JOURNAL DE THÉORIE DES NOMBRES DE BORDEAUX

J.-P. ALLOUCHE

J. O. SHALLIT

Complexité des suites de Rudin-Shapiro généralisées

Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, tome 5, n° 2 (1993), p. 283-302

<http://www.numdam.org/item?id=JTNB_1993__5_2_283_0>

Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **5** *(1993), 283–302*

Complexité des suites de Rudin-Shapiro généralisées

par J.-P. ALLOUCHE ET J. O. SHALLIT*

ABSTRACT – The complexity of an infinite sequence is defined as the function counting the number of factors of length k in this sequence. We consider the generalized Rudin-Shapiro sequences, which count the number of occurrences of a certain type of blocks in the binary expansion of the nonegative integers, and we prove that their complexity function is an ultimately affine function.

RÉSUMÉ – La complexité d'une suite infinie est définie comme la fonction qui compte le nombre de facteurs de longueur k dans cette suite. Nous prouvons ici que la complexité des suites de Rudin-Shapiro généralisées (qui comptent les occurrences de certains facteurs dans les développements binaires d'entiers) est ultimement affine.

1. Introduction

Une suite infinie $u = (u(n))_{n\geq 0}$ étant donnée, on appelle facteur de cette suite tout mot de la forme $u(n)u(n+1)\cdots u(n+k-1)$, $(k \geq 1)$. L'entier k est appelé longueur de ce mot. On note $P_u(k)$ le nombre de facteurs de longueur k de la suite u, et l'application P_u est appelée complexité de la suite u.

Rappelons ici quelques résultats généraux sur la fonction P_u :

A. S'il existe un entier $n \geq 1$ pour lequel $P_u(n) \leq n$, alors la suite u est ultimement périodique (voir, par exemple, [7]).

B. Les suites non ultimement périodiques de complexité minimale devraient donc vérifier : $\forall n,\ \ P_u(n) = n + 1$. De telles suites existent, elles sont appelées suite sturmiennes, voir [9] et [7], voir aussi l'article de Borel

---

Mots-clés : Rudin-Shapiro sequence, complexity.
Manuscrit reçu le 30 juin 1991, version définitive le 15 janvier 1994.
* Research supported by a grant from NSERC.
Les résultats contenus dans cet article ont été exposés au colloque "Thémate", (CIRM, Luminy, Mai 1991).

et Laubie dans le volume précédent (*Quelques mots sur la droite projective réelle*, Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux **5** (1993), 23–51) et celui de Mignosi et Séébold dans ce volume (*Morphismes sturmiens et règles de Rauzy*, Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux **5** (1993), 221–233).

C. Les suites de complexité $2n+1$ sont étudiées par Arnoux et Rauzy dans [2]. Elles partagent avec les suites sturmiennes la propriété "d'avoir une définition géométrique".

Si l'on s'intéresse plus particulièrement aux suites automatiques (au sens de [6], voir aussi [5]), on a les résultats suivants :

a. Si u est automatique, alors $P_u(n) \leq Cn$ pour une certaine constante C [6].

b. Si u est la suite de Thue-Morse, $P_u(n)$ a été calculé explicitement, et une formule en termes du développement binaire de n est donnée dans [3] et [8].

c. Si u est une suite automatique verifiant certaines conditions supplémentaires, alors $P_u(n+1) - P_u(n)$ est aussi une suite automatique [13].

Il est alors naturel de se demander pour quelles suites u la suite $P_u(n+1) - P_u(n)$ est constante, ou au moins ultimement constante (autrement dit pour quelles suites u la fonction $P_u(n)$ est ultimement affine, c'est-à-dire $\exists a, b,\ \exists n_0,\ \forall n \geq n_0,\ P_u(n) = an + b$). Les suites sturmiennes et les suites de complexité $2n+1$ sont bien sûr de ce type.

Dans cet article nous nous intéressons aux suites de Rudin-Shapiro généralisées proposées par Mendès France et étudiées dans [1]; plus précisément soit d un entier ≥ 1, on note $z_d(n)$ le nombre d'occurrences (qui peuvent se chevaucher) du facteur $1 * \cdots * 1$ dans le développement binaire de n, où $* \cdots *$ représente un mot quelconque de longueur $d-1$. En d'autres termes si le développement binaire de n est donné par $n = \sum_{j=0}^{\infty} e_j(n) 2^j$, alors

$$z_d(n) = \sum_{j=0}^{\infty} e_j(n) e_{j+d}(n).$$

Enfin on appelle suites de Rudin-Shapiro généralisées [1] les suites

$$u_d(n) = z_d(n) \bmod 2.$$

Notons que la suite de Rudin-Shapiro classique ([12] et [11]) correspond au cas $d = 1$.

Le théorème que nous prouvons dans ce qui suit s'énonce alors :

THÉORÈME. *Pour chaque* $d \geq 1$ *il existe* $n_0 = n_0(d)$ *tel que* $\forall n \geq n_0(d)$, $P_{u_d}(n) = 2^{d+2}(n-1)$.

2. Le cas de la suite de Rudin-Shapiro classique

Nous notons ici $u = u_1$ la suite de Rudin-Shapiro classique. Dans un courrier électronique de septembre 1989, le second auteur proposait, sur la base de calculs expérimentaux, la conjecture suivante :

$$\forall n \geq 8 \quad P_u(n) = 8n - 8.$$

Si nous appelons σ la substitution définie sur l'alphabet $\{a, b, a', b'\}$ par

$$\begin{aligned} a &\to ab \\ b &\to ab' \\ a' &\to a'b' \\ b' &\to a'b \end{aligned}$$

et φ l'application de $\{a, b, a', b'\}$ dans $\{0, 1\}$ définie par $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$; $\varphi(a') = \varphi(b') = 1$, il est bien connu que $u = \varphi \circ v$ où v est le point fixe de σ, ($v = \lim_{k \to +\infty} \sigma^k(a)$).

Or il se trouve que Tapsoba donne dans [13] la relation

$$P_v(n) = 8n - 8, \quad \forall n \geq 2$$

et que Mouline indique (sans preuve) dans [10] que

$$P_u(n) = P_v(n) \quad \forall n \geq 8.$$

La conjecture ci-dessus résulte de ces deux affirmations. Elle a aussi été prouvée par Brlek [4]. Nous nous proposons d'en donner ici une preuve autonome (n'introduisant pas explicitement la notion de "rythme", voir [10] et [13]), puis dans les prochains paragraphes de montrer comment cela se généralise aux suites u_d.

1°) Calcul de $P_v(n)$:

On appelle donc v le point fixe de σ définie par

$$\begin{aligned} a &\to ab \\ b &\to ab' \\ a' &\to a'b' \\ b' &\to a'b \end{aligned}$$

LEMME 1.

• *Tout facteur de v de la forme $B_1A_1B_2$, ave $B_i \in \{b, b'\}$ et $A_i \in \{a, a'\}$ admet un unique prolongement à gauche en un facteur de v de longueur* 4.

• *Tout facteur de v de la forme $A_1B_1A_2$, avec $A_i \in \{a, a'\}$ et $B_i \in \{b, b'\}$ admet un unique prolongement à droite en un facteur de v de longueur* 4.

Après avoir remarqué qu'il y a dans v alternance des A dans $\{a, a'\}$ et des B dans $\{b, b'\}$, il suffit de prouver que deux facteurs de v de la forme $A_1B_1A_2B_2$, $(A_i \in \{a, a'\}, B_i \in \{b, b'\})$ sont égaux dès que leurs préfixes (respectivement suffixes) de longueur 3 sont égaux.

Or un facteur de v de la forme $A_1B_1A_2B_2$ est l'image par σ d'un facteur de v de longueur 2. A cause de l'alternance des A et des B dans v il y a au plus 8 facteurs de longueur 2 qui sont ab, ab', $a'b$, $a'b'$, ba, $b'a$, ba' et $b'a'$. Ces facteurs figurent effectivement dans v (puisqu'il figurent déjà dans $\sigma^4(a)$ comme on le vérifie sans peine). Notons qu'on obtient au passage $P_v(2) = 8$. Les facteurs de v de la forme $A_1B_1A_2B_2$ sont alors exactement les mot suivants :

$$\begin{array}{ll}
\sigma(ab) = abab' & \sigma(ba) = ab'ab \\
\sigma(ab') = aba'b & \sigma(b'a) = a'bab \\
\sigma(a'b) = a'b'ab' & \sigma(ba') = ab'a'b' \\
\sigma(a'b') = a'b'a'b & \sigma(b'a') = a'ba'b'.
\end{array}$$

Il est alors clair que deux tels mots distincts ont leurs préfixes droits et leurs préfixes gauches de longueur 3 respectivement distincts.

LEMME 2.

$\forall n \geq 2,\ P_v(2n) = P_v(n) + P_v(n+1)$;

$\forall n \geq 1,\ P_v(2n+1) = 2P_v(n+1)$.

A cause de l'alternance des $A \in \{a, a'\}$ et des $B \in \{b, b'\}$ dans σ, on voit qu'un facteur de v de longueur $2n$ est soit du type

$$A_1B_1A_2B_2 \cdots A_nB_n,$$

soit du type

$$B_1A_1B_2A_2 \cdots B_nA_n,$$

avec $A_i \in \{a, a'\}$, $B_i \in \{b, b'\}$, et que ces possibilités s'excluent mutuellement. Un facteur du premier type est l'image par σ d'un facteur de longueur

n de v (se souvenir que $v = \sigma(u)$), il y a donc exactement $P_v(n)$ tels facteurs.

Un facteur du second type se prolonge à gauche et à droite en un facteur de v (à gauche car u commence par a), et un tel prolongement est unique pour $n \geq 2$ d'après le lemme 1. Il y a donc autant de facteurs du second type que de facteurs

$$AB_1A_1B_2 \cdots B_nA_nB$$

(A et les A_i dans $\{a, a'\}$; B et les B_i dans $\{b, b'\}$) et ces derniers, images par σ des facteurs de longueur $n+1$ de v, sont au nombre de $P_v(n+1)$. Ainsi $P_v(2n) = P_v(n) + P_v(n+1)$ pour $n \geq 2$.

De la même façon les facteurs de v de longueur impaire sont soit du type

$$A_1B_1A_2B_2 \cdots A_nB_nA,$$

soit du type

$$B_1A_1B_2A_2 \cdots B_nA_nB,$$

et ces deux possibilités s'excluent mutuellement.

Un facteur du premier type est prolongeable à droite en un facteur de v, et pour $n \geq 1$ ce prolongement est unique (lemme 1), de la forme $A_1B_1A_2B_2 \cdots A_nB_nAB$. Comme ci-dessus il y a $P_v(n+1)$ tels facteurs.

Un facteur du second type est prolongeable à gauche en un facteur de v, et pour $n \geq 1$ ce prolongement est unique (lemme 1), de la forme $AB_1A_1B_2A_2 \cdots B_nA_nB$. Il y a encore $P_v(n+1)$ tels facteurs.

Bref, $P_v(2n+1) = 2P_v(n+1)$.

PROPOSITION 1. *On a* $P_v(n) = 8n - 8$, $\forall n \geq 2$.

Il est clair que $P_v(1) = 4$, et l'on a obtenu dans le cours du lemme 1, $P_v(2) = 8$. Le lemme 2 donne $P_v(3) = 8$ et une récurrence facile montre que $P_v(n) = 8n - 8$, $\forall n \geq 2$: on suppose le résultat vrai pour $j \in [2, 2n-1]$ pour un $n \geq 2$ et on le démontre pour $j \in [2, 2n+1]$.

2°) Calcul de $P_u(n)$:

THÉORÈME 1. *On a* $P_u(n) = 8n - 8$ $\forall n \geq 8$.

Ceci repose sur le résultat suivant, cité sans démonstration par Mouline [10], et qui est plutôt surprenant :

PROPOSITION 2. *On a* $P_u(n) = P_v(n) \ \ \forall n \geq 8$.

On montre d'abord ce résultat pour $n = 8$, en écrivant les 56 facteurs de longueur 8 et en constatant que toutes leurs images par φ sont distinctes !

On procède ensuite par récurrence sur n : supposons que pour un $n \geq 8$ on ait $P_u(n) = P_v(n)$ et regardons un facteur de u de longueur $n + 1$. Son préfixe de longueur n admet un seul antécédent par φ dans v par l'hypothèse de récurrence. Un antécédent par φ de ce mot de longueur $n+1$ dans v est alors parfaitement déterminé :

– son préfixe de longueur n est déterminé,

– sa dernière lettre qui appartient soit à $\{a, a'\}$, soit à $\{b, b'\}$ est déterminée au prime près par l'alternance des A et des B,

– le fait que cette lettre soit ou non primée ne dépend que de la valeur de la dernière lettre du facteur de longueur $n + 1$ de u considéré.

Remarque : Notons, pour finir ce paragraphe, les valeurs de $P_u(n)$ et $P_v(n)$ pour $n \leq 8$:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$P_v(n)$	4	8	16	24	32	40	48	56
$P_u(n)$	2	4	8	16	24	36	46	56

3. Les suites de Rudin-Shapiro généralisées

Comme on l'a rappelé dans l'introduction, on se donne ici un entier $d \geq 1$ et on considère la suite

$$u_d(n) = z_d(n) \bmod 2$$

où

$$z_d(\sum_{j=0}^{\infty} e_j(n)2^j) = \sum_{j=0}^{\infty} e_j(n)e_{j+d}(n).$$

Nous nous proposons d'abord d'indiquer comment construire u_d par une substitution et de donner des propriétés de cette substitution.

1°) La substitution σ_d :

d étant un entier supérieur ou égal à 1, on note Γ_d l'alphabet

$$\Gamma_d = \{a_0, a_1, \ldots a_{2^d-1}, a'_0, a'_1, \ldots, a'_{2^d-1}\}$$

et σ_d la substitution définie sur Γ_d par :

$\forall j \in [0, 2^{d-1}-1]$, $\sigma_d(a_j) = a_{2j}a_{2j+1}$ et $\sigma_d(a'_j) = a'_{2j}a'_{2j+1}$;

$\forall j \in [2^{d-1}, 2^d-1]$, $\sigma_d(a_j) = a_{2j-2^d}a'_{2j+1-2^d}$ et $\sigma_d(a'_j) = a'_{2j-2^d}a_{2j+1-2^d}$.

On note enfin

$$v_d = \lim_{r\to+\infty} \sigma_d^r(a_0).$$

On a bien sûr $\sigma_d(v_d) = v_d$.

LEMME 3.

- *$\forall x \in \Gamma_d$ on a $\sigma_d^d(x) = A_0A_1\cdots A_{2^d-1}$ où $A_i \in \{a_i, a'_i\}$, et où σ_d^j est la j^{e} itérée de σ_d,*
- *$\sigma_d^d(a_0) = a_0a_1\cdots a_{2^d-1}$,*
- *$\sigma_d^d(a_1) = a_0a'_1a_2a'_3\cdots a_{2^d-2}a'_{2^d-1}$.*

Notons en effet τ_d la 2–substitution définie sur $\mathbb{Z}/2^d\mathbb{Z}$ par

$$\tau_d(x) = (2x)(2x+1),$$

et θ_d le morphisme défini de Γ_d^* dans $(\mathbb{Z}/2^d\mathbb{Z})^*$ (A^* désigne l'ensemble des mots sur l'alphabet A) par sa valeur sur les lettres :

$$\theta_d(a_i) = \theta_d(a'_i) = i \bmod 2^d.$$

Il est clair que

$$\theta \circ \sigma_d = \tau_d \circ \theta$$

et donc que, quel que soit j,

$$\theta \circ \sigma_d^j = \tau_d^j \circ \theta.$$

Or une récurrence immédiate montre que :

$$\forall x \in \mathbb{Z}/2^d\mathbb{Z} \;\; \forall i \geq 0 \;\; \tau_d^i(x) = (2^ix)(2^ix+1)\cdots(2^ix+2^i-1),$$

donc on a

$$\tau_d^d(x) = (2^d x)(2^d x + 1) \cdots (2^d x + 2^d - 1) = (0, 1, \ldots, 2^d - 1),$$

ce qui prouve la première assertion du lemme.

Pour établir la seconde assertion, nous allons montrer par récurrence finie sur $j \in [0, d]$ que

$$\sigma_d^j(a_0) = a_0 a_1 \cdots a_{2^j - 1}.$$

C'est vrai pour $j = 0$, et si c'est vrai pour un j dans $[0, d-1]$, alors

$$\sigma_d^{j+1}(a_0) = \sigma_d(a_0 a_1 \cdots a_{2^j - 1}) = (a_0 a_1)(a_2 a_3) \cdots (a_{2^{j+1} - 2} a_{2^{j+1} - 1}).$$

Il suffit de remarquer que $2^j - 1 \leq 2^{d-1} - 1$.

La troisième assertion s'obtient en montrant par récurrence finie sur j que $\forall j \in [0, d-1]$ on a

$$\sigma_d^j(a_1) = a_{2^j} a_{2^j + 1} \cdots a_{2^{j+1} - 1}.$$

C'est en effet vrai pour $j = 0$ et 1. Supposons que ce soit vrai pour un $j \leq k - 2$, et calculons $\sigma_d^{j+1}(a_1)$:

$$\sigma_d^{j+1}(a_1) = \sigma_d(a_{2^j} a_{2^j + 1} \cdots a_{2^{j+1} - 1}) = (a_{2^{j+1}} a_{2^{j+1} + 1}) \cdots (a_{2^{j+2} - 2} a_{2^{j+2} - 1}).$$

On note que $2^{j+1} - 1 \leq 2^{d-1} - 1$. En appliquant ceci à $j = d - 1$, on obtient donc

$$\sigma_d^{d-1}(a_1) = a_{2^{d-1}} a_{2^{d-1} + 1} \cdots a_{2^d - 1}$$

d'où maintenant

$$\sigma_d^d(a_1) = a_0 a_1' a_2 a_3' \cdots a_{2^d - 2} a_{2^d - 1}'.$$

2°) Conséquences du lemme 3

On a les propriétés suivantes :

• Dans la suite infinie v_d, a_j et a_j' ne peuvent être suivies que par a_{j+1} ou a_{j+1}' si $0 \leq j \leq 2^d - 2$, et $a_{2^d - 1}$ et $a_{2^d - 1}'$ ne peuvent être suivies que par a_0 ou a_0';

• $\forall n \geq 0,\ \forall j \in [0, 2^d - 1],\ v_d(2^d n + j) \in \{a_j, a_j'\}$;

• $\forall n \geq 0,\ v_d(2n) \in \{a_0, a_2, \dots, a_{2^d-2}, a'_0, a'_2, \dots, a'_{2^d-2}\}$;

• $\forall n \geq 0,\ v_d(2n+1) \in \{a_1, a_3, \dots, a_{2^d-1}, a'_1, a'_3, \dots, a'_{2^d-1}\}$;

• les facteurs de deux lettres de v_d sont exactement les 2^{d+2} mots suivants :

$a_j a_{j+1},\ \ a'_j a_{j+1},\ \ a_j a'_{j+1},\ \ a'_j a'_{j+1},\ \ (0 \leq j \leq 2^d - 2)$;

$a_{2^d-1} a_0,\ \ a'_{2^d-1} a_0,\ \ a_{2^d-1} a'_0,\ \ a'_{2^d-1} a'_0$.

Les trois premières propriétés résultent immédiatement du lemme 3. En ce qui concerne les facteurs de v_d de longueur 2, ils sont nécessairement parmi les 2^{d+2} mots écrits ci-dessus (à cause de la première propriété). Pour montrer que ces mots apparaissent effectivement dans v_d, on utilise les deuxième et troisième assertions du lemme 3 :

• pour $0 \leq j \leq 2^d - 2$, $a_j a_{j+1}$ apparaît dans $\sigma_d^d(a_0)$; $a'_j a'_{j+1}$ apparaît dans $\sigma_d^d(a'_0)$; et $a_j a'_{j+1}$ et $a'_j a_{j+1}$ apparaissent dans $\sigma_d^d(a_1)$ ou $\sigma_d^d(a'_1)$;

• $a_{2^d-1} a_0$ apparaît dans $\sigma_d^{d+1}(a_0) = \sigma_d^d(a_0)\sigma_d^d(a_1)$;

• $a'_{2^d-1} a'_0$ apparaît dans $\sigma_d^{d+1}(a'_0)$;

• $a_{2^d-1} a'_0$ apparaît dans $\sigma_d^{d+1}(a_{2^d-1})$;

• $a'_{2^d-1} a_0$ apparaît dans $\sigma_d^{d+1}(a'_{2^d-1})$.

PROPOSITION 3. *Soit φ définie de Γ_d^* dans $\{0,1\}$ par $\varphi(a_i) = 0$, $\varphi(a'_i) = 1$. Alors $u_d = \varphi \circ v_d$.*

Notons α_d la 2–substition définie sur Γ_d par :

si $0 \leq j \leq 2^{d-1} - 1$, alors $\alpha_d(a_j) = a_j a_j$ et $\alpha_d(a'_j) = a'_j a'_j$;

si $2^{d-1} \leq j \leq 2^d - 1$, alors $\alpha_d(a_j) = a_j a'_j$ et $\alpha_d(a'_j) = a'_j a_j$.

On remarque alors que pour tout mot m sur Γ_d, on a

$$\varphi(\sigma_d(m)) = \varphi(\alpha_d(m)),$$

il suffit de le prouver pour les lettres, ce qui est évident. En choisissant alors pour mot m le mot $\sigma_d^d(v_d(n))$, on obtient :

$$\forall n \geq 0\ \ \varphi(\sigma_d^{d+1}(v_d(n))) = \varphi(\alpha_d(\sigma_d^d(v_d(n)))).$$

Autrement dit,

$$\forall n \geq 0\ \ \varphi(\sigma_d^d(v_d(2n)v_d(2n+1))) = \varphi(\alpha_d(\sigma_d^d(v_d(n)))),$$

(ne pas oublier que v_d est point fixe de σ_d).

Mais cette dernière égalité signifie exactement (en utilisant l'une des assertions du lemme 3 : $v_d(2^d n + j) \in \{a_j, a'_j\}$) :

$$\varphi v_d(2^{d+1}n + 2j) = \varphi v_d(2^d n + j), \quad 0 \leq 2j \leq 2^{d+1} - 1$$

et

$$\varphi v_d(2^{d+1}n + 2j + 1) = \begin{cases} \varphi v_d(2^d n + j), & 0 \leq 2j + 1 \leq 2^d - 1, \\ 1 - \varphi v_d(2^d n + j), & 2^d \leq 2j + 1 \leq 2^{d+1} - 1. \end{cases}$$

Comme u_d vérifie exactement les mêmes équations et que $\forall j \in [0, 2^d - 1]$ on a $\varphi v_d(j) = u_d(j) = 0$, on en déduit $u_d = \varphi v_d$.

3°) Calcul de $P_{v_d}(n)$:

Ce calcul se fait comme dans le cas $d = 1$ étudié au paragraphe 2.

LEMME 4.

• *Tout facteur de v_d de longueur 3 du type $A_{2i}A_{2i+1}A_{2i+2}$ ou du type $A_{2^d-2}A_{2^d-1}A_0$ avec $A_i \in \{a_i, a'_i\}$ admet un unique prolongement à droite en un facteur de v_d de longueur 4;*

• *Tout facteur de v_d de longueur 3 du type $A_{2i+1}A_{2i+2}A_{2i+3}$ ou du type $A_{2^d-1}A_0A_1$ avec $A_i \in \{a_i, a'_i\}$ admet un unique prolongement à gauche en un facteur de v_d de longueur 4.*

Comme plus haut il suffit d'écrire tous les facteurs de v_d de longueur 4 et du type $A_{2i}A_{2i+1}A_{2i+2}A_{2i+3}$ ou $A_{2^d-2}A_{2^d-1}A_0A_1$ avec $A_i \in \{a_i, a'_i\}$ et de montrer que leurs préfixes (respectivement suffixes) de longueur 3 sont tous distincts. Or ces mots de longueur 4 sont précisément les images par σ_d des facteurs de v_d de longueur 2 et ces derniers ont été donnés au lemme 3.

On trouve donc exactement les 2^{k+2} facteurs :

pour $0 \leq j < j + 1 \leq 2^{d-1} - 1$, c'est-à-dire $0 \leq j \leq 2^{d-1} - 2$:

$$\begin{aligned} \sigma_d(a_j a_{j+1}) &= a_{2j}a_{2j+1}a_{2j+2}a_{2j+3} \\ \sigma_d(a'_j a_{j+1}) &= a'_{2j}a'_{2j+1}a_{2j+2}a_{2j+3} \\ \sigma_d(a_j a'_{j+1}) &= a_{2j}a_{2j+1}a'_{2j+2}a'_{2j+3} \\ \sigma_d(a'_j a'_{j+1}) &= a'_{2j}a'_{2j+1}a'_{2j+2}a'_{2j+3} \end{aligned}$$

$$\sigma_d(a_{2^{d-1}-1}a_{2^{d-1}}) = a_{2^d-2}a_{2^d-1}a_0a'_1$$
$$\sigma_d(a'_{2^{d-1}-1}a_{2^{d-1}}) = a'_{2^d-2}a'_{2^d-1}a_0a'_1$$
$$\sigma_d(a_{2^d-1}a'_{2^{d-1}}) = a_{2^d-2}a_{2^d-1}a'_0a_1$$
$$\sigma_d(a'_{2^d-1}a'_{2^{d-1}}) = a'_{2^d-2}a'_{2^d-1}a'_0a_1$$

pour $2^{d-1} \leq j < j+1 \leq 2^d - 1$, c'est-à-dire $2^{d-1} \leq j \leq 2^d - 2$:

$$\sigma_d(a_ja_{j+1}) = a_{2j-2^d}a'_{2j+1-2^d}a_{2j+2-2^d}a'_{2j+3-2^d}$$
$$\sigma_d(a'_ja_{j+1}) = a'_{2j-2^d}a_{2j+1-2^d}a_{2j+2-2^d}a'_{2j+3-2^d}$$
$$\sigma_d(a_ja'_{j+1}) = a_{2j-2^d}a'_{2j+1-2^d}a'_{2j+2-2^d}a_{2j+3-2^d}$$
$$\sigma_d(a'_ja'_{j+1}) = a'_{2j-2^d}a_{2j+1-2^d}a'_{2j+2-2^d}a_{2j+3-2^d}$$

$$\sigma_d(a_{2^d-1}a_0) = a_{2^d-2}a'_{2^d-1}a_0a_1$$
$$\sigma_d(a'_{2^d-1}a_0) = a'_{2^d-2}a_{2^d-1}a_0a_1$$
$$\sigma_d(a_{2^d-1}a'_0) = a_{2^d-2}a'_{2^d-1}a'_0a'_1$$
$$\sigma_d(a'_{2^d-1}a'_0) = a'_{2^d-2}a_{2^d-1}a'_0a'_1$$

Lemme 5.

$\forall n \geq 2,\ P_{v_d}(2n) = P_{v_d}(n) + P_{v_d}(n+1)$,

$\forall n \geq 1,\ P_{v_d}(2n+1) = 2P_{v_d}(n+1)$.

Ce lemme se démontre exactement comme le lemme 2 au second paragraphe, en utilisant les propriétés qui suivent le lemme 3, ainsi que le lemme 4.

Proposition 4.

$\forall n \geq 2,\ P_{v_d}(n) = 2^{d+2}(n-1)$.

Ceci résulte facilement par récurrence du lemme 5 ci-dessus, ainsi que de la valeur $P_{v_d}(1) = 2^{d+2}$, et des valeurs $P_{v_d}(2) = 2^{d+2}$ (obtenue dans les conséquences du lemme 3) et $P_v(3) = 2^{d+3}$ (obtenue grâce au lemme 5).

3) Calcul de $P_{u_d}(n)$:

THÉORÈME 2.

Il existe $n_0 = n_0(d)$ tel que $\forall n \geq n_0(d)$, $P_{u_d}(n) = 2^{d+2}(n-1)$.

Pour déduire ce théorème de la proposition 4, nous avons besoin de deux étapes supplémentaires.

- Première étape : *s'il existe n_0 $(= n_0(d))$ tel que $P_{u_d}(n) = P_{v_d}(n)$, alors $\forall n \geq n_0$, $P_{u_d}(n) = P_{v_d}(n)$.*

Cette étape se démontre exactement comme dans la fin de la preuve de la proposition 2, par récurrence sur $n \geq n_0$. Au lieu de l'alternance des A et des B respectivement dans $\{a, a'\}$ et $\{b, b'\}$, on utilise l'alternance $A_0 A_1 \cdots A_{2^d-1}$ où $A_j \in \{a_j, a'_j\}$.

- Seconde étape : *il existe $n_0 = n_0(d)$ tel que $P_{u_d}(n_0) = P_{v_d}(n_0)$.*

Cette étape demande une étude plus précise des facteurs de u_d et nous nous proposons de la traiter dans les deux paragraphes suivants, obtenant au passage une valeur explicite pour $n_0(d)$.

4. Facteurs alignés

Nous nous proposons dans ce paragraphe d'examiner les propriétés de certains facteurs du mot infini u_d. Bien que ces propriétés aient un intérêt propre, notre but est essentiellement de montrer le résultat mentionné à la fin du paragraphe précédent.

DÉFINITION. *Soit $w = u_d(n)u_d(n+1)\cdots u_d(n+a-1)$ un facteur de u_d de longueur a. Nous dirons que w est a-aligné si et seulement si $n \equiv 0$ modulo a.*

DÉFINITION. *Nous définissons une suite de mots B_j sur l'alphabet $\{0,1\}$ par :*

$B_0 = \{0,1\}$ et, pour $j \geq 1$, $B_{j+1} = \{WW\} \cup \{W\overline{W},\ W \in B_j\}$,

(où $\overline{0} = 1$ et $\overline{1} = 0$).

Notons que le cardinal de B_j est égal à 2^{j+1}, notons aussi que B_j est stable par l'application qui à X associe $\overline{X}$, ce qui est immédiat par récurrence sur j.

PROPOSITION 5. *L'ensemble des facteurs 2^d-alignés de u_d est exactement l'ensemble B_d.*

Démonstration.

La preuve se fait en deux étapes. Dans la première nous montrons par récurrence sur d que chaque mot de B_d est un facteur 2-aligné de u_d. Dans la seconde nous montrons que tout facteur 2^d-aligné de u_d est effectivement un élément de B_d.

Pour la première étape, nous prouvons les deux assertions suivantes par récurrence sur d.

A. Tout mot de B_d est un facteur 2^d-aligné de u_d.

B. Tout mot de B_d qui commence par un 0 est l'un des 2^d premiers facteurs 2^d-alignés de u_d.

Pour $d = 1$, les deux assertions sont vraies puisque

$$\begin{aligned} u_1(0)u_1(1) &= 00, \\ u_1(2)u_1(3) &= 01, \\ u_1(6)u_1(7) &= 10, \\ u_1(12)u_1(13) &= 11. \end{aligned}$$

Supposons maintenant que A et B sont vraies pour d, et prouvons-les pour $d+1$. Soit X un mot de B_{d+1}. Par définition de B_{d+1} on a soit $X = WW$ soit $X = W\overline{W}$ où W est un mot de B_d.

Premier cas :

si W commence par un 0, alors utilisant B et l'hypothèse de récurrence, nous voyons qu'il existe j, $0 \leq j < 2^d$ tel que

$$u_d(2^d j)u_d(2^d j+1)\cdots u_d(2^d j + 2^d - 1) = W.$$

Il est alors facile de constater que

$$WW = u_{d+1}(2^{d+1}j)u_{d+1}(2^{d+1}j+1)\cdots u_{d+1}(2^{d+1}j + 2^{d+1} - 1)$$

et que

$$W\overline{W} = u_{d+1}(2^{2d+1} + 2^{d+1}j)\cdots u_{d+1}(2^{2d+1} + 2^{d+1}j + 2^{d+1} - 1).$$

Second cas :

si W commence par un 1, considérons le mot $\overline{X}$ qui appartient à B_{d+1}. Ce mot commence par un zéro et d'après le premier cas c'est un facteur 2^{d+1}-aligné de u_{d+1}, disons

$$\overline{X} = u_{d+1}(2^{d+1}j)\cdots u_{d+1}(2^{d+1}j + 2^{d+1} - 1),$$

où $0 \leq j < 2^{d+1}$. Mais on voit alors facilement que l'on a :

$$X = u_{d+1}(2^{4d+4} + 2^{3d+3} + 2^{d+1}j) \cdots u_{d+1}(2^{4d+4} + 2^{3d+3} + 2^{d+1}j + 2^{d+1} - 1),$$

(nous avons simplement mis le bloc $10^{d-1}10^d$ en tête des développements binaires).

Ceci achève la preuve de la première partie. La seconde partie de la proposition 5 est l'affirmation suivante.

C. Tout facteur 2^d-aligné de u_d appartient à B_d.

Ceci se prouve ainsi :

soit $X = u_d(2^d j)u_d(2^d j + 1) \cdots u_d(2^d j + 2^d - 1)$ un facteur 2^d-aligné de u_d. Ecrivons $j = 2^d r + i$, avec $0 \leq i < 2^d$. Alors, pour $0 \leq a < 2^d$, on a

$$\begin{aligned}
u_d(2^d j + a) &\equiv u_d(2^d(2^d r + i) + a) \\
&\equiv u_d(2^{2d} r + 2^d i + a) \\
&\equiv u_d(2^{2d} r + 2^d i) + u_d(2^d i + a) \\
&\equiv u_d(2^d r + i) + u_d(2^d i + a) \bmod 2.
\end{aligned}$$

Donc on a

ou bien $X = u_d(2^d i) \cdots u_d(2^d i + 2^d - 1)$,

ou bien $\overline{X} = u_d(2^d i) \cdots u_d(2^d i + 2^d - 1)$,

et ce dernier mot est par l'assertion A et l'hypothèse de récurrence un élément de B_d. Ceci conclut la preuve de la proposition 5.

Nous allons maintenant montrer comment engendrer le mot infini u_d en itérant un morphisme. La construction que nous allons donner définit en fait une application surjective ρ_d de l'ensemble des facteurs 2^d-alignés de u_d sur l'ensemble des facteurs 2^{d+1}-alignés; ce n'est donc pas un morphisme au sens habituel. On peut cependant facilement construire des morphismes τ_d et φ_d tels que

$$u_d = \tau_d(\varphi_d^\infty(a_0)),$$

où φ_d est un morphisme uniforme de longueur 2 et τ_d est un morphisme uniforme de longueur 2^d.

Exemple :

Pour $d = 2$, ρ_d est donné comme suit :

$$
\begin{aligned}
0000 &\to 0000 \quad 0101\\
0011 &\to 0000 \quad 1010\\
0101 &\to 0011 \quad 0110\\
0110 &\to 0011 \quad 1001\\
1001 &\to 1100 \quad 0110\\
1010 &\to 1100 \quad 1001\\
1100 &\to 1111 \quad 0101\\
1111 &\to 1111 \quad 1010.
\end{aligned}
$$

DÉFINITION. *Si $a_0 a_1 \cdots a_{2^d-1}$ est un facteur 2^d-aligné de u_d, on pose*

$$\rho_d(a_0 a_1 \cdots a_{2^d-1}) = a_0 a_0 a_1 a_1 \cdots a_{2^{d-1}-1} a_{2^{d-1}-1} a_{2^{d-1}} \overline{a_{2^{d-1}}} \cdots a_{2^d-1} \overline{a_{2^d-1}}.$$

PROPOSITION 6. *On a $u_d = \rho_d^\infty(0^{2^d})$.*

Démonstration. Comme $a_0 a_1 \cdots a_{2^d-1}$ est un mot 2^d-aligné, il existe un entier n tel que :

$$a_i = u_d(2^d n + i), \ \forall i \in [0, 2^d[.$$

Il nous faut donc prouver que

$$\rho_d(a_0 a_1 \cdots a_{2^d-1}) = u_d(2^{d+1} n) \cdots u_d(2^{d+1} n + 2^{d+1} - 1).$$

Supposons que $0 \leq i < 2^{d-1}$. Alors clairement :

$$u_d(2^{d+1} n + 2i) = u_d(2^d n + i),$$
$$u_d(2^{d+1} n + 2i + 1) = u_d(2^d n + i).$$

Supposons maintenant que $2^{d-1} \leq i < 2^d$. Alors :

$$u_d(2^{d+1} n + 2i) = u_d(2^d n + i),$$
$$u_d(2^{d+1} n + 2i + 1) = \overline{u_d(2^d n + i)},$$

ce qui termine la démonstration.

COROLLAIRE 1. *Il y a exactement* (2^{d+1}) *facteurs* 2^{d+1}*-alignés dans* u_d*, et ce sont exactement les images des éléments de* B_d *par* ρ_d.

Pour finir ce paragraphe, nous allons donner un "codage" naturel des 2^{d+1} éléments de B_d par des mots de longueur 2^{d+1}.

DÉFINITION. *Nous définissons les deux applications* T_0 *et* T_1 *sur les mots* W *par*

$$T_0(W) = WW \quad et \quad T_1(W) = W\overline{W}.$$

PROPOSITION 7.

(i) Tout mot $W = W_0 W_1 \cdots W_{2^d-1}$ *dans* B_d *peut s'écrire de manière unique sous la forme*

$$W = T_{a_d}(T_{a_{d-1}}(\cdots T_{a_1}(a_0))\cdots)$$

où $a_0, a_1, \cdots, a_d$ *sont dans* $\{0,1\}$.

(ii) De plus, soit $W = W_0 W_1 \cdots W_{2^d-1} = T_{a_d}(T_{a_{d-1}}(\cdots T_{a_1}(a_0))\cdots)$. *Appelons* m *l'entier dont le développement en base 2 est* $a_d a_{d-1} \cdots a_1$. *Alors si* $a_d a_{d-1} \cdots a_1 \neq 0^d$*, on a pour tout* $n \geq 1$:

$$\nu_2(m) = \nu_2(n) \quad \Longrightarrow \quad W_n \neq W_{n-1}$$

($\nu_2(n)$ *est l'exposant de la plus grande puissance de 2 qui divise* n*).*

Démonstration.

(i) se déduit immédiatement de la définition de B_d;

(ii) comme on suppose $a_d a_{d-1} \cdots a_1 \neq 0^d$, l'un au moins des a_i vaut 1. Soit j le plus petit des indices tels que $a_j = 1$. Alors :

$$T_{a_j}(T_{a_{j-1}} \cdots T_{a_1}(a_0))\cdots) = a_0^{2^{j-1}} \overline{a_0^{2^{j-1}}} = X.$$

Donc si m est l'entier de représentation binaire $a_j \cdots a_1$, on a $m = 2^{j-1}$. Si $n = 2^{j-1}$, il est clair que $w_n \neq w_{n-1}$. Comme

$$W = T_{a_d}(T_{a_{d-1}}(\cdots (T_{a_{j+1}}(X))\cdots)),$$

on a $W = X_1 \cdots X_{2^{d-j}}$, où chacun des X_i vaut X ou $\overline{X}$. Nous voyons ainsi que si $n \equiv 2^{j-1} \bmod 2^j$, alors $W_n \neq W_{n-1}$. En d'autres termes, si $\nu_2(m) = \nu_2(n)$ alors $W_n \neq W_{n-1}$.

COROLLAIRE 2. *Si l'on a* $W = T_{a_d}(T_{a_{d-1}}(\cdots(T_{a_1}(a_0))\cdots))$*, alors :*

$$\rho_d(W) = T_{a_{d-1}}(T_{a_{d-2}}(\cdots T_{a_1}(T_0(a_0)))\cdots)T_{a_{d-1}}(T_{a_{d-2}}(\cdots T_{a_1}(T_1(a_0)))\cdots).$$

La démonstration est laissée au lecteur.

5. Preuve de l'existence de n_0

Dans ce paragraphe nous prouvons l'existence d'un entier n_0 tel que :

$$P_{u_d}(n_0) = P_{v_d}(n_0).$$

Pour cela nous prouvons d'abord que si l'on se donne un facteur de u_d suffisament long, disons $u_d(n)u_d(n+1)\cdots$, alors on peut déterminer n modulo 2^{d+1}.

DÉFINITION. *Si* $W = T_{a_d}(T_{a_{d-1}}(\cdots(T_{a_1}(a_0))\cdots))$*, on écrit code*$(W) = a_d a_{d-1}\cdots a_1$.

PROPOSITION 8. *Supposons que l'on ait*

$$a_0 a_1 \cdots a_{2^{d+2}-1} = u_d(n)u_d(n+1)\cdots u_d(n+2^{d+2}-1).$$

Alors $n \equiv 0 \bmod 2^{d+1}$ *si et seulement si les deux mots* $Z_1 = a_0 a_1 \cdots a_{2^{d+1}-1}$ *et* $Z_2 = a_{2^{d+1}} a_1 \cdots a_{2^{d+2}-1}$ *sont des facteurs* 2^{d+1}*-alignés de* u_d.

Démonstration.

Le sens $\Longrightarrow$ est évident.

La preuve du sens $\Longleftarrow$ est compliquée et nous nous contentons de l'esquisser, confiants en la capacité du lecteur intéressé à fournir les détails non précisés ci-dessous.

(i) Supposons $n \equiv 0 \pmod 2$ et $n \not\equiv 0 \pmod{2^{d+1}}$.

Si $(n \bmod 2^{d+1}) \le 2^d$, alors, d'après le corollaire 1, $u_d(n+2^d-2) \ne u_d(n+2^d-1)$; donc Z_1 ne peut pas être un facteur 2^{d+1}-aligné.

Si $2^d \le (n \bmod 2^{d+1}) < 2^{d+1}$, alors d'après le corollaire 2, $u_d(n) \ne u_d(n+1)$ et donc Z_1 ne peut pas être un facteur 2^{d+1}-aligné.

(ii) Supposons maintenant $n \equiv 1 \pmod 2$. Sans perte de généralité on peut supposer $n > 2$, puisque tout facteur qui apparaît dans u_d apparaît une infinité de fois. Soit $r = \lfloor n/2^{d+1} \rfloor$. On écrit :

$$\begin{aligned} u_d(r2^{d+1})\cdots u_d(n)\cdots u_d(n+2^{d+2}-1) &= XW_1W_2 \\ &= Z_1 Z_2 Y \end{aligned}$$

où $|W_1| = |W_2| = |Z_1| = |Z_2| = 2^{d+1}$.

Soit S_i un mot tel que $\rho_d(S_i) = W_i$, pour $i = 1,2$.

Cas (a) : $(n \bmod 2^{d+1}) < 2^{d-1}$.

Si code$(S_1) \notin \{0^d, 10^{d-1}\}$, alors, d'après la proposition 7 (ii), on a $W_1(a) \neq W_1(a-1)$ pour un a dans $\{2^{d-1}, 2^{d-1}+2, \cdots 2^d - 4, 2^d - 2\}$. Ceci donne $Z_1(b) \neq Z_1(b+1)$ pour $b = a - (n \bmod 2^{d+1}) - 1$. Comme $(n \bmod 2^{d+1}) < 2^{d-1}$, on a $0 \leq b < 2^{d-1}$. Mais ceci contredit la description de Z_1 donnée dans le corollaire 1.

Si code$(S_1) = 10^{d-1}$, alors $W_1(2^d) \neq W_1(2^d - 1)$, ce qui conduit aussi à une contradiction.

Supposons enfin que code$(S_1) = 0^d$. Alors $W_1(2^d + 2) \neq W_1(2^d + 1)$, ce qui donne une contradiction si $(n \bmod 2^{d+1}) > 1$. Si $n \equiv 1 \pmod{2^{d+1}}$, alors il n'est pas difficile de voir que l'on a nécessairement $Z_2 = Z_1$. Donc $\rho_d^{-1}(Z_1 Z_2) = 0^{2^d}$, qui ne peut pas être un facteur de u_d. Par conséquent $Z_1 Z_2$ ne peut pas être un facteur de u_d.

Cas (b) : $2^{d-1} < (n \bmod 2^{d+1}) < 2^d$.

Si code$(S_1) \notin \{0^{d-1}1, 10^{d-2}1\}$, alors d'après le corollaire 2 et la proposition 7 (ii) on a $W_1(a) = W_1(a-1)$, pour un a appartenant à l'ensemble $\{2^d + 2, 2^d + 4, \cdots, 2^d + 2^{d-1}\}$. Ceci entraîne $Z_1(b) \neq Z_1(b+1)$ pour $b = a - (n \bmod 2^{d+1}) - 1$. Comme $2^{d-1} < (n \bmod 2^{d+1}) < 2^d$, on a $0 \leq d < 2^{d-1}$. Mais ceci contredit la description de Z_1 donnée dans le corollaire 1.

Si code$(S_1) = 0^{d-1}1$, alors d'après la proposition 7 (ii), on a $W_1(2^d) \neq W_1(2^d - 1)$, ce qui conduit aussi à une contradiction.

Si code$(S_1) = 10^{d-2}1$, alors $W_1(2^d - 2) \neq W_1(2^d - 3)$, ce qui donne une contradiction si $(n \bmod 2^{d+1}) < 2^d - 1$. Si $n \equiv 2^d - 1 \pmod{2^{d+1}}$, alors il est facile de voir que nécessairement $Z_1 = \rho_d((10)^{2^d})$. Alors $W_2 = \rho_d((01)^{2^{d-1}}(10)^{2^{d-1}})$. Donc $Z_2 = \rho_d((10)^{2^d})$.

Par conséquent $\rho_d^{-1}(Z_1 Z_2) = (10)^{2^d}$, qui ne peut pas être un facteur de u_d. Donc $Z_1 Z_2$ ne peut pas être un facteur de u_d.

Les deux derniers cas (c) et (d)

Cas (c) : $2^d < (n \bmod 2^{d+1}) < 3.2^d$,

Cas (d) : $3.2^d < (n \bmod 2^{d+1}) < 2^{d+1}$,

se traitent de manière similaire et sont laissés au lecteur.

COROLLAIRE 3. *Soit $F = f_1 f_2 \cdots f_{3.2^{d+1}}$ un facteur de u_d. Alors, si n est un entier tel que : $F = u_d(n) \cdots u_d(n + 3.2^{d+1} - 1)$, la classe de n modulo 2^{d+1} ne dépend que de F, (en d'autres termes, si F apparaît en différentes places dans u_d, les indices où F commence sont tous dans la même classe de congruence modulo 2^{d+1}).*

Démonstration. On applique la proposition 8 successivement aux facteurs : $f_1 \cdots f_{2^{d+2}}, f_2 \cdots f_{2^{d+2}+1}, \cdots, f_{2^{d+1}} \cdots f_{3.2^{d+1}}$.

Nous pouvons maintenant terminer la preuve du théorème 2 :

Soit F un facteur de u_d, de longueur $k \geq 3.2^{d+1}$, et soit n un entier tel que $F = u_d(n) \cdots u_d(n + k - 1)$. D'après le corollaire 3, la classe de n et donc les classes de $n + 1, \cdots, n + k - 1$ modulo 2^{d+1} ne dépendent que de F, donc aussi leurs classes modulo 2^d. Se souvenant alors de la seconde conséquence du lemme 3 (paragraphe 2), on voit que pour chaque i entre 0 et $k - 1$, $v_d(n + i)$ appartient à $\{a_{j(i)}, a'_{j(i)}\}$ où $j(i) \equiv n + i \pmod{2^d}$ et $0 \leq j(i) < 2^d$, les $j(i)$ ne dépendant donc que de F. De plus le choix entre les lettres primées et les lettres non primées dépend des valeurs de $u_d(n+i)$ autrement dit seulement de F. Ceci montre donc l'unicité du facteur de v_d dont l'image par φ_d est F. Ainsi on peut prendre dans le théorème 2 $n_0(d) = 3.2^{d+1}$.

Remarque : Le cas de la suite de Rudin-Shapiro classique et des calculs pour $d \leq 4$ semblent prouver que cette valeur de $n_0(d)$ n'est pas la plus petite possible. Il semble que la valeur optimale pour $n_0(d)$ soit $2^{d+1} + 4$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.-P. Allouche et P. Liardet, *Generalized Rudin-Shapiro sequences*, Acta Arith. 60 (1991), 1–27.

[2] P. Arnoux et G. Rauzy, *Représentation géométrique des suites de complexité $2n+1$*, Bull. Soc. math. France **119** (1991), 199–215.

[3] S. Brlek, *Enumeration of factors in the Thue-Morse word*, Discrete Appl. Math. **24** (1989), 83–96.

[4] S. Brlek, Communication privée.

[5] G. Christol, T. Kamae, M. Mendès France et G. Rauzy, *Suites algébriques, automates et substitutions*, Bull. Soc. math. France **108** (1980), 401–419.

[6] A. Cobham, *Uniform tag sequences*, Math. Systems Theory **6** (1972), 164–192.

[7] E. M. Coven et G. A. Hedlund, *Sequences with minimal block growth*, Math. Systems Theory **7** (1973), 138–153.

[8] A. de Luca et S. Varricchio, *Some combinatorial properties of the Thue-Morse sequence and a problem in semigroups*, Theoret. Comput. Sci. **63** (1989), 333–348.

[9] M. Morse et G. A. Hedlund, *Symbolic Dynamics, II, Sturmian trajectories*, Amer. J. Math. Soc. **62** (1940), 1–42.

[10] J. Mouline, *Contribution à l'étude de la complexité des suites substitutives*, Thèse, Université de Provence, 1990.

[11] W. Rudin, *Some theorems on Fourier coefficients*, Proc. Amer. Math. Soc. **10** (1959), 855–859.

[12] H. S. Shapiro, *Extremal problems for polynomials and power series*, M. S. Thesis, M. I. T., 1951.

[13] T. Tapsoba, *Complexité de suites automatiques*, Thèse de troisième cycle, Université Aix-Marseille II, 1987.

J.-P. Allouche
C. N. R. S., L. M. D.
Luminy, Case 930
F-13288 Marseille Cedex 9
France
e-mail : allouche@lmd.univ-mrs.fr

J. O. Shallit
Department of Computer Science
University of Waterloo
Waterloo, Ontario N2L 3G1
Canada
e-mail : shallit@graceland.uwaterloo.ca