Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux

Zhi-Xiong Wen

Zhi-Ying Wen

**Marches sur les arbres homogènes suivant une suite substitutive**

*Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux*, tome 4, n° 1 (1992), p. 155-186

<http://www.numdam.org/item?id=JTNB_1992__4_1_155_0>

*Séminaire de Théorie des Nombres,*
*Bordeaux* 4 *(1992), 155-186*

# Marches sur les arbres homogènes suivant une suite substitutive.

par WEN ZHI-XIONG & WEN ZHI-YING

RÉSUMÉ – Ce travail consiste à étudier les comportements des marches sur les arbres homogènes suivant la suite engendrée par une substitution. Dans la première partie, on étudie d'abord les marches sans orientation sur $\mathbb{Z}$ et on détermine complètement, d'après les propriétés combinatoires de la substitution, les conditions assurant que les marches sont bornées, récurrentes ou transientes. Comme corollaire, on obtient le comportement asymptotique des sommes partielles des coefficients de la suite substitutive. Dans la deuxième partie, en utilisant les résultats de la première et la théorie des groupes, dans certaines conditions on donne des classes de marches substitutives sur un arbre homogène qui sont bornées, récurrentes ou transientes.

## 0. Introduction et préliminaires.

Dans les années récentes, Cobham [Co], Christol *et al* [CKMR] ont établi des liens entre les notions de suite reconnaissable par $p$-automate, de suite engendrée par une $p$-substitution et de série formelle algébrique sur un corps de fractions rationnelles sur un corps fini. Puis, de nombreux auteurs ont découvert les liens étroits entre les suites automatiques et d'autres domaines, par exemple la théorie des nombres, l'analyse harmonique, les systèmes dynamiques, les fractals, la physique théorique etc..., et ils ont étudié systématiquement leurs propriétés; pour une vue générale, voir [Al], [Qu], [WW].

Ce travail consiste originellement à étudier un problème posé par J. Peyrière sur les comportements des marches sur un arbre homogène suivant une suite automatique.

Pour cela on fait d'abord des rappels.

Soit $A$ un ensemble fini que nous appelons alphabet. On note $A^* = \cup_{k\geq 0} A^k$ l'ensemble des mots construits sur $A$, où $A^0$ est réduit au mot vide noté $\epsilon$. L'ensemble $A^*$, muni de la concaténation, est un monoïde, $\epsilon$ est

Manuscrit reçu le 16 mai 1990, version révisée le 1er octobre 1991.

l'élément neutre pour cette opération. Une substitution $\sigma$ sur $A$ est une application de $A$ dans $A^*$. $\sigma$ induit naturellement une application de $A^*$ dans $A^*$ par concaténation : si $w$ est le mot $a_1a_2\cdots a_n$ de $A^*$, on pose $\sigma(w)=\sigma(a_1)\sigma(a_2)\cdots\sigma(a_n)$. On définit également une application de $A^{\mathbb{N}}$ dans $A^{\mathbb{N}}$ en posant, pour $x=x_1x_2\cdots\in A^{\mathbb{N}}, \sigma(x)=\sigma(x_1)\sigma(x_2)\cdots$
$\sigma^n$ désigne la substitution $n$ fois itérée. Si $w$ est un mot, $L(w)=(L_a(w))_{a\in A}$ désigne le vecteur de $\mathbb{R}^A$ dont la composante $L_a(w)$ correspondant à $a$ est le nombre de fois que $a$ figure dans $w$, et $|w|$ désigne la longueur du mot $w$. On note $M_\sigma$ la matrice, indexée par $A\times A$, dont la colonne correspondant à $a$ est $L(\sigma(a))$. On adopte la terminologie de [Se] en ce qui concerne les matrices à coefficients positifs.

Avec ces notations on a $L(\sigma(w))=M_\sigma L(w)$, d'où

$$L(\sigma^n(w))=M_\sigma^n L(w),\ w\in A^*. \tag{0.1}$$

On suppose qu'il existe une lettre $a\in A$, telle que $\sigma(a)=aw'$ où $w'$ est un mot non vide de $A^*$, alors il est évident que la suite $\sigma^n(a)$ tend vers un élément $x=x_1x_2\cdots x_n\cdots$ dans $A^{\mathbb{N}}$ qui est un point fixe de la substitution dans le sens suivant : $\sigma(x)=x$. Si $\sigma$ est une substitution de longueur constante, c'est-à-dire, s'il existe $p$ tel que pour tout $a\in A, |\sigma(a)|=p$, dans ce cas, le point fixe $x$ de $\sigma$ peut être engendré par un $p$-automate, et on dit que $x$ est une suite $p$-automatique.

On note $\mathcal{A}_n$ l'arbre homogène d'ordre $n$ (c'est-à-dire, un arbre dont tous les sommets sont liés exactement à $n+1$ autres), où on distingue un point 0 appelé racine et un point 1 qui dirige une orientation initiale $\overrightarrow{01}$. Soit $A=\{r,g,d\}$, soient $\sigma$ une substitution sur $A$ et $x=x_1x_2\cdots$ un point fixe de $\sigma$. On considère maintenant une marche sur $\mathcal{A}_2$ suivant la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ selon la règle suivante : $x_0$ se trouve dans la position 1 avec l'orientation initiale $\overrightarrow{01}$ à l'instant $n$, si $x_n$ se trouve sur un nœud avec une orientation, et si $x_{n+1}=r$ (resp. $g$, $d$), alors $x_{n+1}$ “régresse” d'un pas suivant cette orientation et est muni naturellement d'une nouvelle orientation (resp. à gauche, à droite), voir figure 1.

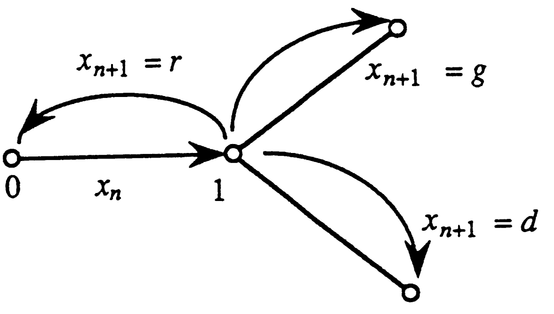


figure 1

*Exemple.* la substitution $\sigma$ est définie par $r \to rg, g \to gd, d \to dr$, alors $\sigma^3(r) = rggdgddr$, la figure 2 illustre les huit premiers pas de la marche.

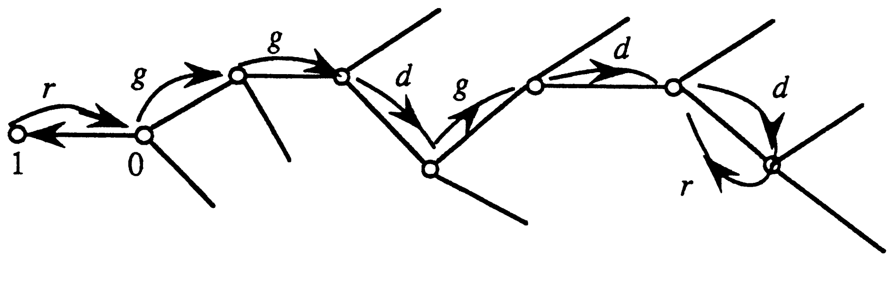


figure 2

Pour cette marche, Peyrière a posé les problèmes suivants :

**1.** La marche est-elle bornée, tend-elle vers l'infini ou bien est-elle récurrente ?

**2.** Si l'on note $E$ le sous-ensemble des sommets de $\mathcal{A}_2$ que la marche visite, et $B(0, r)$ la boule de centre 0 et de rayon $r$, alors, peut-on déterminer la capacité de la marche

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log \operatorname{Card}(E\cap B(0,r))}{r\log 2} \ ?$$

Dans cet article, on étudie d'abord les marches non orientées sur $\mathbb{Z}$, dans ce cas-là, on répond complètement aux problèmes précédents. De plus, on peut rapprocher les résultats obtenus de ceux de Dumont et Thomas [DT]. Ensuite, on va étudier les propriétés des marches sur $\mathcal{A}_n, n\geq 1$. En utilisant la théorie des groupes et les résultats obtenus, dans certaines conditions on donnera des conditions suffisantes assurant que la marche est récurrente.

## 1. Marches substitutives sans orientation sur $\mathbb{Z}$.

Pour étudier les marches substitutives sur $\mathcal{A}_2$ qu'on a décrites dans le §0, on va étudier d'abord les marches sans orientation sur $\mathbb{Z}$.

Soient $A=\{a,b\}$ et $M_\sigma=\begin{pmatrix} m_{aa} & m_{ab}\\ m_{ba} & m_{bb}\end{pmatrix}$ la matrice substitutive associée à la substitution $\sigma$. Dans cette section, on suppose toujours que $M_\sigma$ est primitive, (c'est-à-dire, il existe un entier positif $N>0$, tel que tous les coefficients de $M_\sigma^N$ soient non nuls). On note $\Lambda$ la valeur propre de Frobenius de $M_\sigma$ et $\lambda$ l'autre valeur propre. D'après le théorème de Perron-Frobenius, voir [Se], $\Lambda$ est strictement positif et $\Lambda>|\lambda|$. On suppose aussi que $\sigma$ admet un point fixe noté $x=x_1x_2\cdots x_n\cdots$ Posons $w_n=x_1x_2\cdots x_n$ et $D(w)=L_a(w)-L_b(w)$. Il est connu que les densités définies par $d_a=\lim\limits_{n\to\infty} L_a(w_n)/n$ et $d_b=\lim\limits_{n\to\infty} L_b(w_n)/n$ existent et que le vecteur $\begin{pmatrix} d_a\\ d_b\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de $M$ associé à $\Lambda$, voir [Qu]. Evidemment, $d_a+d_b=1$.

On fait opérer $a,b$ sur les entiers par $a(n):=n+1,\ b(n):=n-1,\ n\in\mathbb{Z}$. Alors $w_n(0):=x_n\cdots x_1(0),\ n\geq 1$, est une marche suivant la suite $w_n$ sur $\mathbb{Z}$. S'il n'y a pas de confusion, on identifie $w_n(0)$ et $w_n$. Le but de cette section consiste à étudier les propriétés asymptotiques de $w_n$.

En remarquant que $\dfrac{D(w_n)}{n}\to d_a-d_b, n\to\infty$, on obtient que

PROPOSITION 1.1. *Si $d_a\neq d_b$, la marche $w_n$ tend vers l'infini.*

On suppose désormais $d_a=d_b$ et il n'est pas difficile de vérifier que

Lemme 1.2. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

*i)* $d_a = d_b$;

*ii)* $\Lambda = m_{aa} + m_{ab} = m_{ba} + m_{bb}$;

*iii)* $\lambda = m_{aa} - m_{ba} = m_{bb} - m_{ab}$;

*iv)* $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *est un vecteur propre de* $M_\sigma$ *associé à* $\Lambda$;

*v)* $(1, -1)$ *est un vecteur propre de* $M_\sigma$ *associé à* $\lambda$.

Lemme 1.3. *Quels que soient* $n \in \mathbb{N}$, $w \in A^*$, *on a*

$$D(\sigma^n(w)) = \lambda^n D(w). \tag{1.1}$$

*Démonstration.* En effet, par l'égalité (0.1) et le lemme 1.2.v, on a

$$\begin{aligned} D(\sigma^n(w)) &= L_a(\sigma^n(w)) - L_b(\sigma^n(w)) = (1,-1)L(\sigma^n(w)) \\ &= (1,-1)M_\sigma^n L(w) = \lambda^n[(1,-1)L(w)] = \lambda^n D(w). \ \blacksquare \end{aligned}$$

Le lemme précédent montre que $\lambda$ jouera un rôle important dans l'étude de la marche.

Soient $w = w_1 w_2 \cdots \in A^*$, $\alpha \in A$. On définit

$$\mu_{w,\alpha} = \sup\{D(w_1 \cdots w_{i-1}) \ ; \ 1 \leq i \leq |w|, \ w_i = \alpha\}.$$

On convient que $w_1 \ldots w_{i-1} = \epsilon$ pour $i = 1$ et que $D(\epsilon) = 0$.

Intuitivement, $\mu_{w,\alpha}$ représente la position la plus à droite que la marche associée au mot $w$ peut atteindre en suivant un pas dans la $\alpha$-direction, et la position maximale est $\sup\{\mu_{w,a} + 1, 0\}$.

On peut démontrer facilement que

Lemme 1.4. *Soient* $u, v \in A^*$, *on a*

*i)* $D(uv) = D(u) + D(v)$;

*ii)* $\mu_{uv,\alpha} = sup\{\mu_{u,\alpha}, D(u) + \mu_{v,\alpha}\}$.

*En général, quels que soient* $u_1, u_2, \cdots, u_t \in A^*$, *on a*

$$\mu_{u_1 u_2 \cdots u_t,\alpha} = sup\{D(u_0 u_1 \cdots u_{i-1}) + \mu_{u_i,\alpha} \ ; \ 1 \leq i \leq t\}, \text{ où } u_0 = \epsilon. \tag{1.2}$$

*Définissons*

$$\mu_{\alpha\beta}^{(n)} = \mu_{\sigma^n(\alpha),\beta} \text{ et } \mu_{\alpha\beta} = \mu_{\alpha\beta}^{(1)}.$$

*On va voir que le comportement de la marche est déterminé par les quantités* $\lambda, \mu_{aa}, \mu_{ab}, \mu_{ba}, \mu_{bb}$ *et les propriétés combinatoires de* $\sigma(a)$ *et* $\sigma(b)$.

LEMME 1.5. *Soit* $\lambda \geq 0$, *on a*

*i)* $1 \leq \mu_{ab} \leq \mu_{aa} + 1, \ \lambda \leq \mu_{aa} + 1$;

*ii) Si* $\mu_{ab} \geq \lambda$ *ou* $\mu_{aa} \geq \lambda$, *alors* $\mu_{aa} + 1 = \mu_{ab}$;

*iii)* $0 \leq \mu_{bb}, \ -\lambda \leq \mu_{ba} + 1 \leq \mu_{bb}$;

*iv) Si* $\mu_{ba} \geq 0$ *ou* $\mu_{bb} > 0$, *alors* $\mu_{ba} + 1 = \mu_{bb}$.

*Démonstration.* On ne démontre que (i) et (ii), les démonstrations de (iii) et (iv) étant analogues.

i) Remarquons que $a_1 = a$, donc, si l'on note $j$ le plus petit entier tel que $a_j = b$, alors $j > 1$, puis $\mu_{ab} \geq D(a_1 \cdots a_{j-1}) = j - 1 \geq 1$. D'autre part, puisque $D(a_1 \cdots a_l) = D(\sigma(a)) = \lambda$ par le lemme 1.3 et la définition de $\mu_{w,\alpha}$, $\mu_{aa} + 1 \geq \sup\{\mu_{ab}, \lambda\}$, on obtient (i).

ii) Si $\mu_{aa} + 1 > \lambda = D(a_1 \cdots a_l)$, il existe un entier positif $\alpha < l$ tel que $\mu_{aa} + 1 = D(a_1 \cdots a_\alpha)$ et $a_\alpha = a, a_{\alpha+1} = b$, on a donc $\mu_{ab} \geq \mu_{aa} + 1$, d'où $\mu_{aa} + 1 = \mu_{ab}$. La même discussion est valide pour le cas de $\mu_{ab} \geq \lambda$. Ce qui achève la démonstration de (ii).

LEMME 1.6. *Soient* $\lambda \geq 0$, *alors pour* $n \geq 1$, $\alpha, \beta \in A$ *on a*

(1.3)
$$\mu_{\alpha\beta}^{(n+1)} = sup\{\lambda\mu_{\alpha a}^{(n)} + \mu_{a\beta}, \lambda\mu_{\alpha b}^{(n)} + \mu_{b\beta}\} = sup\{\lambda^n\mu_{\alpha a} + \mu_{a\beta}^{(n)}, \lambda^n\mu_{\alpha b} + \mu_{b\beta}^{(n)}\}.$$

*Démonstration.* Soit $\sigma(\alpha) = \alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_t$, on convient que $\alpha_0 = \epsilon$. Par la définition de $\mu_{\alpha\beta}^{(n)}$, l'égalité (1.2), et les lemmes 1.3, 1.4, on a

$$\begin{aligned}
\mu_{\alpha\beta}^{(n+1)} &= \mu_{\sigma^{(n+1)}(\alpha),\beta} = \mu_{\sigma^n(\alpha_1)\cdots\sigma^n(\alpha_t),\beta} \\
&= \sup\{D(\sigma^n(\alpha_0)\sigma^n(\alpha_1) \cdots \sigma^n(\alpha_{i-1})) + \mu_{\sigma^n(\alpha_i),\beta}, \quad 1 \leq i \leq t\} \\
&= \sup\{\lambda^n D(\alpha_0\alpha_1 \cdots \alpha_{i-1}) + \mu_{\alpha_i\beta}^{(n)}, \quad 1 \leq i \leq t\} \\
&= \sup\{\lambda^n\mu_{\alpha a} + \mu_{a\beta}^{(n)}, \lambda^n\mu_{\alpha b} + \mu_{b\beta}^{(n)}\}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

On convient que $\mu_{aa}^{(0)} = 0$, $\mu_{bb}^{(0)} = 0$.

Pour $n \geq 0$, notons

$$\mu^{(n)} = \begin{pmatrix} \mu_{aa}^{(n)} & \mu_{ab}^{(n)} \\ \mu_{ba}^{(n)} & \mu_{bb}^{(n)} \end{pmatrix}$$

et $\mu = \mu^{(1)}$.

D'après le lemme 1.6, on peut considérer une algèbre maximale (voir [Gr]) avec les opérations (sup, $+$) remplacées par ($+$, $\cdot$). Si l'on désigne la multiplication de matrices par $\otimes$ dans cette algèbre maximale, le lemme 1.6 peut être récrit sous la forme

LEMME 1.6'. $\mu^{(n+1)} = \lambda\mu^{(n)} \otimes \mu = \lambda^n \mu \otimes \mu^{(n)}$.

Maintenant nous allons discuter la marche maximale à droite. On voit qu'on a $\mu_{aa}^{(n)} + 1$ par $\sigma^n(a)$ et $\mu_{bb}^{(n)}$ par $\sigma^n(b)$.

Notons $M_a^{(n)} = \mu_{aa}^{(n)} + 1$, $M_b^{(n)} = \mu_{bb}^{(n)}$, $M_a = M_a^{(1)}$, $M_b = M_b^{(1)}$, $\mu_a = \mu_{ab}$, et $\mu_b = \mu_{ba} + 1$.

Avec ces notations, le lemme 1.6 devient

$$M_a^{(n+1)} = \sup\{(M_a - 1)\lambda^n + M_a^{(n)}, \mu_a \lambda^n + M_b^{(n)}\} \tag{1.4}$$

$$M_b^{(n+1)} = \sup\{(\mu_b - 1)\lambda^n + M_a^{(n)}, M_b \lambda^n + M_b^{(n)}\}. \tag{1.5}$$

Le lemme 1.6 donne immédiatement le résultat suivant :

LEMME 1.7. *Si $\lambda = 0$, on a $\mu^{(n)} = 0 \otimes \mu$. Autrement dit, $M_a^{(n)} = M_b^{(n)} = sup\{M_a, M_b\}, n \geq 2$.*

LEMME 1.8. *Soient $\lambda > 0$, $\mu_b \geq 0$ et $M_a \geq \mu_b + \lambda$, alors pour $n \geq 2$*

$$M_a^{(n)} = (M_a - 1)\lambda^{n-1} + M_a^{(n-1)} = (M_a - 1)(\lambda^{n-1} + \cdots + \lambda + 1) + 1, \tag{1.6}$$

$$M_b^{(n)} = (M_b - 1)\lambda^{n-1} + M_a^{(n-1)} = M_a^{(n)} - (M_a - M_b)\lambda^{n-1}. \tag{1.7}$$

*Démonstration.* Remarquons d'abord que $\mu_b \geq 0$ entraîne $M_b = \mu_b$ en vertu du lemme 1.5 (iii).

Nous démontrons le lemme par récurrence.

Le cas de $n = 1$ est évident. En supposant que les égalités (1.6), (1.7) sont vraies pour $n$, nous avons alors

$$(M_a - 1)\lambda^n + M_a^{(n)} \geq \mu_a \lambda^n - \lambda^n + (M_a - M_b)\lambda^{n-1} + M_b^{(n)}$$

$$= \mu_a \lambda^n + M_b^{(n)} + (M_a - \lambda - M_b)\lambda^{n-1} \geq \mu_a \lambda^n + M_b^{(n)}.$$

Donc, par (1.4)

$$M_a^{(n+1)} = \sup\{(M_a - 1)\lambda^n + M_a^{(n)}, \mu_a \lambda^n + M_b^{(n)}\} = (M_a - 1)\lambda^n + M_a^{(n)}.$$

D'autre part,

$$(\mu_b - 1)\lambda^n + M_a^{(n)} = (M_b - 1)\lambda^n + (M_a - M_b)\lambda^{n-1} + M_b^{(n)}$$

$$= M_b \lambda^n + M_b^{(n)} + (M_a - \lambda - M_b)\lambda^{n-1} \geq M_b \lambda^n + M_b^{(n)}.$$

Donc

$$M_b^{(n+1)} = (M_b - 1)\lambda^n + M_a^{(n)} = (M_b - 1)\lambda^n + M_a^{(n+1)} - (M_a - 1)\lambda^n$$
$$= M_a^{(n+1)} - (M_a - M_b)\lambda^n. \quad \blacksquare$$

LEMME 1.9. *Soient $\lambda > 0$ et $\mu_b < 0$. Alors on a*

$$(1.8) \quad M_a^{(n)} = (M_a - 1)\lambda^{n-1} + M_a^{(n-1)} = (M_a - 1)(\lambda^{n-1} + \cdots + \lambda + 1) + 1$$

$$(1.9) \qquad M_b^{(n)} = \begin{cases} 0, \ si \ M_a \leq \lambda + \mu_b - \lambda\mu_b \ ou \ bien \ si \ n \leq n_0, \\ M_a^{(n)} - (M_a - \mu_b)\lambda^{n-1}, \ sinon, \end{cases}$$

*où*

$$n_0 = \begin{cases} \left[\dfrac{\log((M_a - \lambda)/(M_a - \lambda - \mu_b + \lambda\mu_b))}{\log \lambda}\right], \ si \ \lambda > 1, \\ [-\mu_b/(M_a - 1)], \ si \ \lambda = 1. \end{cases}$$

*Démonstration.* Remarquons d'abord que nous avons $M_a > \mu_b + \lambda$ et $M_b = 0$ par l'hypothèse $\mu_b < 0$ et le lemme 1.5.

Il est évident que le lemme est vrai pour le cas $n = 1$. Supposons que (1.8) et (1.9) sont valides pour $n$.

**1.** Si (1.9) est vrai pour $n$, alors $M_b^{(n)} = 0$ ou bien $M_b^{(n)} = M_a^{(n)} - (M_a - \mu_b)\lambda^{n-1}$. Dans le premier cas, par hypothèse d'induction sur $M_a^{(n)}$, on a

$$(M_a - 1)\lambda^n + M_a^{(n)} = (M_a - 1)\lambda^n + (M_a - 1)(\lambda^{n-1} + \cdots + \lambda + 1) + 1$$

$\geq (M_a - 1)\lambda^n + (\lambda - 1)(\lambda^{n-1} + \cdots + \lambda + 1) + 1 = M_a\lambda^n \geq \mu_a\lambda^n + M_b^{(n)}$.
Dans le deuxième cas, d'après le lemme 1.5,

$$(M_a - 1)\lambda^n + M_a^{(n)} = (M_a - 1)\lambda^n + M_b^{(n)} + (M_a - \mu_b)\lambda^{n-1}$$

$$\geq \mu_a\lambda^n + M_b^{(n)} + (M_a - \mu_b - \lambda)\lambda^{n-1} \geq \mu_a\lambda^n + M_b^{(n)},$$

dans tous les cas le lemme 1.6 donne $M_a^{(n+1)} = (M_a - 1)\lambda^n + M_a^{(n)}$.

**2.** Si $M_a \leq \lambda + \mu_b - \lambda\mu_b$, ce n'est pas la peine de vérifier que la suite $\{(\mu_b - 1)\lambda^n + M_a^{(n)}\}_{n \geq 0}$ est strictement décroissante. Donc pour $m \in \mathbb{N}$,

$$0 = M_b^{(1)} > \mu_b = (\mu_b - 1)\lambda^0 + M_a^{(0)} \geq (\mu_b - 1)\lambda^m + M_a^{(m)},$$

il résulte de l'hypothèse d'induction que

$$M_b\lambda^n + M_b^{(n)} = 0 > (\mu_b - 1)\lambda^n + M_a^{(n)},$$

ce qui donne $M_b^{(n+1)} = 0$ par (1.3).

**3.** On considère maintenant le cas $M_a > \mu_b + \lambda - \lambda\mu_b$.
Dans ce cas-là, on a $M_a > 1$, si $\lambda = 1$; et $M_a - \lambda > M_a - \lambda + \lambda\mu_b - \mu_b > 0$, si $\lambda > 1$.
Pour $\lambda = 1$, nous avons

$$(\mu_b - 1)\lambda^n + M_a^{(n)} = \mu_b + n(M_a - 1),$$

donc, si $n \geq n_0 = [-\mu_b/(M_a - 1)]$, alors

$$(\mu_b - 1)\lambda^n + M_a^{(n)} \geq 0 \tag{1.10}$$

et si $n < n_0$

$$(\mu_b - 1)\lambda^n + M_a^{(n)} < 0. \tag{1.11}$$

Le cas $\lambda > 1$ se traite de façon similaire. Si

$$n \geq \frac{\log((M_a - \lambda)/(M_a - \lambda + \lambda\mu_b - \mu_b))}{\log\lambda} = n_0$$

alors nous avons

$$\lambda^n(M_a - \mu_b - \lambda + \lambda\mu_b) \geq M_a - \lambda = (M_a - 1) - (\lambda - 1)$$

$$(M_a - 1)(\lambda^n - 1) + (\lambda - 1) + (\lambda - 1)(\mu_b - 1)\lambda^n \geq 0$$

donc

$$M_a^{(n)} + (\mu_b - 1)\lambda^n \geq 0, \tag{1.12}$$

et si $n < n_0$, nous avons

$$(\mu_b - 1)\lambda^n + M_a^{(n)} < 0. \tag{1.13}$$

Remarquons que $M_b^{(n)} = (\mu_b - 1)\lambda^{n-1} + M_a^{(n-1)}$ ou bien $M_b^{(n)} = 0$, donc pour $n \geq n_0$, (1.10) et (1.12) donnent

$$(\mu_b - 1)\lambda^n + M_a^{(n)} \geq M_b\lambda^n + M_b^{(n)} (= M_b^{(n)}),$$

il résulte de (1.2) que

$$M_b^{(n+1)} = (\mu_b - 1)\lambda^n + M_a^{(n)} = M_a^{(n+1)} - (M_a - \mu_b)\lambda^n.$$

Pour $n \leq n_0$, d'après (1.11) et (1.13), on obtient

$$M_b^{(n+1)} = \sup\{(\mu_b - 1)\lambda^n + M_a^{(n)}, M_b^{(n)}\} = 0. \quad \blacksquare$$

LEMME 1.10. *Si $\mu_a \geq \lambda > 0$ et $M_a < \mu_b + \lambda$, alors*

$$M_a^{(n)} = M_b^{(n)} + (M_a - M_b)\lambda^{n-1} = M_a\lambda^{n-1} + M_b^{(n-1)}, \tag{1.14}$$

$$M_b^{(n)} = M_b(\lambda^{n-1} + \cdots + \lambda + 1) = M_b\lambda^{n-1} + M_b^{(n-1)}. \tag{1.15}$$

*Démonstration.* Remarquons d'abord que par le lemme 1.5 (ii), on a $M_a = \mu_a$. La démonstration par récurrence est similaire à celle du lemme 1.8.

LEMME 1.11. *Si $\mu_a < \lambda$, $\lambda > 0$ et $M_a < \mu_b + \lambda$, alors*

$$M_b^{(n)} = M_b(\lambda^{n-1} + \cdots + \lambda + 1) = M_b\lambda^{n-1} + M_b^{(n-1)}. \tag{1.16}$$

*Démonstration.* Sous les hypothèses du lemme, on a $M_a = \lambda$ et $M_b = \mu_b$ en vertu du lemme 1.5 (i), (ii) et (iv). En supposant que (1.16) soit vrai pour $n$, on va démontrer

$$M_b\lambda^n + M_b^{(n)} \geq (M_b - 1)\lambda^n + M_a^{(n)}, \tag{1.17}$$

ce qui donnera par (1.3)

$$M_b^{(n+1)} = M_b\lambda^n + M_b^{(n)}.$$

D'autre part, (1.17) est équivalente à l'égalité suivante :

$$M_b^{(n)} \geq M_a^{(n)} - \lambda^n. \tag{1.18}$$

Utilisant le lemme 1.6, on voit que soit $M_a^{(n)} = \mu_a\lambda^{n-1} + M_b^{(n-1)}$, soit $M_a^{(n)} = (M_a - 1)\lambda^{n-1} + M_a^{(n-1)}$.

Si $M_a^{(n)} = \mu_a\lambda^{n-1} + M_b^{(n-1)} < \lambda^n + M_b^{(n-1)}$, alors par hypothèse de récurrence sur $M_b^{(n)}$, on a

$$M_b^{(n)} = M_b\lambda^{n-1} + M_b^{(n-1)} \geq M_b^{(n-1)} > M_a^{(n)} - \lambda^n,$$

et on obtient (1.18).

Si $M_a^{(n)} = (M_a - 1)\lambda^{n-1} + M_a^{(n-1)} = \lambda^n - \lambda^{n-1} + M_a^{(n-1)}$, on a

$$\begin{aligned} M_b^{(n)} &= M_b\lambda^{n-1} + M_b^{(n-1)} \geq (M_b - 1)\lambda^{n-1} + M_a^{(n-1)} > -\lambda^{n-1} + M_a^{(n-1)} \\ &= M_a^{(n)} - \lambda^n. \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

LEMME 1.12. *Si* $\mu_a < \lambda$, $\lambda > 0$ *et* $M_a < \mu_b + \lambda$, *alors*

$$M_a^{(n)} = \begin{cases} \lambda^n, \ si \ M_b \leq (\lambda - 1)(\lambda - \mu_a); \\ \lambda^n, \ si \ n < n_1; \\ M_b^{(n)} + (\mu_a - M_b)\lambda^{n-1}, \ sinon, \end{cases} \tag{1.19}$$

*où* $n_1 = \dfrac{log(M_b/(M_b - (\lambda - 1)(\lambda - \mu_a)))}{log\ \lambda}$.

*Démonstration.* D'après le lemme 1.5, $M_a = \lambda > \mu_a \geq 1$ et $M_b = \mu_b$. Si $M_b \leq (\lambda - 1)(\lambda - \mu_a)$, il résulte du lemme 1.11 que

$$\begin{aligned} \mu_a\lambda^n + M_b^{(n)} &= \mu_a\lambda^n + M_b(\lambda^{n-1} + \cdots + \lambda + 1) \leq \mu_a\lambda^n + (\lambda - \mu_a)(\lambda^n - 1) \\ &= \lambda^{n+1} - (\lambda - \mu_a) < \lambda^{n+1} = (M_a - 1)\lambda^n + M_a^{(n)}, \end{aligned}$$

on a donc, $M_a^{(n)} = \lambda^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, par récurrence.

Si $M_b > (\lambda - 1)(\lambda - \mu_a)$, alors pour $n \geq n_1$, on a

$$n \geq \frac{\log(M_b/(M_b - (\lambda-1)(\lambda-\mu_a)))}{\log \lambda},$$

donc

$$M_b(\lambda^n - 1) - (\lambda - 1)(\lambda - \mu_a)\lambda^n \geq 0.$$

Remarquons que $\lambda - 1 > 0$, nous avons

$$\frac{M_b(\lambda^n - 1)}{(\lambda - 1)} \geq (\lambda - \mu_a)\lambda^n$$

en utilisant le lemme 1.11,

$$\mu_a\lambda^n + M_b^{(n)} \geq \lambda^{n+1}. \tag{1.20}$$

De la même façon, on obtient que pour $n < n_1$

$$\mu_a\lambda^n + M_b^{(n)} < \lambda^{n+1}. \tag{1.21}$$

En tenant compte de (1.3), (1.20), (1.21), (1.16) et de la croissance de la suite $\{\mu_a\lambda^n + M_b^{(n)}\}_{n\geq 1}$, on obtient par récurrence

$$M_a^{(n)} = \begin{cases} \lambda^n, \text{ si } n \leq n_1, \\ \mu_a\lambda^{n-1} + M_b^{(n-1)} = M_b^{(n)} + (\mu_a - M_b)\lambda^{n-1}, \text{ sinon.} \end{cases} \blacksquare$$

En rassemblant les lemmes 1.8-1.12, nous pouvons énoncer :

Lemme Fondammental 1.13. *Soient $d_a = d_b$ et $\lambda > 0$, nous avons*

**1.** *Si $M_a \geq \mu_b + \lambda$, alors*

$$M_a^{(n)} = (M_a - 1)(\lambda^{n-1} + \cdots + \lambda + 1) + 1,$$

$$M_b^{(n)} = \begin{cases} 0, \textit{ si } M_a \leq \mu_b + \lambda - \mu_b\lambda, \\ 0, \textit{ si } \mu_b < 0,\ n < n_0, \\ M_a^{(n)} - (M_a - \mu_b)\lambda^{n-1}, \textit{ sinon.} \end{cases}$$

**2.** *Si $M_a < \mu_b + \lambda$, alors*

$$M_a^{(n)} = \begin{cases} \lambda^n, \; si \; \mu_a < \lambda \; et \; M_b \leq (\lambda - 1)(\lambda - \mu_a); \\ \lambda^n, \; si \; \mu_a < \lambda \; et \; n < n_1; \\ M_b^{(n)} + (\mu_a - M_b)\lambda^{n-1}, \; sinon, \end{cases}$$

$$M_b^{(n)} = M_b(\lambda^{n-1} + \cdots + \lambda + 1),$$

*où $n_0$ et $n_1$ sont définis dans les lemmes 1.9 et 1.12 respectivement.*

Le lemme fondamental 1.13 indique les positions où les marches $\sigma^n(a)$ et $\sigma^n(b)$ peuvent arriver à droite. Pour étudier les cas à gauche, on introduit les notations suivantes :

Soient $w = w_1 w_2 \cdots \in A^*, \alpha, \beta \in A$. Définissons

$$\tau_{w,\alpha} = \inf\{D(w_0 w_1 \cdots w_{i-1}) \; ; \; 1 \leq i \leq |w|, \; w_i = \alpha\},$$
$$\tau_{\alpha\beta}^{(n)} = \tau_{\sigma^n(\alpha),\beta}, \; \tau_{\alpha\beta} = \tau_{\alpha\beta}^{(1)}.$$

Pour établir un lemme analogue au lemme fondamental 1.13, on va établir des lemmes analogues aux précédents.

LEMME 1.14. *Soit $\lambda \dot{\geq} 0$, on a*

*(i) $\tau_{aa} \leq 0$; $\tau_{aa} \leq \tau_{ab} - 1 \leq \lambda$;*

*(ii) Si $\tau_{ab} - 1 \leq 0$ ou $\tau_{aa} < 0$, alors $\tau_{ab} - 1 = \tau_{aa}$;*

*(iii) $\tau_{bb} - 1 \leq -\lambda; \tau_{bb} - 1 \leq \tau_{ba} \leq 0$;*

*(iv) Si $\tau_{ba} \leq -\lambda$ ou $\tau_{bb} - 1 < -\lambda$, alors $\tau_{ba} = \tau_{bb} - 1$.*

LEMME 1.15. *Soient $\lambda \geq 0$, $\tau_{aa}^{(0)} = 0$, $\tau_{bb}^{(0)} = 0$, $\alpha, \beta \in A$. Alors*

$$\tau_\alpha^{(n+1)} = inf\{\lambda\tau_{\alpha a}^{(n)} + \tau_{a\beta}, \lambda\tau_{\alpha b}^{(n)} + \tau_{b\beta}\} = inf\{\lambda^n\tau_{\alpha a} + \tau_{a\beta}^{(n)}, \lambda\tau_{\alpha b} + \tau_{b\beta}^{(n)}\}.$$

D'où une algèbre minimum.

Pour étudier la marche à gauche, notons $m_a^{(n)} = \tau_{aa}^{(n)}$, $m_b^{(n)} = \tau_{bb}^{(n)} - 1$, $m_a = m_a^{(1)}$, $m_b = m_b^{(1)}$, $\tau_a = \tau_{ab} - 1$, $\tau_b = \tau_{ba}$. Evidemment, $m_a^{(n)}$ (resp. $m_b^{(n)}$) est la marche minimum à gauche pour $\sigma^n(a)$ (resp. $\sigma^n(b)$). Avec ces notations, le lemme 1.15 devient :

$$m_a^{(n+1)} = inf\{m_a\lambda^n + m_a^{(n)}, \; (\tau_a + 1)\lambda^n + m_b^{(n)}\}, \tag{1.22}$$

$$m_b^{(n+1)} = inf\{\tau_b\lambda^n + m_a^{(n)},\ (m_b+1)\lambda^n + m_b^{(n)}\}. \tag{1.23}$$

LEMME 1.16. *Si $\lambda = 0$, alors $m_a^{(n)} = m_b^{(n)} = inf\{m_a, m_b\}$, pour $n \geq 2$.* ■

LEMME 1.17. *Soient $\lambda > 0, \tau_a \leq 0$ et $m_a \geq \tau_b + \lambda$. Alors*

$$m_a^{(n)} = m_b^{(n)} + (m_a - m_b)\lambda^{n-1}, \tag{1.24}$$

$$m_b^{(n)} = (m_b+1)\lambda^{n-1} + m_b^{(n-1)} = (m_b+1)(\lambda^{n-1} + \cdots + \lambda + 1) - 1. \tag{1.25}$$

*Démonstration.*
$\tau_a \leq 0 \Rightarrow m_a = \tau_a$; $m_a \geq \tau_b + \lambda \Rightarrow \tau_b \leq -\lambda \Rightarrow \tau_b = m_b$. ■

LEMME 1.18. *Soient $\lambda > 0, \tau_a > 0$ et $m_a \geq \tau_b + \lambda$. Alors*

$$m_a^{(n)} = \begin{cases} 0, \ si\ m_b \geq \tau_a - \lambda - \tau_a\lambda \ ou\ n < n_0' \ ; \\ m_b^{(n)} + (\tau_a - m_b)\lambda^{n-1}, \ sinon. \end{cases} \tag{1.26}$$

$$m_b^{(n)} = (m_b+1)\lambda^{n-1} + m_b^{(n-1)} = (m_b+1)(\lambda^{n-1} + \cdots + \lambda + 1) - 1, \tag{1.27}$$

$$\text{où } n_0' = \begin{cases} \dfrac{log((m_b+1)/(m_b - \tau_a + \lambda + \tau_a\lambda))}{log\ \lambda}, \ si\ \lambda > 1\ ; \\ -\tau_a/(m_b+1), \ si\ \lambda = 1. \end{cases}$$

*Démonstration.* D'abord $\tau_a > 0 \Rightarrow m_a = 0$ et $m_a \geq \tau_b + \lambda \Rightarrow m_b = \tau_b$.

1°) Cas $m_a^{(n)} = 0$ :

$$(m_b+1)\lambda^n + m_b^{(n)} = m_b\lambda^n + \lambda^n + (m_b+1)(\lambda^{n-1} + \cdots + \lambda - 1) - 1$$

$$\leq m_b\lambda^n + \lambda^n + (-\lambda+1)(\lambda^{n-1} + \cdots + \lambda + 1) - 1 = m_b\lambda^n = \tau_b\lambda^n + m_a^{(n)},$$

on obtient $m_b^{(n+1)} = (m_b+1)\lambda^n + m_b^{(n)}$.

Cas $m_a^{(n)} = m_b^{(n)} + (\tau_a - m_b)\lambda^{n-1}$ :

$$(m_b+1)\lambda^n + m_b^{(n)} = (m_b+1)\lambda^n + m_a^{(n)} - (\tau_a - m_b)\lambda^{n-1}$$

$$= \tau_b\lambda^n + m_a^{(n)} + (\lambda - \tau_a + m_b)\lambda^{n-1} \leq \tau_b\lambda^n + m_a^{(n)}.$$

2°) $m_b \geq \tau_a - \lambda - \tau_a\lambda$ : en supposant que $m_a^{(n)} = 0$ ($m_a^{(1)} = m_a = 0$ est évident),

$$(\tau_a + 1)\lambda^n + m_b^{(n)} = (\tau_a + 1)\lambda^n + (m_b + 1)(\lambda^{n-1} + \cdots + \lambda + 1) - 1 \geq$$

$$(\tau_a + 1)\lambda^n + (\tau_a + 1)(1 - \lambda)(\lambda^{n-1} + \cdots + \lambda + 1) - 1 = \tau_a$$

$$> 0 = m_a\lambda^n + m_a^{(n)}.$$

Ce qui conduit à

$$m_a^{(n+1)} = 0.$$

3°) $m_b < \tau_a - \lambda - \tau_a\lambda$ : on a $m_b + 1 \leq m_b + \lambda < \tau_a(1 - \lambda) \leq 0$.

Cas $\lambda = 1$ : $m_a^{(n+1)} = \inf\{m_a^{(n)}, \tau_a + n(m_b + 1)\}$.

$$n \geq n_0' = -\tau_a/(m_b + 1) \Rightarrow n(m_b + 1) + \tau_a \leq 0$$

$$(\text{resp. } n < n_0' \Rightarrow n(m_b + 1) + \tau_a > 0).$$

D'autre part, $\{\tau_a + n(m_b + 1)\}_{n\geq 0}$ est décroissante. Donc,

$$m_a^{(n)} = \begin{cases} 0, & si\ n < n_0', \\ \tau_a + n(m_b + 1), & sinon. \end{cases}$$

Cas $\lambda > 1$ : d'abord $m_b + \lambda < 0$ et $m_b - \tau_a + \lambda + \tau_a\lambda < 0 \Rightarrow (m_b - \tau_a + \lambda)/(m_b + \lambda) > 0$. Alors

$$n \geq n_0' = \frac{\log((m_b + \lambda)/(m_b - \tau_a + \lambda + \tau_a\lambda))}{\log\ \lambda} \Rightarrow$$

$$\lambda^n(m_b + 1) + (\tau_a + 1)(\lambda - 1)\lambda^n \leq (m_b + 1) + (\lambda - 1),$$

$$(m_b + 1)(\lambda^{n-1} + \cdots + \lambda + 1) + (\tau_a + 1)\lambda^n \leq 1,$$

$$(\tau_a + 1)\lambda^n + m_b^{(n)} \leq 0,\ (\text{et } n < n_0' \Rightarrow (\tau_a + 1)\lambda^n + m_b^{(n)} > 0).$$

Remarquons que la suite $\{(\tau_a+1)\lambda^n+m_b^{(n)}\}$ est décroissante, donc $m_a^{(n+1)} = \inf\{m_a^{(n)}, (\tau_a+1)\lambda^n+m_b^{(n)}\} = (\tau_a+1)\lambda^n+m_b^{(n)}$ quand $n \geq n_0'$ et $m_a^{(n+1)} = 0$ quand $n < n_0'$. ■

LEMME 1.19. *Soient* $\lambda > 0, \tau_a \geq 0$ *et* $m_a < \tau_b + \lambda$. *Alors*

$$m_a^{(n)} = 0, \quad m_b^{(n)} = -\lambda^n. \tag{1.28}$$

*Démonstration.* $\tau_a \geq 0 \Rightarrow m_a = 0$ ; $\tau_b + \lambda > m_a = 0 \Rightarrow \tau_b > -\lambda \Rightarrow m_b = -\lambda$. Le cas de $n = 1$ est évident. En supposant que $m_a^{(n)} = 0$, $m_b^{(n)} = -\lambda^n$, on a :

$$m_a\lambda^n + m_a^{(n)} = 0 \leq \tau_a\lambda^n = (\tau_a + 1)\lambda^n + (-\lambda^n) = (\tau_a + 1)\lambda^n + m_b^{(n)},$$

donc $m_a^{(n+1)} = 0$.

$$(m_b + 1)\lambda^n + m_b^{(n)} = -\lambda^{n+1} < \tau_b\lambda^n = \tau_b\lambda^n + m_a^{(n)},$$

on obtient $m_b^{(n+1)} = -\lambda^{n+1}$. ■

LEMME 1.20. *Soient* $\lambda > 0$, $\tau_a < 0$, $m_a < \lambda + \tau_b$ *et* $m_a \geq -(\lambda - 1)(\tau_b + \lambda)$. *Alors*

$$m_a^{(n)} = m_a(\lambda^{n-1} + \cdots + \lambda + 1), \tag{1.29}$$

$$m_b^{(n)} = -\lambda^n. \tag{1.30}$$

*Démonstration.* $\tau_a < 0 \Rightarrow \tau_a = m_a < 0$ ; $0 > m_a > -(\lambda - 1)(\tau_b + \lambda) \Rightarrow \lambda > 1$ et $\tau_b + \lambda > 0 \Rightarrow \tau_b > -\lambda \Rightarrow m_b = -\lambda$. Supposons les égalités (1.29), (1.30) vraies pour $n$,

$$m_a\lambda^n + m_a^{(n)} = (m_a + 1)\lambda^n - \lambda^n + m_a^{(n)} \leq (m_a + 1)\lambda^n + m_b^{(n)} \Rightarrow$$

$$m_a^{(n+1)} = m_a\lambda^n + m_a^{(n)} = m_a(\lambda^n + \lambda^{n-1} + \cdots + 1).$$

Et

$$(m_b+1)\lambda^n+m_b^{(n)} = m_b\lambda^n = -\lambda^{n+1} < -\lambda^{n+1}+\tau_b+\lambda = \tau_b\lambda^n-(\tau_b+\lambda)(\lambda^n-1)$$

$$= \tau_b\lambda^n - (\tau_b + \lambda)(\lambda - 1)(\lambda^{n-1} + \cdots + \lambda + 1) \leq \tau_b\lambda^n + m_a(\lambda^{n-1} + \cdots + \lambda + 1)$$

$$= \tau_b\lambda^n + m_a^{(n)} \Rightarrow m_b^{(n+1)} = -\lambda^{n+1}. \blacksquare$$

LEMME 1.21. *Soient* $\lambda > 0$, $\tau_a < 0$, $m_a < \lambda + \tau_b$ *et* $\tau_b \leq -\lambda$. *Alors*

$$m_a^{(n)} = m_a\lambda^{n-1} + m_a^{(n-1)} = m_a(\lambda^{n-1} + \cdots + \lambda + 1), \tag{1.31}$$

$$m_b^{(n)} = m_b\lambda^{n-1} + m_a^{(n-1)} = m_a^{(n)} - (m_a - m_b)\lambda^{n-1}. \tag{1.32}$$

*Démonstration.* $\tau_a < 0 \Rightarrow m_a = \tau_a < 0$ ; $\tau_b \leq -\lambda \Rightarrow \tau_b = m_b$. Le cas de $n = 1$ est évident. Supposons les égalités (1.31), (1.32) vraies pour $n$. Alors

$$m_a\lambda^n + m_a^{(n)} = m_a\lambda^n + (m_a - m_b)\lambda^{n-1} + m_b^{(n)}$$

$$= (m_a + 1)\lambda^n + m_b^{(n)} + (m_a - \lambda - m_b)\lambda^{n-1} \leq (m_a + 1)\lambda^n + m_b^{(n)},$$

et

$$m_b\lambda^n + m_a^{(n)} = (m_b+1)\lambda^n + m_b^{(n)} + (m_a - \lambda - m_b)\lambda^{n-1} \leq (m_b+1)\lambda^n + m_b^{(n)}. \blacksquare$$

LEMME 1.22. *Soient* $\lambda > 0$, $\tau_a < 0$, $m_a < \lambda + \tau_b$, $\tau_b > -\lambda$ *et* $m_a < -(\lambda - 1)(\tau_b + \lambda)$. *Alors*

$$m_a^{(n)} = m_a(\lambda^{n-1} + \cdots + \lambda + 1) \tag{1.33}$$

$$m_b^{(n)} = \begin{cases} m_a^{(n)} - (m_a - \tau_b)\lambda^{n-1}, & si\ n > n_1' \ ; \\ -\lambda^n, & sinon, \end{cases} \tag{1.34}$$

*où*

$$n_1' = \begin{cases} (\tau_b - m_b)/(1 + m_b - m_a), & si\ \lambda = 1, \\ \dfrac{log(m_a/(\lambda\tau_b + \lambda^2 - \tau_b - \lambda + m_a))}{log\ \lambda} & si\ \lambda > 1. \end{cases}$$

*Démonstration.* D'abord $\tau_a < 0 \Rightarrow m_a = \tau_a < 0$ ; $\tau_b > -\lambda \Rightarrow m_b = -\lambda$, et $\tau_b - m_b > 0$. De plus $(\lambda = 1 \Rightarrow (\tau_b - m_b)/(1 + m_b - m_a) > 0)$ et $(\lambda > 1,\ m_a < -(\lambda - 1)(\tau_b + \lambda) \Rightarrow m_a/(\lambda\tau_b + \lambda^2 - \tau_b - \lambda + m_a) > 0)$.

1. Démonstration de l'égalité (1.33). Le cas $n = 1$ est évident. Supposons-la vraie pour $n$.

Si $m_b^{(n)} = m_a^{(n)} - (m_a - \tau_b)\lambda^{n-1}$, alors

$$m_a\lambda^n + m_a^{(n)} = m_a\lambda^n + (m_a - \tau_b)\lambda^{n-1} + m_b^{(n)}$$

$$= (m_a+1)\lambda^n + m_b^{(n)} + (m_a - \lambda - \tau_b)\lambda^{n-1} < (m_a+1)\lambda^n + m_b^{(n)}.$$

Si $m_b^{(n)} = -\lambda^n$, alors

$$m_a\lambda^n + m_a^{(n)} = (m_a+1)\lambda^n - \lambda^n + m_a^{(n)} < (m_a+1)\lambda^n + m_b^{(n)}.$$

On obtient donc

$$m_a^{(n+1)} = m_a\lambda^n + m_a^{(n)}.$$

2. Le cas $\lambda = 1$. On a $m_a^{(n)} = nm_a$ et $m_b^{(n+1)} = \inf\{\tau_b + nm_a, m_b^{(n)}\}$. $n \geq n_1' = -(\tau_b+1)/m_a \Rightarrow m_a n \leq -(\tau_b+1) \Rightarrow m_a n + \tau_b \leq -1$ (resp. $n < n_1' \Rightarrow m_a n + \tau_b > -1$). D'autre part, la suite $\{\tau_b + nm_a\}_{n\geq 0}$ est décroissante, donc $m_b^{(n)} = (n-1)m_a + \tau_b = m_a^{(n)} - (m_a - \tau_b)\lambda^{n-1}$ pour $n \geq n_1'$ et $m_b^{(n)} = -1 = -\lambda^n$ pour $n < n_1'$.

3. Le cas $\lambda > 1$. Alors si

$$n \geq n_1' = \log(m_a/(\lambda\tau_b + \lambda^2 - \tau_b - \lambda + m_a))/\log\lambda,$$

on a

$$\lambda^n(\lambda\tau_b + \lambda^2 - \tau_b - \lambda + m_a) \leq m_a,$$

$$\lambda^n(\lambda-1)(\tau_b+\lambda) + m_a(\lambda^n - 1) \leq 0,$$

$$\lambda^n(\tau_b+\lambda) + m_a(\lambda^{n-1} + \cdots + \lambda + 1) \leq 0,$$

$$\tau_b\lambda^n + m_a^{(n)} \leq -\lambda^{n+1}, \text{ (resp. } n < n_1' \Rightarrow \tau_b\lambda^n + m_a^{(n)} > -\lambda^{n+1}).$$

D'autre part, la suite $\{\tau_b\lambda^n + m_a^{(n)}\}_{n\geq 0}$ est décroissante. Donc, on obtient l'égalité (1.34). ■

LEMME FONDAMENTAL 1.23. *Avec les notations précédentes, soient $d_a = d_b$, $\lambda > 0$, on a*

*1) Si $m_a \geq \tau_b + \lambda$, alors*

$$m_a^{(n)} = \begin{cases} m_b^{(n)} + (\tau_a - m_b)\lambda^n, \\ \qquad\qquad \textit{si } (\tau_a \leq 0) \textit{ ou } (\tau_a > 0, m_b < \tau_a - \lambda - \tau_a\lambda, n > n_0'); \\ 0, \textit{ sinon}, \end{cases}$$

$$m_b^{(n)} = (m_b + 1)(\lambda^{n-1} + \cdots + \lambda + 1) - 1.$$

*2) Si $m_a < \tau_b + \lambda$, alors*

$$m_a^{(n)} = m_a(\lambda^{n-1} + \cdots + \lambda + 1),$$

$$m_b^{(n)} = \begin{cases} m_a^{(n)} - (m_a - \tau_b)\lambda^{n-1}, \\ \quad si\ (\tau_b < -\lambda,\ \tau_a < 0) \\ \quad ou\ (\tau_b > -\lambda,\ \tau_a < 0,\ m_a < (\lambda - 1)(\tau_b + \lambda),\ n \geq n_1') \\ -\lambda^n,\ sinon \end{cases}$$

*où $n_0'$ et $n_1'$ sont définis dans le lemme 1.18 et le lemme 1.22.*

En utilisant les lemmes fondamentaux ci-dessus, on obtient immédiatement le théorème :

THÉORÈME 1.24. *Soient $d_a = d_b$ et $\lambda \geq 0$. On a*

*1. Les cas où la marche $\{D(w_n)\}_{n\geq 1}$ est bornée sont :*

*(i) $\lambda = 0$. L'intervalle est $[\min(m_a, m_b),\ \max(M_a, M_b)]$;*

*(ii) $M_a = 1,\ M_b = 0$, la marche est bornée à droite de 1;*

*(iii) $(m_a = 0 < \lambda + \tau_b)$ ou $(\tau_a > 0,\ \tau_a - \lambda - \tau_a\lambda \leq \tau_b \leq -\lambda)$ ou $(\tau_a = 0, \tau_b = -\lambda)$, la marche est bornée à gauche de 0.*

*2. Le cas où la marche $\{D(w_n)\}_{n\geq 1}$ tend vers $+\infty$ est :*

$$\tau_a \geq 1,\ \lambda > 1,\ et\ (-\lambda > m_b > \tau_a - \lambda - \tau_a\lambda\ ou\ \tau_b \geq -\lambda).$$

*3. Dans tous les autres cas, la marche est récurrente.*

*Démonstration.*

**1.**

(i) est évident.
(ii) Remarquons que la marche est bornée à droite si et seulement si $M_a^{(n)}$ est borné supérieurement. D'après le lemme fondamental 1.13, il y a trois cas pour $M_a^{(n)}$. On ne considère que $\lambda \geq 1$ par (i).

1°) $M_a^{(n)} = (M_a - 1)(\lambda^{n-1} + \cdots + \lambda + 1) + 1$, si $M_a \geq \mu_b + \lambda$. On vérifie facilement que $M_a^{(n)} > n$ lorsque $M_a > 1$, et $M_a^{(n)} = 1$ lorsque $M_a = 1$. De plus, $M_a = 1 \Rightarrow \lambda = 1; M_a \geq \mu_b + \lambda \Rightarrow \mu_b \leq 0 \Leftrightarrow M_b = 0$.

2°) $M_a^{(n)} = \lambda^n$, si $M_a < \mu_b + \lambda$, $M_b \leq (\lambda - 1)(\lambda - \mu_a)$. Si $\lambda = 1$, alors $M_b \leq 0 \Rightarrow M_b = 0 \Rightarrow \mu_b \leq 0$, mais $M_a < \mu_b + \lambda \Rightarrow \mu_b > M_a - \lambda \geq 0$, une contradiction. Si $\lambda > 1, M_a^{(n)} \to +\infty$ est évident.

3°) $M_a^{(n)} = M_b^{(n)} + (\mu_a - M_b)\lambda^{n-1} = M_b(\lambda^{n-2} + \cdots + \lambda + 1) + \mu_a\lambda^{n-1}$, si $M_a < \mu_b + \lambda$ et $\mu_a \geq \lambda$ ou $(\mu_a < \lambda, M_b > (\lambda - 1)(\lambda - \mu_a))$.

Maintenant $\mu_b > M_a - \lambda \geq 0 \Rightarrow M_b = \mu_b > 0$. D'après le lemme 1.5, $\mu_a \geq 1$. Donc $M_a^{(n)} > n - 1 \to +\infty$.

(iii) La marche est bornée à gauche si et seulement si $m_a^{(n)}$ est bornée inférieurement. Il suffit de considérer le cas $\lambda \geq 1$. D'après le lemme fondamental 1.23, les valeurs de $m_a^{(n)}$ sont les suivantes :

1°) $m_a^{(n)} = m_a(\lambda^{n-1} + \cdots + \lambda + 1)$, si $m_a < \tau_b + \lambda$. Evidemment, $m_a < 0$ implique $m_a^{(n)} \to -\infty$. Donc $m_a^{(n)}$ est bornée inférieurement si et seulement si $m_a = 0$, à ce moment, $\tau_b > -\lambda$.

2°) $m_a^{(n)} = (m_b+1)(\lambda^{n-1}+\cdots+\lambda+1)-1+(\tau_a-m_b)\lambda^{n-1}$, si $m_a \geq \tau_b+\lambda$, et $(\tau_a \leq 0$ ou $\tau_a > 0,\ m_b < \tau_a - \lambda - \tau_a\lambda,\ n > n'_0)$.

a. Le cas $\tau_a < 0$ : donc $m_a = \tau_a < 0$ ; $\tau_b \leq m_a - \lambda < -\lambda \Rightarrow m_b < -\lambda$. $m_a^{(n)} \leq (m_b+1)(\lambda^{n-1}+\cdots+\lambda+1)-1+(-1-m_b)\lambda^{n-1} < (-\lambda+1)(\lambda^{n-2}+\cdots+\lambda+1)-1 = -\lambda^{n-1} \to -\infty$ quand $\lambda > 1$. Et quand $\lambda = 1$, alors $m_b+1 < 0$, $m_a^{(n)} \leq (m_b+1)(\lambda^{n-2}+\cdots+\lambda+1)-1 \leq -(n-1)+1 \to -\infty$.

b. Le cas $\tau_a = 0$, $\tau_b = m_b < -\lambda$ : on peut poser $m_b = -\lambda + m', m' < 0$. Alors $m_a^{(n)} = (-\lambda+1)(\lambda^{n-2}+\cdots+\lambda+1)+\lambda^{n-1}-1+m'(\lambda^{n-1}+\cdots+\lambda+1) \to -\infty$.

c. Le cas $\tau_a = 0$, $\tau_b = -\lambda$ $(\Rightarrow m_b = -\lambda)$ : on a $m_a^{(n)} = 0, (\tau_a = 0 \Rightarrow m_a = 0)$.

d. Le cas $\tau_a > 0$, $m_b < \tau_a - \lambda - \tau_a\lambda$, $n > n'_0$ : alors $m_a^{(n)} < 0$ par la démonstration 3. du lemme 1.18. D'autre part,

$$\begin{aligned} m_a^{(n+1)} - m_a^{(n)} &= (m_b + 1)\lambda^n + (\tau_a - m_b)\lambda^{n-1}(\lambda - 1) \\ &= \lambda^{n-1}(\lambda + \tau_a\lambda - \tau_a + m_b) < 0. \end{aligned}$$

Donc, la suite $\{m_a^{(n)}\}_{n \geq n'_0}$, qui est une suite entière négative, est décroissante strictement, ainsi $m_a^{(n)} \to -\infty$.

3°) $m_a^{(n)} = 0$, si $(\tau_a > 0,\ m_a \geq \tau_b + \lambda,\ m_b \geq \tau_a - \lambda - \tau_a\lambda)$ ou $(\tau_a \geq 0,\ m_a < \tau_b + \lambda)$ (ceci équivaut à $(\tau_a > 0,\ \tau_a - \lambda - \tau_a\lambda \leq \tau_b \leq -\lambda)$, $(m_a = 0 < \tau_b + \lambda)$).

**2.** D'après le lemme 1.3, $D(\sigma^n(w_k)) = \lambda^n D(w_k)$. Alors, pour que $\{D(w_N)\}_{N\geq 1} \to +\infty$, il faut que $\lambda > 1$ et que $\inf_{1\leq i\leq l} \{D(a_1 \cdots a_i)\} \geq 1$, ce qui entraîne $\tau_a \geq 1$, $m_a = 0$. De plus, soit $\alpha$ le plus petit entier tel que $D(a_1 \cdots a_\alpha) = \inf_{1\leq i\leq l} \{D(a_1 \cdots a_i)\}$, on a $a_\alpha = b$ et $a_{\alpha+1} = a$, ou $\alpha = l$. Par conséquent $\alpha \in J_a$, donc $\tau_a = D(a_1 \cdots a_\alpha)$.

1°) Si $m_a \geq \tau_b + \lambda$. (Donc $\tau_b = m_b \leq -\lambda$).

a. Le cas $m_b \leq \tau_a - \lambda - \tau_a\lambda$. Soit $\sigma^n(b) = uv$ tel que $D(u) = m_b^{(n)}$. Alors, pour $n \in \mathbb{N}$ quelconque,

$$\begin{aligned} D(\sigma^n(a_1 \cdots a_{\alpha-1})u) &= D(\sigma^n(a_1 \cdots a_{\alpha-1})) + D(u) = \lambda^n(\tau_a + 1) + m_b^{(n)} \\ &= \lambda^n(\tau_a + 1) + (m_b + 1)(\lambda^n - 1)/(\lambda - 1) - 1 \end{aligned}$$

$$\leq \lambda^n(\tau_a + 1) + (\tau_a - \lambda - \tau_a\lambda + 1)(\lambda^n - 1)/(\lambda - 1) - 1 = \tau_a. \tag{1.35}$$

D'autre part, on a $D(\sigma^n(a)) = \lambda^n \to +\infty$. Donc, dans ce cas, la marche $\{D(w_N)\}_{N\geq 1}$ est récurrente.

b. Le cas $m_b > \tau_a - \lambda - \tau_a\lambda$.

Soit $N$ un entier positif, alors il existe $n \geq 0$ tel que

$$|\sigma^n(a)| < N \leq |\sigma^{n+1}(a)|,\ (N \geq 2).$$

Donc $w_N = \sigma^n(a_1 \cdots a_i) + w', 1 \leq i < l, \sigma^n(a_{i+1}) = w'u$. C'est-à-dire $w'$ est préfixe de $\sigma^n(a_{i+1})$

$$D(w_N) = \lambda^n D(a_1 \cdots a_i) + D(w') \geq \begin{cases} \lambda^n \tau_a + m_a^{(n)}, & si\ a_{i+1} = a; \\ \lambda^n(\tau_a + 1) + m_b^{(n)}, & si\ a_{i+1} = b. \end{cases}$$

D'après le lemme fondamental 1.23, $m_a^{(n)} = 0$ dans ce cas et $D(w_N) \to +\infty$. D'autre part, $\lambda^n(\tau_a+1)+m_b^{(n)} > \tau_a$, de la même façon que l'inégalité (1.35) et $(\lambda^{n+1}(\tau_a+1)+m_b^{(n+1)})-(\lambda^n(\tau_a+1)+m_b^{(n)}) = \lambda^n(m_b-\tau_a+\lambda+\tau_a\lambda) > 0$, entraîne que la suite $\{\lambda^n(\tau_a + 1) + m_b^{(n)}\}$ est entière positive croissante strictement. De plus $D(w_N) \to +\infty$. aussi.

2°) Si $m_a < \tau_b + \lambda$. (Donc $\tau_b > -\lambda, m_b = -\lambda$).

Remarquons que $m_a = 0$ et $\tau_a > 0$, on a $m_a^{(n)} = 0$ et $m_b^{(n)} = -\lambda^n$ d'où le lemme fondamental 1.23. De la même façon que dans la démonstration précédente $D(w_N) \to +\infty$ dans ce cas.

On peut changer un peu les conditions de la marche qui tend vers $+\infty$, en remarquant que $m_b^{(n)} = -\lambda^n$ quand $\tau_b = -\lambda$.

**3.** Ce cas résulte de 1 et 2 ci-dessus.

**Remarque 1.25.** Si $\lambda < 0$, par le lemme 1.3, $D(\sigma^n(a)) = \lambda^n$ et on voit facilement que $\{D(w_N)\}_{N\geq 1}$ est récurrente. D'autre part, on ne change que la position de la lettre $a$ et de la lettre $b$, que la position de "sup" et "inf", dans les lemmes fondamentaux; l'étude sera plus simple, et on en laisse le soin au lecteur. ■

**Remarque 1.26.** On n'a considéré précédemment que le cas simple où $a(n) = n+1$ et $b(n) = n-1$. On peut considérer $a(n) = n+p$, $b(n) = n-q$. L'étude sera analogue à la précédente. On n'indique que les faits suivants :

(i) $pd_a \neq qd_b$ entraîne que la marche tend vers l'infini.

(ii) $(p,-q)\begin{pmatrix} d_a \\ d_b \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (p,-q), \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$ sont respectivement les vecteurs propres de $\lambda$ et $\Lambda \Leftrightarrow \lambda = m_{aa} - m_{ba}q/p = m_{bb} - m_{ab}p/q$ et $\Lambda = m_{aa} + m_{ab}p/q = m_{bb} + m_{ba}q/p$. En particulier, $\Lambda$ et $\lambda$ sont encore entiers quand $p, q \in \mathbb{Q}$.

Soit la somme $S(N) = D(w_N) = \Sigma_{0\leq i\leq N} x_i(0)$. On estime l'ordre de croissance à l'infini de la façon suivante :

THÉORÈME 1.27. *Soient* $d_a = d_b$, $\lambda \geq 1$. *On a*

*1. Si* $M_a = 1$, $M_b = 0$, *alors* $S(N) \leq 1$.

*2. Si* $(M_a = \lambda = 1,\ M_b > 0)$ *ou* $(M_a > \lambda = 1)$. *Alors, il existe une constante* $C > 0$, *telle que*

$$S(N)/log\ N \leq C. \tag{1.36}$$

*3. Si* $\lambda > 1$, *alors il existe une constante* $C > 0$, *telle que*

$$S(N)/N^\alpha \leq C, \text{ où } \alpha = log\ \lambda / log\ \Lambda < 1. \tag{1.37}$$

*4. Si* $(m_a = 0 < \lambda + \tau_b)$ *ou* $(\tau_a > 0, \tau_a - \lambda - \tau_a\lambda \leq \tau_b \leq -\lambda)$ *ou* $(\tau_a = 0, \tau_b = -\lambda)$*, alors* $S(N) \geq 0$.

*5. Si* $\tau_a \geq 1$, $\lambda > 1$, *et* $(-\lambda > m_b > \tau_a - \lambda - \tau_a\lambda)$ *ou* $(\tau_b \geq -\lambda)$*, alors il existe une constante* $C > 0$*, telle que*

$$S(N)/N^\alpha \geq C, \text{ où } \alpha = \log \lambda / \log \Lambda < 1. \tag{1.38}$$

*6. Dans tous les autres cas, il existe* $C > 0$*, tel que*

$$|S(N)|/\log N \leq C \text{ ou } |S(N)|/N^\alpha \leq C \tag{1.39}$$

*où* $\alpha = \log \lambda/\log \Lambda < 1$.

*Démonstration.* Soit $|\sigma^n(a)| \leq N < |\sigma^{n+1}(a)|$. On a

$$|\sigma^n(a)|/\Lambda^n \to d_a + d_b = 1, \ n \to \infty.$$

Donc, il existe $\theta_1, \theta_2 > 0$, tels que $\theta_1\Lambda^n \leq |\sigma^n(a)| \leq \theta_2\Lambda^n$ $(\theta_1 \leq 1 \leq \theta_2;\ \theta_i \to 1, n \to \infty)$. De plus

$$\theta_1\Lambda^n \leq |\sigma^n(a)| \leq N < |\sigma^{n+1}(a)| \leq \theta_2\Lambda^{n+1}. \tag{1.40}$$

1. L'assertion se vérifie facilement par le lemme fondamental 1.13.

2. D'après le lemme fondamental 1.13, dans les deux cas on a, $M_a^{(n)} = (n-1)M_b + M_a$, ou $M_a^{(n)} = (M_a - 1)n + 1$. Alors

$$S(N)/\log N \leq M_a^{(n+1)}/\log(\theta_1\Lambda^n) = C_0 + o(1), \ n \to \infty,$$

ici, $C_0 = M_b/\log \Lambda$ ou $(M_a - 1)/\log \Lambda$.

3. Dans ce cas, $M_a^{(n)} = (M_a - 1)(\lambda^n - 1)/(\lambda - 1) + 1$ ; ou $M_b(\lambda^n - 1)/(\lambda - 1) + (\mu_a - M_b)\lambda^{n-1}$ :

$$S(N)/N^\alpha \leq M_a^{(n+1)}/(\theta_1\Lambda^n)^\alpha = M_a^{(n+1)}/\theta_1^\alpha\lambda^n = C_0 + o(1), \ n \to \infty.$$

Ici, $C_0 = \lambda(M_a - 1)/(\lambda - 1)$ ; $\lambda$ ; ou $\lambda M_b/(\lambda - 1) + (\mu_a - M_b)$.

(D'après les conditions du lemme fondamental 1.13, et du lemme 1.5, $\lambda M_b/(\lambda - 1) + (\mu_a - M_b) > 0$).

4. Comme la démonstration du théorème 1.24.1 (iii).

5. D'après la démonstration du théorème 1.24.2, il existe une constante $c' > 0$ telle que $S(N) \geq c'\lambda^n$, donc $S(N)/N^\alpha \geq c'\lambda^n/\theta_2^\alpha\lambda^{n+1} \geq c$.

6. Pour les $N$ pour lesquels $S(N) \geq 0$, on peut raisonner comme pour 2 et 3 ci-dessus. Pour les $N$ pour lesquels $S(N) < 0$, on a $0 < -S(N) < -m_n^{(n+1)}$. On raisonne comme pour 2, 3, 5.

## 2. Marches sur $\mathcal{A}_n$.

### 2.1. Définitions et notations

Dans ce paragraphe, on suppose que $\mathcal{A}_n$ est un arbre homogène d'ordre $n$, dans lequel on distingue deux points voisins, à savoir 0 et 1, où 0 représente la racine de $\mathcal{A}_n$ et $\overrightarrow{01}$ l'orientation initiale comme dans le §0. On note $p_1, p_2, \cdots, p_n$ les $n$ autres points voisins de 1 numérotés dans le sens trigonométrique.

Soit $A = \{a, b_1, \cdots, b_n\}$ un alphabet, en convenant que $b_0 = a$, on définit

$$b_i(1, \overrightarrow{01}) = (p_i, \overrightarrow{1p_i}), \; 0 \leq i \leq n.$$

Généralement, étant donné deux sommets voisins $x, y$ de $\mathcal{A}_n$ et l'arête orientée $\overrightarrow{xy}$, on note $p_1^x, \cdots, p_n^x$ les $n$ autres sommets voisins de $x$; remarquons que le même sommet peut avoir plusieurs expressions différentes, mais cela n'entraînera pas de confusion. On définit alors, $a(y, \overrightarrow{xy}) = (y, \overrightarrow{yx})$, $b_i(y, \overrightarrow{xy}) = (p_i^x, \overrightarrow{yp_i^x}), 1 \leq i \leq n$ (voir la figure 2.1). On convient que $\epsilon(x, \overrightarrow{xy}) = (x, \overrightarrow{xy})$, où $\epsilon$ est le mot vide.

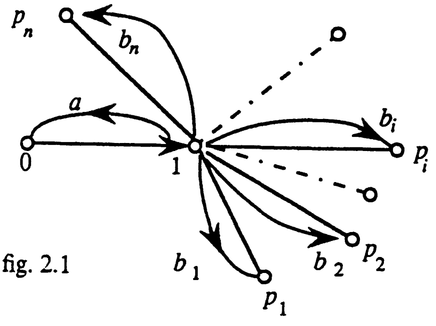


fig. 2.1

Soient $w = a_1 a_2 \cdots a_\ell \in A^*$ et $w_k = a_1 a_2 \cdots a_k, 1 \leq k \leq |w|$, et $w_0 = \epsilon$. La marche selon $w$ à partir de $(1, \overrightarrow{01})$ est définie par $\{w_k(1, \overrightarrow{01})\}$, où $w_k(1, \overrightarrow{01}) = a_k \cdots a_1(1, \overrightarrow{01})$. Soit $x = x_1 x_2 \cdots \in A^{\mathbb{N}}$, on définit la marche selon $x$ de façon analogue. On dit qu'un sommet de $\mathcal{A}_n$ est un point récurrent par rapport à la marche selon $x$, si la marche visite ce sommet une infinité de fois.

Soit $F$ le groupe libre engendré par $A$. Soit $\alpha^{-1} \in A^{-1}$ et soit $\alpha(y, \overrightarrow{xy}) = (q, \overrightarrow{pq})$, alors on définit $\alpha^{-1}(q, \overrightarrow{pq}) = (y, \overrightarrow{xy})$. Evidemment, $\alpha\alpha^{-1}(y, \overrightarrow{xy}) = \alpha^{-1}\alpha(y, \overrightarrow{xy}) = \epsilon(y, \overrightarrow{xy}) = (y, \overrightarrow{xy})$.

## 2.2. Structure de groupe associée à la marche

Avec les notations du paragraphe précédent, on note

$$N = \{w \in F \ ; \ w(1, \overrightarrow{01}) = (1, \overrightarrow{01})\},$$

alors il est facile de vérifier que $N$ est un sous-groupe invariant de $F$. Notons $G_n = F/N$ et si $w \in F$, notons $\overline{w} = wN \in G_n$. On définit une relation "$\sim$" sur $F$ de la façon suivante : soit $w_1, w_2 \in F$, s'il existe $x, y \in \mathcal{A}_n$, tels que $w_1(y, \overrightarrow{xy}) = w_2(y, \overrightarrow{xy})$, on dira que $w_1 \sim w_2$. Evidemment, "$\sim$" est une relation d'équivalence et $G_n \simeq F/\sim$, la classe du mot vide $\epsilon$ n'est autre que $N$.

Proposition 2.1. *Avec les notations précédentes, nous avons*

*(i)* $\overline{b_i} = \overline{b_{i-1}}\ \overline{a}\ \overline{b_1} = \overline{(b_1 a)^{i-1}}\ \overline{b_1} = \overline{b_1}\ \overline{(ab_1)^{i-1}}$, $2 \leq i \leq n$;

$(\overline{a}\ \overline{b_1})^{n+1} = \overline{\epsilon}$ ;

$\overline{b_i^{-1}} = \overline{a}\overline{b_{n-i+1}}\overline{a} = \overline{a}\overline{(b_1 a)}^{n-i+1} = (\overline{a}\overline{b_1})^{n-i+1}\overline{a}$.

*(ii)* $G_n = < \overline{a}, \overline{b_1} \mid \overline{a}^2 = \overline{\epsilon} = (\overline{ab_1})^{n+1} >$.

Les égalités de (i) résultent des figures 2.2 et 2.3, et (ii) découle immédiatement de (i).

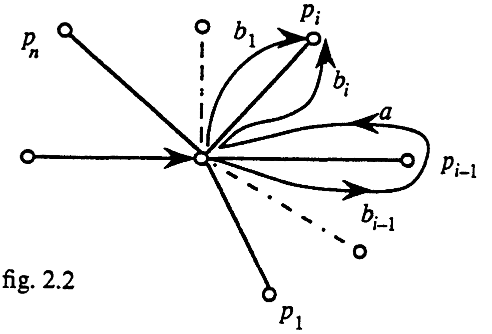


fig. 2.2

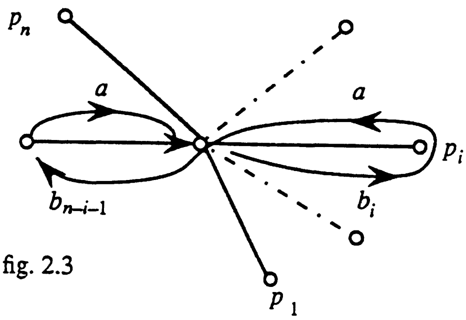


fig. 2.3

En utilisant la proposition 2.1, on obtient

PROPOSITION 2.2.

*(i) Quel que soit $g \in G_n$, il existe $w \in A^*$, tel que $g = \overline{w}$;*

*(ii) Soient $k|n+1$ et $kh = n+1$, alors*

$$(\overline{ab_h})^k = \overline{\epsilon},$$

*où l'on convient que $b_{n+1} = a$.*

*Donc $G_n$ admet un sous-groupe qui est isomorphe à $G_{k-1}$ et le chemin associé à ce sous-groupe est exactement un sous-arbre $(k-1)$-homogène de $\mathcal{A}_n$.*

*(iii) $G_n$ admet toujours le sous-groupe*

$$< \overline{a}, \overline{b_i}\ \overline{b_{n-i+1}} \mid \overline{a}^2 = (\overline{b_i}\ \overline{b_{n-i+1}}\ \overline{a})^2 = \overline{\epsilon} > \simeq D_\infty \simeq G_1,$$

*où $D_\infty$ est le groupe dihédral.*

Considérons maintenant le cas de $\mathcal{A}_2$. Alors $A = \{a, g, d\}$ comme dans le paragraphe 0. On a simplement par la proposition 2.1(i), (ou bien par un calcul direct),

$$\overline{a}\ \overline{d}\ \overline{a} = \overline{g^{-1}},\ \overline{a}\ \overline{g}\ \overline{a} = \overline{d^{-1}},\ \overline{d} = \overline{g}\ \overline{a}\ \overline{g},\ \overline{g} = \overline{d}\ \overline{a}\ \overline{d}.$$

Par cela, on peut considérer l'application suivante de $SL_2(\mathbb{Z})$ dans $G_2$ :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \to \overline{a},\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \to \overline{d},\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \overline{g},$$

et le noyau de l'application est $< \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} >$. Donc, on obtient, (voir [R], par exemple).

PROPOSITION 2.3. $G_2 = < \overline{a},\ \overline{d} \mid \overline{a^2} = \overline{\epsilon} = (\overline{a}\ \overline{d})^3 > \simeq PSL_2(\mathbb{Z})$.

### 2.3. Propriétés récurrentes des marches

Par les définitions établies dans le §2.1, on obtient facilement que

*Démonstration.*

$m_a^{(n+1)} = m(\sigma^{n+1}(a)) = \inf\limits_{2 \le i \le l} \{D(\sigma^n(a_1 \cdots a_{i-1})) + m_{a_i}^{(n)}, m_{a_1}^{(n)}\}.$

Ensuite, on considère deux cas : $a_i = a$ et $a_i = b$. ■

PROPOSITION 2.4. *Soit $x = x_1x_2\cdots \in A^{\mathbb{N}}$ et soit $w \in A^*$ avec $w(1, \overrightarrow{01}) = (q, \overrightarrow{pq})$. Alors le point $q$ est récurrent pour la marche suivant $x$ si et seulement s'il existe une suite d'entiers positifs strictement croissante $\{n_k\}_{k\geq 1}$, telle que*

$$\overline{w} = \overline{w_{n_1}} = \overline{w_{n_2}} = \cdots = \overline{w_{n_k}} \cdots \tag{2.1}$$

*où $w_m = x_1x_2\cdots x_m$.*

On suppose maintenant que

$$\overline{\sigma(a)} = \overline{a},\ \overline{\sigma(b_i)} = \overline{b_i},\ 1 \leq i \leq n,$$

alors, on vérifie facilement que l'on a

$$\overline{\sigma^m(a)} = \overline{\sigma^{m-1}(a)} = \cdots = \overline{\sigma(a)} = \overline{a},$$

et

$$\overline{\sigma^m(b_i)} = \overline{\sigma^{m-1}(b_i)} = \cdots = \overline{\sigma(b_i)} = \overline{b_i},\ 1 \leq i \leq n.$$

Donc, quel que soit $w = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_t \in A^*$, on a

$$\overline{\sigma^m(w)} = \overline{\sigma^{m-1}(w)} = \cdots = \overline{\sigma(w)} = \overline{\sigma(\alpha_1)}\,\overline{\sigma(\alpha_2)}\cdots\overline{\sigma(\alpha_t)} = \overline{\alpha_1\cdots\alpha_t} = \overline{w},$$

en remarquant que $x = \sigma(x) = \sigma^2(x) = \cdots = \sigma^m(x) = \cdots$, où $x$ est le point fixe de $\sigma$ et par la proposition 2.4, on obtient

PROPOSITION 2.5. *Soient $\overline{\sigma(a)} = \overline{a}$ et $\overline{\sigma(b_i)} = \overline{b_i}$, $1 \leq i \leq n$, alors tous les points que la marche suivant $x$ visite sont récurrents.*

**Remarque.** Etant donné un mot non vide $w \in A^*$, on peut trouver par la proposition 2.2(i), un mot non vide $u \in A^*$, tel que $\overline{u} = \overline{w^{-1}}$, donc $wu \in A^*$ et $\overline{w}\,\overline{u} = \overline{\epsilon}$. En posant $\sigma(a) = awu, \sigma(b_i) = b_iwu,\ 1 \leq i \leq n$, on obtiendra une substitution qui satisfait les conditions de la proposition 2.5.

LEMME 2.6. *Soit $\sigma$ une substitution sur $A$ vérifiant la condition suivante : $w \in A^*$ et $\overline{w} = \overline{\epsilon}$ impliquent $\overline{\sigma(w)} = \overline{\epsilon}$. Alors, si $u, v \in A^*$ et $\overline{u} = \overline{v}$, on a $\overline{\sigma(u)} = \overline{\sigma(v)}$.*

*Démonstration.* $\overline{u} = \overline{v}$ entraîne que $\overline{uv^{-1}} = \overline{\epsilon}$, donc $\overline{\sigma(uv^{-1})} = \overline{\epsilon}$. Il en résulte que $\overline{\sigma(u)} = \overline{\sigma(v)}$.

D'après le lemme 2.6, si $\sigma$ est une substitution vérifiant la condition du lemme 2.6, on peut prolonger $\sigma$ à $G_n$ ainsi : $\sigma(\overline{u}) = \overline{\sigma(u)}, u \in A^*$. On obtient ainsi un homomorphisme de $G_n$ dans $G_n$. On remarque aussi que la condition du lemme 2.6 équivaut à $\sigma(\overline{\epsilon}) = \overline{\epsilon}$. D'autre part, on voit facilement que la condition (2.1) équivaut à

$$\overline{\epsilon} = \overline{w_{n_1,n_2}} = \cdots = \overline{w_{n_k,n_{k+1}}} = \cdots ,$$

où $w_{m,l} = x_m x_{m+1} \cdots x_l$, $l > m$. On obtient donc

PROPOSITION 2.7. *Soient $\sigma$ une substitution sur $A$ telle que $\sigma(\overline{\epsilon}) = \overline{\epsilon}$, et $x = x_1 x_2 \cdots x_n \cdots$ un point fixe de $\sigma$. S'il existe un entier $m$ tel que $\overline{w_m} = \overline{\epsilon}$, alors le point d'arrivée de $w_m$ est récurrent pour la marche suivant $x$.*

Enfin, on donnera un exemple d'une substitution qui donne lieu à une suite $x$ telle que la marche associée visite tous les sommets de $\mathcal{A}_n$.

PROPOSITION 2.8. *Supposons que $\sigma(a) = (ab_1)^{n+1}a, \sigma(b_i) = b_1(b_1a)^{n+1}$, alors, la marche suivant $\sigma$, (c'est-à-dire, suivant le point fixe de $\sigma$), visite tous les sommets de $\mathcal{A}_n$ et tous les sommets sont récurrents.*

Pour démontrer la proposition, il suffit de remarquer les faits suivants :

1. La marche suivant $\sigma(a)$ parcourt tous les sommets voisins de 0 et elle s'arrête en 0. La marche suivant $\sigma(b_1)$ parcourt tous les sommets voisins de $p_1$ et s'arrête en $p_1$. Les figures 2.4 et 2.5 illustrent le cas $n = 2$.

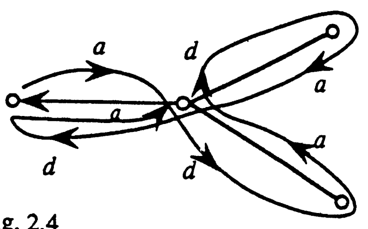


fig. 2.4 $\sigma(a) = adadada$

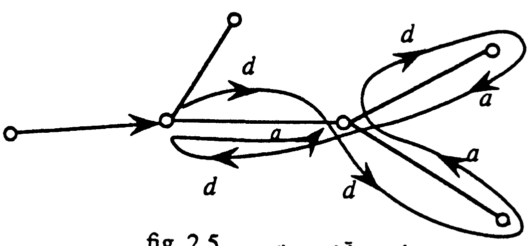


fig. 2.5 $\sigma(d) = ddadada$

2. Remarquons que $\sigma^2(a) = \sigma(a)(\sigma(b_1)\sigma(a))^{n+1}$. Nous pouvons vérifier que la marche selon $\sigma^2(a)$ parcourt toutes les branches dont la distance à l'origine est égale à 2 d'après 1., et s'arrête à 0.

3. Par récurrence, on peut voir que la marche selon $\sigma^m(a)$ parcourt toutes les branches dont la distance à l'origine est égale à $m$ et s'arrête en 0.

Les conclusions de la proposition 2.8 viennent donc de 1., 2. et 3.

De plus, on voit que

$$\sharp\{s \in \mathcal{A}_n, s \in \sigma^m(a)(1, \overrightarrow{01}) \cap B(0,m)\} = \sharp\{s \in B(0,m)\} = \frac{n}{n-2}[(n-1)^m - 1],$$

donc la "capacité" de la marche est

$$\lim_{m \to \infty} \frac{\log \frac{n}{n-2}[(n-1)^m - 1]}{m \log(n-1)} = 1.$$

**Remarque.** On a vu que, étant donné $(q, \overrightarrow{pq})$ quelconque, il existe un mot $w \in A^*$, tel que $w(1, \overrightarrow{01}) = (q, \overrightarrow{pq})$. Donc, si l'ensemble $\{\overline{w}_m; m \in \mathbb{N}\}$ est égal à $G_n$, alors la marche selon $x$ visite tous les sommets de $\mathcal{A}_n$ et tous les sommets sont récurrents, où $x = x_1 x_2 \cdots \in A^{\mathbb{N}}$ et $w_m = x_1 x_2 \cdots x_m$.

### 2.4. Marches orientées substitutives sur $\mathcal{A}_1$

On garde les notations utilisées dans les paragraphes précédents.

Soit $\zeta_2 = \{-1, 1\}$ le groupe multiplicatif d'ordre 2, alors les positions et les orientations d'une marche orientée peuvent être caractérisées par l'ensemble $\zeta_2 \times \mathbb{Z}$. Soit $A = \{a, b\}$, on considère les éléments de $A$ comme des applications de $\zeta_2 \times \mathbb{Z}$ dans $\zeta_2 \times \mathbb{Z}$ de la façon suivante :

(2.2) $$a(\pm 1, n) = (\mp 1, n \mp 1), \ b(\pm 1, n) = b(\pm 1, n \pm 1).$$

Les figures montrent les effets des actions de $a, b$.

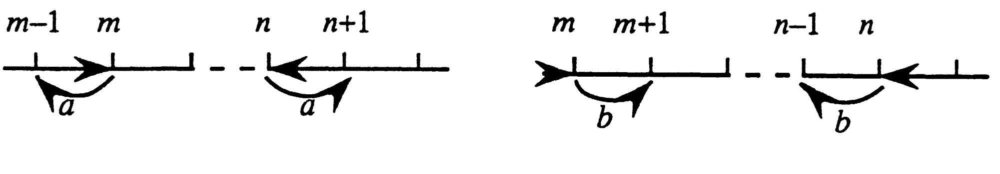


fig. 2.6

Comme nous avons discuté dans les paragraphes précédents, nous avons

(2.3) $$G_1 = < a, b \mid a^2 = \epsilon = (ab)^2 > \simeq F/N \simeq D_\infty, \ b^{-1} = aba.$$

En tenant compte des faits $a(1,0)=(-1,1)$ et $b(1,0)=(1,1)$, nous pouvons définir une loi de multiplication "." sur $\zeta_2 \times \mathbb{Z}$ de la façon suivante :

$$(\epsilon_1, i) \cdot (\epsilon_2, j) := (\epsilon_1\epsilon_2, i\epsilon_2 + j), \ \epsilon_1, \epsilon_2 \in \zeta_2, \ i, j \in \mathbb{Z}.$$

Sous cette loi $\zeta_2 \times \mathbb{Z}$ devient un groupe multiplicatif, si l'on fait correspondre $a, b$ à $(-1,-1), (1,1)$ respectivement, on aura

$$G_1 \simeq (\zeta_2 \times \mathbb{Z}, \cdot). \tag{2.4}$$

D'autre part, en vérifiant directement par les définitions de $a, b$, on a

$$a(\epsilon, i) = (\epsilon, i)\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ b(\epsilon, i) = (\epsilon, i)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et il résulte que

$$G_1 \simeq < \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} > . \tag{2.5}$$

Nous obtenons donc par (2.3), (2.4) et (2.5) la proposition suivante :

PROPOSITION 2.8.

$$G_1 = < a, b \mid a^2 = \epsilon = (ab)^2 > \simeq (\zeta_2 \times \mathbb{Z}, \cdot) \simeq < \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} > \simeq D_\infty.$$

**Remarque.** Si $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G_1$ donné par (2.5) correspond à $w_n(1,0)$, alors $\alpha$ et $\beta$ représentent respectivement l'orientation et la coordonnée de la position de la marche à l'instant $n$.

Il est clair que

PROPOSITION 2.9. *Soit $w \in A$, alors il existe deux entiers $s$ et $t$, tels que*

$$w(1,0) = \begin{cases} (1,t), & si\ L_a(w)\ est\ paire; \\ (-1,s), & sinon. \end{cases} \blacksquare$$

Considérons maintenant la matrice substitutive $M_\sigma$. Si l'on réduit les éléments de $M_\sigma$ modulo 2, on obtient alors 16 matrices différentes. Si

$M_\sigma$ est l'un des 4 types suivants : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire, les nombres $L_a(\sigma(a))$ et $L_a(\sigma(b))$ sont pairs, alors par la proposition 2.9, les marches $\sigma^n(a)$ et $\sigma^n(b)$ sont réduites aux cas non orientés, et on peut utiliser les résultats obtenus dans le §1 (dans les cas $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, on peut considérer $\sigma^2(a)$ et $\sigma^2(b)$). Donc, on peut obtenir les conditions assurant que les marches sont bornées récurrentes, tendent vers l'infini comme dans le §1. Par exemple, si l'on prend $\sigma(a)(0,1) = (1,s)$, $\sigma(b) = (1,t)$, $s,t$ sont du même signe, alors la marche $\sigma^n(a)$ tend vers l'infini sans être récurrente.

**Remarque.** Pour les autres types de $M_\sigma$ qui sont différents des 6 types indiqués ci-dessus, on peut analyser les marches par les mêmes méthodes que précédemment, mais les discussions sont beaucoup plus complexes.

Nous tenons à exprimer notre reconnaissance à M. le Professeur J. Peyrière qui nous a aidés et encouragés dans le présent travail. Nous remercions également M. J.-P. Allouche avec qui nous avons eu des discussions très fructueuses.

Les auteurs remercient la DRET pour sa subvention, et le deuxième auteur remercie également la Fondation de la Recherche Scientifique de Chine pour son soutien financier.

## Bibliographie

[Al] J.-P. ALLOUCHE, *Arithmétique et automates finis*, Astérisque 147-148 (1987), 13-26.

[CKMR] G. CHRISTOL, T. KAMAE, M. MENDÈS FRANCE et G. RAUZY, *Suites algébriques, automates et substitutions*, Bull. Soc. Math. France **108** (1980), 401-418.

[Co] A. COBHAM, *Uniform tag sequences*, Math. Systems Theory **6** (1972), 164-192.

[DT] J.-M. DUMONT et A. THOMAS, *Systèmes de numération et fonctions fractales relatifs aux substitutions*, Theoretical Computer Science **65** (1989), 153-169.

[Gr] C. GREEN R. A., *Minimax algebra*, Lecture Notes in Economics and Math. Systems **166**, Springer (1979).

[Qu] M. QUEFFELEC, *Substitution dynamical systems-spectral analysis*, Lecture Notes in Math. **1294**, Springer-Verlag, (1987).

[R] D. J. S. ROBINSON, *A course in the theory of groups*, New York, Heidelberg, Berlin, Springer-Verlag, (1982).

[Se] E. SENETA, *Non-negative matrices*, J. Wiley (1973).

[WW] Z. X. WEN & Z. Y. WEN, *Sequences of substitutions and related topics*, Adv. in Math. China **18** (1989), 270-293.

WEN Zhi-Xiong
Université de Paris-Sud
Mathématiques - Bâtiment 425
91405 Orsay Cedex (France)

et

Département de Mathématiques
Université de Wuhan
Wuhan, Hubei (République Populaire de Chine)

WEN Zhi-Ying
Centre Sino-Français de Mathématiques et d'Informatique
Université de Wuhan
Wuhan, Hubei (République Populaire de Chine)