jan Nekovář pour son aide tout au long de ce travail. Je tiens aussi à remercier David Rohrlich qui m'a indiqué comment étendre le corollaire 3.22 au cas où $l = 2$ et Guy Henniart pour m'avoir fait remarquer le lien entre les représentations orthogonales et symplectiques dans le cas modérément ramifié.

Bibliographie

[1] E. Artin, *Geometric algebra*, Interscience Publishers, Inc., New York-London, 1957, x+214 pages.

[2] P. automorphy & change of weight, « Barnet-Lamb, Thomas and Gee, Toby and Geraghty, David and Taylor, Richard », `http://arxiv.org/abs/1010.2561`, 2010.

[3] K. S. Brown, *Cohomology of groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 87, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982, x+306 pages.

[4] P. Deligne & G. Henniart, « Sur la variation, par torsion, des constantes locales d'équations fonctionnelles de fonctions L », *Invent. Math.* **64** (1981), n° 1, p. 89-118.

[5] P. Deligne, « Les constantes locales de l'équation fonctionnelle de la fonction L d'Artin d'une représentation orthogonale », *Invent. Math.* **35** (1976), p. 299-316.

[6] ———, « Valeurs de fonctions L et périodes d'intégrales », in *Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 2*, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979, With an appendix by N. Koblitz and A. Ogus, p. 313-346.

[7] T. Dokchitser & V. Dokchitser, « Regulator constants and the parity conjecture », *Invent. Math.* **178** (2009), n° 1, p. 23-71.

[8] J.-M. Fontaine & B. Perrin-Riou, « Autour des conjectures de Bloch et Kato : cohomologie galoisienne et valeurs de fonctions L », in *Motives (Seattle, WA, 1991)*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 55, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, p. 599-706.

[9] A. Fröhlich & J. Queyrut, « On the functional equation of the Artin L-function for characters of real representations », *Invent. Math.* **20** (1973), p. 125-138.

[10] J. S. Milne, « Class field theory », `www.jmilne.org/math/CourseNotes/CFT310.pdf`.

[11] J. W. Milnor & J. D. Stasheff, *Characteristic classes*, Princeton University Press, Princeton, N. J. ; University of Tokyo Press, Tokyo, 1974, Annals of Mathematics Studies, No. 76, vii+331 pages.

[12] J. Neukirch, *Algebraic number theory*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 322, Springer-Verlag, Berlin, 1999, Translated from the 1992 German original and with a note by Norbert Schappacher, With a foreword by G. Harder, xviii+571 pages.

[13] D. E. Rohrlich, « Elliptic curves and the Weil-Deligne group », in *Elliptic curves and related topics*, CRM Proc. Lecture Notes, vol. 4, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, p. 125-157.

[14] ———, « Galois theory, elliptic curves, and root numbers », *Compositio Math.* **100** (1996), n° 3, p. 311-349.

[15] ———, « Galois invariance of local root numbers », *Math. Ann.* **351** (2011), n° 4, p. 979-1003.

[16] ———, « Root numbers », in *Arithmetic of L-functions*, IAS/Park City Math. Ser., vol. 18, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011, p. 353-448.

[17] K. Rubin, *Euler systems*, Annals of Mathematics Studies, vol. 147, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2000, Hermann Weyl Lectures. The Institute for Advanced Study, xii+227 pages.

[18] M. Sabitova, « Root numbers of abelian varieties », *Trans. Amer. Math. Soc.* **359** (2007), n° 9, p. 4259-4284 (electronic).

[19] J.-P. Serre, *Représentations linéaires des groupes finis*, revised éd., Hermann, Paris, 1978, 182 pages.

[20] J. T. Tate, « Local constants », in *Algebraic number fields : L-functions and Galois properties (Proc. Sympos., Univ. Durham, Durham, 1975)*, Academic Press, London, 1977, Prepared in collaboration with C. J. Bushnell and M. J. Taylor, p. 89-131.

[21] ———, « Number theoretic background », in *Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 2*, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979, p. 3-26.

Thomas de La Rochefoucauld
UPMC,
4 place Jussieu
75005 PARIS
FRANCE
E-mail: `larochefoucauld.thomas@gmail.com`