Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux

anciennement Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux

Frédéric PAUGAM

Symétries spectrales des fonctions zêtas

Tome 21, n^o 3 (2009), p. 713-720.

<http://jtnb.cedram.org/item?id=JTNB_2009__21_3_713_0>

Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **21** (2009), 713-720

Symétries spectrales des fonctions zêtas

par Frédéric PAUGAM

Résumé. On définit, en réponse à une question de Sarnak dans sa lettre a Bombieri [Sar01], un accouplement symplectique sur l'interprétation spectrale (due à Connes et Meyer) des zéros de la fonction zêta. Cet accouplement donne une formulation purement spectrale de la démonstration de l'équation fonctionnelle due à Tate, Weil et Iwasawa, qui, dans le cas d'une courbe sur un corps fini, correspond à la démonstration géométrique usuelle par utilisation de l'accouplement de dualité de Poincaré Frobenius-équivariant en cohomologie étale. On donne un autre exemple d'accouplement similaire dans le cas de l'interprétation spectrale des zéros de la fonction L d'une forme automorphe cuspidale, mais cette fois-ci de nature orthogonale. Ces constructions sont en adéquation avec les prévisions du programme conjectural de Deninger et de la théorie arithmétique des matrices aléatoires.

Abstract. *Spectral symmetries of zeta functions*

We define, answering a question of Sarnak in his letter to Bombieri [Sar01], a symplectic pairing on the spectral interpretation (due to Connes and Meyer) of the zeroes of Riemann's zeta function. This pairing gives a purely spectral formulation of the proof of the functional equation due to Tate, Weil and Iwasawa, which, in the case of a curve over a finite field, corresponds to the usual geometric proof by the use of the Frobenius-equivariant Poincaré duality pairing in etale cohomology. We give another example of a similar construction in the case of the spectral interpretation of the zeroes of a cuspidal automorphic L-function, but this time of an orthogonal nature. These constructions are in adequation with Deninger's conjectural program and the arithmetic theory of random matrices.

1. Symétrie spectrale pour la fonction zêta

Le lecteur est informé que les notations $\mathcal{H}^i$, bien pratiques pour des raisons d'analogie entre corps de nombres et corps de fonctions, ne désignent pas ici des espaces de cohomologie.

Soit K un corps global et $\mathcal{O}_K$ son anneau d'entiers. Soit $C_K = \mathbb{A}_K^*/K^*$ sont groupe de classes d'idèles et $|.| : C_K \to \mathbb{R}_+^*$ la norme. On rappelle

Manuscrit reçu le 1er avril 2008.

maintenant les notations de Meyer dans [Mey05]. Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, on note $\mathcal{S}(C_K)_I$ l'espace des fonctions F de Bruhat-Schwartz (voir [Osb75]) sur C_K dont la transformée de Mellin-Laplace

$$M(F)(s) := \int_{C_K} f(x)|x|^s dx$$

converge dans la bande $\{z|\operatorname{Re}(s) \in I\} \subset \mathbb{C}$. On notera $J(F) := \frac{1}{|x|}F\left(\frac{1}{x}\right)$ pour F une fonction sur C_K. Soit $\mathcal{S}(C_K)_{><} = \mathcal{S}(C_K)_{]1,\infty[} \oplus \mathcal{S}(C_K)_{]-\infty,0[}$. On plonge $\mathcal{S}(C_K)_{]-\infty,\infty[}$ dans $\mathcal{S}(C_K)_{><}$ par l'application $i : F \mapsto (F, JF)$. Si f est une fonction de Schwartz sur $\mathbb{A}$, on notera

$$\Sigma(f)(x) := \sum_{q \in K^*} f(qx)$$

la fonction sur C_K correspondante. On définit ainsi un plongement de $\mathcal{S}(\mathbb{A})$ dans $\mathcal{S}(C_K)_{>1<}$ par $f \mapsto (\Sigma(f), J\Sigma(f))$. On note $\mathcal{S}(\mathbb{A})_0$ l'espace des fonctions de Schwartz sur les adèles telles que $\Sigma(f) \in \mathcal{S}(C_K)_{]-\infty,\infty[}$. L'application

$$\Sigma : \mathcal{S}(\mathbb{A})_0 \to \mathcal{S}(C_K)_{]-\infty,\infty[}$$

est $\mathbb{A}_K^*$-équivariante et donne une action de C_K sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel topologique

$$\mathcal{H} := \mathcal{S}(C_K)_{]-\infty,\infty[}/\Sigma(\mathcal{S}(\mathbb{A})_0).$$

Si $\mathbb{A}_{(1)}^* \subset \mathbb{A}_K^*$ désigne le noyau de la norme, on notera

$$\mathcal{H}^1(\mathcal{O}_K) := \mathcal{H}^{(\mathbb{A}_{(1)}^*)}$$

l'espace vectoriel topologique des invariants. On a une action naturelle de $N := |\mathbb{A}_K^*|$ sur $\mathcal{H}^1(\mathcal{O}_K)$. Selon que K est de caractéristique 0 ou p, on a $N = \mathbb{R}_+^*$ ou $N = q^{\mathbb{Z}}$. L'application J décrite plus haut donne une application $\mathcal{H}^1(\mathcal{O}_K) \to \mathcal{H}^1(\mathcal{O}_K)$ qu'on peut écrire de manière équivariante par

$$J : \mathcal{H}^1(\mathcal{O}_K)^\vee(-1) \to \mathcal{H}^1(\mathcal{O}_K).$$

De plus, la conjugaison complexe c agit sur $\mathcal{H}$ (resp. $\mathcal{H}^1$) par $F \mapsto \bar{F}$.

Le théorème suivant est une variation due à Meyer [Mey05] sur les travaux de Connes [Con99]. Sa démonstration se base sur le fait, utilisé aussi par Godement et Jacquet pour des représentations automorphes plus générales dans [GJ72], que la fonction L de K peut-être définie comme le plus grand diviseur commun de la famille des transformées de Mellin $M(f)(s)$ pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{A})_0$.

Théorème 1.1. *L'action de N sur $\mathcal{H}^1(\mathcal{O}_K)$ donne une interprétation spectrale des zéros de la fonction zêta de Dedekind (complétée) L_K de K. L'application J identifie spectralement les zéros de $L_K(|.|^s)$ avec les zéros de $L_K(|.|^{1-s})$.*

Remarquons que les fonctions L ci-dessus sont de nature différente pour les corps de nombres (ce sont des fonctions sur $\mathbb{C}$) et sur les corps de fonctions (ce sont des fonctions sur $\mathbb{C}/(\frac{2i\pi}{\log q})\mathbb{Z}$). Afin de rendre la suite indépendante du choix de la caractéristique, nous allons utiliser une construction similaire à celle de Deninger [Den94]. Soit $\mathcal{V}$ un espace vectoriel topologique muni d'une action de C_K dont le spectre est discret. On note

$$\mathbb{D}(\mathcal{V}) := \Gamma_{\mathcal{C}^\infty}(\mathcal{V} \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*)^{(C_K)}$$

l'espace des C_K-invariants dans les sections $\mathcal{C}^\infty$ de la projection standard (qu'on suppose pour simplifier à valeurs nulles en dehors d'un sous-ensemble fini d'espaces propres), l'action sur $\mathbb{R}_+^*$ étant donnée par la norme. On munit $\mathbb{D}(\mathcal{V})$ d'une action naturelle de $\mathbb{R}_+^*$. Ceci nous donne un foncteur de “suspension” des représentations de C_K vers les modules continus sur $\mathbb{L} := \mathbb{D}(\mathbb{C}(0))$ (où $\mathbb{C}(0)$ désigne la représentation triviale de N sur $\mathbb{C}$) munis d'une représentation de $\mathbb{R}_+^*$. On remarque que dans le cas des corps de nombres, cette opération de suspension est (à une completion près) isomorphe à l'identité sur les $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de la forme $\mathcal{H}^1(\mathcal{O}_K)$. Elle n'est donc utile que dans le cas des corps de fonctions.

Un opérateur T sur un $\mathbb{L}$-module topologique est dit traçable si la série de ses valeurs propres $\lambda \in \mathbb{L}$ converge dans $\mathbb{L}$. Si $c : V \to V$ est une involution d'un $\mathbb{L}$-module topologique et $T : V \to V$ est un opérateur traçable sur V qui commute à c. On décompose $V = V^+ \oplus V^- \oplus V^0$ non canoniquement comme somme de deux sous-espaces échangés par l'involution c et d'un espace laissé stable. La supertrace de T sur (V, c) est la classe

$$\mathrm{Str}_c(T|V) := [\mathrm{Tr}(T|V^+) - \mathrm{Tr}(T|V^-)] \in \mathbb{L}/c$$

et la trace positive est le scalaire (non canonique)

$$\mathrm{Tr}_{+,c}(T|V) := \mathrm{Tr}(T|V^+) \in \mathbb{L}.$$

On note $\mathbb{C}(1)$ l'espace vectoriel $\mathbb{C}$ muni de l'action de C_K par la norme et soit $H^1_d(\mathcal{O}_K) := \mathbb{D}(\mathcal{H}^1(\mathcal{O}_K))$ et $\mathbb{L}(1) = \mathbb{D}(\mathbb{C}(1))$. L'opérateur de conjugaison complexe c sur $\mathcal{H}^1(\mathcal{O}_K)$ induit une involution c sur $H^1_d(\mathcal{O}_K)$ et une décomposition non canonique $H^1_d(\mathcal{O}_K) = H^1_d(\mathcal{O}_K)^+ \oplus H^1_d(\mathcal{O}_K)^- \oplus H^1_d(\mathcal{O}_K)^0$ (telle que l'espace d'indice positif corresponde aux zéros de partie imaginaire positive et l'espace d'indice nul aux zéros réels).

Définition. Soit $P_K(s)$ le polynôme unitaire dont les zéros sont les zéros réels de $L_K(s)$ avec multiplicités. On note $L_K^{\pm}(s) := \frac{L_K(s)}{P_K(s)}$ la fonction obtenue à partir de $L_K(s)$ en lui ôtant ses zéros réels. On notera aussi $H_d^{1,\pm}(\mathcal{O}_K)$ l'espace spectral correspondant donné par $H^1_d(\mathcal{O}_K)/H^1_d(\mathcal{O}_K)^0$.

Remarquons que bien que la fonction zêta de Riemann n'aie pas de zéros réels (i.e. le polynôme $P_{\mathbb{Q}}(s)$ vaut 1 et $L^{\pm}_{\mathbb{Q}}(s) = \hat{\zeta}_{\mathbb{Q}}(s)$ est la fonction zêta de Riemann complétée), V. Armitage a montré dans [Arm72] qu'il existe des corps de nombres dont la fonction zêta de Dedekind s'annule en 1/2 (i.e. tels que $P_K(1/2) = 0$). Le cas des corps de fonctions est étudié en détail par Ramachandran dans [Ram05].

On a une décomposition équivariante

$$H_d^{1,\pm}(\mathcal{O}_K) = H_d^1(\mathcal{O}_K)^+ \oplus H_d^1(\mathcal{O}_K)^-.$$

On note $C = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right).c$ dans l'écriture matricielle pour cette décomposition. On utilise les travaux de Meyer [Mey05] qui montrent que si $F \in \mathcal{S}(C_K)_{]-\infty,\infty[}$, l'opérateur obtenu par convolution de F le long de l'action de C_K sur $\mathcal{H}$ est traçable. Si $s, t \in H_d^1(\mathcal{O}_K)$, on note

$$\psi(s,t) := \mathrm{Str}_c(s * Jt | H_d^1(\mathcal{O}_K)) = \mathrm{Tr}(s * Jt | H_d^1(\mathcal{O}_K)^+) - \mathrm{Tr}(s * Jt | H_d^1(\mathcal{O}_K)^-).$$

Dans le cas des corps de nombres, cette application s'identifie à

$$\psi(F,G) = \mathrm{Tr}(F * JG - G * JF | \mathcal{H}^1(\mathcal{O}_K)^+)$$

pour $F, G \in \mathcal{S}(C_K)_{]-\infty,\infty[}$.

Théorème 1.2. *L'application ψ est bien définie et induit un accouplement antisymétrique équivariant $\psi : H_d^{1,\pm}(\mathcal{O}_K) \times H_d^{1,\pm}(\mathcal{O}_K) \to \mathbb{L}(1)$, de surcroit non dégénéré, et qui identifie spectralement les zéros de $L_K^{\pm}(s)$ avec ceux de $L_K^{\pm}(1-s)$. De plus, l'accouplement $\psi(.,C.)$ sera sesquilinéaire et défini positif si l'hypothèse de Riemann pour $L_K^{\pm}(s)$ est vérifiée.*

Preuve : La forme ψ passe au quotient par (ce qu'on pourrait noter abusivement) $\mathbb{D}(\mathcal{S}(\mathbb{A})_0)$ car (voir [CCM07], Remark 4.18) la trace est calculée comme une somme sur les zéros des valeurs des transformées de Mellin, qui sont justement nulles sur les images des fonctions dans $\mathcal{S}(\mathbb{A})_0$. Ceci implique que l'application est bien définie. Le fait que ψ soit antisymétrique découle de sa définition et de l'égalité

$$\mathrm{Tr}(s * Jt | H_d^1(\mathcal{O}_K)^-) = \mathrm{Tr}(t * Js | H_d^1(\mathcal{O}_K)^+)$$

qui découle de l'équation fonctionnelle. L'équivariance découle de l'équivariance de $J : \mathcal{H}^\vee(-1) \to \mathcal{H}$. On peut l'expliquer plus intuitivement dans le cas d'un corps de nombres en remarquant que si les zéros de L_K sont simples et non réels, et si on note $F = s(1)$ et $G = t(1)$,

$$\psi(s,t) = \sum_{\rho \in Z_+} [M(F)(\rho)M(G)(1-\rho) - M(G)(\rho)M(F)(1-\rho)]$$

où Z_+ sont les zéros de $L_K(s)$ de partie imaginaire positive et on voit par changement de variable dans la transformée de Mellin que l'action de $\mathbb{R}_+^*$ sur $M(F)(\rho)M(G)(1-\rho)$ se fait par $|.|^\rho.|.|^{1-\rho} = |.|$. Le fait que ψ soit non dégénérée découle du fait que J est un isomorphisme. L'accouplement

$\psi(.,C.)$ est donné par

$$\begin{aligned}\psi(s,C.t) &:= \mathrm{Str}_c(s*J.\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&-1\end{smallmatrix}\right).c.t|H^1_d(\mathcal{O}_K))\\ &= \mathrm{Tr}(s*Jct|H^1_d(\mathcal{O}_K)^+)+\mathrm{Tr}(s*Jct|H^1_d(\mathcal{O}_K)^-).\end{aligned}$$

Si l'hypothèse de Riemann est vraie, les zéros vérifient $\overline{1-\rho}=\rho$, donc

$$\begin{aligned}\psi(s,Ct)(1) &= \sum_{\rho\in Z_+}\left[M(F)(\rho)\overline{M(G)}(\rho)+\overline{M(G)}(1-\rho)M(F)(1-\rho)\right]\\ &= \sum_{\rho} M(F)(\rho)\overline{M(G)}(\rho)\end{aligned}$$

et

$$\psi(s,Cs)(1)=\sum_{\rho}|M(F)(\rho)|^2>0.$$

On remarque que dans le cas d'un corps de fonctions K sur un corps fini $\mathbb{F}_q$ dont la fonction zêta n'a pas de zéros réels, ceci donne une version indépendante de ℓ de l'accouplement de dualité de Poincaré Frobenius équivariant

$$H^1_{et}(X,\mathbb{Q}_\ell)\times H^1_{et}(X,\mathbb{Q}_\ell)\to\mathbb{Q}_\ell(1)$$

sur la courbe $X/\mathbb{F}_q$ de corps de fonctions K, l'action du Frobenius étant identifiée par la théorie du corps de classe résiduel à l'action du groupe $N=q^{\mathbb{Z}}\subset\mathbb{R}^*_+$. La positivité est dans ce cas un résultat dû à Weil. Précisons que le passage de l'accouplement en cohomologie étale au notre est fourni par un procédé de suspension à la Fontaine décrit précisément par Deninger dans [Den94], section 3.

L'existence de cet accouplement symplectique est une des nombreuses prévisions de la théorie qui donne le rapport entre les distributions des valeurs propres des matrices aléatoires et les distributions des zéros des fonctions L, dont on trouvera un résumé dans [KS99] et dans le survol [Mic02]. Elle est aussi prévue par le programme de Deninger [Den98].

Une construction explicite de cet accouplement a été décrite, sous l'hypothèse de Riemann généralisée, par Sarnak dans sa lettre a Bombieri [Sar01]. Notre formulation est indépendante de l'hypothèse de Riemann et répond à une question posée par Sarnak dans ladite lettre.

2. Symétrie spectrale pour une représentation automorphe cuspidale

On donne maintenant un exemple d'interprétation spectrale dans une situation de dimension supérieure qui vient de la géométrie, en suivant de près le travail de Soulé [Sou99] et celui de Meyer [Mey05]. On remarque que nos constructions vont dans le sens du programme de Deninger et corroborent (sans démonstration) le fait qu'uniquement trois types de groupes (symplectique, orthogonal et unitaire) apparaissent dans le rapport entre zéros de fonctions L et matrices aléatoires (voir [Mic02]) : le groupe symplectique correspond aux motifs absolus découpés dans des H^{2n+1} de variétés projectives lisses sur $\mathbb{Q}$, le groupe orthogonal aux motifs absolus découpés dans des H^{2n} et le groupe unitaire aux motifs absolus découpés dans des variétés sur des corps imaginaires.

Soit E le modèle de Néron sur $\mathbb{Z}$ d'une courbe elliptique sur $\mathbb{Q}$. Par le résultat fameux de Wiles [Wil95] et Breuil, Conrad, Diamond, Taylor [BCDT01], il existe une forme modulaire cuspidale de poids 2 telle que

$$L(E,s) = L(f,s),$$

ce qui fait que la fonction L de E est automorphe.

Soit π la représentation automorphe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ engendrée par f. Par construction, elle a un caractère central trivial. On notera pour chaque $t \in \mathbb{R}_+^*$, G_t le sous-ensemble de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ des matrices de déterminant t. Soit $\mathcal{C}_\pi$ l'ensemble des coefficients admissibles de π pour son action sur $L_0^2(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}), 1)$ où 1 désigne le caractère trivial et soit Φ une fonction de Schwartz sur $\mathrm{M}_2(\mathbb{A})$. On définit une fonction sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs complexes par

$$E(\Phi, f)(t) = \int_{G_t} \Phi(g) f(g) dg.$$

Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, on note $\mathcal{S}(\mathbb{R}_+^*)_I$ l'espace des fonctions de Schwartz sur $\mathbb{R}_+^*$ dont la transformée de Mellin converge dans la bande $\{z \,|\, \mathrm{Re}(s) \in I\} \subset \mathbb{C}$. Soit $\mathcal{S}(\mathbb{R}_+^*)_{><} = \mathcal{S}(\mathbb{R}_+^*)_{]-\infty,0[} \oplus \mathcal{S}(\mathbb{R}_+^*)_{]2,\infty[}$. On dispose d'une application $J_2 : \mathcal{S}(\mathbb{R}_+^*)_{><} \to \mathcal{S}(\mathbb{R}_+^*)_{><}$ donnée par $J_2(F)(x) = \frac{1}{|x|^2} F(\frac{1}{x})$. On notera Σ l'application

$$\Sigma : \mathcal{S}(\mathrm{M}_2(\mathbb{A})) \times \mathcal{C}_\pi \to \mathcal{S}(\mathbb{R}_+^*)_{><}$$

donnée par $\Sigma(\Phi, f) = (E(\hat{\Phi}, \check{f}), E(\Phi, f))$. On a aussi une inclusion diagonale de $\mathcal{S}(\mathbb{R}_+^*)_{]-\infty,\infty[}$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}_+^*)_{><}$ donnée par $F \mapsto (F, F)$. On notera $\mathcal{H}_-$ l'image de cette inclusion diagonale et $\mathcal{H}_+$ l'adhérence de l'espace vectoriel engendré par l'image de Σ. Soit $\mathcal{H}_p^2(E)$ le quotient $\mathcal{H}_+ + \mathcal{H}_- / \mathcal{H}_+$. Cette notation est expliquée par la décomposition en motifs absolus (au sens entendu par Manin [Man95]), la dernière ligne ayant un sens plus concret d'après les résultats du premier paragraphe :

$$\begin{array}{rccccc}
\mathcal{H}^*(E) = & \mathcal{H}^0(E/\mathbb{Z}) & \oplus\, \mathcal{H}^1(E/\mathbb{Z}) \,\oplus & & & \mathcal{H}^2(E/\mathbb{Z}) \\
= & \mathcal{H}^*(\mathbb{Z}) & \oplus & \mathcal{H}_p^2(E) & \oplus & \mathcal{H}^*(\mathbb{Z})(1) \\
= & \mathcal{H}^0(E) \oplus \mathcal{H}^1(E) \oplus \mathcal{H}_1^2(E) & \oplus & \mathcal{H}_p^2(E) & \oplus & \mathcal{H}_3^2(E) \oplus \mathcal{H}^3(E) \oplus \mathcal{H}^4(E) \\
:= & \mathbb{C} \oplus \mathcal{H}^1(\mathbb{Z}) \oplus \mathbb{C}(1) & \oplus & \mathcal{H}_p^2(E) & \oplus & \mathbb{C}(1) \oplus \mathcal{H}^1(\mathbb{Z})(1) \oplus \mathbb{C}(2)
\end{array}$$

qui correspond par définition à la décomposition en produit de la fonction $\Lambda(E,s)$ en

$$\Lambda(E,s)=\frac{2\pi}{s}.L_{\mathbb{Z}}(s).\frac{2\pi}{1-s}.\frac{1}{L(E,s)}.\frac{2\pi}{s-1}.L_{\mathbb{Z}}(s-1).\frac{2\pi}{2-s}.$$

Ainsi, dans ce formalisme de Manin, la fonction $L(E,s)$ correspond à un morceau du $\mathcal{H}^2(E)$ noté $\mathcal{H}^2_p(E)$ qu'on obtient en lui ôtant ses deux $\mathbb{C}(1)$ superflus. On dispose d'une application surjective $\mathcal{S}(\mathbb{R}^*_+)_{]-\infty,\infty[}\to\mathcal{H}^2_p(E)$ et on peut faire agir $\mathcal{S}(\mathbb{R}^*_+)_{]-\infty,\infty[}$ sur $\mathcal{H}^2_p(E)$ par convolution. On note

$$\psi:\mathcal{S}(\mathbb{R}^*_+)_{]-\infty,\infty[}\times\mathcal{S}(\mathbb{R}^*_+)_{]-\infty,\infty[}\to\mathbb{C}(2)$$

l'application donnée par

$$\psi(F,G):=\mathrm{Tr}_{+,c}(F*J_2G+G*J_2F|\mathcal{H}^2_p(E)^+)$$

où $\mathcal{H}^2_p(E)^+$ désigne la partie correspondant aux zéros de partie imaginaire positive. Le choix (relativement arbitraire) de cette forme est basé sur l'analogie entre corps de nombres et corps de fonctions, ainsi que sur l'analogie entre motifs absolus et structures de Hodge, qui impose (pour des raisons de poids) que la forme soit symétrique, puisque la fonction L correspondante est associée au H^2 de la surface arithmétique E.

Théorème 2.1. *On suppose que $L(E,s)$ ne s'annule pas sur l'axe réel. L'application ψ induit un accouplement $\psi:\mathcal{H}^2_p(E)\times\mathcal{H}^2_p(E)\to\mathbb{C}(2)$ équivariant, symétrique et non dégénéré qui identifie spectralement les zéros de $L(E,s)$ avec ceux de $L(E,2-s)$. Plus généralement (en combinant ce résultat avec ceux du premier paragraphe), on obtient une forme bilinéaire*

$$\phi:\mathcal{H}^*(E)\times\mathcal{H}^*(E)\to\mathbb{C}(2)$$

non dégénérée qui identifie spectralement les zéros et pôles de $\Lambda(E,s)$ avec ceux de $\Lambda(E,2-s)$.

On remarque que dans le cas d'une courbe elliptique E sur un corps de fonctions, on construit à la main comme ci-dessus et dans le langage de la section 1 une forme qui est une version indépendante de ℓ de l'accouplement de dualité de Poincaré Frobenius équivariant sur la cohomologie étale de la courbe. On aimerait disposer d'une manière plus canonique de mettre en place toutes ces constructions.

Remerciements

Je remercie Miguel Bermudez pour d'utiles discussions, Alain Connes, Katia Consani, Christopher Deninger, Matilde Marcolli et Ralf Meyer pour des explications sur leurs travaux et en particulier Alain Connes pour m'avoir indiqué un problème dans le traitement des corps de fonctions dans une version préliminaire de ce travail. Merci enfin à Jean-François Mestre qui m'a fournit des références sur les zéros réels.

Bibliographie

[Arm72] J. V. Armitage, *Zeta functions with a zero at* $s = \frac{1}{2}$. Invent. Math. **15** (1972), 199–205.

[BCDT01] Christophe Breuil, Brian Conrad, Fred Diamond, and Richard Taylor, *On the modularity of elliptic curves over* $\mathbf{Q}$ *: wild 3-adic exercises.* J. Amer. Math. Soc. **14(4)** (2001), 843–939 (electronic).

[CCM07] Alain Connes, Caterina Consani, and Matilde Marcolli, *The weil proof and the geometry of the adeles class space.* ArXiv, (math.NT/0703392) (2007).

[Con99] Alain Connes, *Trace formula in noncommutative geometry and the zeros of the Riemann zeta function.* Selecta Math. (N.S.) **5(1)** (1999), 29–106.

[Den94] Christopher Deninger, *Motivic L-functions and regularized determinants.* In *Motives (Seattle, WA, 1991)*, volume 55 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 707–743. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[Den98] Christopher Deninger,*Some analogies between number theory and dynamical systems on foliated spaces.* In Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I (Berlin, 1998), number Extra Vol. I, pages 163–186 (electronic), 1998.

[GJ72] Roger Godement and Hervé Jacquet, Zeta functions of simple algebras. Lecture Notes in Mathematics, Vol. **260**. Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[KS99] Nicholas M. Katz and Peter Sarnak, *Zeroes of zeta functions and symmetry.* Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **36(1)** (1999), 1–26.

[Man95] Yuri Manin, *Lectures on zeta functions and motives (according to Deninger and Kurokawa).* Astérisque **228 :4** (1995), 121–163. Columbia University Number Theory Seminar (New York, 1992).

[Mey05] Ralf Meyer, *On a representation of the idele class group related to primes and zeros of L-functions. Duke Math. J.*, 127(3) :519–595, 2005.

[Mic02] Philippe Michel, *Répartition des zéros des fonctions L et matrices aléatoires.* Astérisque **282**, Exp. No. 887, viii, 211–248, 2002. Séminaire Bourbaki, Vol. 2000/2001.

[Osb75] M. Scott Osborne, *On the Schwartz-Bruhat space and the Paley-Wiener theorem for locally compact abelian groups.* J. Functional Analysis **19** (1975), 40–49.

[Ram05] Niranjan Ramachandran, *Values of zeta functions at* $s = 1/2$. Int. Math. Res. Not. **25** (2005), 1519–1541.

[Sar01] Sarnak, *Dear Enrico.* Letter to Bombieri, pages 1–7, 2001.

[Sou99] Christophe Soulé, *Sur les zéros des fonctions L automorphes.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **328(11)** (1999), 955–958.

[Wil95] Andrew Wiles, *Modular elliptic curves and Fermat's last theorem.* Ann. of Math. (2) **141(3)** (1995), 443–551.

Frédéric Paugam
Université paris 6
Institut de mathématiques de Jussieu
175, rue du Chevaleret
75012 Paris
E-mail: `frederic.paugam@math.jussieu.fr`
URL: `http://people.math.jussieu.fr/~fpaugam/`