JOURNAL DE THÉORIE DES NOMBRES DE BORDEAUX

P. PHILIPPON

Théorème des zéros effectif et élimination

Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, tome 1, nº 1 (1989), p. 137-155

<http://www.numdam.org/item?id=JTNB_1989__1_1_137_0>

Séminaire de Théorie des Nombres,
Bordeaux, **1**, *137–155 (1989)*

Théorème des zéros effectif et élimination

par P. PHILIPPON

Résumé — Les paragraphes 1 et 2 rappellent les circonstances de l'exposé oral, tandis que le paragraphe 3 aborde un aspect particulier de la théorie de l'élimination : une notion de multiplicité d'un idéal en un point. Cette partie est le fruit de passionnantes discussions avec F. Amoroso.

Abstract — *We recall the content of the talk in paragraphs 1 and 2. Then we present in paragraph 3 a specific aspect of elimination theory : namely a notion of multiplicity of an ideal at a point. This last part came out of exciting conversations with F. Amoroso.*

1. La situation historique

Considérons la forme suivante du théorème de Hilbert, dit des zéros :

. *Soient k un corps et K sa clôture algébrique, si $P_1, \cdots, P_m$ sont des polynômes de $k[X_1, \cdots, X_n]$ sans zéro commun dans K^n il existe des polynômes $A_1, \cdots, A_m \in k[X_1, \cdots, X_n]$ tels que*

$$(*) \qquad 1 = A_1P_1 + \cdots + A_mP_m.$$

Cette version est équivalente au théorème original de Hilbert [Hi] comme l'a très simplement remarqué J.L. Rabinowitsch dans [R]. La démonstration donnée par Hilbert est ineffective et le besoin d'un algorithme pour construire les polynômes $A_1, \cdots, A_m$ se fit immédiatement sentir. K. Henzelt et E. Noether [HN], puis G. Hermann [H], M. Reufel [Re], A. Seidenberg [Se] et D. Lazard [L], entre autres, décrivirent ou raffinèrent des algorithmes pour la plupart des procédures classiques de la théorie des idéaux d'anneaux de polynômes. Ces algorithmes donnent un contrôle sur les degrés des polynômes $A_1, \cdots, A_m$, on obtient ainsi une borne générale de la forme

$$\max\{d^\circ A_1, \cdots, d^\circ A_m\} \leq D^{2^{n-1}},$$

où D est un majorant des degrés des polynômes $P_1, \cdots, P_m$.

Plus récemment D.W. Brownawell [B] a montré que, lorsque k est de caractéristique nulle, on peut trouver $A_1, \cdots, A_m$ satisfaisant $(*)$ tels que $d^\circ A_1, \cdots, d^\circ A_m \leq \mu.(nD^n + D)$ où $\mu = \min\{m, n\}$. D'un autre côté,

Manuscrit reçu le 1O avril 1989

L. Caniglia, A. Galligo et J. Heintz [CGH] ont montré par des méthodes algébriques élémentaires la borne $d^\circ A_1, \cdots, d^\circ A_m \leq D^{n(n+3)/2}$ valable en toute caractéristique.

Enfin, tout récemment, J. Kollár [K] a donné une démonstration totalement différente d'une version améliorée (lorsque $D \geq 3$) du théorème de Brownawell ; il démontre $d^\circ A_1, \cdots, d^\circ A_m \leq \max\{3, D\}^n$.

Nous reviendrons au paragraphe 2 sur les méthodes de Brownawell et Kollár.

Si k est muni d'une structure arithmétique, se pose la question d'estimer les coefficients des polynômes $A_1, \cdots, A_m$. Par exemple, si $k = \mathbb{Q}$, et si $P_1, \cdots, P_m \in \mathbb{Z}[X_1, \cdots, X_n]$ sont de degrés au plus D et de coefficients majorés en valeurs absolues par $e^H \geq 1$, on obtient en combinant l'estimation des degrés établie par Brownawell avec les formules de Cramer : il existe $r \in \mathbb{N}^*$, $A_1, \cdots, A_m \in \mathbb{Z}[X_1, \cdots, X_n]$ satisfaisant

$$r = A_1P_1 + \cdots + A_mP_m, \ \max\{d^\circ A_1, \cdots, d^\circ A_m\} \leq D^n,$$

et

$$\log\ \max\{r, H(A_1), \cdots, H(A_m)\} \leq c_1(n)m.D^{n^2}(H + n^2 \log D + \log m),$$

où $H(P)$ désigne le maximum des valeurs absolues des coefficients du polynôme $P \in \mathbb{Z}[X_1, \cdots, X_m]$.

Dans [BY] C. Berenstein et A. Yger ont montré que si la variété à l'infini des zéros de ${}^hP_1, \cdots, {}^hP_m$(${}^hP =: X_0^{d^\circ P}.P\left[\frac{X_1}{X_0}, \cdots, \frac{X_n}{X_0}\right]$ étant l'homogénéisé de P dans $\mathbb{Q}[X_0, \cdots, X_n]$) est de dimension ≤ 0, alors on peut trouver $r \in \mathbb{N}^*, A_1, \cdots, A_m \in \mathbb{Z}[X_1, \cdots, X_n]$ satisfaisant

$$r = A_1P_1 + \cdots + A_mP_m, \max\{d^\circ A_1, \cdots, d^\circ A_m\} \leq 10(n+1)^5.D^{2n},$$

et

$$\log\max\{r, H(A_1), \cdots, H(A_m)\} \leq c_2(n).D^{8n+3}(H + D\log D + \log m).$$

Dans le même temps, je me suis intéressé $[P_3]$ à majorer la taille du "dénominateur" r lorsque $\mathbb{Z}$ est remplacé par un anneau commutatif, unitaire, noethérien, factoriel, semi-régulier et taillé (voir [No], §5.3 pour la définition de *semi-régulier* et $[P_3]$, §1 pour la définition de *taillé* ; par exemple, les anneaux $R = \mathbf{Z}[T_1, \cdots, T_s]$, $R = \mathbf{F}_q[T]$, $R = \mathbf{C}, \cdots$ satisfont toutes ces hypothèses).

Berenstein et Yger ont incorporé cette estimation du dénominateur (pour $R = \mathbf{Z}[T_1, \cdots, T_s]$) dans leur travail, supprimant ainsi l'hypothèse sur les zéros à l'infini et raffinant leurs majorations comme suit,

$$\max\{d^\circ A_1, \cdots, d^\circ A_m\} \leq c_3(n).D^n,$$

et $\log\max\{r, H(A_1), \cdots, H(A_m)\} \leq c_3(n).D^{8n+3}(H + D\log D + \log m)$. Signalons qu'on espère encore pouvoir remplacer l'exposant $8n+3$ dans cette dernière estimation par n. Egalement, les réels $c_1(n)$, $c_2(n)$ et $c_3(n)$ apparaissant dans ces majorations ne dépendent que de n, et de façon effectivement calculable.

Le résultat intervenant dans [BY] est le suivant (cf.$[P_3]$, théorème 4).

THÉORÈME. *Soient $\lambda \in \mathbf{R}_+^*$ et $s \in \mathbf{N}$ tels que $\lambda \geq 2s+2$, soient encore $P_1, \cdots, P_m \in \mathbf{Z}[T_1, \cdots, T_s][X_1, \cdots, X_n]$, de degrés par rapport aux X_i au plus $D \geq 1$ et satisfaisant $\max\{\lambda.d^\circ_T P_i + \log H(P_i);\ i = 1, \cdots, m\} \leq H$, sans zéros communs dans $\overline{\mathbf{Q}(T_1, \cdots, T_s)}^n$. Alors il existe un polynôme non nul $r \in \mathbf{Z}[T_1, \cdots, T_s]$ vérifiant*

$$\lambda.d^\circ_T r + \log H(r) \leq (n+s+2)^2.(72n+9)^{n+3}.(H+D)D^n$$

et des polynômes $A_1, \cdots, A_m \in \mathbf{Z}[T_1, \cdots, T_s][X_1, \cdots, X_n]$ de degrés par rapport aux X_i au plus $(n+s+2).D^n$, tels que

$$r = A_1 P_1 + \cdots + \cdots + A_m P_m.$$

DÉMONSTRATION: Il suffit d'adapter les considérations du paragraphe 8 de $[P_3]$, pour plus de détails se reporter à la démonstration du lemme 4.3 de $[BY]$. En particulier, c'est dans ce lemme que Berenstein et Yger introduisent le paramètre λ afin de dissocier les comportements de $d^\circ_T *$ et $\log H(*)$.

2. Principe des méthodes

A) La méthode de Brownawell

Elle utilise deux ingrédients essentiels, d'une part une inégalité de type Liouville-Lojasiewicz et d'autre part des formules d'interpolation analytiques. En fait ce deuxième ingrédient est avantageusement formulé dans

[B] sous la forme d'un théorème de H. Skoda et nous le remplaçons dans $[P_3]$ par un théorème algébrique analogue de J. Lipman et B. Teissier. Nous notons dans les énoncés suivants R un anneau commutatif, unitaire, noethérien, factoriel, *régulier*, de *dimension de Krull* κ et *taillé* (voir $[P_3]$,§1 pour un rappel des définitions). On désigne par K une clôture algébrique du corps des fractions de R.

INÉGALITÉS DE LIOUVILLE-LOJASIEWICZ. *([B],prop.8, $[P_2]$, $[P_3]$, prop. 4) - Soient $P_1,\cdots,P_m \in R[X_1,\cdots,X_n]$ sans zéro commun dans K^n et de degrés $\leq D$. Si $K=\mathbf{C}$ on a pour tout $z \in \mathbf{C}^n$ et avec $\mu=\min\{m,n\}$,*

$$\max\{|P_1(z)|,...,|P_m(z)|\} \geq C(P_1,\cdots,P_m).|z|^{-(n-1)D^\mu}.$$

Plus généralement, si v est une valuation sur $R[X_0,\cdots,X_n]$ il existe un élément $x \in R$ non nul, de taille $\leq C(n,m).(H+D)D^{\nu-1}$ où $\nu=\max\{m,n+1\}$, tel que

$$\max\{v({}^hP_1),\cdots,v({}^hP_m)\} \leq v(x.X_0^{D^\mu}).$$

La démonstration de ce type d'inégalité repose sur une définition adéquate de valuation d'un idéal, donnée via la théorie des formes éliminantes. Nous donnons un aperçu de cette théorie au paragraphe 3.

Voici maintenant le théorème de Skoda, qui fait l'objet de [S],

THÉORÈME DE SKODA. *Soient ψ une fonction plurisousharmonique dans $\mathbf{C}^{n+1}$ et $g_1,\cdots,g_m$ des fonctions holomorphes dans $\mathbf{C}^{n+1}$. Soient $\alpha>1$ et $\mu=\max\{n,m\}$, pour toute fonction f holomorphe dans $\mathbf{C}^{n+1}$, satisfaisant*

$$\int_{\mathbf{C}^{n+1}} \frac{|f|^2.e^{-\psi}}{[\sum_i |g_i|^2]^{\mu\alpha+1}} d\lambda < +\infty,$$

il existe des fonctions $h_1,\cdots,h_m$ holomorphes dans $\mathbf{C}^{n+1}$, telles que

$$f = h_1g_1+\cdots+h_mg_m$$

$$\text{et } \int_{\mathbf{C}^{n+1}} \frac{[\sum_j |h_j|^2].e^{-\psi}}{[\sum_i |g_i|^2]^{\mu\alpha}} d\lambda < +\infty,$$

et son pendant algébrique, théorème 2.1 de [LT] via le §4 de [LT] pour les anneaux réguliers, THÉORÈME DE LIPMAN-TEISSIER. *Si*

$$P \in R[X_0, \cdots, X_n] \text{ vérifie } v(P) \geq \min\{v({}^hP_1), \cdots, v({}^hP_m)\}$$

pour toute valuation discrète v*, on a* $P^{n+\kappa+1} \in ({}^hP_1, \cdots, {}^hP_m)$.

Dans [B] Brownawell utilise l'inégalité de Liouville-Łojasiewicz complexe et applique le théorème de Skoda avec $\psi = \alpha\nu(n-1).D^\mu.\log|z|, \alpha$ tendant vers 1. La première approche de $[P_3]$ utilise l'inégalité de Liouville-Łojasiewicz valuative et le théorème de Lipman-Teissier avec $P = x.X_0^{D^\mu}$, enfin on déshomogénéise en posant $X_0 = 1$.

B) La méthode de Kollár

La seconde approche de $[P_3]$ reprend la démonstration de $[K]$, on note maintenant R un anneau commutatif, unitaire, noethérien, factoriel, *semi-régulier* et *taillé,* on pose $A = R[X_0, \cdots, X_n]$, k le corps des fractions de R et K une clôture algébrique de k. On se donne des polynômes $P_1, \cdots, P_m$ sans zéro commun dans K^n, on peut construire une suite $\tilde{Q}_1, \cdots, \tilde{Q}_\nu$ dans A, régulière dans $k[X_1, \cdots, X_n]$ et on pose $Q_i = {}^h\tilde{Q}_i (i = 1, \cdots, \nu)$. On écrit

$$(Q_1, \cdots, Q_i) = \mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}'_i,$$

où $\mathfrak{F}_i$ est l'intersection des composantes primaires de $(Q_1, \cdots, Q_i)$ dont le radical ne contient pas X_0 et $\mathfrak{F}'_i$ l'intersection des autres composantes primaires.

On pose $C_i = \mathrm{Ann}_{R[X_0]}(\mathfrak{F}_i/(Q_1, \cdots, Q_i))$, le but est de trouver un élément de petits degré et taille dans C_ν, car $\mathcal{F}_\nu = A$ et donc $C_\nu = (Q_1, \cdots, Q_i)$. On écrit, pour $i = 1, \cdots, \nu - 1$,

$$(\mathfrak{F}_i, Q_{i+1}) = \mathfrak{F}_{i+1} \cap \mathfrak{N}_{i+1} \cap \mathfrak{L}_{i+1}$$

où $\mathfrak{N}_{i+1}$ est l'intersection des composantes primaires *isolées* dont le radical contient X_0 et $\mathfrak{L}_{i+1}$ est l'intersection des composantes *immergées.*

$$\text{Posons} \qquad D_{i+1} = \mathrm{Ann}_{R[X_0]}(A/\mathfrak{N}_{i+1}) = \mathfrak{N}_{i+1} \cap R[X_0]$$

et

$$\text{et} \qquad E_{i+1} = \mathrm{Ann}_{R[X_0]}(\mathfrak{F}_{i+1} \cap \mathfrak{N}_{i+1}/(\mathfrak{F}_i, Q_{i+1})),$$

on a facilement $C_i.D_{i+1}.E_{i+1} \subseteq C_{i+1}$. Le problème est de montrer que E_{i+1} est assez gros, l'idée fondamentale de Kollár est d'introduire un sous-module

$\mathrm{Nil}(\mathfrak{F}_i)$ de E_{i+1} dont on peut bien plus aisément contrôler le comportement. On note $H_*(\gamma_1,\cdots,\gamma_s|M)$ les modules d'homologie du *complexe de Koszul du A-module M par rapport* à $\gamma_1,\cdots,\gamma_s$ (cf. [No], chap.8) et Γ l'ensemble des familles $\boldsymbol{\gamma}=\{\gamma_1,\cdots,\gamma_s\}\subset A$ telle que tout premier associé à l'idéal $(\boldsymbol{\gamma})$ engendré par cette famille contienne X_0. On définit alors, en suivant Kollár [K], déf. 3.3,

$$\mathrm{Nil}(\mathfrak{F})=(q\in R[X_0],\ \forall\boldsymbol{\gamma}\in\Gamma,\ \forall\sigma<\mathrm{rang}(\boldsymbol{\gamma})-\mathrm{rang}\mathfrak{F},\qquad q.H_{s-\sigma}(\boldsymbol{\gamma}|A/\mathfrak{F})=0).$$

Les propriétés essentielles de ce nouveau module sont résumées dans la proposition suivante.

PROPOSITION DE KOLLÁR. *Avec les notations ci-dessus on a*

$$Nil(\mathfrak{F}_{i+1})\subseteq E_{i+1}\ et\ D_{i+1}.Nil(\mathfrak{F}_i)^3\subseteq Nil(\mathfrak{F}_{i+1}).$$

DÉMONSTRATION: Voir [K], lemme 3.4 et $[P_3]$, prop. 5.

On en déduit l'inclusion $\prod_{\alpha=1}^{i} D_\alpha^{(1+3^{i-1})/2}\subseteq C_i\quad(i=1,\cdots,\nu)$, car $\mathrm{Nil}(\mathfrak{F}_1)=R[X_0]$ et $C_1=D_1$. Enfin on montre que les D_α sont suffisamment gros grâce à un théorème de Bezout ad hoc (voir $[P_3]$, prop. 6).

3. Elimination et valuations

A) Généralités

Soit R un anneau commutatif, unitaire, noethérien et factoriel, on pose $A=R[X_0,\cdots,X_n]$ et $\mathfrak{M}=(X_0,\cdots,X_n)$, on associe à un polynôme homogène $p\in A$ diverses quantités, son degré $d^\circ p$ par rapport aux variables $X_0,\cdots,X_n$, sa taille $t(p)$, sa valuation $v(p)$. Il est naturel de considérer que ces quantités sont associées à l'idéal principal (p) de A, et un point essentiel est alors de définir ces mêmes quantités pour tous les idéaux homogènes de A. Si $\mathfrak{F}$ est un tel idéal on peut, par exemple, définir

(1') $\qquad\omega(\mathfrak{F})=\min\{d^\circ p\ ;\ p\in\mathfrak{F}\}$

(2') $\qquad\varpi(\mathfrak{F})=\min\{t(p)\ ;\ p\in\mathfrak{F}\}$

(3') $\quad v(\mathfrak{F}) = \min\{v(p) \; ; \; p \in \mathfrak{F}\}.$

Ces quantités sont intéressantes mais délicates à manier par manque de propriétés simples. Une alternative est de poser

(1) $\quad D(\mathfrak{F}) = \max\{d^\circ p_1, \cdots, d^\circ p_m\}$

(2) $\quad T(\mathfrak{F}) = \max\{t(p_1), \cdots, t(p_m)\}$

(3) $\quad V(\mathfrak{F}) = \min\{v(p_1), \cdots, v(p_m)\}$

pour des éléments "privilégiés" $p_1, \cdots, p_m$ de $\mathfrak{F}$.

La théorie de l'élimination permet précisément d'exhiber de tels éléments privilégiés, mais ces éléments ne forment pas un système générateur de $\mathfrak{F}$.

Soit $n + 1 - r$ le rang de $\mathfrak{F}$, on note

$$U_\alpha = u_0^{(\alpha)} X_0 + \cdots + u_n^{(\alpha)} X_n \quad (\alpha = 1, \cdots, r)$$

des formes linéaires en $X_0, \cdots, X_n$ et de nouvelles variables $u_0^{(\alpha)}, \cdots, u_n^{(\alpha)}$. On pose $R[\mathbf{u}](resp. A[\mathbf{u}])$ l'anneau des polynômes en les $u_j^{(\alpha)}$ à coefficients dans R (resp. A). On définit

$$\mathfrak{E}(\mathfrak{F}) = \bigcup_{k \geq 0} (\mathfrak{F}, U_1, \cdots, U_r) :_{R[\mathbf{u}]} \mathfrak{M}^k$$

$$=: (f \in R[\mathbf{u}]; \exists k \geq 0, f.\mathfrak{M}^k \subset (\mathfrak{F}, U_1, \cdots, U_r)).$$

Si $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{F}$ on a clairement $\mathfrak{E}(\mathfrak{F}) = R[\mathbf{u}]$, si $\mathfrak{F}$ est premier et vérifie $\mathfrak{F} \cap R \neq (0)$ alors $\mathfrak{E}(\mathfrak{F}) = (\mathfrak{F} \cap R).R[\mathbf{u}]$, tandis que si $\mathfrak{F}$ est premier et vérifie $\mathfrak{F} \cap R = (0)$ on démontre que $\mathfrak{E}(\mathfrak{F})$ est un idéal principal (voir [N_1], lemme 5, [P_1], prop. 1.5). Par exemple, si $\mathfrak{F} = (p)(r = n)$ on a $\mathfrak{E}(\mathfrak{F}) = (f)$ où $f = p(\Delta_0, \cdots, \Delta_n)$ avec Δ_i le cofacteur de X_i dans la matrice

$$\begin{pmatrix} X_0 & \ldots\ldots & X_n \\ u_0^{(1)} & \ldots\ldots & u_n^{(1)} \\ \vdots & & \vdots \\ u_0^{(n)} & \ldots\ldots & u_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

Définition Nous appelons *forme éliminante* de $\mathfrak{F}$ tout p.g.c.d. des éléments de $\mathfrak{E}(\mathfrak{F})$.

Soit f une forme éliminante de $\mathfrak{F}$, on lui applique l'homomorphisme de A-algèbres

$$\mathfrak{d} : A[\mathbf{u}] \to A[\mathbf{s}]$$

défini par $\partial(u_j^{(\alpha)}) = \sum_{k=0}^{n} s_{j,k}^{(\alpha)}.X_k$ où $A[\mathbf{s}]$ désigne l'anneau des polynômes à coefficients dans A en les variables $s_{j,k}^{(\alpha)}(\alpha = 1, \cdots, r;\ 0 \leq j < k \leq n)$ et où on pose $s_{j,k}^{(\alpha)} = -s_{k,j}^{(\alpha)}$ si $k < j$ et $s_{j,j}^{(\alpha)} = 0$. On vérifie aisément $\partial(U_\alpha) = 0$ et donc $\partial(f) \subset \mathfrak{F}$. Les coefficients dans A de $\partial(f)$ fournissent les éléments privilégiés $p_1, \cdots, p_m$ recherchés.

Si $\mathfrak{F}$ est premier et vérifie $\mathfrak{F} \cap R \neq (0)$, une forme éliminante de $\mathfrak{F}$ est simplement un p.g.c.d. dans R des éléments de $\mathfrak{F} \cap R$. Une propriété essentielle des formes éliminantes est la décomposition

$$f = \prod f_{\mathfrak{p}}^{e_{\mathfrak{p}}},$$

où le produit est pris sur tous les idéaux premiers associés à $A/\mathfrak{F}$, de même rang que $\mathfrak{F}, f_{\mathfrak{p}}$ désigne une forme éliminante de $\mathfrak{p}$ et $e_{\mathfrak{p}}$ l'exposant de la composante $\mathfrak{p}$-primaire de $\mathfrak{F}$. On voit donc que les quantités (1),(2) et (3) s'écrivent agréablement à partir des quantités correspondantes pour les premiers associés à $A/\mathfrak{F}$ de même rang que $\mathfrak{F}$.

DÉFINITION Si $\mathfrak{F}$ est un idéal homogène de A et $\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_m$ les idéaux premiers associés à $A/\mathfrak{F}$ de même rang que $\mathfrak{F}$, on appellera *forme résultante* de $\mathfrak{F}$ tout produit $\prod_{i=1}^{m} f_i^{\ell_i}$ où, pour tout $i = 1, \cdots, m, f_i$ est une forme éliminante de $\mathfrak{p}_i$ et ℓ_i est la *longueur* de la composante $\mathfrak{p}_i$-primaire de $\mathfrak{F}$.

En particulier, toute forme éliminante de $\mathfrak{F}$ divise toute forme résultante de $\mathfrak{F}$.

Si $\mathfrak{p}$ est un idéal homogène premier de A de rang $n + 1 - r \leq n$, la quantité $D(\mathfrak{p})$ de (1) est égale à r! fois le coefficient dominant du polynôme de Hilbert-Samuel de $A/\mathfrak{p}$, c'est-à-dire r fois le degré usuel de $A/\mathfrak{p}$. La comparaison des quantités (*') et (*) est intéressante, mais leurs comportements sont en général très différents. On a facilement $v(\mathfrak{p}) \leq V(\mathfrak{p})$, Y.V. Nesterenko montre dans $[N_2]$ l'inégalité $\omega(\mathfrak{p}) \leq [(4n)^n.D(\mathfrak{p})/r]^{1/n+1-r}$ (améliorée en $\omega(\mathfrak{p}) \leq [(n!/r!).D(\mathfrak{p})]^{1/n+1-r}$ par M. Chardin [C]) et aussi $\overline{\omega}(\mathfrak{p}) \leq c(n).T(\mathfrak{p})^{1/n+1-r}$ dans le cas $R = \mathbb{Z}$. De plus, si $\mathfrak{p}_1^\sharp$ est l'idéal de A engendré par les coefficients dans A de $\partial(f)$, Nesterenko a montré ($[N_1]$, lemme 11) que $\mathfrak{p}$ est la seule composante primaire isolée de $\mathfrak{p}_1^\sharp$ ne rencontrant pas R.

B) Multiplicité d'un idéal en un point

Nous supposons, dorénavant, que R est un corps commutatif de caractéristique zéro. Pour un idéal homogène $\mathfrak{J}$ de A, notons $\partial\mathfrak{J}$ l'idéal de A engendré par les éléments de la forme $\partial p/\partial X_i$ où $i \in \{0,\cdots,n\}$ et $p \in \mathfrak{J}$. Et pour un idéal premier homogène $\mathfrak{p}$ de A on généralise la définition ci-dessus en posant $\mathfrak{p}_0^\sharp = (0)$ et $\mathfrak{p}_\ell^\sharp = \partial\mathfrak{p}_{\ell-1}^\sharp$,pour $\ell \geq 2$. Lorsque $1 \leq \ell \leq d^\circ f, \mathfrak{p}_\ell^\sharp$ est donc L'idéal engendré par les coefficients dans A des formes $\frac{\partial^{|\boldsymbol{\lambda}|}\mathfrak{d}(f)}{\partial \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{\lambda}}}(\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{N}^{n+1}\ ;\ |\boldsymbol{\lambda}| = \ell-1)$ où f désigne une forme éliminante de $\mathfrak{p}$. Les idéaux $\mathfrak{p}_\ell^\sharp$ ont généralement une composante $\mathfrak{M}$-primaire non significative, aussi est-il naturel de définir $\mathfrak{p}_\ell$ comme le saturé de $\mathfrak{p}_\ell^\sharp$, c'est-à-dire

$$\mathfrak{p}_\ell = \bigcup_{k\geq 0}(\mathfrak{p}_\ell^\sharp :_A \mathfrak{M}^k),$$

on a $\mathfrak{p}_\ell \subset \mathfrak{p}_{\ell+1}$ pour $\ell \geq 0$ et $\mathfrak{p}_\ell = A$ pour $\ell > d^\circ f = D(\mathfrak{p})$.

En échangeant les opérateurs de dérivations et $\mathfrak{d}$, on est conduit à considérer l'idéal de A engendré par les coefficients de toutes les formes $\mathfrak{d}[\frac{\partial^{|\boldsymbol{\mu}|} f}{\partial \boldsymbol{u}^{\boldsymbol{\mu}}}]$ $(\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{N}^{(n+1)r}\ ;\ |\boldsymbol{\mu}| = \ell - 1)$. Pour $\ell = 1,\cdots,D(\mathfrak{p})$, ce dernier idéal contient $\mathfrak{p}_\ell^\sharp$ comme le montrent les formules

$$(4) \qquad \frac{\partial\mathfrak{d}(f)}{\partial X_j} = \sum_{\alpha=1}^{r}\sum_{k=0}^{n} s_{k,j}^{(\alpha)}.\mathfrak{d}[\frac{\partial f}{\partial u_k^{(\alpha)}}] \ \ (j = 0,\cdots,n).$$

valables pour toute forme $f \in \mathbf{R}[\boldsymbol{u}]$, et nous allons montrer plus loin que son saturé est en fait égal à $\mathfrak{p}_\ell$.

Soit $A_r = (A \otimes_R \cdots \otimes_R A)/\mathfrak{S}_r$ où $\mathfrak{S}_r$ désigne le groupe symétrique opérant sur r lettres), considérons maintenant pour $\alpha = 1,\cdots,r$ les homomorphismes

$$\tilde{\mathfrak{d}}_\alpha : R[\boldsymbol{u}^\alpha] \to A_r[\boldsymbol{s}^{\alpha)}] \text{ et } \mathfrak{d}_\alpha : R[\boldsymbol{u}^{(\alpha)}] \to A[\boldsymbol{s}^{\alpha)}]$$

définis par $\tilde{\mathfrak{d}}(u_j^{(\alpha)}) = \sum_{k=0}^{n} s_{j,k}^{(\alpha)}.X_k^{(\alpha)}$ et $\mathfrak{d}_\alpha(u_j^{(\alpha)}) = \sum_{k=0}^{n} s_{j,k}^{(\alpha)}.X_k$. On a évidemment $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}_1 \circ \cdots \circ \mathfrak{d}_r$ et posons $\tilde{\mathfrak{d}} = \tilde{\mathfrak{d}}_1 \otimes \cdots \otimes \tilde{\mathfrak{d}}_r$ l'homomorphisme

$$\tilde{\mathfrak{d}} : R[\boldsymbol{u}] \to A_r[\boldsymbol{s}].$$

On notera $\mathfrak{M}_r = \mathfrak{M}^{(1)}\cdots\mathfrak{M}^{(r)}$ où $\mathfrak{M}^{(\alpha)}$ désigne l'idéal de A_r engendré par $X_0^{(\alpha)}\cdots,X_n^{(\alpha)}$.

De la même façon que nous avons défini les idéaux $\mathfrak{p}_\ell$ à partir de l'opérateur ∂, on peut définir des idéaux $\tilde{\mathfrak{p}}_\ell$ avec l'opérateur $\tilde{\mathfrak{d}}$. Précisément on pose $\tilde{\mathfrak{p}}_0^\sharp = (0)$ et, pour $\ell \geq 1, \tilde{\mathfrak{p}}_\ell$ l'idéal engendré dans A_r par les coefficients des formes $\frac{\partial^{|\boldsymbol{\lambda}|}\tilde{\mathfrak{d}}(f)}{\partial \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{\lambda}}}(\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{N}^{(n+1)r} \ ; \ |\boldsymbol{\lambda}| \leq \ell - 1)$. Enfin, $\tilde{\mathfrak{p}}_\ell$ est le saturé par $\mathfrak{M}_r$ de $\tilde{\mathfrak{p}}_\ell^\sharp$. On a encore les formules, valables pour toute forme $f \in R[\boldsymbol{u}]$.

$$(4') \qquad \frac{\partial \tilde{\mathfrak{d}}(f)}{\partial X_j^{(\alpha)}} = \sum_{k=0}^{n} s_{k,j}^{(\alpha)}.\tilde{\mathfrak{d}}[\frac{\partial f}{\partial u_k^{(\alpha)}}] \ (j = 0, \cdots, n).$$

On peut alors énoncer

Proposition 1. *Si f est une forme éliminante d'un idéal homogène premier $\mathfrak{p}$ de rang $n+1-r$ et $\ell \in \{1, \cdots, D(\mathfrak{p})\}$, il existe un entier $N(f,\ell)$, tel que pour tout $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{N}^{(n+1)r}$, $|\boldsymbol{\mu}| = \ell - 1$, on a $\mathfrak{M}_r^{N(f,\ell)}.\tilde{\mathfrak{d}}[\frac{\partial^{|\boldsymbol{\mu}|} f}{\partial \boldsymbol{u}^{\boldsymbol{\mu}}}] \subset \tilde{\mathfrak{p}}_\ell^\sharp$ et $\mathfrak{M}^{rN(f,\ell)}.\mathfrak{d}[\frac{\partial^{|\boldsymbol{\mu}|} f}{\partial \boldsymbol{u}^{\boldsymbol{\mu}}}] \subset \mathfrak{p}_\ell^\sharp$.*

Demonstration: Il suffit d'exhiber, pour toute forme $g \in R[\boldsymbol{u}]$, un entier $N(g)$ satisfaisant

$$\mathfrak{M}_r^{N(g)}.\tilde{\mathfrak{d}}[\frac{\partial g}{\partial u_i^{(\alpha)}}] \subset \partial \tilde{I}(g) \ (resp. \mathfrak{M}^{rN(g)}.\mathfrak{d}[\frac{\partial g}{\partial u_i^{(\alpha)}}] \subset \partial I(g)\ )$$
$$(\alpha = 1, \cdots, r \ ; \ i = 0, \cdots, n)$$

où $\tilde{I}(g)(resp.I(g))$ désigne l'idéal de A_r (resp.A) engendré par les coefficients de la forme $\tilde{\mathfrak{d}}g$ (resp.$\mathfrak{d}g$). En effet, en raisonnant par récurrence sur ℓ on suppose la proposition établie pour tous les $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{N}^{(n+1)r}$, $|\boldsymbol{\mu}| = \ell - 1$ (ce qui est clair si $\ell = 1$). En posant $g = \frac{\partial^{|\boldsymbol{\mu}|} f}{\partial \boldsymbol{u}^{\boldsymbol{\mu}}}$ on obtient

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_r^{N(g)+N(f,\ell)+1}.\tilde{\mathfrak{d}}[\frac{\partial g}{\partial u_i^{(\alpha)}}] &\subset \mathfrak{M}_r^{N(f,\ell)+1}.\partial \tilde{I}(g) \\ &\subset \partial[\mathfrak{M}_r^{N(f,\ell)+1}.\partial \tilde{I}(g)] + \mathfrak{M}_r^{N(f,\ell)}.\tilde{I}(g) \\ &\subset \partial \tilde{\mathfrak{p}}_\ell^\sharp = \tilde{\mathfrak{p}}_{\ell+1}^\sharp, \end{aligned}$$

et pareillement

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}^{r(N(g)+N(f,\ell)+1)}.\mathfrak{d}[\frac{\partial g}{\partial u_i^{(\alpha)}}] &\subset \mathfrak{M}^{r(N(f,\ell)+1)}.\partial I(g) \\ &\subset \partial[\mathfrak{M}^{r(N(f,\ell)+1}.I(g)] + \mathfrak{M}^{rN(f,\ell)}.I(g) \\ &\subset \partial \mathfrak{p}_\ell^\sharp = \mathfrak{p}_{\ell+1}^\sharp, \end{aligned}$$

d'où on déduit la proposition pour tous les $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{N}^{(n+1)r}$, $|\boldsymbol{\mu}| = \ell$ avec

$$N(f, \ell+1) = N(f, \ell) + \max \{N[\frac{\partial^{|\boldsymbol{\mu}|} f}{\partial \boldsymbol{u}^{\boldsymbol{\mu}}}] \; ; \; \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{N}^{(n+1)r}, \; |\boldsymbol{\mu}| = \ell - 1\} + 1.$$

Pour établir l'existence de $N(g)$ avec les propriétés ci-dessus on part de l'identité $\frac{\partial \tilde{\mathfrak{d}}(g)}{\partial s_{i,k}^{(\alpha)}} = X_k^{(\alpha)}.\tilde{\mathfrak{d}}[\frac{\partial g}{\partial u_i^{(\alpha)}}] - X_i^{(\alpha)}.\tilde{\mathfrak{d}}[\frac{\partial g}{\partial u_k^{(\alpha)}}]$ valable pour toute forme $g \in R[\boldsymbol{u}]$, d'où on déduit

$$(5') \qquad X_k^{(\alpha)}.\tilde{\mathfrak{d}}[\frac{\partial g}{\partial u_i^{(\alpha)}}] - X_i^{(\alpha)}.\tilde{\mathfrak{d}}[\frac{\partial g}{\partial u_k^{(\alpha)}}] \in \tilde{I}(g)$$

et en posant $\boldsymbol{X}^{(1)} = \cdots = \boldsymbol{X}^{(r)} = \boldsymbol{X}$,

$$(5) \qquad X_k.\mathfrak{d}[\frac{\partial g}{\partial u_i^{(\alpha)}}] - X_i.\mathfrak{d}[\frac{\partial g}{\partial u_k^{(\alpha)}}] \in I(g)$$

pour tout $\alpha = 1, \cdots, r$ et $i, k \in \{0, \cdots, n\}$. Mais $-\sum_{k=0}^{n} s_{k,j}^{(\alpha)}.X_k^{(\alpha)} = \tilde{\mathfrak{d}}(u_j^{(\alpha)})$ et $-\sum_{k=0}^{n} s_{k,j}^{(\alpha)}.X_k = \mathfrak{d}(u_j^{(\alpha)})$ $(\alpha = 1, \cdots, r \; ; \; j = 0, \cdots, n)$, en combinant (4') et (5') ou (4) et (5) suivant le cas on écrit, pour tout $i \in \{0, \cdots, n\}$, les systèmes de relations suivants,

$$X_i^{(\alpha)}.\frac{\partial \tilde{\mathfrak{d}}(g)}{\partial X_j^{(\alpha)}} + \tilde{\mathfrak{d}}(u_j^{(\alpha)}).\tilde{\mathfrak{d}}[\frac{\partial g}{\partial u_i^{(\alpha)}}] \in \tilde{I}(g) \; (\alpha = 1, \cdots, r \; ; \; j = 0, \cdots, n),$$

$$X_i.\frac{\partial \mathfrak{d}(g)}{\partial X_j} + \sum_{\alpha=1}^{r} \mathfrak{d}(u_j^{(\alpha)}).\mathfrak{d}[\frac{\partial g}{\partial u_i^{(\alpha)}}] \in I(g) \; (j = 0, \cdots, n).$$

La matrice $r \times (n+1)$ dont les entrées sont les $\mathfrak{d}(u_j^{(\alpha)})$ est de rang r, si $\Delta \in A[\boldsymbol{s}]$ est le déterminant d'un de ses mineurs de rang r on a

$$(6') \qquad \tilde{\mathfrak{d}}(u_j^{(\alpha)}).\tilde{\mathfrak{d}}[\frac{\partial g}{\partial u_i^{(\alpha)}}] \in \partial \tilde{I}(g) \; (\alpha = 1, \cdots, r \; ; \; i = 0, \cdots, n)$$

$$(6) \qquad \Delta.\mathfrak{d}[\frac{\partial g}{\partial u_i^{(\alpha)}}] \in \partial I(g) \quad (\alpha = 1, \cdots, r \; ; \; i = 0, \cdots, n).$$

On pose $\mathfrak{F}_r$ l'idéal de A engendré par les coefficients dans A de tous les mineurs Δ de rang r de la matrice ci-dessus. On vérifie que, par exemple, l'écriture du déterminant du mineur $|\mathfrak{d}(u_j^{(\alpha)})|_{\substack{\alpha=1,\cdots,r\\ j=0,\cdots,r-1}}$ fait apparaître les monômes

$$[s_{0,i_1}^{(1)} \times \cdots \times s_{r-1,i_r}^{(r)}] \times X_{i_1} \times \cdots \times X_{i_r},$$

et

$$[s_{i_1,i_1'}^{(1)} \times s_{1,i_2}^{(2)} \times \cdots \times s_{r-1,i_r}^{(r)}] \times [X_{i_1} - (-1)^{i_1+i_1'}.X_{i_1'}] \times X_{i_2} \times \cdots \times X_{i_r},$$

où $i_1, \cdots, i_r \in \{r, \cdots, n\}$ et $i_1' \in \{0, \cdots, r-1\}$, on déduit de ces relations et de leurs apparentées $\mathfrak{M}^r \subset \mathfrak{F}_r$. Enfin, des inclusions (6') et (6) ci-dessus on déduit

$$\tilde{\mathfrak{d}}[\frac{\partial g}{\partial u_i^{(\alpha)}}] \in \partial\tilde{I}(g) :_{A_r[\mathbf{s}]} \tilde{\partial}(u_j^{(\alpha)}) \subset \bigcup_{k\geq 0}(\partial\tilde{I}(g) :_{A_r[\mathbf{s}]} \mathfrak{M}^{(\alpha)k})$$

$$\text{et } \mathfrak{d}[\frac{\partial g}{\partial u_i^{(\alpha)}}] \in \partial I(g) :_{A[\mathbf{s}]} \Delta \subset \bigcup_{k\geq 0}(\partial I(g) :_{A[\mathbf{s}]} \mathfrak{M}^k),$$

pour tout $\alpha = 1, \cdots, r$, $i = 0, \cdots, n$. Il en résulte l'existence d'un entier $N(g)$ ayant les propriétés recherchées, ce qui achève d'établir la proposition.

Avec les formules (4) et (4') on obtient finalement

COROLLAIRE. *Si K désigne un corps algébriquement clos contenant R et si $\boldsymbol{x} = (x_0, \cdots, x_n) \in K^{n+1} \setminus \{0\}$, pour tout $\ell \geq 0$ on a équivalence entre les assertions*

i) $p(\boldsymbol{x}) = 0$ *pour tout* $p \in \mathfrak{p}_\ell$,

ii) $\mathfrak{d}[\frac{\partial^{|\boldsymbol{\mu}|} f}{\partial \boldsymbol{u}^{\boldsymbol{\mu}}}](\boldsymbol{x}) \equiv 0$ *pour tout* $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{N}^{(n+1)r}$, $|\boldsymbol{\mu}| \leq \ell - 1$,

iii) $\tilde{\mathfrak{d}}[\frac{\partial^{|\boldsymbol{\mu}|} f}{\partial \boldsymbol{u}^{\boldsymbol{\mu}}}](\boldsymbol{x}, \cdots, \boldsymbol{x}) \equiv 0$ *pour tout* $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{N}^{(n+1)r}$, $|\boldsymbol{\mu}| \leq \ell - 1$,

iv) $\tilde{p}(\boldsymbol{x}, \cdots, \boldsymbol{x}) = 0$ *pour tout* $\tilde{\mathfrak{p}} \in \tilde{\mathfrak{p}}_\ell$.

DÉMONSTRATION: Si $\ell = 0$ ou $\ell > D(\mathfrak{p})$ le corollaire est clair, sinon il suit de la proposition 1 et de (4') que $\tilde{\mathfrak{p}}_\ell$ est égal au saturé (par $\mathfrak{M}_r$) de l'idéal engendré par les coefficients dans A_r de toutes les formes $\tilde{\mathfrak{d}}[\frac{\partial^{|\boldsymbol{\mu}|} f}{\partial u^{\boldsymbol{\mu}}}]$ ($\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{N}^{n+1)r}, |\boldsymbol{\mu}| = \ell - 1$), d'où l'équivalence entre iii) et iv). De même, la proposition 1 avec (4) cette fois, montre que $\mathfrak{p}_\ell$ est égal au saturé de l'idéal engendré par les coefficients dans A de toutes les formes $\mathfrak{d}[\frac{\partial^{|\boldsymbol{\mu}|} f}{\partial \boldsymbol{u}^{\boldsymbol{\mu}}}]$

($\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{N}^{(n+1)r}$, $|\boldsymbol{\mu}| = \ell - 1$), ce qui établit l'équivalence entre i) et ii). Enfin l'équivalence entre ii) et iii) est banale.

En fait, en posant $\boldsymbol{X}^{(1)} = \cdots = \boldsymbol{X}^{(r)} = \boldsymbol{X}$ on a $\tilde{\mathfrak{d}} = \mathfrak{d}$, et les idéaux $\tilde{\mathfrak{p}}_\ell$ et $\mathfrak{p}_\ell$ sont égaux étant tous deux le saturé de l'idéal engendré dans A par les formes $\mathfrak{d}[\frac{\partial^{|\boldsymbol{\mu}|} f}{\partial \boldsymbol{u}^{\boldsymbol{\mu}}}]$ ($\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{N}^{(n+1)r}$, $|\boldsymbol{\mu}| \leq \ell - 1$). Nous allons maintenant montrer que les conditions i) à iv) ci-dessus sont encore équivalentes à

$$v)\ \mathfrak{d}[\frac{\partial^{|\boldsymbol{\mu}|} f}{\partial \boldsymbol{u}_r^{\boldsymbol{\mu}}}](\boldsymbol{x}) \equiv 0 \text{ pour tout } \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{N}^{n+1},\ |\boldsymbol{\mu}| = \ell - 1,$$

où les dérivations ne portent que sur les variables $u_0^{(r)}, \cdots, u_n^{(r)}$. ii) entraîne clairement v). D'un autre côté les formules (4') montrent que v) implique $\frac{\partial^{|\boldsymbol{\lambda}|} \tilde{\mathfrak{d}} f}{\partial \boldsymbol{X}_r^{\boldsymbol{\lambda}}}(\boldsymbol{x}, \cdots, \boldsymbol{x}) \equiv 0$ pour tout $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{N}^{n+1}$, $|\boldsymbol{\lambda}| = \ell - 1$. La proposition suivante permet de conclure que ces dernières relations entraînent $\frac{\partial^{|\boldsymbol{\lambda}|} \mathfrak{d} f}{\partial \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{\lambda}}}(\boldsymbol{x}) \equiv 0$ pour $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{N}^{n+1}$, , $|\boldsymbol{\lambda}| = \ell - 1$, qui à leur tour entraînent i).

PROPOSITION 2. *Soit $i \in \{0, \cdots n\}$, posons*

$$Q_i = \prod_{\alpha=1}^{r-1} [X_i^{(\alpha)}.\mathfrak{d}_r(U_r(\boldsymbol{X}^{(\alpha)}))]^{d^\circ_{u_\alpha} f},$$

l'homomorphisme de R-algèbres $\mathfrak{s}_i : R[\boldsymbol{s}] \to R[\boldsymbol{s}, 1/Q_i]$ défini par

$$\begin{aligned} \mathfrak{s}_i(s_{j,k}^{(\alpha)}) &= [\mathfrak{d}_\alpha(u_j^{(\alpha)}) - \frac{\mathfrak{d}_\alpha(U_\alpha(\boldsymbol{X}^{(\alpha)}))}{\mathfrak{d}_r(U_r(\boldsymbol{X}^{(\alpha)}))}.\mathfrak{d}_r(u_j^{(r)})]/X_i^{(\alpha)} \quad \text{si } j \neq i \text{ et } k = i \\ &= -[\mathfrak{d}_\alpha(u_j^{(\alpha)}) - \frac{\mathfrak{d}_\alpha(U_\alpha(\boldsymbol{X}^{(\alpha)}))}{\mathfrak{d}_r(U_r(\boldsymbol{X}^{(\alpha)}))}.\mathfrak{d}_r(u_j^{(r)})]/X_i^{(\alpha)}. \text{ si } j = i \text{ et } k \neq i \\ &= 0 \text{ sinon} \end{aligned}$$

pour $\alpha = 1, \cdots, r-1$, et $\mathfrak{s}_i(s_{j,k}^{(r)} = s_{j,k}^{(r)}$ satisfait

$$\mathfrak{s} \circ \tilde{\mathfrak{d}}(f)|_{\boldsymbol{X}^{(r)} = \boldsymbol{X}} = \mathfrak{d}(f).$$

DÉMONSTRATION: Définissons des homomorphismes de A-algèbres

$$\rho : A[\boldsymbol{u}^{(1)}, \cdots, \boldsymbol{u}^{(r-1)}, \boldsymbol{s}^{(r)}] \to A[\boldsymbol{u}^{(1)} \cdots, \boldsymbol{u}^{(r-1)}, \boldsymbol{s}^{(r)}, \boldsymbol{X}^{(r)}, 1/Q_i],$$

$$t : A[\boldsymbol{s}^{(1)}, \cdots, \boldsymbol{s}^{(r)}] \to A[\boldsymbol{u}^{(1)}, \cdots, \boldsymbol{u}^{(r-1)}, \boldsymbol{s}^{(r)}, \boldsymbol{X}^{(r)}, 1/Q_i],$$

par les formules (pour $\alpha = 1, \cdots, r-1$)

$$\rho(u_j^{(\alpha)}) = u_j^{(\alpha)} - \frac{U_\alpha(\boldsymbol{X}^{(\alpha)})}{\mathfrak{d}_r(U_r(\boldsymbol{X}^{(\alpha)}))}.\mathfrak{d}_r(u_j^{(r)}), \quad \text{pour } j = 0, \cdots, n,$$

$$\begin{aligned} t(s_{j,k}^{(\alpha)}) &= [u_j^{(\alpha)} - \frac{U_\alpha(\boldsymbol{X}^{(\alpha)})}{\mathfrak{d}_r(U_r(\boldsymbol{X}^{(\alpha)}))}.\mathfrak{d}_r(u_j^{(r)})]/X_i^{(\alpha)} \text{ si } j \neq i \text{ et } k = i, \\ &= -[u_j^{(\alpha)} - \frac{U_\alpha(\boldsymbol{X}^{(\alpha)})}{\mathfrak{d}_r(U_r(\boldsymbol{X}^{(\alpha)}))}.\mathfrak{d}_r(u_k^{(r)})]/X_i^{(\alpha)} \quad \text{si } j = i \text{ et } \ k \neq i, \\ &= 0 \text{ sinon} \end{aligned}$$

et $\rho(s_{j,k}^{(r)}) = t(s_{j,k}^{(r)}) = s_{j,k}^{(r)}$ pour $0 \leq j < k \leq n$.

On vérifie $t \circ \tilde{\mathfrak{d}}(f)|_{\boldsymbol{X}^{(r)}=\boldsymbol{X}} = \rho(\mathfrak{d}_r(f))$, et également $\rho(\mathfrak{d}_r(f)) = \mathfrak{d}_r(f)$ (voir [P1], remarque 2, p. 16). L'homomorphisme $\mathfrak{s}_i$ est égal à $\mathfrak{d}_1 \circ \cdots \circ \mathfrak{d}_{r-1} \circ t$ et on a $\mathfrak{s}_i \circ \tilde{\mathfrak{d}}(f)|_{\boldsymbol{X}^{(r)}=\boldsymbol{X}} = \mathfrak{d}_1 \circ \cdots \circ \mathfrak{d}_{r-1} \circ t \circ \tilde{\mathfrak{d}}(f)|_{\boldsymbol{X}^{(r)}=\boldsymbol{X}} = \mathfrak{d}_1 \circ \cdots \mathfrak{d}_{r-1} \circ \mathfrak{d}_r(f) = \mathfrak{d}(f)$, ce qu'il fallait démontrer.

Choisissons $i \in \{0, \cdots, n\}$ de sorte que $x_i \neq 0$. Il suit de la proposition 2, en identifiant $\boldsymbol{X}^{(r)} = \boldsymbol{X}$ dans $\tilde{\mathfrak{d}} f$ et en notant $N = \sum_{\alpha=1}^{r-1} d^\circ_{\mathcal{U}_\alpha} f$,

$$(7) \qquad Q_i.\mathfrak{d} f \in \tilde{\mathfrak{p}}_1^\sharp.\mathfrak{J}^N$$

où $\mathfrak{J}$ est l'idéal engendré dans $A_r[\mathfrak{s}]$ par les formes $\mathfrak{d}_\alpha(U_\alpha(\boldsymbol{X}^{(\alpha)}))$ et $\mathfrak{d}_r(U_r(\boldsymbol{X}^{(\alpha)}))$ lorsque $\alpha = 1, \cdots, r-1$. Notons, pour $1 \leq \ell \leq D(\mathfrak{p})$, $\tilde{\mathfrak{p}}_\ell^{\sharp(r)}$ l'idéal de A_r engendré par les coefficients des formes

$$\frac{\partial^{|\boldsymbol{\lambda}|}\tilde{\mathfrak{d}} f}{\partial \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{\lambda}}} \quad (\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{N}^{n+1}, |\boldsymbol{\lambda}| = \ell - 1).$$

On a clairement $\tilde{\mathfrak{p}}_1^{\sharp(r)} = \tilde{\mathfrak{p}}_1^\sharp$ et comme déjà remarqué v) implique $p(\boldsymbol{x}) = 0$ pour tout $p \in \tilde{\mathfrak{p}}_\ell^{\sharp(r)}$. On déduit de (7), en appliquant $N + \ell$ fois la dérivation $\Delta = [\sum_{k=0}^n a_k.\frac{\partial}{\partial X_k}]$ où $a_0, \cdots, a_n$ sont de nouvelles variables,

$$(8) \qquad \Delta^N Q_i.\Delta^\ell \mathfrak{d} f \in \tilde{\mathfrak{p}}_\ell^\sharp + \mathfrak{J},$$

car Q_i est de degré N et $\Delta^{N'} Q_i \equiv 0$ pour tout $N' > N$. Comme $\Delta^N Q_i(\boldsymbol{x}, \cdots, \boldsymbol{x}) \not\equiv 0$ (car faisant intervenir le monôme $(a_k.s_{i,k}^{(r)}\boldsymbol{x}_i^2)^N$ par exemple) et $p(\boldsymbol{x}, \cdots, \boldsymbol{x}) \equiv 0$ pour tout $p \in \mathfrak{J}$, on vérifie donc que v) entraîne, via (8), $\Delta^{\ell}\eth f(\boldsymbol{x},\cdots,\boldsymbol{x}) \equiv 0$. Ecrivant cette identité sur les monômes en les variables $a_0,\cdots,a_n$ on obtient

$$\frac{\partial^{|\boldsymbol{\lambda}|}\eth f}{\partial \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{\lambda}}}(\boldsymbol{x}) = 0 \text{ pour tout } \boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{N}^{n+1}, |\boldsymbol{\lambda}| = \ell - 1.$$

Et on en déduit que v) entraîne $p(\boldsymbol{x}) = 0$ pour tout $p \in \mathfrak{p}_{\ell}^{\sharp}$, c'est-à-dire i). Ainsi a-t-on bien établi l'équivalence entre les assertions i) à v). Remarquons encore qu'avec les relations (5) on vérifie facilement que, si $x_i \neq 0$, v) est équivalente à

vi) $\eth[\frac{\partial^{\lambda} f}{\partial u_i^{(r)}{}^{\lambda}}](\boldsymbol{x}) \equiv 0$ pour $\lambda = 0,\cdots,\ell-1$.

Cette équivalence entre i)-v) et vi) met en évidence les propriétés de "symétrie" des formes résultantes. Les propriétés i) à vi) conduisent à une notion de multiplicité d'un idéal en un point qui apparaît dans $[A_1]$ et $[N_2]$ par exemple. Plus précisément,

DEFINITION Si $\boldsymbol{x} = (x_0,\cdots,x_n) \in K^{n+1}\setminus\{0\}$ et $\mathfrak{p}$ est un idéal homogène premier de A on définit *la multiplicité* $m_{\boldsymbol{x}}(\mathfrak{p})$ de $\mathfrak{p}$ en $\boldsymbol{x}$ comme le plus grand entier $\ell \geq 0$ tel que $\boldsymbol{x}$ soit un zéro commun des éléments de $\mathfrak{p}_{\ell}$.

F. Amoroso démontre $[A_2]$ que $\ell = 1$ si et seulement si $\boldsymbol{x}$ est un zéro commun des éléments de $\mathfrak{p}$ et la matrice jacobienne de $\mathfrak{p}$ en $\boldsymbol{x}$ est de rang maximal, c'est-à-dire si l'anneau localisé $(A/\mathfrak{p})_{\mathfrak{r}}$ est régulier, où $\mathfrak{r}$ désigne l'idéal de définition du point $\boldsymbol{x}$ (engendré par les binômes $x_iX_j - x_jX_i$, $0 \leq i < j \leq n$). Plus généralement, si $\mathfrak{J}$ est un idéal homogène quelconque de A, on étend, en accord avec la définition des formes résultantes, la définition de $m_{\boldsymbol{x}}$ en posant $m_{\boldsymbol{x}}(\mathfrak{J}) = \sum_{\mathfrak{p}} \ell_{\mathfrak{p}}.m_{\boldsymbol{x}}(\mathfrak{p})$ où la somme est étendue aux premiers associés à $A/\mathfrak{J}$ de même rang $n+1-r$ que $\mathfrak{J}$ et $\ell_{\mathfrak{p}}$ est la longueur de la composante $\mathfrak{p}$-primaire de $\mathfrak{J}$.

Notons, pour $i = 1,\cdots,r, \gamma_i = \rho \circ \tilde{\eth}(U_i)$ où ρ est la spécialisation $\rho(\boldsymbol{X}_{\alpha}) = \boldsymbol{x}$. La multiplicité $m_{\boldsymbol{x}}$, introduite ci-dessus, n'est rien d'autre que la multiplicité, $e_{A_{\mathfrak{r}}}(\gamma_1,\cdots,\gamma_{r-1}|(A/\mathfrak{J})_{\mathfrak{r}})$, en $\boldsymbol{x}$ du module $A/\mathfrak{J}$ (cf.[No], chap. 7, §7.4). Précisément on peut énoncer

PROPOSITION 3. *Avec les notations précédentes on a :*

$$m_{\boldsymbol{x}}(\mathfrak{J}) = e_{A_{\mathfrak{r}}}(\gamma_1,\cdots,\gamma_{r-1}|(A/\mathfrak{J})_{\mathfrak{r}}) = \lim_{k\to\infty} \frac{\ell[(A/(\mathfrak{J},\mathfrak{r}^k))_{\mathfrak{r}}]}{k^{r-1}/(r-1)!},$$

où ℓ désigne la longueur en tant que $A_{\mathfrak{r}}$-module.

DÉMONSTRATION: On remarque que l'anneau $(A/\mathfrak{F})_{\mathfrak{r}}$ est une extension algébrique de $R[\gamma_1, \cdots, \gamma_{r-1}]$. En particulier, toute forme linéaire

$$\gamma = \sum_{0 \leq j < k \leq n} s_{j,k}.(X_j x_k - X_k x_j) \in \mathfrak{r},$$

vérifie une relation de la forme

$$r(\gamma_1, \cdots, \gamma_{r-1}, \gamma) = q_0.\gamma^h + q_1.\gamma^{h-1} + \cdots + q_h \in \mathfrak{F}$$

où $q_i \in R[\gamma_1, \cdots, \gamma_{r-1}]$ $(i = 0, \cdots, h)$. Quitte à faire agir l'homorphisme $\xi : s_{j,k}^{(\alpha)} \to s_{j,k}^{(\alpha)} + \lambda_\alpha.s_{j,k}$ sur r, avec $\lambda_1, \cdots, \lambda_{r-1} \in R$ choisis de sorte que

$$r(\lambda_1, \cdots, \lambda_{r-1}, 1) \neq 0,$$

on peut supposer $q_0 \notin \mathfrak{r}$ et $q_i \in \mathfrak{r}^i (i = 1, \cdots, h)$. On en déduit, avec k_0 le maximum des h sur un système libre maximal de formes linéaires dans $\mathfrak{r}$,

$$\mathfrak{r}^{k+k_0} \subset (\mathfrak{F}, (\gamma_1, \cdots, \gamma_{r-1})^k).A_{\mathfrak{r}},$$

pour tout $k \geq 0$. La deuxième égalité se déduit donc du théorème 13 de [No], §7.7 (formule limite de P. Samuel).

Si f est une forme résultante de $\mathfrak{F}$, une forme résultante de l'idéal $\mathfrak{F}' = (\mathfrak{F}, \gamma_1, \cdots, \gamma_{r-1})$, de rang n dans $A[\boldsymbol{s}]$, s'écrit

$$g = \rho \circ \mathfrak{d}^{(1)} \circ \cdots \circ \mathfrak{d}^{(r-1)}(f) \times (u_0^{(r)}.x_0 + \cdots + u_n^{(r)}.x_n)^e,$$

où e est la longueur du $A[\boldsymbol{s}]_{\mathfrak{r}}$-module

$$E = [((\mathfrak{F}, \gamma_1, \cdots, \gamma_{r-2}) :_{A[\boldsymbol{s}]} \gamma^{r-1}/(\mathfrak{F}, \gamma_1, \cdots, \gamma_{r-2})]_{\mathfrak{r}},$$

car, avec les propriétés du symbole de multiplicité (cf. [No], §7.4 & 7.6), on a

$$\deg\mathfrak{F} = e_A(\gamma_1, \cdots, \gamma_{r-1}, U_r | A/\mathfrak{F}) = e_A(\gamma_{r-1}, U_r | A/(\mathfrak{F}, \gamma_1, \cdots, \gamma_{r-2})),$$
$$\deg\mathfrak{F}' = e_A(U_r | A/\mathfrak{F}'),$$

et il suit de la définition du symbole de multiplicité et de la proposition 11 de [No], §7.9 $\deg\mathfrak{F}' = \deg\mathfrak{F} + e$. Par ailleurs on a, toujours avec les définitions de [No], §7.4,

$$e_{A_{\mathfrak{r}}}(\gamma_1, \cdots, \gamma_{r-1} | (A/\mathfrak{F})_{\mathfrak{r}}) = e_{A_{\mathfrak{r}}}(. | (A/\mathfrak{F}')_{\mathfrak{r}}) - e = \ell((A/\mathfrak{F}')_{\mathfrak{r}}) - e,$$

ce qui entraîne bien, avec v),

$$\begin{aligned} m_{\boldsymbol{x}}(\mathfrak{F}) &= \mathrm{ord}_{\boldsymbol{x}}\mathfrak{d}^{(r)} \circ \rho \circ \mathfrak{d}^{(1)} \circ \cdots \circ \mathfrak{d}^{(r-1)}(f) = \ \mathrm{ord}\ _{\boldsymbol{x}}\mathfrak{d}(g) - e \\ &= e_{A_{\mathfrak{r}}}(\gamma_1, \cdots, \gamma_{r-1} | (A/\mathfrak{F})_{\mathfrak{r}}), \end{aligned}$$

car $\mathrm{ord}\ _{\boldsymbol{x}}\mathfrak{d}(g) = m_{\boldsymbol{x}}(\mathfrak{F}') = \ell((A/\mathfrak{F}')_{\mathfrak{r}})$ par définition de la forme résultante.

En particulier, si l'idéal $\mathfrak{F}$ est parfait (c.-a-d. si l'anneau $A/\mathfrak{F}$ est *semi-régulier*) $m_{\boldsymbol{x}}(\mathfrak{F})$ est égal à la longueur du $A[\boldsymbol{s}]_{\mathfrak{r}}$-module $(A[\boldsymbol{s}]/(\mathfrak{F}, \gamma_1, \cdots, \gamma_{r-1}))_{\mathfrak{r}}$, en général on a seulement $m_{\boldsymbol{x}}(\mathfrak{F})$ inférieur à cette longueur (cf.[No], §7.4, théorèmes 6 et 8). Remarquons que si $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}'$ sont deux idéaux homogènes de même rang $n+1-r$ on a la suite exacte $0 \to (\mathfrak{F}'/\mathfrak{F})_{\mathfrak{r}} \to (A/\mathfrak{F})_{\mathfrak{r}} \to (A/\mathfrak{F}')_{\mathfrak{r}} \to 0$ qui entraîne, grâce au théorème 5, p. 302 de [No], §7.4,

$$\begin{aligned} &e_{A_{\mathfrak{r}}}(\gamma_1, \cdots, \gamma_{r-1} | (A/\mathfrak{F})_{\mathfrak{r}}) \\ &= e_{A_{\mathfrak{r}}}(\gamma_1, \cdots, \gamma_{r-1} | (A\mathfrak{F}')_{\mathfrak{r}}) + e_{A_{\mathfrak{r}}}(\gamma_1, \cdots, \gamma_{r-1} | (\mathfrak{F}'/\mathfrak{F})_{\mathfrak{r}}) \\ &\geq e_{A_{\mathfrak{r}}}(\gamma_1, \cdots, \gamma_{r-1} | (A/\mathfrak{F}')_{\mathfrak{r}}), \end{aligned}$$

c'est-à-dire $m_{\boldsymbol{x}}(\mathfrak{F}) \geq m_{\boldsymbol{x}}(\mathfrak{F}')$.

On remarque qu'on a, par définition, les équivalences

$$m_{\boldsymbol{x}}(\mathfrak{p}) \geq \ell \Leftrightarrow \mathfrak{p}_\ell \subset \mathfrak{r} \Leftrightarrow m_{\boldsymbol{x}}(\mathfrak{p}_\ell) \geq 1,$$

et par suite

$$m_{\boldsymbol{x}}(\mathfrak{p}) \geq \ell \Leftrightarrow \mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{r}^\ell \Leftrightarrow m_{\boldsymbol{x}}(\mathfrak{p}_1) \geq \ell.$$

Il est également facile de vérifier

$$m_{\boldsymbol{x}}(\mathfrak{p}) \geq \ell \Leftrightarrow \mathfrak{p}_j \subset \mathfrak{r}^{\ell+1-j} \ (j \in \{1, \cdots, \ell\}),$$

car $\mathfrak{p}_j \subset \mathfrak{r}^{\ell+1-j} \Rightarrow \mathfrak{p}_\ell \subset \mathfrak{r}$ et $\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{r}^\ell \Rightarrow \mathfrak{p}_j \subset \mathfrak{r}^{\ell+1-j}$.

En fait, on sait que $\mathfrak{E}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{E}(\mathfrak{p}_1)$ et donc $m_{\boldsymbol{x}}(\mathfrak{p}) = m_{\boldsymbol{x}}(\mathfrak{p}_1)$, mais on n'a aucune relation entre $m_{\boldsymbol{x}}(\mathfrak{p}_\ell)$ et $m_{\boldsymbol{x}}(\mathfrak{p}) + 1 - \ell$ pour $\ell > 1$. Par exemple, le polynôme irréductible $X_1X_3^3 + X_2^2X_4^2 + X_1^2X_4^2$ de $R[X_0, X_1, X_2, X_3, X_4]$ engendre un idéal principal $\mathfrak{p}$ de multiplicité $m_{\boldsymbol{x}}(\mathfrak{p}) = 4$ en $\boldsymbol{x} = (1,0,0,0,0) \in R^5$, on a $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}$ tandis que les composantes primaires isolées de $\mathfrak{p}_2^\sharp$ sont (X_3^2, X_4) et $(X_1^2, X_1X_3^2, X_2, X_3^2 + 2X_1X_4^2)$ et celle de $\mathfrak{p}_3^\sharp$ est $(X_1^2 + X_2^2, X_3, X_4)$. On calcule ainsi $m_{\boldsymbol{x}}(\mathfrak{p}_2) = 2 = m_{\boldsymbol{x}}(\mathfrak{p}_3)$. De l'autre côté, si $\mathfrak{p} = (X_1^4 - X_2^3X_0)$ dans $R[X_0, X_1, X_2]$ on a $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}_2 = (X_1^3, X_2^2)$ et $\mathfrak{p}_3 = (X_1^2, X_2)$. On trouve donc $m_{\boldsymbol{x}}(\mathfrak{p}) = 3$, $m_{\boldsymbol{x}}(\mathfrak{p}_2) = 6$ et $m_{\boldsymbol{x}}(\mathfrak{p}_3) = 2$ en $\boldsymbol{x} = (0,0,1)$.

Nous savons qu'en général la longueur du module

$$(A[\mathbf{s}]/(\mathfrak{F},\gamma_1,\cdots,\gamma_{r-1}))_{\mathfrak{r}}$$

peut être plus grande que $m_{\mathbf{x}}(\mathfrak{F})$, Amoroso a remarqué $[A_2]$, qu'en revanche, l'exposant de l'idéal $\mathfrak{r}$-primaire $(\mathfrak{F},\gamma_1,\cdots,\gamma_{r-1}))_{\mathfrak{r}}$ est toujours inférieur ou égal à $m_{\mathbf{x}}(\mathfrak{F})$. En effet, avec la spécialisation introduite plus haut, $\rho\circ\mathfrak{d}^{(1)}\circ\cdots\circ\mathfrak{d}^{(r-1)}(f)\in\mathfrak{E}(\mathfrak{F},\gamma_1,\cdots,\gamma_{r-1})$ est donc la plus grande puissance de $(u_0^{(r)}.x_0+\cdots+u_n^{(r)}.x_n)$ qui divise une forme éliminante de $(\mathfrak{F},\gamma_1,\cdots,\gamma_{r-1})$ est inférieure ou égale à $\mathrm{ord}_{\mathbf{x}}\mathfrak{d}^{(r)}\circ\rho\circ\mathfrak{d}^{(1)}\circ\cdots\mathfrak{d}^{(r-1)}(f)=m_{\mathbf{x}}(\mathfrak{F})$, enfin cette puissance est l'exposant de la composante $\mathfrak{r}$- primaire de $(\mathfrak{F},\gamma_1,\cdots,\gamma_{r-1})$ c'est-à-dire l'exposant de $(\mathfrak{F},\gamma_1,\cdots,\gamma_{r-1})_{\mathfrak{r}}$.

PROPOSITION 4. *Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier homogène de A, on a pour tout $\mathbf{x}\in K^{n+1}\setminus\{0\}$ et avec les notations précédentes $\mathfrak{p}^{m_{\mathbf{x}}(\mathfrak{p})}\subseteq(\mathfrak{p}_1)_{\mathfrak{r}}\cap A$.*

DÉMONSTRATION: Voir $[A_2]$, corollaire 3.

COROLLAIRE. *On a $\mathfrak{p}^{D(\mathfrak{p})/r}\subseteq\mathfrak{p}_1$ et $\mathfrak{p}=(\mathfrak{p}_1)_{\mathfrak{r}}\cap A$ si $m_{\mathbf{x}}(\mathfrak{p})=1$.*

DÉMONSTRATION: Il suffit de remarquer que $\max\{m_{\mathbf{x}}(\mathfrak{p});\ \mathbf{x}\}\leq d^{\circ}_{\mathcal{U}_r}f=D(\mathfrak{p})/r$ où f est une forme résultante (ou éliminante) de $\mathfrak{p}$ d'une part, et qu'on a toujours $\mathfrak{p}_1\subseteq\mathfrak{p}$ d'autre part.

REFÉRENCES

[A1] F. AMOROSO, *Polynomials with high multiplicities.* Soumis pour publication à Acta Arithmetica.

[A2] F. AMOROSO, *Théorie de la multiplicité et formes éliminantes.* typographié.

[B] W.D. BROWNAWELL, *Bounds for the degrees in the Nullstellensatz.* Annals of Math. 126, 1987, 577–591.

[BY] C. BERENSTEIN et A. YGER, *Effective Bezout identities in* $\mathbb{Q}[X_0,\cdots,X_n]$. typographié.

[CGH] L. CANIGLIA, A. GALLIGO et J. HEINTZ, *Bornes simple exponentielle pour les degrés dans le théorème des zéros sur un corps de caractéristique quelconque,* C.R. Acad. Sci. Paris **307 sér. I,** (1988), 255–258.

[C] M. CHARDIN, *Une majoration de la fonction de Hilbert et ses conséquences pour l'interpolation algébrique,* Bull. Soc.Math. France,. à paraître.

[H] G. HERMANN, *Die Frage der endlich vielen Schritte in der Theorie der Polynomideale,* Math. Ann. **95** (1926), 736–788.

[Hi] D. HILBERT, *Über die vollen Invariantensysteme,* Math. Ann. **42** (1893), 313–373.

[HN] K. HENZELT et E. NOETHER, *Zur Theorie der Polynomideale und Resultanten*, Math. Ann. **88** (1922), 53–79.

[K] J. KOLLÁR, *Sharp effective Nullstellensatz*, Journal of the Amer. Math. Soc. **1** **n° 4** (1988), 963–975.

[L] D. LAZARD, *Algèbre linéaire sur* $K[X_1, \cdots, X_n]$ *et élimination*, Bull. Soc. Math. France **105** (1977), 165–190.

[LT] J. LIPMAN et B. TEISSIER, *Pseudo-rational local rings and a theorem of Briançon-Skoda about integral closures of ideals*, Michigan Math. J. **28** (1981), 97–116.

[N1] Y.V. NESTERENKO, *Estimates for the orders of zeros of functions of a certain class and their applications in the theory of transcendental numbers*, Izv. Akad. Nauk. USSR Math. **41** (1977), 253–284. =Math. USSR Izv. **11** (1977), 239-270.

[N2] Y.V. NESTERENKO, *Estimates for the characteristic function of a prime ideal*, Mat. Sbornik **123(165)** (1984), 11–34. = Math. USSR Sbornik **51;1** (1985), 9-32.

[No] D.G. NORTHCOTT, *Lessons on rings, modules and multiplicities*, Cambridge Univ. Press (1968).

[P1] P. PHILIPPON, *Critères pour l'indépendance algébrique*, Publications Math. de l'I.H.E.S. **64** (1986), 5–52.

[P2] P. PHILIPPON, *A propos du texte de W.D. Brownawell: "Bounds for the degrees in the Nullstellensatz"*, Annals of Math **127** (1988), 367–371.

[P3] P. PHILIPPON, *Dénominateurs dans le théorème des zéros de Hilbert.* soumis pour publication à Acta Arithmetica.

[R] J.L. RABINOVITSCH, *Zum Hilbertschen Nullstellensatz*, Math. Ann. **10** (1929), p. 520.

[Re] M. REUFEL, *Konstruktionsverfahren bei Moduln über Polynomringen*, Math. Zeitschrift **90** (1965), 231–250.

[Se] A. SEIDENBERG, *Constructions in algebra*, Trans. Amer. Math. Soc. **197** (1974), 273–313.

[S] H. SKODA, *Applications des techniques* L^2 *à la théorie des idéaux d'algèbres de fonctions holomorphes avec poids*, Ann. Sci. ENS (4ème série) **5** (1972), 545–579.

U.R.A. 763 du C.N.R.S., Institut Henri Poincaré,
11, rue Pierre et Marie Curie, F-75231 Paris cedex 05