JOURNAL DE THÉORIE DES NOMBRES DE BORDEAUX

FILIPPO MIGNOSI

PATRICE SÉÉBOLD

Morphismes sturmiens et règles de Rauzy

Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, tome 5, n^{o} 2 (1993), p. 221-233

<http://www.numdam.org/item?id=JTNB_1993__5_2_221_0>

Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **5** *(1993), 221–233*

Morphismes sturmiens et règles de Rauzy

par Filippo Mignosi et Patrice Séébold

ABSTRACT – We give a complete characterization of binary morphisms which preserve Sturmian words and show that infinite words generated by these morphisms are rigid.

RÉSUMÉ – Nous donnons une caractérisation complète de tous les morphismes binaires qui préservent les mots sturmiens et montrons que les mots infinis engendrés par ces morphismes sont rigides.

1. Introduction

Un mot sturmien est un mot infini binaire qui, pour tout entier n, possède exactement $n + 1$ facteurs de longueur n. Les premières études concernant ces mots remontent à plus de deux siècles (voir à ce sujet l'exposé de Venkov [16]), mais c'est Hedlund et Morse qui ont les premiers utilisé l'appellation de mots "sturmiens" [6, 7]. Une importante littérature a depuis été publiée à propos de leurs propriétés tout à fait remarquables, en particulier au cours de la dernière décennie [1, 2, 3, 4, 5, 8, 11, 14, 15].

Un morphisme est sturmien si l'image par ce morphisme de tout mot sturmien est un mot sturmien. Dans [9] Kósa a énoncé des conditions suffisantes pour qu'un morphisme soit sturmien (cf [13]). Nous prouvons ici que ces conditions sont également nécessaires ce qui donne une caractérisation constructive des morphismes sturmiens et établit que le problème de savoir si un morphisme est sturmien est décidable. En rapprochant ces conditions de règles présentées dans Rauzy [12] nous obtenons alors une autre caractérisation de certains morphismes sturmiens qui engendrent des mots infinis rigides.

Manuscrit reçu le 6 décembre 1991, version définitive le 3 novembre 1993.
Ce travail a été en partie réalisé au sein de l'équipe "Codes et séries formelles" du Programme de Recherches Coordonnées "Mathématiques et Informatique" du Ministère de la Recherche et de la Technologie.
Les résultats contenus dans cet article ont été exposés au colloque "Thémate", (CIRM, Luminy, Mai 1991).

Plus précisément, après avoir introduit quelques notations (section 2) et défini les mots sturmiens (section 3), nous nous intéressons aux morphismes sturmiens en établissant une propriété caractéristique (section 4) puis nous montrons qu'ils sont exactement les éléments d'une famille de morphismes obtenus à partir de trois morphismes particuliers définis par Kósa (section 5). Pour finir, nous étudions les morphismes obtenus à partir de règles introduites par Rauzy et prouvons que ces morphismes sont sturmiens et qu'ils engendrent des mots rigides (sections 6-7)

Remarque : pour ne pas surcharger l'article par des considérations techniques relativement ardues mais peu significatives, nous n'avons donné que les preuves ou esquisses de preuves des principaux résultats.

2. Notations

Les notations utilisées sont classiques (cf, par exemple, [10]) et nous n'en rappelons que quelques-unes largement utilisées dans l'ensemble de ce travail.

Soit $A = \{a, b\}$, un alphabet à deux lettres. A^*, ensemble des mots de A, est le monoïde libre engendré par A, ε le mot vide et $A^+ = A^* \setminus \{\varepsilon\}$. Pour tout $u \in A^*$, $|u|$ représente le nombre de lettres du mot u ($|\varepsilon| = 0$) et si $a \in A$, $|u|_a$ est le nombre d'occurrences de la lettre a dans le mot u.

Un mot infini sur A est une application $\mathbf{x} : \mathbb{N} \to A$. On note A^ω l'ensemble des mots infinis sur A et $A^\infty = A^\omega \cup A^*$. Pour tout mot $u \in A^\infty$, $\overline{u} = E(u)$ où $E : A^* \to A^*$ est le morphisme $a \mapsto b$, $b \mapsto a$.

Soient $u \in A^\infty$ et $v \in A^*$. v est un facteur de u s'il existe $u_1 \in A^*$ et $u_2 \in A^\infty$ tels que $u = u_1 v u_2$; si $u_1 = \varepsilon$, v est un facteur gauche de u et si, de plus, $u_2 \neq \varepsilon$, v est un facteur gauche propre de u.

3. Mots sturmiens

DÉFINITION 1. *Soit* $\mathbf{x} \in A^\omega$. $\mathbf{x}$ *est sturmien si, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{x}$ *possède exactement* $n+1$ *facteurs distincts de longueur* n.

Remarques : au vu de cette définition, il est clair que

- les mots sturmiens que nous allons considérer sont tous <u>infinis</u> et <u>non ultimement périodiques</u>,

- ab et ba sont facteurs de tout mot sturmien,

- tout mot sturmien a en facteur un et un seul des deux mots a^2 et b^2.

La caractérisation suivante des mots sturmiens est fort utile :

PROPRIÉTÉ [7]. *Soit* $\mathbf{x} \in A^\omega$. $\mathbf{x}$ *est sturmien si et seulement si* $\mathbf{x}$ *est non ultimement périodique et pour tous facteurs* u *et* v *de* $\mathbf{x}$ *tels que* $|u| = |v|$, *et pour tout* $a \in A$, *soit* $|u|_a = |v|_a$, *soit* $|u|_a - |v|_a = \pm 1$.

4. Morphismes sturmiens

On note Id_A l'identité sur A.

DÉFINITION 2. *Soit* $f : A^* \to A^*$ *un morphisme,*

- f est sturmien si, pour tout mot sturmien $\mathbf{x} \in A^\omega$, $f(\mathbf{x})$ est un mot sturmien,

- f est sturmien stationnaire si tout mot stationnaire de f est sturmien ($\mathbf{x} \in A^\infty$ est stationnaire de f si $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$),

- f est sturmien strict si f est sturmien stationnaire et si tout mot $\mathbf{x} \in A^\omega$ stationnaire de f est tel que $\mathbf{x} = f^\omega(a)$ ou $\mathbf{x} = (f^2)^\omega(a)$ pour un $a \in A$.

Remarques :

- un morphisme $f : A^* \to A^*$ effaçant (c'est à dire tel que $f(a) = \varepsilon$ ou $f(b) = \varepsilon$) ne peut visiblement pas être sturmien (resp. stationnaire, strict). Dans tout ce qui suit, sauf mention particulière, tous les morphismes considérés seront donc supposés être non effaçants.

- les trois notions introduites ci-dessus sont très proches l'une de l'autre. Cependant, elles doivent être, a priori, distinguées. En effet, on peut trouver des morphismes qui sont sturmiens mais dont tous les mots stationnaires ne le sont pas (par exemple, l'identité). Réciproquement, un morphisme dont tous les mots stationnaires sont sturmiens peut ne pas préserver le caractère sturmien d'un mot particulier. Enfin, un morphisme peut posséder des mots stationnaires sans que ces mots soient engendrés par le morphisme ou son carré. En fait, nous prouvons dans ce qui suit (théorème 1) que les deux familles de morphismes sturmiens stationnaires et sturmiens stricts n'en font qu'une et qu'il s'agit d'un sous-ensemble strict de la famille des morphismes sturmiens.

La notion de morphisme a-sturmien définie ci-après intervient en permanence dans tout ce qui suit.

DÉFINITION 3. *Un morphisme sturmien $f : A^* \to A^*$ est a-sturmien (resp. b-sturmien) si $f(ab)$ ou $f(ba)$ contient a^2 (resp. ! b^2) en facteur. On définit* *de la même façon les morphismes a-sturmiens stationnaires et a-sturmiens stricts.*

Le lemme qui suit, dont la preuve, quoiqu'un peu technique, n'est pas difficile, justifie l'introduction de la notion de morphisme a-sturmien.

LEMME 1. *Tout morphisme sturmien (resp. stationnaire, strict), autre que Id_A et E, est soit a-sturmien, soit b-sturmien (resp. stationnaire strict), mais pas les deux.*

On définit sur A huit morphismes :

$$\begin{array}{llll} \alpha : A^* \to A^* & \beta : A^* \to A^* & \gamma : A^* \to A^* & \delta : A^* \to A^* \\ \quad a \mapsto a & \quad a \mapsto a & \quad a \mapsto ab & \quad a \mapsto ba \\ \quad b \mapsto ab & \quad b \mapsto ba & \quad b \mapsto a & \quad b \mapsto a \end{array}$$

et, pour tout $f \in \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$, $\overline{f} = E \circ f$.

LEMME 2. *Soit $f : A^* \to A^*$ un morphisme a-sturmien (resp. b-sturmien), il existe $g \in \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ (resp. $\{\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma}, \overline{\delta}\}$) et h, morphisme sur A, tels que $f = g \circ h$.*

Preuve : Soit $f : A^* \to A^*$ un morphisme et supposons que f est a-sturmien. Il faut prouver qu'il existe $g \in \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ tel que $f(a) = g(x)$ et $f(b) = g(y)$ où x et y sont deux mots de A^* ($x = h(a)$, $y = h(b)$). Il est clair que pour qu'un tel g existe, il faut et il suffit que f remplisse les quatres conditions suivantes :

(1) $f(a)$ et $f(b)$ ne contiennent pas b^2 en facteur,

(2) $f(a)$ (resp. $f(b)$) commence ou se termine par a,

(3) si $f(a)$ (resp. $f(b)$) commence par b, alors $f(b)$ (resp. $f(a)$) se termine par a,

(4) si $f(a)$ (resp. $f(b)$) se termine par b, alors $f(b)$ (resp. $f(a)$) commence par a.

D'après le lemme 1, les conditions (1), (3) et (4) sont remplies pour tout morphisme a-sturmien. De même, $f(a)$ ne peut pas à la fois commencer et se terminer par b, sinon $f(a^2)$ contiendrait b^2 en facteur. Il suffit donc de prouver que $f(b)$ commence ou se termine par a. Supposons que $f(b) = b$ ou $f(b) = bvb$, $v \in A^*$. Dans ce cas, les conditions (3) et (4) indiquent que soit $f(a) = a$ soit $f(a) = aua$, $u \in A^*$.

Soit $\mathbf{x} \in A^\omega$ un mot sturmien. On sait que, puisque f est a-sturmien, il existe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $f(\mathbf{x}) \in \{a^n, a^{n+1}, b\}^\omega$ [7]. Donc, soit $f(b) = b$, soit $f(b)$ commence par ba^nb ou $ba^{n+1}b$. Mais alors, $f(a)$ commence et se termine par a^n. Donc $f(a^2)$ contient a^{2n} et ceci n'est possible que si $n = 1$.

Par conséquent, trois cas sont possibles :

- $f(a) = a$ et $f(b) = (ba)^q b$, $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,
- $f(a) = (ab)^p a$, $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $f(b) = b$,
- $f(a) = (ab)^p a$, $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $f(b) = (ba)^q b$, $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Mais on constate aisément que dans aucun des trois cas f n'est a-sturmien, ce qui contredit l'hypothèse.

Naturellement, les arguments seraient les mêmes si f était b-sturmien et le lemme est prouvé.

□

Remarque : le lemme 2 reste vrai si l'on remplace sturmien par sturmien stationnaire ou strict.

5. Morphismes de Kósa

Les trois morphismes E, α, β sont les morphismes introduits par Kósa dans [9]. On vérifie assez aisément que

LEMME 3. $\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}^+ \cup \{\overline{\alpha},\overline{\beta},\overline{\gamma},\overline{\delta}\}^+ = \{E, \alpha E, E\alpha, \beta E, E\beta\}^+ \setminus \{E\}^+$.

Kósa [9] a également introduit la définition suivante :

DÉFINITION 4. *Soit $f : A^* \to A^*$ un morphisme, f est régulier si les trois conditions suivantes sont vérifiées :*

(1) $f(a)$ contient au moins une occurrence de la lettre b,

(2) $f(b)$ contient au moins une occurrence de la lettre a,

(3) l'une au moins des deux conditions suivantes est vérifiée :

(a) $f(a)$ contient au moins une occurrence de la lettre a,

(b) $f(b)$ contient au moins une occurrence de la lettre b.

L'ensemble de tous les morphismes réguliers sur A est noté $Reg(A)$.

Remarque : l'appartenance d'un morphisme à l'ensemble $Reg(A)$ assure que tout mot stationnaire de ce morphisme est un mot infini dans lequel chacune des deux lettres a et b apparaît.

Le lemme suivant est très facilement vérifié.

LEMME 4. $Reg(A) \cap \{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}^+ = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}^+ \setminus \{\alpha,\beta\}^+$
$Reg(A) \cap \{\overline{\alpha},\overline{\beta},\overline{\gamma},\overline{\delta}\}^+ = \{\overline{\alpha},\overline{\beta},\overline{\gamma},\overline{\delta}\}^+ \setminus \{\overline{\gamma},\overline{\delta}\}^+$

THÉORÈME 1. *Soit $f : A^* \to A^*$ un morphisme.*

(1) f est sturmien si et seulement si

$f \in \{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}^+ \cup \{\overline{\alpha},\overline{\beta},\overline{\gamma},\overline{\delta}\}^+ \cup \{Id_A, E\}$.

(2) f est sturmien stationnaire si et seulement si

$f \in Reg(A) \cap (\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}^+ \cup \{\overline{\alpha},\overline{\beta},\overline{\gamma},\overline{\delta}\}^+)$.

(3) f est sturmien strict si et seulement si

$f \in Reg(A) \cap (\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}^+ \cup \{\overline{\alpha},\overline{\beta},\overline{\gamma},\overline{\delta}\}^+)$.

Preuve : Dans les trois cas, la partie "seulement si" a été prouvée dans [13]. Il faut prouver les conditions nécessaires.

Soit $f : A^* \to A^*$ un morphisme sturmien et supposons $f \neq Id_A$ et $f \neq E$. Dans ce cas, f est soit a-sturmien, soit b-sturmien, donc d'après le lemme 2, il existe $g \in \{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\overline{\alpha},\overline{\beta},\overline{\gamma},\overline{\delta}\}$ et h morphisme sur A tels que $f = g \circ h$. Montrons que h est sturmien. Pour ce faire, nous allons utiliser le fait suivant

FAIT. *Soit $\mathbf{x} \in A^\omega$. Si $g(\mathbf{x})$ est sturmien alors $\mathbf{x} = a\mathbf{x}'$ ou $\mathbf{x} = b\mathbf{x}'$ avec $\mathbf{x}'$ sturmien.*

Preuve du fait : Soit $\mathbf{x} \in A^\omega$ un mot non sturmien et supposons que $\mathbf{x}$ n'est pas ultimement périodique. Dans ce cas, $\mathbf{x}$ possède deux facteurs u et v tels que $|u| = |v|$ et $|u|_a - |v|_a \geq 2$. On peut choisir un tel u de longueur minimale et l'on a alors $u = au'a$ et $v = bv'b$ avec $|u'|_a = |v'|_a$. Deux cas sont alors possibles suivant que $g \in \{\alpha,\gamma,\overline{\alpha},\overline{\gamma}\}$ ou $g \in \{\beta,\delta,\overline{\beta},\overline{\delta}\}$.

Dans le premier cas, supposons par exemple $g = \alpha$. Alors, $g(u) = \alpha(u) = ab\alpha(u')ab$ et $g(v) = \alpha(v) = a\alpha(v')a$. Or la lettre qui suit $\alpha(v)$ dans $\alpha(\mathbf{x})$ est nécessairement un a ; donc $a\alpha(v')aa$ est facteur de $\alpha(\mathbf{x})$. Mais puisque $|u'|_a = |v'|_a$, on a $|\alpha(u')|_b = |\alpha(v')|_b$, donc $|b\alpha(u')ab|_b = |a\alpha(v')aa|_b + 2$. Ainsi, $\alpha(\mathbf{x})$ n'est pas sturmien. Par conséquent, si $\alpha(\mathbf{x})$ est sturmien alors $\mathbf{x}$ est sturmien et les arguments sont tout à fait semblables si $g \in \{\gamma,\overline{\alpha},\overline{\gamma}\}$.

Dans le second cas, supposons par exemple $g = \delta$. Alors, $g(u) = \delta(u) = ba\delta(u')ba$ et $g(v) = \delta(v) = a\delta(v')a$. Si v apparaît comme facteur dans $\mathbf{x}$ à une position autre que celle de préfixe, alors la lettre qui précède $\delta(v)$ dans

$\delta(\mathbf{x})$ est un a et l'on conclut comme dans le premier cas. Le seul autre cas possible est v préfixe de $\mathbf{x}$ et $\mathbf{x}$ ne possède aucun autre couple de facteurs (u_1, v_1) avec $|u_1|_a - |v_1|_a \geq 2$. Ceci signifie que $\mathbf{x} = b\mathbf{x}'$ où $\mathbf{x}'$ est un mot sturmien. Par conséquent, si $\delta(\mathbf{x})$ est sturmien et $\mathbf{x}$ n'est pas sturmien alors $\mathbf{x} = b\mathbf{x}'$ où $\mathbf{x}'$ est sturmien. Les arguments sont tout à fait semblables si $g \in \{\beta, \overline{\beta}, \overline{\delta}\}$ (avec $\mathbf{x} = a\mathbf{x}'$ ou $\mathbf{x} = b\mathbf{x}'$ selon les cas) et le fait est donc prouvé.

Nous sommes maintenant en mesure de terminer la preuve du théorème 1. Soit $\mathbf{x}$ un mot sturmien. $f(\mathbf{x}) = g \circ h(\mathbf{x}) = g(\mathbf{y})$ avec $\mathbf{y} = h(\mathbf{x})$ et $\mathbf{y} = a\mathbf{y}'$ ou $= b\mathbf{y}'$, $\mathbf{y}'$ sturmien.

Mais si $\mathbf{y}$ n'est pas sturmien, alors $\mathbf{y}$ a pour préfixe un facteur de la forme uw_1vw_2 où $||u|_a - |v|_a| = 2$ et $uw_1vw_2 = h(r)$ où r est un préfixe de $\mathbf{x}$. Or puisque $\mathbf{x}$ est sturmien il contient une autre occurrence de r, donc $\mathbf{y}'$ contient une occurrence de uw_1vw_2 ce qui contredit le fait que $\mathbf{y}'$ est sturmien.

Ainsi $\mathbf{y}$ est sturmien, par conséquent $f = g \circ h$ est sturmien si et seulement si h est sturmien et l'on peut donc conclure par induction sur $|f(a)| + |f(b)|$.

Maintenant, soit $f : A^* \to A^*$ un morphisme sturmien stationnaire ou strict. Il est clair que $f \notin \{\alpha, \beta\}^* \cup \{\overline{\gamma}, \overline{\delta}\}^*$ sinon a^ω ou b^ω est un mot stationnaire de f mais non sturmien. Donc f est régulier et on conclut comme précédemment en appliquant le lemme 2, ce qui achève la preuve du théorème 1.

□

Corollaire. *Soit $f : A^* \to A^*$ un morphisme. f est sturmien stationnaire si et seulement si f est sturmien strict.*

6. Les règles de Rauzy

Dans [12], Rauzy a réalisé la construction ci-dessous.

On fabrique deux suites de $A^\infty, (A_n)_{n\geq 0}$ et $(B_n)_{n\geq 0}$, comme suit :
$A_0 = a, B_0 = b$ et (A_{n+1}, B_{n+1}) est obtenu à partir de (A_n, B_n) en appliquant l'un des deux schémas

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= A_n & \qquad A_{n+1} &= B_n A_n \\ B_{n+1} &= A_n B_n & \qquad B_{n+1} &= B_n. \end{aligned}$$

Si chacun des deux schémas est appliqué un nombre infini de fois, $(A_n)_{n\geq 0}$ et $(B_n)_{n\geq 0}$ convergent vers un même mot infini qui débute par A_n et B_n $(n \geq 1)$ et qui est sturmien [12].

Dans tout ce qui suit, nous appellerons règles de Rauzy les deux règles

$$D \quad \begin{cases} A_{n+1} = A_n B_n \\ B_{n+1} = A_n \end{cases} \qquad G \quad \begin{cases} A_{n+1} = B_n A_n \\ B_{n+1} = B_n. \end{cases}$$

On prouve aisément que les mots obtenus par la construction de départ sont les mêmes que ceux obtenus en appliquant les deux règles G et D ci-dessus à partir de $(A_0 = a,\ B_0 = b)$ ou $(A_0 = b,\ B_0 = a)$ et en imposant que la première règle appliquée soit la règle G qui doit de plus être utilisée un nombre infini de fois.

C'est de cette construction que nous allons maintenant nous inspirer. Soit $u = i_1, i_2, \cdots, i_p$, $p \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, une suite non périodique (c'est à dire qui n'est pas répétition d'une de ses sous-suites commençant par i_1) d'entiers strictement positifs. Soit $(u_k)_{k\geq 0}$, la suite infinie définie par $u_k = u$, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$(u_k)_{k\geq 0} = i_1, i_2, \cdots, i_p, i_1, i_2, \cdots, i_p, \cdots, i_1, i_2, \cdots, i_p, \cdots$$

On associe à cette suite un mot infini sur A, $\mathbf{T} = \theta((u_k)_{k\geq 0})$ où θ est l'application de $\mathbb{N}$ dans $\{G, D\}^\infty$ qui, à tout n associe la suite $G\ D^{n-1}$.

On note $\mathbf{x}_u$ le mot infini obtenu en appliquant $\mathbf{T}$ à partir de $A_0 = a$ et $B_0 = b$.

Exemples :

- soit $u = 1$. Alors $(u_k)_{k\geq 0} = 111\cdots$ et $\mathbf{T} = G\ G\ G\cdots$ La suite des (A_n, B_n) obtenue par application des règles de Rauzy correspondantes commence par

$$
\begin{array}{lll}
 & a & b \\
G & & \\
 & ab & a \\
G & & \\
 & aba & ab \\
G & & \\
 & abaab & aba \\
G & & \\
 & abaababa & abaab \\
 & & \cdots
\end{array}
$$

et le mot infini $\mathbf{x}_u$ est le mot de Fibonacci $\varphi^\omega(a)$ où $\varphi : A^* \to A^*$ est le morphisme $a \mapsto ab$, $b \mapsto a$.

- soit $u = 12$. Alors $(u_k)_{k\geq 0} = 121212\cdots$ et $\mathbf{T} = G\ G\ D\ G\ G\ D\cdots$ La suite des (A_n, B_n) obtenue par application des règles de Rauzy correspondantes commence par

$$
\begin{array}{lll}
 & a & b \\
G & & \\
 & ab & a \\
G & & \\
 & aba & ab \\
D & & \\
 & ababa & ab \\
G & & \\
 & ababaab & ababa \\
G & & \\
 & ababaababa & ababaab \\
 & & \cdots
\end{array}
$$

et le mot infini $\mathbf{x}_u$ est le mot $f^\omega(a)$ où $f : A^* \to A^*$ est le morphisme $a \mapsto ababa$, $b \mapsto ab$.

- soit $u = 31$. Alors $(u_k)_{k\geq 0} = 313131\cdots$ et $\mathbf{T} = G\ D\ D\ G\ G\ D\ D\ G\cdots$ La suite des (A_n, B_n) obtenue par application des règles de Rauzy correspondantes commence par

$$\begin{array}{ccc}
 & a & b \\
G & & \\
 & ab & a \\
D & & \\
 & aab & a \\
D & & \\
 & aaab & a \\
G & & \\
 & aaaba & aaab \\
G & & \\
 & aaabaaaab & aaaba \\
 & & \cdots
\end{array}$$

et le mot infini $\mathbf{x}_u$ est le mot $f^\omega(a)$ où $f : A^* \to A^*$ est le morphisme $a \mapsto aaaba$, $b \mapsto aaab$.

7. Morphismes et règles de Rauzy

Par définition, $\mathbf{T} = \theta(u^\omega) = (\theta(u))^\omega$. Donc, si l'on fabrique deux suites de A^∞, $(U_n)_{n\geq 0}$ et $(V_n)_{n\geq 0}$ de la façon suivante : $U_0 = a$, $V_0 = b$ et (U_{n+1}, V_{n+1}) est obtenu en appliquant à (U_n, V_n) la suite de règles $\theta(u)$, il est clair que $\mathbf{x}_u$ est également la limite des suites $(U_n)_{n\geq 0}$ et $(V_n)_{n\geq 0}$, et qu'il en est de même si l'on remplace u par un u^l, $l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

À toute suite finie et non périodique u d'entiers strictement positifs, on associe le morphisme f_u sur A défini par $f_u(a) = U_1$, $f_u(b) = V_1$.

Exemples (suite) : dans les trois exemples qui précèdent, on a

$u = 1$
$$U_{n+1} = U_n V_n,\quad V_{n+1} = U_n,\quad f_u(a) = ab,\ f_u(b) = a.$$

$u = 12$
$$U_{n+1} = U_n V_n U_n V_n U_n,\quad V_{n+1} = U_n V_n,\quad f_u(a) = ababa,\ f_u(b) = ab.$$

$$u = 31 \qquad \begin{aligned} U_{n+1} &= U_nU_nU_nV_nU_n, \\ V_{n+1} &= U_nU_nU_nV_n, \\ f_u(a) &= aaaba,\ f_u(b) = aaab. \end{aligned}$$

Les morphismes f_u ainsi définis ont de nombreuses propriétés. En particulier, d'après ce qui précède, on a

LEMME 5. *Pour tout couple (u, v) de suites finies et non périodiques d'entiers strictement positifs, les affirmations suivantes sont vérifiées*

1) $f_u(b)$ est facteur gauche de $f_u(a)$,

2) $f_{uv} = f_u \circ f_v$,

3) $\mathbf{x}_u = f_u^\omega(a) = f_u^\omega(b)$.

Le lemme qui suit est plus technique et c'est sur lui que repose la preuve du résultat principal de cette section :

LEMME 6. *Soient u et v deux suites finies et non périodiques d'entiers strictement positifs. Si $u \neq v$ alors $\mathbf{x}_u \neq \mathbf{x}_v$.*

Preuve : Soient u et v deux suites finies et non périodiques d'entiers strictement positifs. Si $u \neq v$ alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\theta(u) = wGu'$ et $\theta(v) = wDv'$ où w, u' et v' sont dans $\{G, D\}^+$ et $|w| = k$.

Notons (A_n), (B_n) les suites obtenues par application des règles de Rauzy correspondant à u et (A'_n), (B'_n) les suites obtenues par application des règles de Rauzy correspondant à v.

On a

$$A_k = A'_k,\ B_k = B'_k$$

et

$$A_{k+1} = A_kB_k,\ A'_{k+1} = B_kA_k,\ B_{k+1} = A_k,\ B'_{k+1} = B_k.$$

Maintenant, quelles que soient les suites de règles u' et v', on aura qu'il existe $l \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que $\mathbf{x}_u$ commence par $A_k^lB_k$ et $\mathbf{x}_v$ commence par $B_k^mA_k$. Or, les mots sturmiens étant non périodiques, aucun des deux facteurs $A_k^lB_k$ et $B_k^mA_k$ ne peut être facteur gauche de l'autre, donc $\mathbf{x}_u \neq \mathbf{x}_v$.

□

Nous sommes maintenant prêts pour énoncer le résultat principal de cette section.

DÉFINITION 5. *Soit* $\mathbf{x}$ *un mot infini sur* A. $\mathbf{x}$ *est rigide de base* f *si* f *est un morphisme sur* A *tel que* $\mathbf{x} = f^{\omega}(a)$ *pour un* $a \in A$ *et si, pour tout morphisme* g *sur* A *tel que* $\mathbf{x} = g^{\omega}(a)$ *pour un* $a \in A$, *il existe* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $g = f^n$.

THÉORÈME 2. *Pour toute suite finie et non périodique* u *d'entiers strictement positifs,* $\mathbf{x}_u$ *est rigide de base* f_u.

Preuve : la preuve de ce résultat étant assez longue, nous n'en donnons ici que la preuve d'une partie, à savoir que ce résultat est vrai si l'on se restreint à l'ensemble des morphismes f_u définis ci-dessus.

D'après le lemme 5, pour toute suite finie et non périodique u d'entiers strictement positifs, $\mathbf{x}_u = f_u^{\omega}(a) = f_u^{\omega}(b)$. D'autre part, si u et v sont deux suites finies et non périodiques d'entiers strictement positifs, alors $u \neq v$ implique $\mathbf{x}_u \neq \mathbf{x}_v$ (lemme 6). Donc, si $\mathbf{x}_u = \mathbf{x}_v$ alors soit $u = v$, soit u ou v est périodique. Dans ce cas, notons u_1 et v_1 les suites finies et non périodiques d'entiers strictement positifs telles que $u = u_1^l$ et $v = v_1^m$, $l, m \in \mathbb{N}$. $\mathbf{x}_{u_1} = \mathbf{x}_u = \mathbf{x}_v = \mathbf{x}_{v_1}$, donc $u_1 = v_1$ (lemme 6) et u et v sont puissances d'une même suite non périodique.

Mais $f_{u_1} = f_{v_1}$, donc d'après le 2) du lemme 5, $f_u = f_{u_1}^l$ et $f_v = f_{u_1}^m$. Ainsi, f_u et f_v sont deux puissances de f_{u1}, donc $\mathbf{x}_u = \mathbf{x}_{u_1}$ n'est engendré par un morphisme f_v que si v est une puissance de u_1.

□

Remerciements : les auteurs remercient un rapporteur anonyme pour des commentaires judicieux et pour avoir permis de corriger une erreur grave dans la preuve du théorème 1.

Note ajoutée fin 93 : Jean-Paul Allouche nous indique que les résultats de ce papier joints à un travail de Z.-X. Wen et Z.-Y. Wen, intitulé Local isomorphisms of invertible substitutions, à paraître aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences, implique le théorème :

Un morphisme de monoïde *d'un alphabet à deux lettres est sturmien si et seulement s'il est inversible*

BIBLIOGRAPHIE

[1] T. C. BROWN, *A characterization of the quadratic irrationals*, Canad. Math. Bull. **34** (1991), 36–41.

[2] D. CRISP, W. MORAN, A. POLLINGTON, P. SHIUE, *Substitution invariant cutting sequences*, Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux **5** (1993), 123–137.

[3] E. COVEN, G. A. HEDLUND, *Sequences with minimal block growth*, Math. Systems Theory **7** (1973), 138–153.

[4] S. DULUCQ, D. GOUYOU-BEAUCHAMPS, *Sur les facteurs des suites de Sturm*, Theoret. Comput. Sci. **71** (1990), 381–400.

[5] A. S. FRAENKEL, M. MUSHKIN, U. TASSA, *Determination of $\lfloor n\theta \rfloor$ by its sequence of differences*, Canad. Math. Bull. **21** (1978), 441–446.

[6] G. A. HEDLUND, *Sturmian minimal sets*, Amer. J. Math **66** (1944), 605–620.

[7] G. A. HEDLUND, M. MORSE, *Symbolic dynamics II - Sturmian trajectories*, Amer. J. Math. **62** (1940), 1–42.

[8] S. ITO, S. YASUTOMI, *On continued fractions, substitutions and characteristic sequences*, Japan. J. Math. **16** (1990), 287–306.

[9] M. KÓSA, *Problems 149-151, "Problems and Solutions"*, EATCS Bulletin **32** (1987), 331–333.

[10] M. LOTHAIRE, *Combinatorics on words*, Addison Wesley, 1982.

[11] F. MIGNOSI, *On the number of factors of Sturmian words*, Theoret. Comput. Sci. **82** (1991), 71–84.

[12] G. RAUZY, *Mots infinis en arithmétique, in Automata on infinite words*, Nivat, Perrin (Eds), Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag **192** (1984), 165–171.

[13] P. SÉÉBOLD, *Fibonacci morphisms and Sturmian words*, Theoret. Comput. Sci. **88** (1991), 365–384.

[14] C. SERIES, *The geometry of Markoff numbers*, Math. Intelligencer **7** (1985), 20–29.

[15] K. B. STOLARSKY, *Beatty sequences, continued fractions, and certain shift operators*, Canad. Math. Bull. **19** (1976), 473–482.

[16] B. A. VENKOV, *Elementary Number Theory*, Wolters-Noordhoff, Groningen, 1970.

Filippo Mignosi
Dipartimento di Matematica e Applicazioni
Università degli Studi di Palermo,
via Adrirafi, 34
90123 Palermo, ITALIE

Patrice Séébold
Laboratoire d'Informatique Théorique et de Programmation,
Université Paris 7,
2 place Jussieu
F-75251 Paris Cedex 05
et
Laboratoire de Mathématiques et Informatique Fondamentale d'Amiens,
Université de Picardie,
33 rue Saint Leu
F-80039 Amiens Cedex 01