

BERNARD RANDÉ

## Réurrences 2- et 3-mahlériennes

*Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux*, tome 5, n° 1 (1993),  
p. 101-109

[http://www.numdam.org/item?id=JTNB\\_1993\\_\\_5\\_1\\_101\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JTNB_1993__5_1_101_0)

© Université Bordeaux 1, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux » (<http://jtnb.cedram.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## Réurrences 2- et 3-mahlériennes

par BERNARD RANDÉ

RÉSUMÉ. On sait (Cobham) qu'une suite 2- et 3-automatique est une suite rationnelle. Une question de Loxton et van der Poorten étend ce résultat au cas 2- et 3-régulier. On montre dans cet article que, si une suite vérifie une récurrence 2- et 3-mahlérienne d'ordre un, elle est rationnelle.

### 1. Introduction

Un résultat célèbre de Cobham, ([2]), affirme que si une suite est à la fois  $p$ - et  $q$ -automatique,  $p$  et  $q$  étant deux entiers multiplicativement indépendants, elle est ultimement périodique. La généralisation de ce résultat, conjecturée par Loxton et van der Poorten, est la suivante : *si une série formelle à coefficients dans un corps commutatif vérifie à la fois une  $p$ -équation de Mahler et une  $q$ -équation de Mahler,  $p$  et  $q$  étant multiplicativement indépendants, c'est une fraction rationnelle*. Notons que van der Poorten donne une réponse à cette question dans [4] par des méthodes compliquées, sous l'hypothèse que le corps de base est un corps de nombres. On pourra aussi lire l'article de J. H. Loxton [3].

Notons que cette conjecture implique le théorème de Cobham, ainsi que la généralisation du théorème de Cobham aux suites  $p$ -régulières conjecturée par Allouche et Shallit dans [1].

Le résultat que nous obtenons est en réalité de portée beaucoup plus limitée, mais nous l'obtenons par des méthodes "élémentaires" : nous considérons un élément  $\varphi$  de  $\mathbb{C}((X))$  vérifiant une  $p$ -équation de Mahler d'ordre un sur  $\mathbb{C}(X)$ , et aussi une  $q$ -équation de Mahler d'ordre un sur  $\mathbb{C}(X)$ . Il faut noter que  $p$  et  $q$  sont supposés un peu plus que multiplicativement indépendants, à savoir premiers entre eux. Pour la clarté du propos, on prend  $p = 2$  et  $q = 3$ .

---

Manuscrit reçu le 10 avril 1992.

Les résultats contenus dans cet article ont été exposés au colloque "Thémate", (CIRM, Luminy, Mai 1991).

## 2. Langages et notations

Une application  $f : A \rightarrow B$  est dite *presque nulle* si l'ensemble

$$\text{supp}(f) = \{a \in A \mid f(a) \neq 0\}$$

est fini;  $\text{supp}(f)$  est appelé *support de  $f$* .

Si  $A$  est un sous-ensemble de  $\mathbb{C}$ , et  $k$  un entier naturel, on note

$$A^{1/k} = \{x \in \mathbb{C}, \quad x^k \in A\}.$$

Si  $A = \{a\}$ , on notera plus brièvement  $a^{1/k}$  cet ensemble. On désignera aussi par  $A^k$  l'image de  $A$  par  $x \mapsto x^k$ .

Soient à présent deux fractions rationnelles  $a$  et  $b$  telles que

$$a(0) = b(0) = 1,$$

et une fonction  $\varphi$ , méromorphe sur le disque unité ouvert, telle que  $\varphi(0) = 1$ , et vérifiant de plus les deux équations de Mahler suivantes :

$$\varphi(x^3) = a(x)\varphi(x) \quad (1),$$

$$\varphi(x^2) = b(x)\varphi(x) \quad (2).$$

On désire montrer que  $\varphi$  est elle aussi une fraction rationnelle.

## 3. Réduction du problème

Posons

$$a(x) = \prod_{\alpha \in \mathbb{C}^*} (x - \alpha)^{f(\alpha)},$$

où  $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{Z}$  est presque nulle. On obtient alors :

$$a(x^2) = \prod_{\alpha \in \mathbb{C}^*} (x^2 - \alpha)^{f(\alpha)}.$$

Soit  $I$  un système représentatif de racines carrées des éléments de  $\mathbb{C}^*$ . On obtient, compte tenu du fait que  $\mathbb{C}^* = I \cup (-I)$  :

$$\begin{aligned} a(x^2) &= \prod_{\beta \in I} (x^2 - \beta^2)^{f(\beta^2)} = \prod_{\beta \in I} (x - \beta)^{f(\beta^2)} \prod_{\beta \in I} (x + \beta)^{f(\beta^2)} \\ &= \prod_{\beta \in \mathbb{C}^*} (x - \beta)^{f(\beta^2)}. \end{aligned}$$

Si, de même,  $b(x) = \prod_{\alpha \in \mathbb{C}^*} (x - \alpha)^{g(\alpha)}$ , on obtiendra :

$$b(x^3) = \prod_{\beta \in \mathbb{C}^*} (x - \beta)^{g(\beta^3)}.$$

Grâce aux relations (1) et (2), et au fait que  $\varphi \neq 0$ , on a :

$$a(x^2)b(x) = a(x)b(x^3),$$

ou encore, grâce aux calculs précédents :

$$\prod_{\alpha \in \mathbb{C}^*} (x - \alpha)^{f(\alpha^2)+g(\alpha)} = \prod_{\alpha \in \mathbb{C}^*} (x - \alpha)^{f(\alpha)+g(\alpha^3)}.$$

Soit :

$$(H) \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}^* \quad f(\alpha^2) - f(\alpha) = g(\alpha^3) - g(\alpha).$$

Grâce à cette relation, nous allons prouver l'existence d'une application  $h : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{Z}$ , presque nulle, telle que :

$$f(\alpha) = h(\alpha) - h(\alpha^3).$$

Supposons  $h$  construite, et soit  $r(x) = \prod_{\alpha \in \mathbb{C}^*} (x - \alpha)^{-h(\alpha)}$ .

On aura alors :

$$\frac{r(x^3)}{r(x)} = a(x) = \frac{\varphi(x^3)}{\varphi(x)}.$$

Donc  $\theta = \frac{\varphi}{r}$  vérifie la relation :  $\theta(x^3) = \theta(x)$ . De plus, 0 n'est pas pôle ni zéro de  $r$ , donc  $\theta$  est holomorphe au voisinage de 0. Il en résulte que  $\theta(x) = \theta(0)$  puis que :  $\varphi = \theta(0)r$ , donc que  $\varphi$  est une fraction rationnelle.

#### 4. Construction de $h$ sur le complémentaire de l'ensemble des racines de l'unité

LEMME 1. Soit  $S = \{x \in \mathbb{C}^*, x \text{ non racine de l'unité}\}$  et  $F$  un sous-ensemble fini de  $S$ . Alors :

$$\{(k, \ell) \in \mathbb{N}^2, \quad F^{2^\ell} \cap F^{3^k} \neq \emptyset\} \text{ est fini.}$$

**Preuve.**

Notons  $I$  l'ensemble précédent; si  $(k, \ell) \in I$ , il existe  $y_{k,\ell} \in F^{2^\ell} \cap F^{3^k}$ , donc il existe  $\alpha_{k,\ell}$  et  $\beta_{k,\ell}$  dans  $F$  tels que :

$$y_{k,\ell} = \alpha_{k,\ell}^{2^\ell} = \beta_{k,\ell}^{3^k}.$$

On définit ainsi une application :

$$\begin{aligned} I &\rightarrow F \times F \\ (k, \ell) &\mapsto (\alpha_{k,\ell}, \beta_{k,\ell}). \end{aligned}$$

Montrons qu'elle est injective, ce qui suffira. Soit :

$$\alpha_{k,\ell} = \alpha_{k',\ell'} = \alpha ; \beta_{k,\ell} = \beta_{k',\ell'} = \beta.$$

On a :  $\alpha^{2^\ell} = \beta^{3^k}$  ;  $\alpha^{2^{\ell'}} = \beta^{3^{k'}}$  et donc :

$$\alpha^{2^\ell \cdot 3^{k'}} = \alpha^{2^{\ell'} \cdot 3^k}.$$

Or  $\alpha$  n'est pas racine de 1 ( $\alpha \in F$ ). Donc :  $2^{\ell-\ell'} = 3^{k-k'}$ , soit  $\ell = \ell'$  et  $k = k'$ .

Nous pouvons à présent poser :

$$\forall \alpha \in S \quad h(\alpha) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(\alpha^{3^k}).$$

Ceci a un sens, car  $k \mapsto \alpha^{3^k}$  est injective, et donc  $f(\alpha^{3^k}) = 0$  pour  $k$  assez grand. De plus,  $h(S) \subset \mathbb{Z}$  évidemment.

Soit  $\alpha \in S$ . Alors  $\alpha^3 \in S$ , et donc :

$$h(\alpha^3) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(\alpha^{3^{k+1}}) = h(\alpha) - f(\alpha).$$

Montrons que  $h : S \rightarrow \mathbb{Z}$  est presque nulle.

Notons  $A = [\text{supp}(f) \cup \text{supp}(g)] \cap S$ ;  $A$  est fini.

LEMME 2.  $\left[ \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A^{\frac{1}{2^k}} \right] \cap \left[ \bigcup_{\ell \in \mathbb{N}} A^{\frac{1}{3^\ell}} \right]$  est fini.

**Preuve.** L'ensemble considéré est égal à :

$$\bigcup_{(k, \ell) \in \mathbb{N}^2} (A^{\frac{1}{2^k}} \cap A^{\frac{1}{3^\ell}}).$$

Si  $(k, \ell)$  est tel que  $A^{\frac{1}{2^k}} \cap A^{\frac{1}{3^\ell}} \neq \emptyset$ , il existe  $x, y$  dans  $A$  tels que  $x = \omega^{2^k}$ ,  $y = \omega^{3^\ell}$ , où  $\omega \in A^{\frac{1}{2^k}} \cap A^{\frac{1}{3^\ell}}$ . D'où :  $x^{3^\ell} = y^{2^k}$ , et  $(k, \ell) \in I$  (avec la notation du lemme 1).

Finalement :

$$\bigcup_{(k, \ell) \in \mathbb{N}^2} (A^{\frac{1}{2^k}} \cap A^{\frac{1}{3^\ell}}) = \bigcup_{(k, \ell) \in I} (A^{\frac{1}{2^k}} \cap A^{\frac{1}{3^\ell}}).$$

Or,  $A$  étant fini,  $A^{\frac{1}{2^k}}$  est lui aussi fini. Le résultat en découle.

Pour montrer que  $h$  est presque nulle, il suffit donc de montrer que, si  $\alpha \notin \left[ \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A^{\frac{1}{2^k}} \right] \cap \left[ \bigcup_{\ell \in \mathbb{N}} A^{\frac{1}{3^\ell}} \right]$ , alors  $h(\alpha) = 0$ . Supposons par exemple que  $\alpha \notin \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A^{\frac{1}{2^k}}$ . Cela signifie que, quel que soit  $k$  dans  $\mathbb{N}$ ,  $\alpha^{2^k} \notin A$ , donc que  $g(\alpha^{2^k}) = 0$ . Notons que l'hypothèse (H) entraîne :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad f(\alpha^{3^k}) - f(\alpha^{2 \cdot 3^k}) = g(\alpha^{3^k}) - g(\alpha^{3^{k+1}}),$$

et donc que :

$$\begin{aligned} h(\alpha) - h(\alpha^2) &= \sum_{k=0}^{+\infty} [f(\alpha^{3^k}) - f(\alpha^{2 \cdot 3^k})] \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} [g(\alpha^{3^k}) - g(\alpha^{3^{k+1}})] \\ &= g(\alpha), \end{aligned}$$

puisque  $g(\alpha^{3^k}) = 0$  pour  $k$  assez grand.

Il en résulte que :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad h(\alpha) = h(\alpha^{2^k}).$$

Or il existe  $k$  tel que  $h(\alpha^{2^k}) = 0$  ; sinon, pour tout  $k$ ,  $h(\alpha^{2^k}) \neq 0$  et donc, d'après la définition même de  $h$ , il existe  $\ell$  (dépendant de  $k$ ) tel que  $f(\alpha^{2^k 3^\ell}) \neq 0$ . Mais  $k \mapsto \alpha^{2^k 3^\ell}$  est injective, donc  $\text{supp}(f)$  est infini, ce qui est contradictoire. Finalement, on a bien  $h(\alpha) = 0$ .

## 5. Construction de $h$ sur l'ensemble des racines de l'unité

Montrons tout d'abord deux lemmes.

LEMME 3. Soit  $M = \sum_{y \in \mathbb{C}^*} |f(y)|$ , et  $x$  un élément de  $\mathbb{C}^*$ ,  $p$  un élément de  $\mathbb{N}$ . Alors

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \quad 2^n [f(x) + f(x^3) + \cdots + f(x^{3^{p-1}})] \\ = \alpha_n + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k \left\{ \sum_{\omega \in (x^{3^p})^{\frac{1}{2^{n-k}}}} g(\omega) - \sum_{\omega \in x^{\frac{1}{2^{n-k}}}} g(\omega) \right\}, \end{aligned}$$

où  $|\alpha_n| \leq Mp$ .

**Preuve.** Soit  $\omega \in x^{\frac{1}{2^k}}$ . On a, successivement :

$$\begin{aligned} f(\omega^2) - f(\omega) &= g(\omega^3) - g(\omega) \\ &\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ f(\omega^{2^n}) - f(\omega^{2^{n-1}}) &= g(\omega^{2^{n-1} \cdot 3}) - g(\omega^{2^{n-1}}) \end{aligned}$$

et donc :

$$f(x) - f(\omega) = \sum_{k=0}^{n-1} [g(\omega^{2^k \cdot 3}) - g(\omega^{2^k})].$$

Sommons ces égalités pour  $\omega$  décrivant  $x^{\frac{1}{2^k}}$ . On obtient :

$$2^n f(x) - \sum_{\omega \in x^{\frac{1}{2^n}}} f(\omega) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\omega \in x^{\frac{1}{2^k}}} [g(\omega^{2^k \cdot 3}) - g(\omega^{2^k})].$$

Clairement :  $|\sum_{\omega \in x^{\frac{1}{2^k}}} f(\omega)| \leq M$ . De plus, pour  $k \in [0, n-1]$  :

$$\sum_{\omega \in x^{\frac{1}{2^k}}} g((\omega^{2^k})^3) = 2^k \sum_{\omega \in x^{\frac{1}{2^{n-k}}}} g(\omega^3). \text{ On a donc :}$$

$$2^n f(x) = \varepsilon_n + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k \left\{ \sum_{\omega \in x^{\frac{1}{2^{n-k}}}} [g(\omega^3) - g(\omega)] \right\},$$

avec  $|\varepsilon_n| \leq M$ .

Montrons que l'application :

$$\begin{aligned} x &\frac{1}{2^j} \rightarrow (x^3) \frac{1}{2^j} \\ \omega &\mapsto \omega^3 \end{aligned}$$

est bijective. Compte tenu de la cardinalité, il suffit de montrer qu'elle est injective. Or :

$$\omega_1^3 = \omega_2^3 \text{ avec } \omega_1^{2^j} = \omega_2^{2^j} \Rightarrow \left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^3 = 1 \text{ et } \left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^{2^j} = 1, \text{ donc } \omega_1 = \omega_2.$$

Finalement, on peut réécrire :

$$2^n f(x) = \varepsilon_n + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k \left\{ \sum_{\omega \in (x^3) \frac{1}{2^{n-k}}} g(\omega) - \sum_{\omega \in x \frac{1}{2^{n-k}}} g(\omega) \right\}.$$

Appliquons cette égalité à  $x, x^3, \dots, x^{3^{p-1}}$ , et sommons :

$$\begin{aligned} &2^n [f(x) + f(x^3) + \dots + f(x^{3^{p-1}})] \\ &= \alpha_n + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k \left( \sum_{\omega \in (x^{3^p}) \frac{1}{2^{n-k}}} g(\omega) - \sum_{\omega \in x \frac{1}{2^{n-k}}} g(\omega) \right), \end{aligned}$$

avec  $|\alpha_n| \leq pM$ .

LEMME 4. Soit  $R = \{x \in \mathbb{C}^*, x \text{ racine de l'unité}\}$ , et  $F$  un sous-ensemble fini de  $R$ . Alors :

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F^{2^n} \text{ est un ensemble fini.}$$

**Preuve.** Si  $F = \{x\}$ , alors  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F^{2^n}$  est incluse dans le sous-groupe de  $\mathbb{C}^*$  engendré par  $x$ , qui est fini. Le résultat général en découle.

Notons  $B = [\text{supp}(f) \cup \text{supp}(g)] \cap R$ ; l'ensemble  $B$  est fini, et donc, d'après le lemme 4 :  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B^{2^n}$  est fini.

Soit à présent  $\alpha \in R$ . Puisque  $\bigcup_{p \in \mathbb{N}} \alpha^{\frac{1}{3^p}}$  est infini, il existe donc

$$x \in \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \alpha^{\frac{1}{3^p}} \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B^{2^n}.$$

Posons :

$$h(\alpha) = -[f(x) + \cdots + f(x^{3^{p-1}})], \text{ où } x^{3^p} = \alpha.$$

Il convient de vérifier que cette définition ne dépend que de  $\alpha$ , pas de  $(x, p)$ . Soit donc  $y \notin \cup B^{2^n}$  tel que  $y^{3^q} = \alpha$ . D'après le lemme 3 :

$$\begin{aligned} 2^n[f(x) + \cdots + f(x^{3^{p-1}})] \\ = \alpha_n + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k \left( \sum_{\omega \in \alpha \frac{1}{2^{n-k}}} g(\omega) - \sum_{\omega \in x \frac{1}{2^{n-k}}} g(\omega) \right). \end{aligned}$$

Mais, si  $\omega \in x \frac{1}{2^{n-k}}$ ,  $\omega^{2^{n-k}} = x \Rightarrow \omega \notin B \Rightarrow g(\omega) = 0$ .

Donc :

$$2^n[f(x) + \cdots + f(x^{3^{p-1}})] = \alpha_n + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k \left( \sum_{\omega \in \alpha \frac{1}{2^{n-k}}} g(\omega) \right).$$

De même :

$$2^n[f(y) + \cdots + f(y^{3^{q-1}})] = \beta_n + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k \left( \sum_{\omega \in \alpha \frac{1}{2^{n-k}}} g(\omega) \right).$$

Donc :

$$|2^n\{[f(x) + \cdots + f(x^{3^{p-1}})] - [f(y) + \cdots + f(y^{3^{q-1}})]\}| \leq M(p+q),$$

et ce quel que soit  $n$ . Donc, faisant tendre  $n$  vers  $+\infty$ , on obtient l'égalité souhaitée.

$h$  étant ainsi définie,  $h$  est clairement à valeurs entières.

Soit  $\alpha \notin \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B^{3^n}$ , qui est un ensemble fini (lemme 4). Soient  $x$  et  $p$  tels que  $x^{3^p} = \alpha$ . S'il existe  $k \leq p-1$  tel que  $x^{3^k} \in B$ , alors  $x^{3^p} \in B^{3^{p-k}}$ , donc  $\alpha \in B^{3^{p-h}}$ , ce qui est exclu. Donc :  $f(x) = f(x^3) = \cdots = f(x^{3^{p-1}}) = 0$ , soit  $h(\alpha) = 0$ .

Enfin, si  $h(\alpha) = -[f(x) + \cdots + f(x^{3^{p-1}})]$ , alors :

$$h(\alpha^3) = -[f(x) + \cdots + f(x^{3^p})].$$

En effet,  $x^{3^p} = \alpha \Rightarrow x^{3^{p+1}} = \alpha^3$ , et  $x \notin \cup B^{2^n}$ . Donc  $(x, p+1)$  permet effectivement de définir  $h(\alpha^3)$ . D'où :

$$h(\alpha) - h(\alpha^3) = f(x^{3^p}) = f(\alpha).$$

Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant.

THÉOREME. Soient  $p, q$  deux entiers premiers entre eux,  $a$  et  $b$  deux fractions rationnelles telles que  $a(0) = b(0) = 1$ ,  $\varphi$  une fonction méromorphe sur un voisinage de 0 telle que

$$\varphi(x^p) = a(x)\varphi(x) \text{ et } \varphi(x^q) = b(x)\varphi(x).$$

Alors  $\varphi$  est une fraction rationnelle.

La généralisation consistant à passer de  $(2, 3)$  à  $(p, q)$  ne relève que du contenu de la démonstration. En outre, l'hypothèse  $\varphi(0) = 1$  n'est pas utile car :

- ou bien  $\varphi = 0$ , et le résultat est clair,
- ou bien  $\varphi \neq 0$ ,  $\varphi(x) \underset{0}{\sim} Cx^d \Rightarrow Cx^{pd} \sim Cx^d \Rightarrow d = 0$ , donc 0 n'est ni zéro ni pôle de  $\varphi$ , et  $\frac{\varphi(x)}{\varphi(0)}$  vérifie les mêmes hypothèses.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] J.-P. Allouche et J. Shallit, *The ring of  $k$ -regular sequences*, Theor. Comp. Sci. **98** (1992), 1163–197.
- [2] A. Cobham, *On the base-dependence of sets of numbers recognizable by finite automata*, Math. Systems Theory **3** (1969), 186–192.
- [3] J. H. Loxton, *Automata and transcendence*, New advances in transcendence theory (Durham 1986), Cambridge University Press (1988), 215–228.
- [4] A. van der Poorten, *Remarks on automata, functional equations and transcendence*, Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux (1986–1987), exposé n° 27, 27-01–27-11.

Bernard Randé  
6 rue des Echevins  
F-44000 Nantes