

ANNALES MATHÉMATIQUES



BLAISE PASCAL

MOHAMED AIT OUAHRA, ABDELGHANI KISSAMI & AISSA SGHIR

Un principe d'invariance de type Donsker dans une classe d'espaces de Besov-Orlicz

Volume 19, n° 1 (2012), p. 263-269.

http://ambp.cedram.org/item?id=AMBP_2012__19_1_263_0

© Annales mathématiques Blaise Pascal, 2012, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales mathématiques Blaise Pascal » (<http://ambp.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://ambp.cedram.org/legal/>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

*Publication éditée par le laboratoire de mathématiques
de l'université Blaise-Pascal, UMR 6620 du CNRS
Clermont-Ferrand — France*

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>*

Un principe d'invariance de type Donsker dans une classe d'espaces de Besov-Orlicz

MOHAMED AIT OUAHRA
 ABDELGHANI KISSAMI
 AISSA SGHIR

Résumé

Dans ce papier, nous allons étendre le principe classique d'invariance de Donsker [4] dans une classe des espaces de Besov-Orlicz associés à la \mathcal{N} -fonction exponentielle $M_2(x) = \exp(x^2) - 1$.

1. Introduction

Le résultat classique connu sous le nom du théorème de la limite centrale assure que pour toute suite de variables aléatoires réelles i.i.d $(X_n)_{n \geq 1}$ centrées, de variance σ^2 finie, la suite $\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n X_k\right)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant une loi normale standard. La version fonctionnelle du théorème de la limite centrale connue sous le nom de principe d'invariance a été établie par Donsker [4], dans l'espace des fonctions continues $\mathcal{C}([0, 1])$, muni de la topologie de la convergence uniforme, et dans l'espace $\mathcal{D}([0, 1])$, muni de la topologie de Skorohod pour les processus discontinus.

Théorème 1.1. *Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d centrées, de variance σ^2 finie et soit $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ et $S_0 = 0$. Alors, la suite des processus*

$$\left\{ \xi_n(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{[nt]}, \quad 0 \leq t \leq 1 \right\},$$

converge faiblement, lorsque $n \rightarrow +\infty$, vers un mouvement Brownien standard, dans l'espace $\mathcal{D}([0, 1])$.

Mots-clés : Espaces de Besov-Orlicz, Principe d'invariance de type Donsker, Convergence faible, Tension.

Classification math. : 46E30, 60F17.

Théorème 1.2. *Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d centrées, de variance σ^2 finie et soit $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ et $S_0 = 0$. Alors, la suite des processus*

$$\left\{ \gamma_n(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \left(S_{[nt]} + (nt - [nt])X_{[nt]+1} \right), \quad 0 \leq t \leq 1 \right\},$$

converge faiblement, lorsque $n \rightarrow +\infty$, vers un mouvement Brownien standard, dans l'espace $\mathcal{C}([0, 1])$.

Ce genre de théorèmes ont été étudiés par Hamadouche [5] et Lamperti [7] dans l'espace de Hölder et Morel [8] dans les espaces de Besov standard. D'autre part, Kerkycharian et Roynette [6] ont donné une autre démonstration du résultat de Lamperti [7] en utilisant la base de Schauder. Dans ce papier, nous allons étendre ces deux théorèmes à la topologie des espaces de Besov-Orlicz associés à la \mathcal{N} -fonction exponentielle $M_2(x) = \exp(x^2) - 1$.

Soit la \mathcal{N} -fonction M_β définie par :

$$M_\beta(x) = \begin{cases} e^{|x|^\beta} - 1 & \text{si } \beta \geq 1, \\ E_\beta(x) - E_\beta(0) & \text{si } 0 < \beta < 1, \end{cases}$$

où $E_\beta(x) = E_\beta(-x)$ est le prolongement de la partie convexe de $e^{|x|^\beta}$ sur $[x_\beta, +\infty[$ par sa tangente au point $x_\beta > 0$. ($e^{|x|^\beta}$ change de concavité en x_β).

Le reste de ce papier est organisé comme suit : Dans la deuxième partie, nous présentons quelques notions de base sur la théorie des espaces de Besov-Orlicz, associés à la \mathcal{N} -fonction exponentielle M_β , pour $\beta > 0$. La dernière partie est réservée à la démonstration de nos résultats.

2. Espaces de Besov-Orlicz

Pour la théorie de base des espaces de Besov-Orlicz, nous renvoyons le lecteur à Boufoussi [2] et Ciesielski et al. [3]. Cependant, nous présentons un bref aperçu sur ces espaces.

Soit (Ω, Σ, μ) un espace de mesure finie. L'espace d'Orlicz $\mathbf{L}_{M_\beta(d\mu)}(\Omega)$ associé à la \mathcal{N} -fonction M_β , pour $\beta > 0$, est l'espace de Banach des fonctions $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mesurables muni de la norme

$$\|f\|_{M_\beta(d\mu)} = \inf_{\lambda > 0} \left\{ \int_{\Omega} M_\beta\left(\left| \frac{f(\cdot)}{\lambda} \right|\right) d\mu(\cdot) < 1 \right\}.$$

PRINCIPE D'INVARIANCE DE TYPE DONSKER

Dans le cas d'un espace probabilisé (Ω, Σ, P) , on a

$$\|f\|_{M_\beta(dP)} = \inf_{\lambda > 0} \left\{ \mathbb{E}(M_\beta(|\frac{f}{\lambda}|)) < 1 \right\}.$$

Le module de continuité d'une fonction f définie sur $[0, 1]$ en norme d'Orlicz est défini pour tout $h \in \mathbb{R}$ par :

$$\omega_{M_\beta}(f, t) = \sup_{|h| \leq t} \|\Delta_h f\|_{M_\beta(dx)},$$

où $\Delta_h f(x) = \mathbf{1}_{[0, 1-h]}(x)[f(x+h) - f(x)]$ et dx est la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$.

Pour tout $0 < \mu < 1$ et $\nu > 0$, l'espace de Besov-Orlicz noté $\mathbf{B}_{M_\beta, \infty}^{\omega_{\mu, \nu}}$, est l'espace de Banach des fonctions continues $f \in \mathbf{L}_{M_\beta(dx)}([0, 1])$ muni de la norme

$$\|f\|_{M_\beta, \infty}^{\omega_{\mu, \nu}} = \|f\|_{M_\beta(dx)} + \sup_{0 < t \leq 1} \frac{\omega_{M_\beta}(f, t)}{\omega_{\mu, \nu}(t)},$$

où

$$\omega_{\mu, \nu}(t) = t^\mu (1 + \log(\frac{1}{t}))^\nu.$$

Muni de cette norme, l'espace $\mathbf{B}_{M_\beta, \infty}^{\omega_{\mu, \nu}}$ n'est pas séparable. Par contre, il contient un sous espace fermé et séparable noté $\mathbf{B}_{M_\beta, \infty}^{\omega_{\mu, \nu}, 0}$ qui correspond aux fonctions f telles que $\omega_{M_\beta}(f, t) = o(\omega_{\mu, \nu}(t))$, quand $t \rightarrow 0$.

Nous savons que toute fonction f continue sur $[0, 1]$, se décompose dans la base de Schauder $\{\varphi_n = \varphi_{j,k}, j \geq 0, k = 1, \dots, 2^j\}$

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(f) \varphi_n(t),$$

où la convergence est uniforme et les coefficients dans cette base sont donnés par

$$\begin{cases} C_0(f) = f(0), \quad C_1(f) = f(1) - f(0), \\ n = 2^j + k, \quad j \geq 0, \quad k = 1, \dots, 2^j, \\ C_n(f) = f_{j,k} = 2^{\frac{j}{2}} \left[2f(\frac{2k-1}{2^{j+1}}) - f(\frac{2k-2}{2^{j+1}}) - f(\frac{2k}{2^{j+1}}) \right]. \end{cases}$$

Les preuves des deux théorèmes suivants se trouvent dans Ait Ouahra et al. [1], le premier caractérise la régularité Besov-Orlicz des trajectoires du mouvement Brownien standard et le deuxième donne un critère de tension dans les espaces de Besov-Orlicz.

Théorème 2.1. Soit $\{B_t, t \geq 0\}$ un mouvement Brownien standard. Alors p.s, la trajectoire $t \rightarrow B_t$ appartient à l'espace de Besov-Orlicz $\mathbf{B}_{M_2, \infty}^{\omega_{\frac{1}{2}, \nu, 0}}$, $\forall \nu > 1$.

Théorème 2.2. Soit $(X_t^n : t \in [0, 1])_{n \geq 1}$ une suite de processus stochastiques définis sur (Ω, Σ, P) satisfaisant les hypothèses suivantes

- (1) $X_0^n = 0$, pour tout $n \geq 1$.
- (2) Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tous $t, s \in [0, 1]$, on a,

$$\|X_t^n - X_s^n\|_{M_\beta(dP)} \leq C|t - s|^\mu.$$

Alors, la famille des lois de $(X_t^n : t \in [0, 1])$ est tendue dans $\mathbf{B}_{M_\beta, \infty}^{\omega_{\mu, \nu, 0}}$, pour tous $\beta \geq 1$, $0 < \mu < 1$ et $\nu > 1$.

3. Les résultats principaux

Théorème 3.1. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d centrées, de variance σ^2 finie, et soit $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ et $S_0 = 0$. Alors, la suite des processus

$$\left\{ \xi_n(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{[nt]}, \quad 0 \leq t \leq 1 \right\},$$

converge faiblement, lorsque $n \rightarrow +\infty$, vers un mouvement Brownien standard, dans l'espace de Besov-Orlicz $\mathbf{B}_{M_2, \infty}^{\omega_{\frac{1}{2}, \nu, 0}}$, pour tout $\nu > 1$.

Théorème 3.2. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d centrées, de variance σ^2 finie, et soit $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ et $S_0 = 0$. Alors, la suite des processus

$$\left\{ \gamma_n(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \left(S_{[nt]} + (nt - [nt])X_{[nt]+1} \right), \quad 0 \leq t \leq 1 \right\},$$

converge faiblement, lorsque $n \rightarrow +\infty$, vers un mouvement Brownien standard, dans l'espace de Besov-Orlicz $\mathbf{B}_{M_2, \infty}^{\omega_{\frac{1}{2}, \nu, 0}}$, pour tout $\nu > 1$.

On a besoin du lemme suivant de Morrow [9] dont la preuve se trouve dans Zhonggen Su [10].

Lemme 3.3. Soit $0 < \beta \leq 2$. Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires i.i.d centrées telles que $\|X_1\|_{M_\beta(dP)} < \infty$, alors il existe une constante $0 < C_\beta < \infty$ telle que

$$\left\| \frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}} \right\|_{M_\beta(dP)} \leq C_\beta \|X_1\|_{M_\beta(dP)}.$$

Remarque 3.4. Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires i.i.d centrées telles que pour tout $p \geq 1$, $\|X_1\|_p < \infty$, alors il existe une constante $0 < C_p < \infty$ telle que

$$\left\| \frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}} \right\|_p \leq C_p \|X_1\|_p.$$

C'est l'inégalité de Marcinkiewicz-Zygmund.

Preuve du Théorème 3.1. Il suffit d'établir que la famille $(\xi_n(t))$ est tendue dans l'espace $\mathbf{B}_{M_2, \infty}^{\omega_{\frac{1}{2}, \nu, 0}}$, pour tout $\nu > 1$.

$$\begin{aligned} \|\xi_n(t) - \xi_n(s)\|_{M_2(dP)} &= \left\| \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{k=[ns]}^{[nt]-1} X_k \right\|_{M_2(dP)} \\ &= \left| \frac{\sqrt{[nt] - [ns]}}{\sigma\sqrt{n}} \right| \left\| \sum_{k=[ns]}^{[nt]-1} \frac{X_k}{\sqrt{[nt] - [ns]}} \right\|_{M_2(dP)}. \end{aligned}$$

Remarquons que pour n assez grand,

$$\left| \frac{\sqrt{[nt] - [ns]}}{\sqrt{n}} \right| \leq |t - s|^{\frac{1}{2}}.$$

Il suffit donc de montrer qu'il existe une constante $0 < C < \infty$, telle que pour tout n assez grand,

$$\left\| \sum_{k=[ns]}^{[nt]-1} \frac{X_k}{\sqrt{[nt] - [ns]}} \right\|_{M_2(dP)} \leq C,$$

ce qui est le cas d'après Lemme 3.3. □

Preuve du Théorème 3.2. Il suffit d'établir que la famille $(\gamma_n(t))$ est tendue dans l'espace $\mathbf{B}_{M_2, \infty}^{\omega_{\frac{1}{2}, \nu, 0}}$, pour tout $\nu > 1$.

Premier cas : $[nt] = [ns]$.

Dans ce cas $[nt] \leq ns \leq nt < [nt] + 1$, et par suite $\frac{[nt]}{n} \leq s \leq t < \frac{[nt]+1}{n}$, ce qui implique que $\sqrt{n}|t - s| \leq 1$. Donc,

$$\|\gamma_n(t) - \gamma_n(s)\|_{M_2(dP)} = \sqrt{n}|t - s| \frac{\|X_{[nt]+1}\|_{M_2(dP)}}{\sigma} \leq \frac{\|X_1\|_{M_2(dP)}}{\sigma} |t - s|^{\frac{1}{2}}.$$

Deuxième cas : $[ns] < [nt]$.

Dans ce cas $[ns] \leq ns < [ns] + 1 \leq [nt] \leq nt < [nt] + 1$, et par suite $\frac{[ns]}{n} \leq s < \frac{[ns]+1}{n} \leq \frac{[nt]}{n} \leq t < \frac{[nt]+1}{n}$. Donc,

$$\begin{aligned} \|\gamma_n(t) - \gamma_n(s)\|_{M_2(dP)} &\leq \|\gamma_n(t) - \gamma_n\left(\frac{[nt]}{n}\right)\|_{M_2(dP)} \\ &\quad + \|\gamma_n\left(\frac{[nt]}{n}\right) - \gamma_n\left(\frac{[ns]}{n}\right)\|_{M_2(dP)} + \|\gamma_n(s) - \gamma_n\left(\frac{[ns]}{n}\right)\|_{M_2(dP)}. \end{aligned}$$

D'après le premier cas, il existe une constante $0 < C < \infty$ telle que

$$\|\gamma_n(t) - \gamma_n\left(\frac{[nt]}{n}\right)\|_{M_2(dP)} \leq C|t - s|^{\frac{1}{2}},$$

et

$$\|\gamma_n(s) - \gamma_n\left(\frac{[ns]}{n}\right)\|_{M_2(dP)} \leq C|t - s|^{\frac{1}{2}},$$

en remarquant que $[nt] = [nt']$ et $[ns] = [ns']$, avec $t' = \frac{[nt]}{n}$ et $s' = \frac{[ns]}{n}$.

Pour le terme du milieu, la même technique utilisée dans la démonstration du Théorème 3.1, entraîne qu'il existe une constante $0 < C' < \infty$ telle que

$$\|\gamma_n\left(\frac{[nt]}{n}\right) - \gamma_n\left(\frac{[ns]}{n}\right)\|_{M_2(dP)} = \|\gamma_n(t') - \gamma_n(s')\|_{M_2(dP)} \leq C'|t - s|^{\frac{1}{2}}.$$

La preuve du Théorème 3.2 est ainsi achevée. \square

Références

- [1] M. AIT OUAHRA, A. KISSAMI & A. SGHIR – « Un critère de tension dans les espaces de Besov-Orlicz et applications au problème du temps d'occupations », *Ann. Math. Blaise. Pascal* **18(2)** (2011), p. 237–257.
- [2] B. BOUFOUSSI – « Espaces de Besov : Caractérisations et Applications. », Thèse, Université Henri Poincaré. Nancy. France, 1994.
- [3] Z. CIESIELSKI, G. KERKYACHARIAN & B. ROYNETTE – « Quelques espaces fonctionnels associés à des processus gaussiens », *Studia Mathematica* **107(2)** (1993), p. 171–204.

PRINCIPE D'INVARIANCE DE TYPE DONSKER

- [4] M. D. DONSKER – « An invariance principle for certain probability limit theorems », *Mem. Amer. Math. Soc.*, **1951** (1951), no. 6, p. 12.
- [5] D. HAMADOUCHE – « Invariance principles in Hölder spaces », *Portugal. Math* **57(2)** (2000), p. 127–151.
- [6] G. KERKYACHARIAN & B. ROYNETTE – « Une démonstration simple des théorèmes de Kolmogorov, Donsker et Itô-Nisio », *C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. I* **312** (1991), p. 877–882.
- [7] J. LAMPERTI – « On convergence of stochastic processes », *Trans. Amer. Math. Soc* **104** (1962), p. 430–435.
- [8] B. MOREL – « Weak convergence of summation processes in Besov spaces », *Studia Mathematica* **165** (2004), p. 19–37.
- [9] J. G. MORROW – « On a central limit theorem motivated by somme Fourier series with dependent coefficients », Unpublished manuscript, 1984.
- [10] Z. SU – « Central limit theorems for random processes with sample paths in exponential Orlicz spaces », *Stochastic Processes and their applications* **66** (1997), p. 1–20.

MOHAMED AIT OUAHRA
Laboratoire de Modélisation Stochastique
et Déterministe et URAC 04
Faculté des Sciences Oujda
B.P. 717
Maroc
ouahra@ucam.ac.ma

ABDELGHANI KISSAMI
Laboratoire de Modélisation Stochastique
et Déterministe et URAC 04
Faculté des Sciences Oujda
B.P. 717
Maroc
Kissami@fso.ump.ma

AISSA SGHIR
Laboratoire de Modélisation Stochastique
et Déterministe et URAC 04
Faculté des Sciences Oujda
B.P. 717
Maroc
semastai@hotmail.fr