JOURNAL DE THÉORIE DES NOMBRES DE BORDEAUX

MARTINE QUEFFÉLEC

Approximations diophantiennes des nombres sturmiens

Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, tome 14, nº 2 (2002), p. 613-628

<http://www.numdam.org/item?id=JTNB_2002__14_2_613_0>

Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **14** (2002), 613–628

Approximations diophantiennes des nombres sturmiens

par Martine QUEFFÉLEC

En l'honneur de Michel Mendès France

RÉSUMÉ. Nous établissons pour tout nombre sturmien (de développement dyadique sturmien) des propriétés d'approximation diophantienne très précises, ne dépendant que de l'angle de la suite sturmienne, généralisant ainsi des travaux antérieurs de Ferenczi-Mauduit et Bullett-Sentenac.

ABSTRACT. Generalizing previous results of Ferenczi-Mauduit and Bullett-Sentenac, we prove that any sturmian number (with sturmian dyadic expansion) enjoys very sharp diophantine approximation properties, depending only on the angle of the sturmian sequence.

1. Introduction

Une suite $(u_n)_n$ à valeurs dans un alphabet fini d'entiers $\{0, 1, \dots, g-1\}$, g entier ≥ 2, peut être considérée comme le développement en base g d'un nombre réel ; on peut également lui associer le nombre dont le développement en fraction continue est donné par la suite $(1 + u_n)_n$, et dans tous les cas, étudier, par des méthodes d'approximation, la nature algébrique de ce nombre en relation avec la nature combinatoire de la suite initale. Dans le second cas, les nombres irrationnels ainsi obtenus sont mal approchables par les rationnels (puisqu'à quotients partiels bornés) [25], mais dans le premier cas, l'approximation rationnelle et le théorème de Roth peuvent être des outils appropriés. De nombreux travaux, certains récents, s'intéressent à la transcendance d'irrationnels définis par leur développement, en base entière ou en fraction continue, lorsque celui-ci est une suite de faible complexité : rappelons que la fonction *complexité* p compte, pour chaque n, le nombre de facteurs distincts de longueur n dans la suite. Une liste non exhaustive de ces résultats apparaît dans la bibliographie [1], [2], [3], [6], [8], [9], [10], [11], [13], [18], [24], [27]. D'autres développements peuvent être envisagés : développement de Engel [17], développement en

Manuscrit reçu le 25 septembre 2000.

base de Pisot par exemple. On renvoie à [14] et [28] pour des compléments sur les fractions continues.

Une suite pour laquelle $p(n) \leq n$ pour un entier n, est en fait ultimement périodique [19]. Les suites sturmiennes sont les suites de plus basse complexité parmi les suites non-périodiques et, à ce titre, possèdent de nombreuses propriétés extrémales. Rappelons quelques-unes des définitions équivalentes d'une suite sturmienne [4], [5], [19]:

Définition 1.1. Une suite binaire sur l'alphabet $\{a, b\}$ non ultimement périodique est dite *sturmienne* si elle vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes:

(i) (Complexité) La suite est de complexité minimale : $p(n) = n + 1$.

(ii) (Équilibre) Les nombres de a et de b contenus dans deux facteurs de même longueur diffèrent au plus de 1.

(iii) (Arithmétique) Il existe $\alpha, \beta \in [0, 1[$, α irrationnel, tels que, la suite codée par $a = 0$ et $b = 1$ vérifie :

$$\forall n \ u_n = [(n+1)\alpha + \beta] - [n\alpha + \beta] \quad \text{ou } \forall n \ \lceil (n+1)\alpha + \beta \rceil - \lceil n\alpha + \beta \rceil.$$

(iv) (Dynamique) Il existe $\alpha, \beta \in [0, 1[$, α irrationnel, tels que la suite codée par $a = 0$ et $b = 1$ vérifie : $\forall n \ u_n = \mathbf{1}_{[1-\alpha,1[}(n\alpha + \beta)$ ou $\forall n \ u_n = \mathbf{1}_{]1-\alpha,1]}(n\alpha + \beta)$.

Elle est dite *caractéristique* ou homogène si $\beta = 0$, et dans tous les cas, α est appelé l'*angle* de la suite.

La transcendance des nombres sturmiens (dont le développement dyadique est une suite sturmienne à valeurs dans $\{0, 1\}$) a été établie par S. Ferenczi et C. Mauduit [13] en utilisant une conséquence combinatoire du théorème de Roth, le théorème de Ridout [22], après que plusieurs cas particuliers eurent été traités [6], [9], [10], [1]. Lorsque la suite est sturmienne caractéristique, un résultat plus précis, concernant les approximations diophantiennes du nombre, a été démontré par S. Bullett et P. Sentenac [8] et nous nous proposons d'étendre ces estimations à toute suite sturmienne.

2. Nombres sturmiens–Résultats antérieurs

On sait que les rationnels sont les nombres à développement adique ultimement périodique ; lorsque le développement adique d'un irrationnel ressemble à un développement périodique, on peut donc espérer utiliser l'approximation rationnelle et le théorème de Roth [23] :

Théorème 2.1 (Roth). *Soit x un nombre irrationel. Si l'on peut trouver $b > 2$ et une infinité de rationnels irréductibles $\frac{p}{q}$ tels que $|x - \frac{p}{q}| \leq \frac{1}{q^b}$ alors x est un nombre transcendant.*

C'est le cas pour les développements sturmiens, dont la complexité est très basse, et on peut même préciser, suivant l'angle de la suite sturmienne, la qualité d'approximation (ou la mesure de transcendance) du nombre lorsque la suite est sturmienne caractéristique. On rappelle

Définition 2.2. Un irrationnel x est dit *β-diophantien* ($\beta > 0$) s'il existe une constante $c > 0$ telle que $|x - \frac{p}{q}| \geq \frac{c}{q^\beta}$ pour tout rationnel irréductible $\frac{p}{q}$.

Un nombre de Liouville est un nombre qui n'est β-diophantien pour aucun $\beta > 0$.

Le théorème de Roth dit qu'un nombre algébrique sur $\mathbf{Q}$ est β-diophantien pour tout $\beta > 2$.

Soit donc $\alpha \in [0,1]$, α irrationnel, et $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots \in \{0,1\}^{\mathbf{N}^*}$ la suite sturmienne caractéristique d'angle α, définie par : $\epsilon_n = [(n+1)\alpha] - [n\alpha] = \mathbf{1}_{[1-\alpha,1[}(n\alpha)$ pour tout $n \geq 1$.

Le résultat suivant [8] est assez frappant :

Théorème 2.3 (Bullett–Sentenac). *Soit $x = \sum_1^\infty \frac{\epsilon_j}{2^j}$ le nombre sturmien associé à ϵ. Alors x est transcendant ; plus précisément, la nature diophantienne de x est reliée aux propriétés arithmétiques de l'angle α :*

a) *Si α est à quotients partiels non bornés, x est Liouville.*

b) *Si α est à quotients partiels bornés par κ entier ≥ 2 avec une infinité d'entre eux égaux à κ, x n'est pas $(\kappa+1)$-diophantien.*

c) *Si α est noble (à quotients partiels ultimement égaux à 1), x n'est pas β-diophantien pour $\beta = 2 + \rho - \varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0$, où $\rho = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.*

Démonstration. La démonstration de ce résultat est très simple [2], lorsque l'on connaît la construction ci-dessous des suites sturmiennes caractéristiques [26]:

Proposition 2.4. *Soit α un nombre irrationnel de $[0,1]$ dont le développement en fraction continue est $[0; a_1, a_2, \ldots]$, avec $a_k \geq 1$ si $k \geq 1$, et soit (q_n) la suite des dénominateurs associée. On construit une suite de blocs de lettres de $\{0,1\}$ de la façon suivante :*

$$\begin{aligned}
B_0 &= 0 \\
B_1 &= \underbrace{0 \cdots 0}_{a_1 - 1} 1 \\
B_2 &= \underbrace{B_1 \cdots B_1}_{a_2} B_0 \\
&\;\vdots \\
B_{k+1} &= \underbrace{B_k \cdots B_k}_{a_{k+1}} B_{k-1}
\end{aligned}$$

Alors pour tout $n \geq 1$, le mot B_n est le préfixe de longueur q_n de la suite $(\epsilon_n)_n$ sturmienne caractéristique d'angle α.

À l'aide de cette description, on s'aperçoit que le nombre x a un développement en fraction continue très simple : si $(Q_n)_n$ désigne la suite des dénominateurs de x, on établit en effet

$$Q_n = 2^{q_n} - 1,$$

où, rappelons-le, $q_n = q_n(\alpha)$.

Pour cela, notons r_n le rationnel dont la suite des chiffres est la suite périodique $\overline{B}_n$ de période B_n ; r_n tend vers s et on va montrer que $r_n = \frac{P_n}{Q_n}$, avec $Q_{-1} = 0, Q_0 = 1, Q_1 = A_1 = 2^{a_1} - 1$, $A_{n+1} = \dfrac{2^{q_{n+1}} - 2^{q_{n-1}}}{2^{q_n} - 1} = 2^{q_{n-1}} \dfrac{2^{a_{n+1}q_n} - 1}{2^{q_n} - 1}$. Posons

$$t_n = \sum_{\epsilon_j \in B_n} \epsilon_j 2^{-j} = \sum_{j=1}^{q_n} \epsilon_j 2^{-j}.$$

Le rationnel r_n vaut alors

$$r_n = t_n\Big(1 + \frac{1}{2^{q_n}} + \frac{1}{2^{2q_n}} + \dots\Big) = t_n \, \frac{2^{q_n}}{2^{q_n} - 1}.$$

Et puisque $B_{n+1} = \underbrace{B_n \cdots B_n}_{a_{n+1}} B_{n-1}$, $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} t_{n+1} &= \textstyle\sum_{r=0}^{a_{n+1}-1} \sum_{rq_n+1 \leq j \leq (r+1)q_n} \epsilon_j 2^{-j} + \sum_{a_{n+1}q_n+1 \leq j \leq q_{n+1}} \epsilon_j 2^{-j} \\ &= t_n(1 + 2^{-q_n} + \dots + 2^{-(a_{n+1}-1)q_n}) + 2^{-a_{n+1}q_n} t_{n-1} \\ &= \tfrac{2^{a_{n+1}q_n} - 1}{2^{a_{n+1}q_n}} \, \tfrac{2^{q_n}}{2^{q_n} - 1} t_n + \tfrac{1}{2^{a_{n+1}q_n}} t_{n-1} \\ &= \tfrac{2^{a_{n+1}q_n} - 1}{2^{a_{n+1}q_n}} \, r_n + \tfrac{2^{q_{n-1}} - 1}{2^{q_{n+1}}} \, r_{n-1}. \end{aligned}$$

On vérifie aisément que $r_n = \frac{P_n}{Q_n}$ pour $n = 0, 1$; supposons-le à l'ordre n. Il vient alors

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= \tfrac{2^{q_{n+1}}}{2^{q_{n+1}} - 1} \Big(\tfrac{2^{a_{n+1}q_n} - 1}{2^{a_{n+1}q_n}} \tfrac{P_n}{Q_n} + \tfrac{2^{q_{n-1}} - 1}{2^{q_{n+1}}} \tfrac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} \Big) \\ &= \tfrac{1}{Q_{n+1}} \Big(\tfrac{2^{a_{n+1}q_n} - 1}{Q_n} 2^{q_{n-1}} P_n + P_{n-1} \Big) \\ &= \tfrac{1}{Q_{n+1}} \Big(A_{n+1} P_n + P_{n-1} \Big) \\ &= \tfrac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}. \end{aligned}$$

La preuve de la transcendance utilise maintenant de façon classique le théorème de Roth (on reproduit celle de [8]). Puisque $Q_n = 2^{q_n} - 1$, on en déduit

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log Q_{n+1}}{\log Q_n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{q_{n+1}}{q_n} \geq \theta,$$

avec $\theta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ le nombre d'or ; en effet, si $\dfrac{q_n}{q_{n-1}} < \theta$ pour un indice n, par l'inégalité $q_{n+1} \geq q_n + q_{n-1}$, on doit avoir $\dfrac{q_{n+1}}{q_n} \geq 1 + \dfrac{1}{q_n/q_{n-1}} > \theta$, et ainsi, $\dfrac{q_{n+1}}{q_n} \geq \theta$ pour une valeur de n sur deux au moins. On en déduit

$$|x - \frac{P_n}{Q_n}| \leq \frac{1}{Q_n^{1+\theta}},$$

pour une infinité de rationnels $\frac{P_n}{Q_n}$. Plus précisément :

a) Si α n'est pas à quotients partiels bornés, il résulte de $|x - \frac{P_n}{Q_n}| \leq \frac{1}{Q_nQ_{n+1}} < \frac{4}{2^{q_n+q_{n+1}}}$, que x est un nombre de Liouville : on peut trouver en effet une sous-suite $a_{n_j+1} > n_j$ et une sous-suite de rationnels telle que $|x - \frac{P_{n_j}}{Q_{n_j}}| < \frac{c}{Q_{n_j}^{n_j+1}}$.

b) Si α est à quotients partiels bornés par $\kappa \geq 2$ et si l'on peut trouver une sous-suite $a_{n_j+1} = \kappa$, on peut trouver une sous-suite de rationnels telle que $|x - \frac{P_{n_j}}{Q_{n_j}}| < \frac{c}{Q_{n_j}^{\kappa+1}}$.

c) Si $a_n = 1$ à partir d'un certain rang, alors $|x - \frac{P_n}{Q_n}| < \frac{c}{Q_n^{1+\theta-\varepsilon}}$. □

Exemple. Considérons le cas où $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = [0; 1, 1, \ldots]$; ainsi la suite sturmienne $(x_j)_{j\geq 1}$ d'angle α est la suite de Fibonacci, point fixe de la substitution $0 \to 1$, $1 \to 10$. Le réel $x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j 2^{-j}$ admet comme développement en fraction continue

$$[0; 2^0, 2^1, 2^1, 2^2, 2^3, 2^5, \ldots, 2^{f_{n-2}}, \ldots]$$

où f_n désigne le n-ième terme de la suite de Fibonacci commençant par $f_0 = f_1 = 1$. Ce superbe exemple a été décrit par J. L. Davison [10] et étendu à d'autres bases d'entiers dans [1]. Pour d'autres généralisations voir [20], [27], [16].

On note $\sigma : t \to 2t \mod 1$ le shift sur le cercle, $O^+(x) = \{\sigma^n(x),\ n \geq 0\}$ l'orbite de x, et $K = K(x) = \overline{O^+(x)}$. Le compact K est un ensemble de Cantor de mesure de Lebesgue et de dimension de Hausdorff nulles, avec de nombreuses propriétés extrémales (cf [8], [7]) dont nous retiendrons les suivantes :

Proposition 2.5. *Soit $x = \sum_1^\infty \frac{\epsilon_j}{2^j}$ avec $(\epsilon_j)_j$ sturmienne caractéristique. Alors l'orbite fermée K de x est minimale, uniquement ergodique pour le shift σ et contenue dans le demi-arc fermé $[\frac{x}{2}, \frac{x}{2} + \frac{1}{2}]$, extrémités comprises.*

Cette dernière propriété est optimale, car, une orbite fermée du shift σ qui évite un arc ouvert de longueur $> 1/2$ est nécessairement finie. A noter qu'elle admet une réciproque.

Démonstration. La minimalité et l'unique ergodicité de K résultent directement de ces propriétés pour les systèmes symboliques sturmiens, l'unique mesure σ-invariante portée par K étant simplement la transportée sur le cercle de la mesure de Gibbs d'un tel système, décrite par F. M. Dekking [12] dans le cas de la suite de Fibonacci, et par V. Berthé [5] dans le cas général d'une suite sturmienne. En particulier, α est la fréquence d'apparition de 1 dans la suite (ϵ_j) des chiffres de x, et aussi bien dans la suite des chiffres de tout nombre du compact K. C'est un invariant de l'orbite fermée.

Pour la dernière propriété, commençons par une remarque. La condition de complexité, pour une suite sturmienne, signifie que pour tout n, il existe un seul facteur de la suite prolongeable à gauche de deux façons ; lorsque la suite $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots$ est caractéristique, cet unique facteur est le mot $\epsilon_1\epsilon_2\ldots\epsilon_n$ [4]. On peut alors préciser la condition d'équilibre dans ce cas : si $s = 0\epsilon =: (s_1, s_2, \cdots)$ est la suite prolongée à gauche par 0, et $p[i,j]$ le nombre de 1 dans le mot $s_i \ldots s_j$,

$$(*) \qquad 0 \le p[k+1, k+n] - p[1,n] \le 1, \ \forall k \ge 1, \ \forall n \ge 1.$$

$\Big($$\Longleftarrow$ Notons N_A le nombre de 1 dans le facteur A. Si $(*)$ est remplie, et A, B deux facteurs de ϵ de même longueur, il existe k, l et n tels que $A = \epsilon_{[k,k+n]}$ et $B = \epsilon_{[l,l+n]}$; d'où $N_A - N_B = (p[k+1, k+n+1] - p[1,n]) - (p[l+1, l+n+1] - p[1,n]) \in \{0, 1, -1\}$ et la condition d'équilibre.

$\Longrightarrow$ Supposons la suite sturmienne caractéristique ; en particulier, pour tout $n \ge 2$, $0\epsilon_1 \ldots \epsilon_{n-1}$ est un facteur de longueur n de la suite ϵ et $-1 \le p[k+1, k+n] - p[1,n] \le 1$. Mais l'égalité $p[k+1, k+n] - p[1,n] = \epsilon_k + \sum_{j=1}^{n-1}(\epsilon_{k+j} - \epsilon_j) = -1$ implique $\epsilon_k = 0$ et $\sum_{j=1}^{n-1}(\epsilon_{k+j} - \epsilon_j) = -1$. Maintenant $A = 1\epsilon_1 \ldots \epsilon_{n-1}$ est encore un facteur de ϵ et, si $B = \epsilon_k \ldots \epsilon_{k+n-1}$, on doit avoir $|N_A - N_B| \le 1$ par la propriété d'équilibre ; or $N_A - N_B = \epsilon_k - 1 + \sum_{j=1}^{n-1}(\epsilon_{k+j} - \epsilon_j) = -2$, d'où la contradiction et la propriété $(*)$. $\Big)$

Supposons maintenant que $K = \overline{O^+(x)} \not\subset [\frac{x}{2}, \frac{x}{2} + \frac{1}{2}]$. La suite $(s_j)_j$ des chiffres de $s = x/2$ est $0, \epsilon_1, \epsilon_2, \ldots$. Soit alors k le plus petit entier ≥ 1 tel que $\sigma^k(x/2) \not\subset [x/2, x/2 + \frac{1}{2}]$.

$$(**) \qquad \begin{array}{lcl} \sigma^k(x/2) & = & \epsilon_k \ \epsilon_{k+1} \cdots \\ x/2 & = & 0 \ \epsilon_1 \ \ldots \\ x/2 + 1/2 & = & 1 \ \epsilon_1 \ \ldots . \end{array}$$

Si $\epsilon_k = 0, \epsilon_{k+1} = \epsilon_1, \dots, \epsilon_{k+j-1} = \epsilon_{j-1}$ et $\epsilon_{k+j} \neq \epsilon_j$ pour un indice $j \geq 2$, nécessairement $\epsilon_{k+j} = 0$ et $\epsilon_j = 1$. Si au contraire $\epsilon_k = 1, \epsilon_{k+1} = \epsilon_1, \dots, \epsilon_{k+j-1} = \epsilon_{j-1}$ et $\epsilon_{k+j} \neq \epsilon_j$, nécessairement $\epsilon_{k+j} = 1$ et $\epsilon_j = 0$.

Notons toujours $p[i,j]$ le nombre de 1 dans le mot $s_i \dots s_j$. Dans le premier cas, $p[k+1, k+j] - p[1,j] = -1$, dans le second $+2$ et la condition d'équilibre

$$(*) \qquad 0 \leq p[k+1, k+\ell] - p[1,\ell]| \leq 1, \ \forall k \geq 1, \ \forall \ell \geq 1$$

n'est pas satisfaite. □

3. Théorème principal

Fixons l'irrationnel α, le nombre x et $K = K(x) = \overline{O^+(x)}$. Ce compact est en fait constitué de tous les nombres sturmiens de même angle α : un nombre sturmien arbitraire d'angle α appartient en effet à l'orbite fermée $K(x)$ du nombre sturmien caractéristique de même angle [19].

Théorème 3.1. *Le compact K est constitué de nombres transcendants dont les propriétés diophantiennes sont analogues à celles de x, et ne dépendent que de α. Plus précisément, soit $z \in K$,*

a) Si α est à quotients partiels non bornés, z est Liouville.

b) Si α est à quotients partiels bornés par κ entier ≥ 2 avec une infinité d'entre eux égaux à κ, z n'est pas $(\kappa+1)$-diophantien.

c) Si α est noble (à quotients partiels ultimement égaux à 1), z n'est pas β-diophantien pour $\beta = 2 + \rho - \varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0$, où $\rho = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Démonstration du théorème. On a posé $x = 2s$ de sorte que $s \in]0, 1/2[$. Pour chaque tel s, on peut définir une branche inverse de σ sur $[0,1] \backslash \{x\}$ de la façon suivante : si $t \neq x$, on définit $\mathbf{d(t)}$ comme **l'unique pré-image de t par σ qui tombe dans** $[s, s+1/2]$. L'application σ est continue mais dilatante sur le cercle alors que d est discontinue en x mais $\frac{1}{2}$-contractante sur chaque intervalle $[s, x[$, $]x, s+1/2]$. On va montrer que toutes les pré-images de s et $s' = s + 1/2$ jouissent de bonnes propriétés d'approximation, et ce, uniformément. On en déduira le résultat pour tout point de l'orbite fermée.

La difficulté est d'estimer les dénominateurs d'un point de K connaissant ceux de x car σ, le shift sur la suite des chiffres, et T, la transformation de Gauss, c'est-à-dire le shift sur la suite des quotients partiels, n'ont pas, en général, de bonnes propriétés de commutation. Hurwitz les a schématisées dans [15] par

$$2\ [0; 2a, b, c, \dots] = [0; a, 2b, \frac{c}{2}, \dots]$$

et

$$\begin{aligned} 2\ [0; 2a+1, b, \dots] &= [0; a, 1, 1, \tfrac{b-1}{2}, \dots] \quad &\text{si} \quad a \neq 0 \\ &= [0; 1, \tfrac{b-1}{2}, \dots] \quad &\text{si} \quad a = 0 \end{aligned}$$

Commençons par étudier les approximations rationnelles des nombres s et s'. Comme les A_j sont pairs pour $j \geq 2$, le développement en fraction continue du nombre s se calcule aisément :

$$s = [0; 2A_1, \frac{A_2}{2}, 2A_3, \dots]$$

Par récurrence, en notant $\frac{P_n}{Q_n}$ les réduites de x, on établit alors :

$$\begin{cases} p_{2n}(s) = \frac{1}{2}P_{2n} & \text{et} \quad p_{2n+1}(s) = P_{2n+1}. \\ q_{2n}(s) = Q_{2n} & \text{et} \quad q_{2n+1}(s) = 2Q_{2n+1}. \end{cases}$$

Ainsi s est bien approché par ses réduites paires puisque

$$|s - \frac{p_{2n}(s)}{q_{2n}(s)}| \leq \frac{1}{q_{2n}(s)q_{2n+1}(s)} = \frac{1}{2Q_{2n}Q_{2n+1}},$$

moins bien par les impaires.

Á l'opposé, le nombre $s' = s + 1/2$ est bien approchable par ses réduites impaires (moins bien par les paires) : en effet, on remarque que (algorithme d'Hurwitz)

$$s' = \frac{x+1}{2} = [0; 1, 1, \frac{A_1 - 1}{2}, 2A_2, \frac{A_3}{2}, \dots]$$

si $A_1 \neq 1$, et

$$s' = [0; 1, 2A_2 + 1, \frac{A_3}{2}, \dots] \quad \text{si} \quad A_1 = 1.$$

On en déduit les réduites de s' :

$$\begin{cases} p_{2n+2}(s') = P_{2n} + Q_{2n} & \text{et} \quad p_{2n+1}(s') = \frac{1}{2}(P_{2n-1} + Q_{2n-1}) \\ q_{2n+2}(s') = 2Q_{2n} & \text{et} \quad q_{2n+1}(s') = Q_{2n-1} \end{cases}$$

si $A_1 \neq 1$, et,

$$\begin{cases} p_{2n}(s') = P_{2n} + Q_{2n} & \text{et} \quad p_{2n+1}(s') = \frac{1}{2}(P_{2n+1} + Q_{2n+1}) \\ q_{2n}(s') = 2Q_{2n} & \text{et} \quad q_{2n+1}(s') = Q_{2n+1} \end{cases}$$

si $A_1 = 1$. Ainsi, à son tour,

$$|s' - \frac{p_{2n+1}(s')}{q_{2n+1}(s')}| \leq \frac{1}{2Q_{2n}Q_{2n-1}}.$$

On remarque déjà que si une infinité de quotients partiels d'indice impair (resp. pair) remplissent les hypothèses a), b) ou c) du théorème, les conclusions sont vérifiées pour s (resp. s').

On poursuit par la remarque évidente mais fondamentale ici : les coefficients A_k sont divisibles par une puissance de 2 de plus en plus grande quand k augmente, puisque A_k est divisible par $2^{q_{k-2}}$ et que q_{k-2} tend vers ∞ avec k.

On va établir, par récurrence sur j, le lemme suivant :

Lemme 3.2. *Les quotients partiels de $d^j(s)$ et de $d^j(s')$, où $s' = s + 1/2$, sont tous pairs à partir d'un certain rang dépendant de j.*

Démonstration du lemme. On va montrer plus précisément,

$$(*) \quad \forall j \geq 1 \ \exists N \text{ tel que } T^N d^j(s) = [0; 2^{j+1}A_{l+1}, \frac{A_{l+2}}{2^{j+1}}, \dots],$$

où l est tel que $q_l \geq j+1$ (ainsi 2^{j+1} divise A_{l+2}), et, si $N(j)$ est le premier tel indice N, $N(j) \geq 4$ (avec un résultat analogue pour $y = d^j(s')$)).

• C'est vrai pour $j = 1$ et $d(s) = \frac{s+1}{2}$. En effet, toujours par l'algorithme d'Hurwitz, on peut calculer le développement de $d(s)$: si $A_1 = 1$ (c'est-à-dire si $a_1 = 1$),

$$d(s) = [0; 1, 2, 1, \frac{A_2 - 2}{4}, 4A_3, \frac{A_4}{4}, \dots]$$

et si $A_1 \geq 2$,

$$d(s) = [0; 1, 1, A_1 - 1, 1, 1, \frac{A_2 - 2}{4}, 4A_3, \frac{A_4}{4}, \dots],$$

en utilisant $[\dots a, 0, b, c, \dots] = [\dots a + b, c, \dots]$ par exemple lorsque $A_2 = 2$ (c'est-à-dire $a_2 = 1$). Ainsi la propriété $(*)$ est remplie avec $N(1) \geq 4$.

• Supposons maintenant le résultat vrai pour $z = d^j(s)$, $j \geq 1$, et montrons-le pour $y = d^{j+1}(s)$. En appliquant l'hypothèse à $z = [0; \alpha_1, \alpha_2, \dots]$, il existe l et N tels que $T^N z = [0; \alpha_{N+1}, \alpha_{N+2}, \dots] = [0; 2^{j+1}A_{l+1}, \frac{A_{l+2}}{2^{j+1}}, \dots]$.

En particulier les α_k sont pairs à partir d'un certain rang et on note k_0 le plus petit tel k, de sorte que $k_0 = N$ ou $N - 1$, α_{k_0} est impair et

$$\frac{1}{2}T^k z = [0; 2\alpha_{k+1}, \frac{\alpha_{k+2}}{2}, \dots]$$

est bien défini pour $k \geq k_0 - 1$.

Notons (p_n) la suite des numérateurs de z ; puisque $k_0 \geq 3$ et

$$p_{k_0} = \alpha_{k_0} p_{k_0 - 1} + p_{k_0 - 2},$$

les trois numérateurs p_{k_0}, p_{k_0-1}, p_{k_0-2} ne peuvent être simultanément impairs : en effet, si p_{k_0-1} est impair, p_{k_0-2} et p_{k_0} sont de parité opposée puisque α_{k_0} est impair, et l'un des deux est pair (p_{k_0} si $k_0 = 3$).

Maintenant, si p_k est le premier entier pair parmi $p_{k_0}, p_{k_0-1}, p_{k_0-2}$, alors $k \geq 2$ et on écrit

$$z = \frac{p_{k-1}T^k y + p_k}{q_{k-1}T^k y + q_k}$$

de sorte que

$$y = d(z) = \frac{p_{k-1}\frac{T^k y}{2} + \frac{p_k}{2}}{q_k + 2q_{k-1}\frac{T^k y}{2}},$$

si $d(z) = \frac{z}{2}$; si $d(z) = \frac{z+1}{2}$, $(p_j + q_j)_j$ vérifiant la même relation de récurrence,

$$d(z) = \frac{\frac{p_k+q_k}{2} + (p_{k-1}+q_{k-1})\frac{T^k z}{2}}{q_k + 2q_{k-1}\frac{T^k z}{2}},$$

où k, de même, est l'un des trois indices k_0, k_0-1, k_0-2, et $k \geq 2$. Ainsi, dans les deux cas, $d(z)$ est équivalent à $\frac{1}{2}T^k y$.

La même relation $p_k = \alpha_k p_{k-1} + p_{k-2}$ pour $k > k_0$ montre que les numérateurs de deux en deux ont même parité puisque α_k est pair.

Le fait que $N(j+1)$ reste supérieur ou égal à 4 vient de l'algorithme d'Hurwitz qui implique $N(j+1) \geq N(j)$.

Pour s', le raisonnement est le même, initialisé par le développement de $d(s')$:

$$d(s') = [0; 3, 1, \frac{A_1-3}{4}, 4A_2, \frac{A_3}{4}, \dots]$$

si $A_1 \geq 3$, et lorsque $A_1 = 1$,

$$d(s') = [0; 2, A_2, 1, 1, \frac{A_3-3}{4}, 4A_4, \frac{A_5}{4}, \dots].$$

□

Les propriétés diophantiennes des nombres $d^j(s)$ et $d^j(s')$ découlent alors de la proposition plus précise qui suit (on rappelle que $(Q_n)_n$ désigne la suite des dénominateurs de x) :

Proposition 3.3. *Si y est de la forme $d^j s$ (resp. $d^j(s')$), il existe n_j tel que pour $n \geq 1$*

$$q_{2n+2n_j}(y) = Q_{2n} \quad \text{et} \quad q_{2n+1+2n_j}(y) = 2^{j+1}Q_{2n+1}$$

$$(\textit{resp.} \quad q_{2n+1+2n_j}(y) = Q_{2n-1} \quad \text{et} \quad q_{2n+2+2n_j}(y) = 2^{j+1}Q_{2n}.)$$

On en déduira comme précédemment pour s (et s'), que $y = d^j(s)$ s'approche bien par ses réduites paires d'indice assez grand, ($d^j(s')$ par ses réduites impaires d'indice assez grand) et que l'approximation est uniforme en j puisque pour $n \geq 1$,

$$|y - \frac{p_{2n+2n_j}(y)}{q_{2n+2n_j}(y)}| \leq \frac{1}{q_{2n+2n_j}(y)q_{2n+1+2n_j}(y)} = \frac{1}{2^{j+1}Q_{2n}Q_{2n+1}}.$$

On dira pour simplifier que $\frac{p_{2n+2n_j}(y)}{q_{2n+2n_j}(y)}$ est une **bonne** approximation de y, lorsque $y = d^j(s)$.

Démonstration de la proposition. Il est plus pratique ici d'utiliser la notation matricielle et la décomposition de Raney [21], [28], plutôt que l'algorithme d'Hurwitz sur les quotients partiels. Rappelons qu'un rationnel $\frac{p}{q}$ admet toujours une décomposition $[0; a_1, a_2, \dots, a_\ell]$ de longueur paire puisque l'on a l'identité évidente : $[0; a_1, a_2, \ldots, a_\ell] = [0; a_1, a_2, \ldots, a_\ell - 1, 1]$ si $a_\ell > 1$, et $[0; a_1, a_2, \ldots, a_{\ell-1} + 1]$ si $a_\ell = 1$.

Si on associe à $\frac{p}{q} = [0; a_1, a_2, \ldots, a_{2n}]$ le vecteur

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_{2n} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

avec $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, et si on introduit les matrices de Raney (d'Hurwitz)

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

il résulte de la relation $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = R^a J = J L^a$ que

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = L^{a_1} R^{a_2} \cdots R^{a_{2n}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

qu'on note brièvement

$$\frac{p}{q} \longleftrightarrow L^{a_1} R^{a_2} \cdots R^{a_{2n}}.$$

De la même façon, on identifie le rationnel $2\frac{p}{q}$ au produit $AL^{a_1} R^{a_2} \cdots R^{a_{2n}}$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver l'expression de $2\frac{p}{q}$ à l'aide de sa décomposition en fraction continue revient à trouver la décomposition de $AL^{a_1} R^{a_2} \cdots R^{a_{2n}}$ dans l'alphabet $\{R, L\}$, avec l'état de sortie A ou A' (car on travaille ici avec des fractions continues limitées). Il suffit pour cela de connaître le tableau des propriétés de commutation de ces matrices (tableau de transition d'un automate à états matriciels) :

$$AR = R^2 A, \ AL^2 = LA, \ ALR = RLA'$$

$$A'R^2 = RA', \ A'L = L^2 A', \ A'RL = LRA,$$

avec $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Remarques. 1) Si W est un mot sur l'alphabet $\{R, L\}$, $AA'W$ définit le même rationnel que le mot W ($AA'W \sim W$). En effet le vecteur obtenu à l'aide de $AA'W$ est $\begin{pmatrix} 2p \\ 2q \end{pmatrix}$ puisque $AA' = 2I$.

2) De même $WA' \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2IW \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow W \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

La démonstration de la proposition se fait par récurrence sur $j \geq 1$. On peut l'établir pour $j = 1$ en utilisant la décomposition de $d(s)$ obtenue plus haut. On calcule sans difficultés,

$$\begin{cases} q_{2n+1}(d(s)) &= 2q_{2n-1}(s) \\ q_{2n+2}(d(s)) &= q_{2n}(s) \end{cases}$$

pour $n \geq 1$ si $A_1 = 1$, et sinon, pour $n \geq 2$,

$$\begin{cases} q_{2n+1}(d(s)) &= 2q_{2n-3}(s) \\ q_{2n+2}(d(s)) &= q_{2n-2}(s) \end{cases}$$

De même pour les numérateurs,

$$\begin{cases} p_{2n+1}(d(s)) &= p_{2n-1}(s) + q_{2n-1}(s) \\ p_{2n+2}(d(s)) &= \frac{1}{2}(p_{2n}(s) + q_{2n}(s)) \end{cases}$$

pour $n \geq 1$ si $A_1 = 1$, et sinon, pour $n \geq 2$,

$$\begin{cases} p_{2n+1}(d(s)) &= p_{2n-3}(s) + q_{2n-3}(s) \\ p_{2n+2}(d(s)) &= \frac{1}{2}(p_{2n-2}(s) + q_{2n-2}(s)) \end{cases}$$

Soit $y = d^j(s) = [0; \alpha_1, \alpha_2, \dots]$, avec $j \geq 1$, et supposons la proposition établie pour y. Ainsi, pour $n > n_j$, $\frac{p_{2n}(y)}{q_{2n}(y)}$ est une *bonne* approximation de y. Quitte à augmenter n_j on peut supposer que $x < \frac{p_{2n}(y)}{q_{2n}(y)} \leq y$ si $y > x$ et $s < \frac{p_{2n}(y)}{q_{2n}(y)} \leq y$ si $y < x$. On a donc

$$\left|d(y) - d\Big(\frac{p_{2n}(y)}{q_{2n}(y)}\Big)\right| = \frac{1}{2}\left|y - \frac{p_{2n}(y)}{q_{2n}(y)}\right|$$

et, le dénominateur du rationnel $d\Big(\frac{p_{2n}(y)}{q_{2n}(y)}\Big)$ étant $q_{2n}(y)$ ou $2q_{2n}(y)$, on obtient que $d\Big(\frac{p_{2n}(y)}{q_{2n}(y)}\Big)$ vérifie la condition du théorème de Legendre [14] : $|z - \frac{p}{q}| < \frac{1}{2q^2}$; c'est donc une réduite de $d(y)$, d'indice encore pair puisque d respecte l'ordre sur $[s, x[$ et sur $]x, s']$.

On note cette réduite $\dfrac{p_{2N}(d(y))}{q_{2N}(d(y))}$. Commençons par calculer $q_{2N}(d(y))$. On va établir l'identité :

Lemme 3.4. *Pour $n \geq n_j$ et N l'indice associé précédemment,*

$$\frac{q_{2N-1}(d(y))}{q_{2N}(d(y))} = \sigma\Big(\frac{q_{2n-1}(y)}{q_{2n}(y)}\Big).$$

Démonstration du lemme. En utilisant la décomposition

$$\frac{q_{2n-1}(y)}{q_{2n}(y)} = [0; \alpha_{2n}, \alpha_{2n-1}, \dots, \alpha_1],$$

on peut identifier le rationnel

$$\sigma\Big(\frac{q_{2n-1}(y)}{q_{2n}(y)}\Big) \longleftrightarrow AL^{\alpha_{2n}} R^{\alpha_{2n-1}} \dots R^{\alpha_1}.$$

Par ailleurs traduisons l'hypothèse

$$\frac{p_{2N}(d(y))}{q_{2N}(d(y))} = d\Big(\frac{p_{2n}(y)}{q_{2n}(y)}\Big)$$

par

$$A'L^{\alpha_1}R^{\alpha_2}\cdots R^{\alpha_{2n}} = L^{\beta_1}R^{\beta_2}\cdots R^{\beta_{2N}}A'$$

ou

$$A'RL^{\alpha_1}R^{\alpha_2}\cdots R^{\alpha_{2n}} = LR^{\beta_2}\cdots R^{\beta_{2N}}A'$$

selon l'expression de $d(y)$. En effet l'état de sortie est nécessairement A' car, les α_k étant pairs pour $k \geq 2n_0$, le développement de $d(y)$ finit par $L^{2\alpha_{2n_0}-1}R^{\frac{\alpha_{2n_0}}{2}}\ldots l^{2\alpha_{2n}-1}R^{\frac{\alpha_{2n}}{2}}$, ce qui traduit l'action de A' sur le mot $W' = L^{\alpha_{2n_0}-1}R^{\alpha_{2n_0}}\ldots l^{\alpha_{2n-1}}R^{\alpha_{2n}}$.

Par transposition, qui échange R et L, il vient dans le premier cas

$$L^{\alpha_{2n}}R^{\alpha_{2n-1}}\cdots R^{\alpha_1}A' = A'L^{\beta_{2N}}R^{\beta_{2N-1}}\cdots R^{\beta_1}$$

ou encore

$$AL^{\alpha_{2n}}R^{\alpha_{2n-1}}\cdots R^{\alpha_1}A' \sim L^{\beta_{2N}}R^{\beta_{2N-1}}\cdots R^{\beta_1}$$

par la remarque 1) faite plus haut, et la remarque 2) donne l'identité du lemme dans ce cas.

Dans le second cas, on obtient

$$L^{\alpha_{2n}}R^{\alpha_{2n-1}}\cdots R^{\alpha_1}LA' = A'L^{\beta_{2N}}R^{\beta_{2N-1}}\cdots R^{\beta_1}$$

soit

$$AL^{\alpha_{2n}}R^{\alpha_{2n-1}}\cdots R^{\alpha_1}LA' \sim L^{\beta_{2N}}R^{\beta_{2N-1}}\cdots R^{\beta_1},$$

et, là encore, puisque $LA'\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = A'\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, les rationnels associés sont les mêmes. □

Pour achever la démonstration de la proposition, il suffit de noter que l'orbite sous σ du rationnel $\frac{q_{2n-1}(y)}{q_{2n}(y)}$ est constituée de rationnels de la forme $\frac{k}{Q_{2n-2n_j}}$, par hypothèse sur $q_{2n}(y)$. On a ainsi $q_{2N}(d(y)) = Q_{2n-2n_j}$, ce que l'on peut écrire $q_{2N}(d(y)) = Q_{2N-2n_{j+1}}$ avec $n_{j+1} \geq n_j$ car $N \geq n$.

Il nous faut maintenant calculer $q_{2N+k}(d(y))$ pour $k \geq 1$: partons de

$$\frac{q_{2N+1}(d(y))}{q_{2N}(d(y))} = \beta_{2N+1} + \frac{q_{2N-1}(d(y))}{q_{2N}(d(y))}$$

où $\beta_{2N+1} = \frac{\alpha_{2n+1}}{2}$. Il résulte par ailleurs du lemme

$$\frac{q_{2N-1}(d(y))}{q_{2N}(d(y))} = \sigma\Big(\frac{q_{2n-1}(y)}{q_{2n}(y)}\Big) = 2\Big(\frac{q_{2n+1}(y)}{q_{2n}(y)} - \alpha_{2n+1}\Big)$$

car $\frac{q_{2n-1}(y)}{q_{2n}(y)} < \frac{1}{2}$ pour n_j assez grand, ou encore

$$\frac{q_{2N-1}(d(y))}{q_{2N}(d(y))} = 2\frac{q_{2n+1}(y)}{q_{2n}(y)} - \beta_{2N+1}$$

ce qui conduit à

$$\frac{q_{2N+1}(d(y))}{q_{2N}(d(y))} = 2\frac{q_{2n+1}(y)}{q_{2n}(y)} = 2\frac{q_{2n+1}(y)}{q_{2N}(d(y))}.$$

On calculerait de même les dénominateurs $q_{2N+k}(d(y))$ pour $k \geq 2$. La proposition est ainsi démontrée. □

Reste à déduire de la Proposition 3.3 que tout point z de l'orbite fermée de x jouit de propriétés diophantiennes semblables à celles du nombre x lui-même, ces propriétés ne dépendant que de α.

Afin d'utiliser les propriétés d'approximation des nombres de la forme $d^j(s)$ et $d^j(s')$, on commence par remarquer (voir aussi [8]) que

$$\overline{\{d^j(s),\ j \geq 0\}} = \overline{\{d^j(s'),\ j \geq 0\}} = K.$$

(Soit en effet $z \in K = \overline{O^+(x)}$. Puisque K est minimal (proposition 2.2), $\overline{O^+(z)} = K$, et

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \text{ tel que } |s - \sigma^N(z)| < \varepsilon.$$

Si ε est assez petit, on va trouver $j \leq N$ tel que $|d^j(s) - z| < 2^{-N}\varepsilon$: pour cela, notons $I_1 =]s, x[$ et $I_2 =]x, s'[$; sur chaque intervalle, l'application d est $\frac{1}{2}$-contractante et respecte l'ordre. Si $\varepsilon < s$, s et $\sigma^N(z)$ sont dans I_1 de sorte que $d(s) < \sigma^{N-1}(z)$ et $\sigma^{N-1}(z) - d(s) < \frac{\varepsilon}{2}$. Tant que $d^k(s)$ et $\sigma^{N-k}(z)$ restent dans un même intervalle, $d^k(s) < \sigma^{N-k}(z)$ et $\sigma^{N-k}(z) - d^k(s) < \frac{\varepsilon}{2^k}$, $k \geq 1$. Soit k le premier instant $< N$ avec $d^k(s) < x < \sigma^{N-k}(z)$ (puisque $d^k(s) < \sigma^{N-k}(z)$) ; $\sigma^{N-k}(z) \in I_2$ mais $\sigma^{N-k}(z) - x < \sigma^{N-k}(z) - d^k(s) < \frac{\varepsilon}{2^k}$, et $d(\sigma^{N-k}(z)) = \sigma^{N-k-1}(z) \in I_1$ avec, de plus $\sigma^{N-k-1}(z) - s < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$. On recommence avec les points $s < \sigma^{N-k-1}(z) < x$ et on trouve ainsi $j \leq N$ tel que

$$|d^j(s) - z| < 2^{-N}\varepsilon.$$

On procèderait de même avec s'.)

Comme les nombres $d^j(s)$ sont uniformément bien approchés par les réduites paires et que les nombres $d^j(s')$ sont uniformément bien approchés par les réduites impaires, on approche z par $y \in \{d^j(s),\ j \geq 0\}$ ou par $y' \in \{d^j(s'),\ j \geq 0\}$ selon la suite des quotients partiels $(a_n)_n$ de α pour les deux premiers cas, le troisième étant indifférent.

Supposons en effet que l'on soit dans le cas a) : α est à quotients partiels non bornés ; il existe donc une sous-suite a_{m_l} qui tend vers l'infini et, quitte à ré-extraire, une sous-suite dont les indices ont *même parité*, telle que $a_{m_l} \geq m_l$ pour chaque l. Supposons, par exemple, les indices m_l

impairs. Fixons n avec $2n+1 \in \{m_1, \ldots, m_l, ..\}$ et prenons $\varepsilon = |s - \frac{p_{2n}(s)}{q_{2n}(s)}|$. Il lui correspond j tel que $|d^j(s) - z| < \varepsilon$, $y = d^j(s)$ et le rang n_j de la Proposition 3.3. Le rationnel $\frac{p_{2n+2n_j}(y)}{q_{2n+2n_j}(y)}$ fournit une approximation pour z puisque

$$\begin{aligned}
\left|z - \frac{p_{2n+2n_j}(y)}{q_{2n+2n_j}(y)}\right| &\leq |z-y| + \left|y - \frac{p_{2n+2n_j}(y)}{q_{2n+2n_j}(y)}\right| \\
&\leq \left|s - \frac{p_{2n}(s)}{q_{2n}(s)}\right| + \frac{1}{q_{2n+2n_j}(y) q_{2n+1+2n_j}(y)} \\
&\leq \frac{1}{q_{2n}(s) q_{2n+1}(s)} + \frac{1}{q_{2n+2n_j}(y) q_{2n+1+2n_j}(y)}
\end{aligned}$$

par le choix de ε, ou encore, par la Proposition 3.3,

$$\begin{aligned}
\left|z - \frac{p_{2n+2n_j}(y)}{q_{2n+2n_j}(y)}\right| &\leq \frac{1}{2Q_{2n}Q_{2n+1}} + \frac{1}{2^{j+1}Q_{2n}Q_{2n+1}} \\
&\leq \frac{1}{Q_{2n}Q_{2n+1}} \\
&\leq \frac{c}{(q_{2n+2n_j}(y))^{2n+2}}
\end{aligned}$$

puisque $q_{2n+2n_j}(y) = q_{2n}(s) = Q_{2n}$ et $q_{2n+1+2n_j}(y) = 2^{j+1}Q_{2n+1}$. On a pu trouver une infinité de rationnels $(\frac{p_h}{q_h})_{h \geq 1}$ tels que

$$|z - \frac{p_h}{q_h}| \leq \frac{C}{q_h^h}$$

et z est Liouville.

Si au contraire, les indices m_l sont pairs, on choisira $\varepsilon = |s - \frac{p_{2n-1}(s)}{q_{2n-1}(s)}|$ avec $2n \in \{m_1, \ldots, m_l, ..\}$, $y' = d^j(s')$ et les réduites $\frac{p_{2n-1+2n_j}(y')}{q_{2n-1+2n_j}(y')}$.

Dans le cas b), on peut trouver une sous-suite $a_{m_l} = \kappa$ où les indices ont même parité et suivant celle-ci, on choisit, comme dans le cas a), d'approcher z par $d^j(s)$ ou $d^j(s')$, puis par leurs *bonnes* réduites associées.

Le cas a) ne fait pas intervenir la parité et se démontre de même ; d'où le théorème. □

Remerciements. Je remercie Pierrette Sentenac pour les discussions que nous avons eues ensemble et ses invitations à Orsay, ainsi que Andrew Pollington et Jeff Shallit pour leurs remarques et les références signalées lors du colloque en l'honneur de Michel Mendès France.

Bibliographie

[1] W. W. Adams, J. L. Davison, *A remarkable class of continued fractions.* Proc. Amer. Math. Soc. **65** (1977), 194–198.

[2] J.-P. Allouche, J. L. Davison, M. Queffélec, L. Q. Zamboni, *Transcendence of Sturmian or morphic continued fractions.* J. Number Theory **91** (2001), 39–66.

[3] J.-P. Allouche, L. Q. Zamboni, *Algebraic irrational binary numbers cannot be fixed points of non-trivial constant length or primitive morphisms.* J. Number Theory **69** (1998), 119–124.

[4] P. ARNOUX, G. RAUZY, *Représentation géométrique de suites de complexité* $2n+1$. Bull. Soc. Math. France **119** (1991), 199–215.
[5] V. BERTHÉ, *Fréquences des facteurs des suites sturmiennes.* Theoret. Comput. Sci. **165** (1996), 295–309.
[6] P. E. BÖHMER, *Über die Transzendenz gewisser dyadischer Brüche.* Math. Ann. **96** (1926), 367–377. Erratum ibid. page 735.
[7] T. BOUSCH, *Le poisson n'a pas d'arête.* Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Stat. **36** (2000) 489–508.
[8] S. BULLETT, P. SENTENAC, *Ordered orbits of the shift, square roots, and the devil's staircase.* Math. Proc. Camb. Philos. Soc. **115** (1994), 451–481.
[9] L.V. DANILOV, *Some classes of transcendental numbers.* English Translation in Math. Notes Acad. Sci. USSR **12** (1972), 524–527.
[10] J. L. DAVISON, *A series and its associated continued fraction.* Proc. Amer. Math. Soc. **63** (1977), 29–32.
[11] F. M. DEKKING, *Transcendance du nombre de Thue-Morse.* C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A–B **285** (1977), 157–160.
[12] F. M. DEKKING, *On the Thue-Morse measure.* Acta Universitatis Carolinae, Math. Phys. **33** (1992), 35–40.
[13] S. FERENCZI, C. MAUDUIT, *Transcendence of numbers with a low complexity expansion.* J. Number Theory **67** (1997), 146–161.
[14] G. H. HARDY, E. M. WRIGHT, *An introduction to the theory of numbers.* Clarendon Press, Oxford Univ. Press, 1979.
[15] A. HURWITZ, *Über die Kettenbruch-Entwicklung der Zahl e.* Mathematische Werke, Bd **2** Basel, Birkhaüser, 1933, 129–133.
[16] T. KOMATSU, *A certain power series and the inhomogeneous continued fraction expansions.* J. Number Theory **59** (1996), 291–312.
[17] P. LIARDET, P. STAMBUL, *Séries de Engel et fractions continuées.* J. Théor. Nombres Bordeaux **12** (2000), 37–68.
[18] J. H. LOXTON, A. J. VAN DER POORTEN, *Arithmetic properties of the solutions of a class of functional equations.* J. Reine Angew. Math. **330** (1982), 159–172.
[19] M. MORSE, G. A. HEDLUND, *Symbolic dynamics II : Sturmian trajectories.* Amer. J. Math. **62** (1940), 1–42.
[20] K. NISHIOKA, I. SHIOKAWA, J.-I. TAMURA, *Arithmetical properties of a certain power series.* J. Number Theory **42** (1992), 61–87.
[21] G. N. RANEY, *On continued fractions and finite automata.* Math. Ann. **206** (1973), 265–283.
[22] D. RIDOUT, *Rational approximations to algebraic numbers.* Mathematika **4** (1957), 125–131.
[23] K. F. ROTH, *Rational approximations to algebraic numbers.* Mathematika **2** (1955), 1–20. Corrigendum, page 168.
[24] R. N. RISLEY, L. Q. ZAMBONI, *A generalization of Sturmian sequences: combinatorial structure and transcendence.* Acta Arith. **95** (2000) 167–184.
[25] J. SHALLIT, *Real numbers with bounded partial quotients: a survey.* Enseign. Math. **38** (1992), 151–187.
[26] H. J. S. SMITH, *Note on continued fractions.* Messenger Math. **6** (1876), 1–14.
[27] J.-I. TAMURA, *A class of transcendental numbers having explicit g-adic and Jacobi-Perron expansions of arbitrary dimension.* Acta Arith. **71** (1995), 301–329.
[28] A. J. VAN DER POORTEN, *An introduction to continued fractions.* In Diophantine Analysis London Math. Soc. Lecture Note Ser., **109**, Cambridge University Press, 1986, 99–138.

Martine QUEFFÉLEC
UFR de Mathématiques, UMR 8524, Bât. M2
Université des Sciences et Technologies de Lille
59655 Villeneuve d'Ascq Cedex
France
E-mail : `martine@agat.univ-lille1.fr`