ANNALES MATHÉMATIQUES

BLAISE PASCAL

Mohamed Ait Ouahra, Abdelghani Kissami & Aissa Sghir

Un critère de tension dans les espaces de Besov-Orlicz et applications au problème du temps d'occupation

Volume 18, n^{o} 2 (2011), p. 301-321.

<http://ambp.cedram.org/item?id=AMBP_2011__18_2_301_0>

Publication éditée par le laboratoire de mathématiques de l'université Blaise-Pascal, UMR 6620 du CNRS Clermont-Ferrand — France

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques

http://www.cedram.org/

Annales mathématiques Blaise Pascal **18**, 301-321 (2011)

Un critère de tension dans les espaces de Besov-Orlicz et applications au problème du temps d'occupation

Mohamed Ait Ouahra
Abdelghani Kissami
Aissa Sghir

Résumé

Dans ce travail, nous présentons une nouvelle caractérisation de la norme des espaces de Besov-Orlicz associés à la $\mathcal{N}$-fonction exponentielle M_β pour $\beta > 0$. Nous utilisons cette nouvelle norme et un lemme de Marcus et Pisier [15], pour démontrer un critère de tension et de régularité dans les espaces de Besov-Orlicz pour $\beta \geq 1$. Nous étudions ensuite dans les espaces de Besov-Orlicz pour $\beta = 1$, des théorèmes limites pour les mesures d'occupations du temps local du processus stable symétrique d'indice $1 < \alpha \leq 2$, ce qui présente une généralisation des résultats de Ait Ouahra et *al.* [1] dans les espaces de Besov standards.

1. Introduction

La relative compacité dans les espaces probabilisés est la clé de l'étude de la convergence faible. Une famille $\mathcal{F}$ des mesures de probabilités dans un espace métrique $(S, \mathcal{B}(S))$ est dite tendue si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un compact $K \subseteq S$ tel que $P(K) \geq 1 - \epsilon$, pour toute $P \in \mathcal{F}$. Le théorème de Prohorov (voir Billingsly [5]) affirme que si $(S, \mathcal{B}(S))$ est un espace métrique complet et séparable, alors la relative compacité est une condition nécessaire et suffisante pour la tension.

Nous nous intéressons aux théorèmes limites des processus de la forme

$$\frac{1}{\lambda^{\frac{\alpha-1}{\alpha}-\frac{\gamma}{\alpha}}} \int_0^{\lambda t} f(X_s)ds, \tag{1.1}$$

Mots-clés : Espace de Besov-Orlicz, Théorèmes limites, Tension, Processus stables, Temps local, Dérivée fractionnaire.
Classification math. : 46E30, 60F17.

où f est la dérivée fractionnaire d'ordre γ d'une certaine fonction g höldérienne d'ordre δ et à support compact, et $X = \{X_t, t \geq 0\}$ est un processus stable symétrique d'indice $1 < \alpha \leq 2$. Ce genre de théorèmes limites a été étudié par Yamada [21], [22] dans le cas $\alpha = 2$, (i.e. X est un mouvement Brownien), et Fitzsimmons et Getoor [10] pour le processus stable symétrique d'indice $1 < \alpha \leq 2$. Tous ces résultats sont obtenus dans l'espace des fonctions continues. Dans un autre point de vue de généralisation, Ait Ouahra et Eddahbi [2] ont étudié les résultats de Fitzsimmons et Getoor [10] dans l'espace de Hölder et Ait Ouahra et *al.* [1] dans les espaces de Besov standards.

Soit $\delta > 0$ et considérons l'espace $\mathcal{C}^\delta$ des fonctions localement höldériennes d'ordre δ. Pour $\gamma \in]0, \delta[$, on définit la dérivée fractionnaire d'ordre γ d'une fonction f appartenant à $\mathcal{C}^\delta \cap L^1(\mathbb{R})$ par

$$D_{\pm}^{\gamma} f(x) := \frac{1}{\Gamma(-\gamma)} \int_0^{+\infty} \frac{f(x \pm y) - f(x)}{y^{1+\gamma}} dy,$$

et on définit l'opérateur D^γ par

$$D^\gamma := D_+^\gamma - D_-^\gamma.$$

Puisque la fonction $y \to \frac{1}{y}$ n'est pas intégrable à l'infini, la définition de $D_{\pm}^{\gamma}$ doit être modifiée pour $\gamma = 0$, à savoir

$$D_{\pm}^{0} f(x) := -\int_0^{+\infty} \frac{f(x \pm y) - f(x) 1_{]0,1[}(y)}{y^{1+\gamma}} dy,$$

pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^\delta \cap L^1(\mathbb{R})$ et $\delta > 0$.

On note aussi

$$D^0 := D_+^0 - D_-^0,$$

qui est, à une constante près, la transformée de Hilbert.

Remarque 1.1. (1) D_+^γ et D_-^γ vérifient l'identité de dualité suivante

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) D_-^\gamma g(x) dx = \int_{\mathbb{R}} g(x) D_+^\gamma f(x) dx,$$

pour toutes fonctions $f, g \in \mathcal{C}^\delta \cap L^1(\mathbb{R})$, et $\gamma \in [0, \delta[$.

(2) Si $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a > 0$, alors

$$D_{\pm}^{\gamma}(h_a) = a^\gamma (D_{\pm}^{\gamma} h)_a, \quad \forall \gamma > 0.$$

$$D_{\pm}^{0}(h_a) = (D_{\pm}^{0} h)_a + h_a \log(a),$$

où h_a est la fonction définie par $h_a(x) = h(ax)$.

(3) Si $f \in \mathcal{C}^\delta \cap L^1(\mathbb{R})$ alors $Df \in \mathcal{C}^{\delta-\gamma}$, avec $D \in \{D^\gamma, D^\gamma_+, D^\gamma_-\}$ pour tout $0 \leq \gamma < \delta$.

Pour plus de détails sur les dérivées fractionnaires, nous renvoyons le lecteur à Hardy et Littlewood [12], Titchmarsh [19], Yamada [20] et Samko et *al.* [18].

Soit la $\mathcal{N}$-fonction M_β définie par

$$M_\beta(x) = \begin{cases} e^{|x|^\beta} - 1 & \text{si } \beta \geq 1, \\ E_\beta(x) - E_\beta(0) & \text{si } 0 < \beta < 1, \end{cases}$$

où $E_\beta(x) = E_\beta(-x)$ est le prolongement de la partie convexe de $e^{|x|^\beta}$ sur $[x_\beta, +\infty[$ par sa tangente au point $x_\beta > 0$. $e^{|x|^\beta}$ change de concavité en x_β. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $0 < \beta \leq 1$, il existe une constante $C_\beta > 0$ telle que,

$$e^{|x|^\beta} \leq E_\beta(x) \leq C_\beta e^{|x|^\beta}.$$

Le reste de ce papier est organisé comme suit : Dans la deuxième partie, nous présentons quelques notions de base sur la théorie des espaces de Besov-Orlicz, associés à la $\mathcal{N}$-fonction exponentielle M_β, $\beta > 0$. Dans la troisième partie, nous démontrons un critère de tension dans les espaces de Besov-Orlicz pour $\beta \geq 1$. La quatrième partie est consacrée à la présentation d'un critère de régularité Besov-Orlicz, avec quelques applications pour certains processus gaussiens, ainsi que le temps local et sa dérivée fractionnaire du processus stable symétrique d'indice $1 < \alpha \leq 2$. La dernière partie est réservée à l'étude des théorèmes limites pour les processus de la forme (1.1), dans les espaces de Besov-Orlicz pour $\beta = 1$.

2. Espaces de Besov-Orlicz

Pour la théorie de base des espaces de Besov-Orlicz, nous renvoyons le lecteur à Boufoussi [6], Ciesielski [8] et Ciesielski et *al.* [9]. Cependant, nous présentons un bref aperçu sur ces espaces.

Définition 2.1. Soit (Ω, Σ, μ) un espace de mesure fini. L'espace d'Orlicz $\mathbf{L}_{M_\beta(d\mu)}(\Omega)$ associé à la $\mathcal{N}$-fonction M_β, pour $\beta > 0$, est l'espace de Banach des fonctions $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurables muni de la norme

$$\|f\|_{M_\beta(d\mu)} = \inf_{\lambda > 0} \left\{ \int_\Omega M_\beta(| \frac{f(.)}{\lambda} |) d\mu(.) < 1 \right\}.$$

Cette norme est équivalente à la norme de Luxemburg [14] donnée par

$$\|f\|_{M_\beta} = \inf_{\lambda>0} \frac{1}{\lambda}\left\{1+\int_\Omega M_\beta(\mid \lambda f(.)\mid)d\mu(.)\right\}.$$

L'espace d'Orlicz associé à la $\mathcal{N}$-fonction $M(x) = \frac{|x|^p}{p},\ p \geq 1$, est l'espace de Lebesgue ordinaire $\mathbf{L}^p(\Omega)$, muni de la norme $\|.\|_p^p = \int_\Omega |.|^p d\mu$.

Le théorème suivant nous donne une caractérisation de la norme d'Orlicz $\|.\|_{M_\beta}$ en terme de la norme $\|.\|_p,\ p\geq 1$. (Voir par exemple Ciesielski et *al.* [9]).

Théorème 2.2. *Pour tout $\beta > 0$, il existe une constante $C_\beta > 0$ telle que pour toute fonction $f \in \mathbf{L}_{M_\beta(d\mu)}$, on ait*

$$\frac{1}{C_\beta}\sup_{p\geq 1}\frac{\|f\|_p}{p^{\frac{1}{\beta}}} \leq \|f\|_{M_\beta(d\mu)} \leq C_\beta \sup_{p\geq 1}\frac{\|f\|_p}{p^{\frac{1}{\beta}}}.$$

Le lemme suivant et sa démonstration se trouvent dans Benchekroun et Benkirane [4].

Lemme 2.3. *Soit M une $\mathcal{N}$-fonction définie sur un espace de mesure fini (Ω,Σ,μ) et soit A un ouvert de Ω. Alors, pour toute fonction $f \in \mathbf{L}_{M(d\mu)}(A)$ et $g \in \mathbf{L}^\infty(A)$, on a*

$$\|f.g\|_{M(d\mu)} \leq \|f\|_{M(d\mu)}\|g\|_\infty,$$

avec $\|g\|_\infty = \sup_{x\in A}|g(x)|$.

Le module de continuité d'une fonction f définie sur $[0,1]$ en norme d'Orlicz est défini pour tout $h \in \mathbb{R}$ par

$$\omega_{M_\beta}(f,t) = \sup_{|h|\leq t}\|\Delta_h f\|_{M_\beta(dx)},$$

où dx est la mesure de Lesbegue sur $[0,1]$ et $\Delta_h f(x) = \mathbf{1}_{[0,1-h]}(x)[f(x+h)-f(x)]$.

Définition 2.4. Pour tout $0 < \mu < 1$ et $\nu > 0$, l'espace de Besov-Orlicz noté $\mathbf{B}^{\omega_{\mu,\nu}}_{M_\beta,\infty}$, est l'espace de Banach des fonctions continues $f \in \mathbf{L}_{M_\beta(dx)}([0,1])$ muni de la norme

$$\|f\|^{\omega_{\mu,\nu}}_{M_\beta,\infty} = \|f\|_{M_\beta(dx)} + \sup_{0<t\leq 1}\frac{\omega_{M_\beta}(f,t)}{\omega_{\mu,\nu}(t)},$$

où

$$\omega_{\mu,\nu}(t) = t^{\mu}(1 + \log(\frac{1}{t}))^{\nu}.$$

Muni de cette norme, l'espace $\mathbf{B}^{\omega_{\mu,\nu}}_{M_\beta,\infty}$ n'est pas séparable. Par contre, il contient un sous espace fermé et séparable noté $\mathbf{B}^{\omega_{\mu,\nu},0}_{M_\beta,\infty}$ qui correspond aux fonctions f telles que $\omega_{M_\beta}(f,t) = o(\omega_{\mu,\nu}(t))$, quand $t \to 0$.

Remarque 2.5. (1) L'espace d'Orlicz associé à la $\mathcal{N}$-fonction $M(x) = \frac{|x|^p}{p}$, $p \geq 1$, est l'espace de Lebesgue ordinaire $\mathbf{L}^p[0,1]$ muni de la norme $\|.\|_p$, et nous retrouvons l'espace de Besov Standard $\mathbf{B}^{\omega_{\mu,\nu}}_{p,\infty}$ muni de la norme

$$\|f\|^{\omega_{\mu,\nu}}_{p,\infty} = \|f\|_p + \sup_{0<t\leq 1} \frac{\omega_p(f,t)}{\omega_{\mu,\nu}(t)}.$$

(2) Si $p = +\infty$ et $f \in \mathcal{C}([0,1])$ où $\mathcal{C}([0,1])$ est l'espace des fonctions continues, alors $\mathbf{B}^{\omega_{\mu,\nu}}_{\infty,\infty}$ est l'espace des fonctions de Hölder $\mathcal{C}^{\omega_{\mu,\nu}}$, muni de la norme

$$\|f\|^{\omega_{\mu,\nu}} = \sup_{0\leq x\leq 1} |f(x)| + \sup_{0\leq x\neq y\leq 1} \frac{|f(x) - f(y)|}{\omega_{\mu,\nu}(|x-y|)}.$$

Le système de fonctions de Schauder $\{\varphi_{j,k}, j \geq 0, k = 1, ..., 2^j\}$ sur $[0,1]$ est défini par

$$\begin{cases} \varphi_0(t) = \mathbf{1}_{[0,1]}(t), \ \ \varphi_1(t) = t\mathbf{1}_{[0,1]}(t), \\ n = 2^j + k, \ \ j \geq 0, \ \ k = 1, ..., 2^j, \\ \varphi_{j,k}(t) = \varphi_n(t) = 2.2^{-\frac{j}{2}}\Phi(2^j t - k), \end{cases}$$

avec $\Phi(u) = u\mathbf{1}_{[0,\frac{1}{2}]}(u) + (1-u)\mathbf{1}_{]\frac{1}{2},1]}(u)$.

Nous savons que toute fonction f continue sur $[0,1]$, se décompose dans la base de Schauder

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(f)\varphi_n(t),$$

où la convergence est uniforme et les coefficients dans cette base sont donnés par

$$\begin{cases} C_0(f) = f(0), \ \ C_1(f) = f(1) - f(0), \\ n = 2^j + k, \ \ j \geq 0 \ \ , k = 1, ..., 2^j, \\ C_n(f) = f_{j,k} = 2^{\frac{j}{2}}(2f(\frac{2k-1}{2^{j+1}}) - f(\frac{2k-2}{2^{j+1}}) - f(\frac{2k}{2^{j+1}})). \end{cases}$$

Le théorème suivant qui est dû à Ciesielski et *al.* [9] caractérise la norme de Besov-Orlicz d'une fonction à l'aide de ses coefficients dans sa décomposition dans la base de Schauder.

Théorème 2.6.

$$\|f\|^{\omega_{\mu,\nu}}_{M_\beta,\infty} \sim \max\left\{|C_0(f)|, |C_1(f)|, \sup_{j\geq 0}\sup_{p\geq 1}\frac{2^{-j(\frac{1}{2}-\mu+\frac{1}{p})}}{p^{\frac{1}{\beta}}(1+j)^\nu}[\sum_{k=1}^{2^j}|f_{j,k}|^p]^{\frac{1}{p}}\right\},$$

$$f\in \mathbf{B}^{\omega_{\mu,\nu},0}_{M_\beta,\infty} \iff \lim_{j\to+\infty}\frac{2^{-j(\frac{1}{2}-\mu+\frac{1}{p})}}{p^{\frac{1}{\beta}}(1+j)^\nu}[\sum_{k=1}^{2^j}|f_{j,k}|^p]^{\frac{1}{p}}=0.$$

Nous allons construire une norme équivalente à la norme $\|.\|^{\omega_{\mu,\nu}}_{M_\beta,\infty}$. Pour chaque $j\geq 0$, on définit sur $T=\{1,...,2^j\}$ la variable aléatoire réelle $f_{j,.}$ définie par

$$f_{j,.}(k)=f_{j,k} \quad \forall\ k\in T,$$

telle que $f_{j,.}$ prend chacune des valeurs $\{f_{j,1},f_{j,2},..,f_{j,2^j}\}$ avec la probabilité $\frac{1}{2^j}$. Donc, $f_{j,.}$ suit la loi uniforme discrète θ définie sur T par

$$\theta(k):=\theta(f_{j,.}=f_{j,k})=\frac{1}{2^j} \quad \forall\ k\in T.$$

Le résultat principal de cette partie est le suivant.

Théorème 2.7.

$$\|f\|^{\omega_{\mu,\nu}}_{M_\beta,\infty} \sim \max\left\{|C_0(f)|, |C_1(f)|, \sup_{j\geq 0}\frac{2^{-j(\frac{1}{2}-\mu)}}{(1+j)^\nu}\|f_{j,.}\|_{M_\beta(d\theta)}\right\},$$

$$f\in \mathbf{B}^{\omega_{\mu,\nu},0}_{M_\beta,\infty} \iff \lim_{j\to+\infty}\frac{2^{-j(\frac{1}{2}-\mu)}}{(1+j)^\nu}\|f_{j,.}\|_{M_\beta(d\theta)}=0.$$

Démonstration. On note $\mathbb{E}_\theta$ l'espérance sous la mesure de probabilité θ,

$$\|f_{j,.}\|_p:=(\mathbb{E}_\theta|f_{j,.}|^p)^{\frac{1}{p}}=\left(\sum_{k=1}^{2^j}|f_{j,k}|^p\theta(k)\right)^{\frac{1}{p}}=2^{\frac{-j}{p}}\left(\sum_{k=1}^{2^j}|f_{j,k}|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Du Théorème 2.2, nous déduisons que

$$\|f_{j,.}\|_{M_\beta(d\theta)}\sim\sup_{p\geq 1}\frac{\|f_{j,.}\|_p}{p^{\frac{1}{\beta}}}=\sup_{p\geq 1}\frac{2^{\frac{-j}{p}}}{p^{\frac{1}{\beta}}}\left(\sum_{k=1}^{2^j}|f_{j,k}|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Donc,

$$\sup_{j\geq 0}\sup_{p\geq 1}\frac{2^{-j(\frac{1}{2}-\mu+\frac{1}{p})}}{p^{\frac{1}{\beta}}(1+j)^{\nu}}[\sum_{k=1}^{2^j}|f_{j,k}|^p]^{\frac{1}{p}}\sim\sup_{j\geq 0}\frac{2^{-j(\frac{1}{2}-\mu)}}{(1+j)^{\nu}}\|f_{j,.}\|_{M_\beta(d\theta)}.$$

La preuve du Théorème 2.7 est ainsi achevée. □

3. Tension dans les espaces de Besov-Orlicz

Nous allons établir un critère de tension dans les espaces de Besov-Orlicz $\mathbf{B}^{\omega_{\mu,\nu},0}_{M_\beta,\infty}$, $\beta\geq 1$. On va suivre la même technique utilisée dans Ait Ouahra et *al.* [1] dans le cas des espaces de Besov standards. Le théorème de Prohorov (voir Billingsly [5]), implique que la convergence faible d'une suite de processus stochastiques dans $\mathbf{B}^{\omega_{\mu,\nu},0}_{M_\beta,\infty}$, $\beta\geq 1$, est équivalente à la tension plus la convergence des lois fini-dimensionnelles de cette suite dans $\mathbf{B}^{\omega_{\mu,\nu},0}_{M_\beta,\infty}$ qui est séparable, et l'injection de $\mathbf{B}^{\omega_{\mu,\nu},0}_{M_\beta,\infty}$ vers $\mathbf{B}^{\omega_{\mu,\nu}}_{M_\beta,\infty}$ est continue. Donc, la convergence faible dans $\mathbf{B}^{\omega_{\mu,\nu},0}_{M_\beta,\infty}$ implique la convergence faible dans $\mathbf{B}^{\omega_{\mu,\nu}}_{M_\beta,\infty}$.

Lemme 3.1. *Soit $\beta>0$, $\varepsilon>0$, $0<\mu<1$ et $\nu>0$. On note*

$$H_\varepsilon(f,\mu,\nu,M_\beta)=\sup_{0<t\leq\varepsilon}\frac{\omega_{M_\beta}(f,t)}{\omega_{\mu,\nu}(t)}.$$

Soit $\mathcal{A}$ un espace des fonctions mesurables $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ telles que

$$\sup_{f\in\mathcal{A}}\|f\|^{\omega_{\mu,\nu}}_{M_\beta,\infty}<\infty,\tag{3.1}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup\sup_{f\in\mathcal{A}}H_\varepsilon(f,\mu,\nu,M_\beta)=0.\tag{3.2}$$

Alors $\mathcal{A}$ est relativement compact dans $\mathbf{B}^{\omega_{\mu,\nu},0}_{M_\beta,\infty}$.

On a besoin du théorème suivant dont la preuve se trouve dans Krasnosel'skii et Rutickii [13] (Théorème 11.4 - pp. 100). Ce théorème est une extension du théorème de Kolmogorov-Riesz dans les espaces d'Orlicz. Il a été generalisé par Goes et Welland [11] dans le cas des espaces de Khöte.

Théorème 3.2. *On note par $\mathbf{E}_{M_\beta}([0,1])$ la fermeture dans $\mathbf{L}_{M_\beta}([0,1])$ de l'espace des fonctions bornées. Soit $\mathcal{A}$ une partie bornée dans $\mathbf{E}_{M_\beta}([0,1])$ satisfaisant :*

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour toute fonction $f \in \mathcal{A}$, $|h| < \delta$ implique que $\|f(x+h) - f(x)\|_{M_\beta} < \varepsilon$. Alors $\mathcal{A}$ est compacte dans $\mathbf{E}_{M_\beta}([0,1])$.

Démonstration du Lemme 3.1. D'après le Théorème 3.2, les conditions (3.1) et (3.2) impliquent que $\mathcal{A}$ est relativement compacte dans $\mathbf{E}_{M_\beta}([0,1])$. Donc, pour toute suite $(f_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{A}$, on peut extraire une sous suite, notée aussi $(f_n)_n$, qui converge vers $f \in \mathbf{E}_{M_\beta}([0,1])$. Maintenant pour achever la preuve, on montre les deux points suivants

$$f \in \mathbf{B}^{\omega_{\mu,\nu},0}_{M_\beta,\infty}, \tag{3.3}$$

$$(f_n)_n \textit{ est une suite de Cauchy dans } f \in \mathbf{B}^{\omega_{\mu,\nu},0}_{M_\beta,\infty}. \tag{3.4}$$

Démontrons (3.3). Puisque $(f_n)_n$ converge dans $\mathbf{E}_{M_\beta}([0,1])$ vers f, alors $(f_n)_n$ converge vers f en norme de Luxemburg (voir Luxemburg [14]) et donc $(f_n)_n$ converge en mesure vers f. Par conséquent, on peut choisir une sous suite, notée aussi $(f_n)_n$, qui converge vers f presque partout. Par application simple du lemme de Fatou, on obtient

$$\begin{aligned}\|f(.+h) - f(.)\|_{M_\beta} &\leq \lim_{n\to\infty} \inf \|f_n(.+h) - f_n(.)\|_{M_\beta} \\ &\leq \sup_{n\geq 1} \|f_n(.+h) - f_n(.)\|_{M_\beta}.\end{aligned}$$

Donc, pour tout $t \in]0,1]$, nous avons

$$\omega_{M_\beta}(f,t) \leq \sup_{n\geq 1} \omega_{M_\beta}(f_n,t),$$

et par (3.1), on a

$$\sup_{0<t\leq 1} \frac{\omega_{M_\beta}(f,t)}{\omega_{\mu,\nu}(t)} \leq \sup_{n\geq 1} \sup_{0<t\leq 1} \frac{\omega_{M_\beta}(f_n,t)}{\omega_{\mu,\nu}(t)} < \infty.$$

De plus, (3.2) implique que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $n \geq 1$,

$$\sup_{0<t<\varepsilon_0} \frac{\omega_{M_\beta}(f_n,t)}{\omega_{\mu,\nu}(t)} < \varepsilon.$$

Donc, $\omega_{M_\beta}(f,t) = o(\omega_{\mu,\nu}(t))$, quand $t \to 0$. Ce qui complète la preuve de (3.3).

Montrons maintenant (3.4). Soit $n, m \geq 0$, on a

$$\|f_n - f_m\|^{\omega_{\mu,\nu}}_{M_\beta,\infty} = \|f_n - f_m\|_{M_\beta} + \sup_{0<t\leq 1} \frac{\omega_{M_\beta}(f_n - f_m,t)}{\omega_{\mu,\nu}(t)}.$$

Comme $\|f_n - f_m\|_{M_\beta} \to 0$, lorsque $n, m \to +\infty$, alors pour tout $\varepsilon_0 > 0$ assez petit,

$$\begin{aligned}
&\sup_{0<t\leq 1} \frac{\omega_{M_\beta}((f_n - f_m), t)}{\omega_{\mu,\nu}(t)} \\
&\qquad \leq \sup_{0<t\leq \varepsilon_0} \frac{\omega_{M_\beta}((f_n - f_m), t)}{\omega_{\mu,\nu}(t)} + \sup_{\varepsilon_0\leq t\leq 1} \frac{\omega_{M_\beta}((f_n - f_m), t)}{\omega_{\mu,\nu}(t)} \\
&\qquad \leq H_{\varepsilon_0}(f_n - f_m, \mu, \nu, M_\beta) + \frac{2\|f_n - f_m\|_{M_\beta}}{\min_{\varepsilon_0\leq t\leq 1} \omega_{\mu,\nu}(t)} \\
&\qquad \leq H_{\varepsilon_0}(f_n, \mu, \nu, M_\beta) + H_{\varepsilon_0}(f_m, \mu, \nu, M_\beta) + C(\mu, \nu, \varepsilon_0)\|f_n - f_m\|_{M_\beta} \\
&\qquad \leq 3\varepsilon.
\end{aligned}$$

Ce qui complète la preuve du lemme. □

Lemme 3.3. *Soit $\beta > 0$, $0 < \mu < 1$ et $0 < \nu < \nu'$. Alors, toute partie bornée de $\mathbf{B}^{\omega_{\mu,\nu}}_{M_\beta,\infty}$ est relativement compacte dans $\mathbf{B}^{\omega_{\mu,\nu'},0}_{M_\beta,\infty}$.*

Démonstration. Ce lemme est une conséquence immédiate des conditions (3.1) et (3.2) du lemme 3.1. Soit $\mathcal{A}$ une partie bornée de $\mathbf{B}^{\omega_{\mu,\nu}}_{M_\beta,\infty}$.

Il est clair que si $0 < \nu < \nu'$, alors $\|f\|^{\omega_{\mu,\nu'}}_{M_\beta,\infty} \leq \|f\|^{\omega_{\mu,\nu}}_{M_\beta,\infty}$ ce qui implique (3.1).

Pour (3.2), on a

$$\begin{aligned}
H_\varepsilon(f, \mu, \nu', M_\beta) &= \sup_{0<t\leq\varepsilon} \frac{\omega_{M_\beta}(f, t)}{\omega_{\mu,\nu'}(t)} \leq \sup_{0<t\leq\varepsilon} \frac{\omega_{M_\beta}(f, t)}{\omega_{\mu,\nu}(t)} \omega_{0,\nu-\nu'}(t) \\
&\leq H_\varepsilon(f, \mu, \nu, M_\beta)\omega_{0,\nu-\nu'}(t) \leq \|f\|^{\omega_{\mu,\nu}}_{M_\beta,\infty}\omega_{0,\nu-\nu'}(t),
\end{aligned}$$

ce qui entraîne que $H_\varepsilon(f, \mu, \nu', M_\beta) \to 0$ lorsque $\varepsilon \to 0$ car $\nu' - \nu > 0$ et le lemme précédent implique que $\mathcal{A}$ est relativement compacte dans $\mathbf{B}^{\omega_{\mu,\nu'},0}_{M_\beta,\infty}$. □

Lemme 3.4. *Soit $(X^n_t : t \in [0, 1])_{n\geq 1}$ une suite de processus stochastiques définies sur (Ω, Σ, P) satisfaisant les hypothèses suivantes*

(1) $X^n_0 = 0$*, pour tout* $n \geq 1$.

(2) *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tous $t, s \in [0, 1]$ on a,*

$$\|X^n_t - X^n_s\|_{M_\beta(dP)} \leq C|t - s|^\mu. \tag{3.5}$$

Alors, la famille des lois de $(X_t^n : t \in [0,1])$ *est tendue dans* $\mathbf{B}_{M_\beta,\infty}^{\omega_{\mu,\nu},0}$, *pour tous* $\beta \geq 1$, $0 < \mu < 1$ *et* $\nu > 1$.

La preuve du Lemme 3.4 repose sur le lemme suivant dû à Marcus et Pisier [15].

Lemme 3.5. *Soit* $T = \{1, 2, ..., N\}$ *et soit* $\{Z(t), t \in T\}$ *un processus stochastique défini sur* (Ω, Σ, P) *qui satisfait*

$$\|Z(t)\|_{M_\beta(dP)} \leq d, \quad \forall t \in T.$$

Alors, pour tous β *et* β' *tels que* $1 \leq \beta \leq \beta' \leq \infty$, *on a*

$$\mathbb{E}\|Z(t)\|_{M_{\beta'}(d\tau)} \leq d\, C_\beta \left(\log(N)\right)^{\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta'}},$$

où $d\tau$ *est une mesure de probabilité sur* T *et* C_β *est une constante positive qui dépend seulement de* β.

Démonstration du Lemme 3.4. Nous allons prouver que pour tout $\nu > 1$, il existe une constante $C > 0$, telle que pour tout $n \geq 1$, $\lambda > 0$ et $1 < \nu' < \nu$,

$$P\left\{\|X_.^n\|_{M_\beta,\infty}^{\omega_{\mu,\nu'}} > \lambda\right\} \leq \frac{C}{\lambda}.$$

La dernière inégalité entraîne que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe λ_0 assez grand tel que

$$P\left\{\|X_.^n\|_{M_\beta,\infty}^{\omega_{\mu,\nu'}} > \lambda_0\right\} \leq \varepsilon, \qquad \forall n \geq 1.$$

D'après la caractérisation du Théorème 2.7, il suffit de prouver que

$$\mathbf{I} = P\left\{\sup_{j\geq 0} \frac{2^{-j(\frac{1}{2}-\mu)}}{(1+j)^{\nu'}} \|X_{j,.}^n\|_{M_\beta(d\theta)} > \lambda\right\} \leq \frac{C}{\lambda}, \qquad \forall n \geq 1,$$

avec

$$X_{j,.}^n(k) = X_{j,k}^n = 2^{\frac{j}{2}}\{2X^n_{\frac{2k-1}{2^{j+1}}} - X^n_{\frac{2k-2}{2^{j+1}}} - X^n_{\frac{2k}{2^{j+1}}}\}.$$

Par application de l'inégalité de Tchebeshev, on a

$$\mathbf{I} \leq \frac{1}{\lambda} \sum_{j\geq 0} \frac{2^{-j(\frac{1}{2}-\mu)}}{(1+j)^{\nu'}} \mathbb{E}\|X_{j,.}\|_{M_\beta(d\theta)}.$$

La condition (3.5) du Lemme 3.4 implique que pour tout $h \in \mathbb{R}$ et $t \in [0,1]$ tel que $t+h$ et $t-h$ restent dans $[0,1]$, il existe une constante $C > 0$ telle que,

$$\|2X_t - X_{t+h} - X_{t-h}\|_{M_\beta(d\mathbb{P})} \leq Ch^\mu.$$

En particulier, pour $t = \frac{2k-1}{2^{j+1}}$ et $h = \frac{1}{2^{j+1}}$, on obtient

$$\|X_{j,k}\|_{M_\beta(dP)} \leq C2^{j(\frac{1}{2}-\mu)}.$$

Le Lemme 3.5 appliqué au processus $\{Z(k) = X_{j,k}, k \in T\}$ pour $T = \{1, ..., 2^j\}$, $\beta = \beta'$ et $d = C2^{j(\frac{1}{2}-\mu)}$, implique qu'il existe une constante $C_\beta > 0$ telle que

$$\mathbb{E}\|X_{j,.}\|_{M_\beta(d\theta)} \leq C_\beta 2^{j(\frac{1}{2}-\mu)}.$$

Donc,

$$\mathbf{I} \leq \frac{C_\beta}{\lambda} \sum_{j\geq 0} \frac{1}{(1+j)^{\nu'}} \leq \frac{C}{\lambda}, \quad \forall \nu' > 1.$$

Ce qui termine la preuve du lemme. □

4. Régularités Besov-Orlicz

Le résultat suivant caractérise la régularité des processus dans les espaces de Besov-Orlicz. Il se démontre avec la même technique utilisé dans la preuve du Lemme 3.4.

Lemme 4.1. *Soit $\{X_t, t \in [0,1]\}$ un processus stochastique défini sur (Ω, Σ, P). Supposons qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tous $t, s \in [0,1]$ et $\beta \geq 1$ on ait,*

$$\|X_t - X_s\|_{M_\beta(dP)} \leq C|t-s|^\mu.$$

Alors, la trajectoire $t \to X_t$ appartient p.s à l'espace de Besov-Orlicz $\mathbf{B}^{\omega_\mu,\nu,0}_{M_\beta,\infty}$ pour tout $\nu > 1$.

Nous présentons par la suite quelques applications du Lemme 4.1.

4.1. Régularité des processus gaussiens

Lemme 4.2. *Soit $\{X_t, t \in [0,1]\}$ un processus gaussien centré tel que,*

$$\mathbb{E}(X_t - X_s)^2 \leq C|t-s|^{2\mu}.$$

Alors, la trajectoire $t \to X_t$ appartient p.s à l'espace de Besov-Orlicz $\mathbf{B}^{\omega_\mu,\nu,0}_{M_2,\infty}$, $\forall \nu > 1$.

Démonstration. D'après Lemme 4.1, il suffit de montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|X_t - X_s\|_{M_2(dP)} \leq C|t-s|^{\mu}.$$

D'après la Remarque 3.2 de Marcus et Pisier [15], si $\{X_t, t \in [0,1]\}$ est un processus gaussien centré, alors il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|X_t - X_s\|_{M_2(dP)} \leq C(\mathbb{E}|X_t - X_s|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Donc,

$$\|X_t - X_s\|_{M_2(dP)} \leq C|t-s|^{\mu}.$$

□

4.2. **Cas particuliers**

(1) Dans le cas d'un mouvement Brownien fractionnaire $\{B_t^H, t \in [0,1]\}$ de paramètre de Hurst $H \in]0,1[$, on a

$$\mathbb{E}(B_t^H - B_s^H)^2 = C|t-s|^{2H}.$$

Donc, la trajectoire $t \to B_t^H$ appartient p.s à l'espace de Besov-Orlicz $\mathbf{B}_{M_2,\infty}^{\omega_{H,\nu},0}, \quad \forall \nu > 1$.

(2) Pour $H = \frac{1}{2}$, $B^{\frac{1}{2}}$ est un mouvement Brownien standard. Donc, la trajectoire $t \to B_t$ appartient p.s à l'espace de Besov-Orlicz $\mathbf{B}_{M_2,\infty}^{\omega_{\frac{1}{2},\nu},0}, \quad \forall \nu > 1$.

4.3. **Régularité du temps local**

Soit $X = \{X_t, t \geq 0\}$ un processus stable symétrique d'indice $1 < \alpha \leq 2$, issu de 0, i.e. le processus càdlàg à accroissements indépendants et stationnaires, de fonction caractéristique définie par

$$\mathbb{E}\exp(i\lambda X_t) = \exp(-t|\lambda|^{\alpha}), \qquad \forall t \geq 0, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Pour $\alpha = 2$, X est un mouvement Brownien.

Pour tout $t > 0$, on définit la mesure d'occupation $\mu_t(.)$ par

$$\mu_t(A) = \int_0^t 1_A(X_s)ds,$$

où $A \in \mathbb{R}$ est un borélien de $\mathbb{R}$ et 1_A est la fonction indicatrice de A. Il est bien connu d'après Boylan [7] et Barlow [3], que la mesure $\mu_t(.)$ admet, par rapport à la mesure de Lebesgue, une densité notée $L(t,x)$. Le processus $\{L(t,x), t \geq 0, x \in \mathbb{R}\}$ est appelé le temps local du processus X. De plus, $L(t,x)$ possède une version p.s continue en t et x qui vérifie la formule de densité d'occupation

$$\int_0^t f(X_s)ds = \int_{\mathbb{R}} f(x)L(t,x)dx,$$

pour toute fonction borélienne bornée, et la propriété de scaling

$$\left\{L(\lambda t, x\lambda^{\frac{1}{\alpha}})\right\}_{t\geq 0} \overset{\mathcal{L}}{=} \left\{\lambda^{1-\frac{1}{\alpha}} L(t,x)\right\}_{t\geq 0}, \qquad \forall\, \lambda > 0.$$

Lemme 4.3. *Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^+$, $t, s \in [0,1]$ et $p \geq 1$, on a*

$$\|L(t,x) - L(t,y)\|_{2p} \leq C_\alpha((2p)!)^{\frac{1}{2p}} t^{\frac{\alpha-1}{2\alpha}} |x-y|^{\frac{\alpha-1}{2}},$$

$$\|L(t,x) - L(s,x)\|_{p} \leq C'_\alpha((p)!)^{\frac{1}{p}} |t-s|^{\frac{\alpha-1}{\alpha}},$$

où, C_α et C'_α sont deux constantes positives et $\|.\|_p = (\mathbb{E}_p|.|^p)^{\frac{1}{p}}$.

Lemme 4.4. *La trajectoire $t \to L(t,x)$ appartient p.s à l'espace de Besov standard $\mathbf{B}_{p,\infty}^{\omega_{\frac{\alpha-1}{\alpha},\nu},0}$ pour tout $\nu > \frac{1}{p}$ et tout $|x| \leq M$, où M est une constante positive.*

Lemme 4.3 est dû à Marcus et Rosen [16], et Lemme 4.4 est dû à Ait Ouahra et *al.* [17]. Nous allons démontrer le résultat suivant.

Lemme 4.5. *La trajectoire $t \to L(t,x)$ appartient p.s à l'espace de Besov-Orlicz $\mathbf{B}_{M_1,\infty}^{\omega_{\frac{\alpha-1}{\alpha},\nu},0}$ pour tout $\nu > 1$ et $|x| \leq M$, où M est une constante positive.*

Démonstration. D'après Lemme 4.1, il suffit de montrer que pour tous $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq t, s \leq 1$, il existe une constante $C(\alpha) > 0$ telle que,

$$\|L(t,x) - L(s,x)\|_{M_1(dP)} \leq C(\alpha)|t-s|^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \tag{4.1}$$

En effet, d'après Théorème 2.2 et Lemme 4.3, il existe $C_\beta > 0$ telle que

$$\begin{aligned}\|L(t,x) - L(s,x)\|_{M_\beta(dP)} &\leq C_\beta \sup_{p\geq 1} \frac{\|L(t,x) - L(s,x)\|_p}{p^{\frac{1}{\beta}}} \\ &\leq C(\alpha,\beta) \sup_{p\geq 1} \frac{((p)!)^{\frac{1}{p}}}{p^{\frac{1}{\beta}}} |t-s|^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}.\end{aligned}$$

Or, $p! \leq p^p$. Donc, $((p)!)^{\frac{1}{p}} \leq p$, ce qui implique que $\frac{((p)!)^{\frac{1}{p}}}{p^{\frac{1}{\beta}}} \leq p^{1-\frac{1}{\beta}}$. Par, conséquent, pour tout $0 < \beta \leq 1$, on a

$$\|L(t,x) - L(s,x)\|_{M_\beta(dP)} \leq C(\alpha,\beta)|t-s|^{\frac{\alpha-1}{\alpha}},$$

et puisque Lemme 3.5 s'applique pour tout $\beta \geq 1$, et comme on a trouvé $0 < \beta \leq 1$, alors, $\beta = 1$ et dans ce cas, on trouve que

$$\|L(t,x) - L(s,x)\|_{M_1(dP)} \leq C(\alpha)|t-s|^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}.$$

□

4.4. Régularité de la dérivée fractionnaire

Lemme 4.6. *Soit* $0 \leq \gamma < \frac{\alpha-1}{2}$. *Alors, pour tous* $0 \leq t, s \leq 1$, $x \in \mathbb{R}$, *et* $p \geq 1$, *on a*

$$\|D^\gamma L(t,.)(x) - D^\gamma L(s,.)(x)\|_{2p} \leq C(\alpha,\gamma)((2p)!)^{\frac{1}{2p}}|t-s|^{\frac{\alpha-1}{\alpha}-\frac{\gamma}{\alpha}},$$

où $C(\alpha,\gamma)$ *est une constante positive qui dépend seulement de* α *et* γ.

Lemme 4.7. *Soit* $0 \leq \gamma < \frac{\alpha-1}{2}$ *et* $D \in \{D^\gamma, D^0, D_+^\gamma, D_-^\gamma\}$. *Alors, la trajectoire* $t \to DL(t,.)(x)$ *appartient p.s à l'espace de Besov Standard*

$$\mathbf{B}_{p,\infty}^{\omega_{\frac{\alpha-1}{\alpha}-\frac{\gamma}{\alpha},\nu},0}$$

pour tout $\nu > \frac{1}{p}$ *et* $|x| \leq M$, *où* M *est une constante positive.*

La preuve du Lemme 4.6 se trouve dans Ait Ouahra et Eddahbi [2] et celle du Lemme 4.7 dans Ait Ouahra et *al.* [1]. Nous allons démontrer le lemme suivant.

Lemme 4.8. *Soit* $0 \leq \gamma < \frac{\alpha-1}{2}$ *et* $D \in \{D^\gamma, D^0, D_+^\gamma, D_-^\gamma\}$. *Alors, la trajectoire* $t \to DL(t,.)(x)$ *appartient p.s à l'espace de Besov-Orlicz*

$$\mathbf{B}_{M_1,\infty}^{\omega_{\frac{\alpha-1}{\alpha}-\frac{\gamma}{\alpha},\nu},0}$$

pour tout $\nu > 1$ *et* $|x| \leq M$, *où* M *est une constante positive.*

Démonstration. On va traîter seulement le cas de $D = D^\gamma$. Les autres cas se traîtent de la même façon. D'après Lemme 4.1, il suffit de montrer que pour tous $0 \leq t, s \leq 1$ et $x \in \mathbb{R}$, il existe une constante $C'(\alpha,\gamma) > 0$ telle que,

$$\|D^\gamma L(t,.)(x) - D^\gamma L(s,.)(x)\|_{M_1(dP)} \leq C'(\alpha,\gamma)|t-s|^{\frac{\alpha-1}{\alpha}-\frac{\gamma}{\alpha}} \tag{4.2}$$

On va suivre la même technique utilisée dans la preuve du Lemme 4.5. En effet, d'après Lemme 4.6 et puisque la norme $\|.\|_p$ est croissante en p, alors Théorème 2.2 implique que pour tout $0 < \beta \leq 1$, il existe une constante $C_\beta > 0$ telle que

$$\begin{aligned}\|D^\gamma L(t,.)(x) - D^\gamma L(s,.)(x)\|_{M_\beta(dP)} &\\ &\leq C_\beta \sup_{p\geq 1} \frac{\|D^\gamma L(t,.)(x) - D^\gamma L(s,.)(x)\|_p}{p^{\frac{1}{\beta}}} \\ &\leq C(\alpha,\gamma) \sup_{p\geq 1} \frac{((2p)!)^{\frac{1}{2p}}}{p^{\frac{1}{\beta}}} |t-s|^{\frac{\alpha-1}{\alpha}-\frac{\gamma}{\alpha}} \\ &\leq C'(\alpha,\gamma)|t-s|^{\frac{\alpha-1}{\alpha}-\frac{\gamma}{\alpha}}.\end{aligned}$$

Or, Lemme 3.5 est appliqué pour tout $\beta \geq 1$, et comme on a trouvé $0 < \beta \leq 1$, alors $\beta = 1$, et dans ce cas, on trouve que

$$\|D^\gamma L(t,.)(x) - D^\gamma L(s,.)(x)\|_{M_1(dP)} \leq C'(\alpha,\gamma)|t-s|^{\frac{\alpha-1}{\alpha}-\frac{\gamma}{\alpha}}.$$

□

5. Théorèmes limites

Dans cette section, nous allons étudier, dans la classe des espaces de Besov-Orlicz $\mathbf{B}^{\omega_{\mu,\nu},0}_{M_1,\infty}$, des théorèmes limites pour les processus de la forme

$$\frac{1}{\lambda^{\frac{\alpha-1}{\alpha}-\frac{\gamma}{\alpha}}} \int_0^{\lambda t} f(X_s)ds,$$

où f est une dérivée fractionnaire d'une certaine fonction g hölderienne d'ordre δ et à support compact.

Théorème 5.1. *Soit $0 < \gamma < \delta < \frac{\alpha-1}{2}$ et $f = D^\gamma_+ g$, où $g \in \mathcal{C}^\delta$ est une fonction à support compact. Alors, la suite des processus*

$$\left\{\frac{1}{n^{\frac{\alpha-1}{\alpha}-\frac{\gamma}{\alpha}}} \int_0^{nt} f(X_s)ds\right\}_{t\geq 0},$$

converge en loi, lorsque $n \to +\infty$, vers le processus

$$\left\{\left(\int_{\mathbb{R}} g(x)dx\right) D^\gamma_- L(t,.)(0)\right\}_{t\geq 0}.$$

La convergence a lieu dans l'espace de Besov-Orlicz $\mathbf{B}^{\omega_{\frac{\alpha-1}{\alpha}-\frac{\gamma}{\alpha},\nu},0}_{M_1,\infty}$, $\forall\, \nu > 1$.

Théorème 5.2. *Soit $\delta > 0$ et $f = D^0_+ g$, où $g \in \mathcal{C}^\delta$ est une fonction à support compact. Alors, on a*

(1) *la suite des processus*

$$\left\{\frac{1}{n^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\log(n)}\int_0^{nt} f(X_s)ds\right\}_{t\geq 0},$$

converge en loi, lorsque $n \to +\infty$, vers le processus

$$\left\{-\alpha^{-1}(\int_{\mathbb{R}} g(x)dx)L(t,0)\right\}_{t\geq 0}.$$

(2) *la suite des processus*

$$\left\{\frac{1}{n^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}}\int_0^{nt}(f(X_s)+\alpha^{-1}\log(n)g(X_s))ds\right\}_{t\geq 0},$$

converge en loi, lorsque $n \to +\infty$, vers le processus

$$\left\{(\int_{\mathbb{R}} g(x)dx)D^0_- L(t,.)(0)\right\}_{t\geq 0}.$$

Ces convergences ont lieu dans l'espace de Besov-Orlicz $\mathbf{B}^{\omega_{\frac{\alpha-1}{\alpha},\nu},0}_{M_1,\infty}$ pour tout $\nu > 1$.

Démonstration du Théorème 5.1. Notons

$$A^n_t = \frac{1}{n^{\frac{\alpha-1}{\alpha}-\frac{\gamma}{\alpha}}}\int_0^{nt} f(X_s)ds.$$

D'après Fitzsimmons et Getoor [10], la famille $\{A^n_t, t \geq 0\}_{n\geq 1}$ converge en loi vers le processus $\{(\int_{\mathbb{R}} g(x)dx)D^\gamma_- L(t,.)(.)\}_{t\geq 0}$ dans l'espace des fonctions continues. Donc, on a la convergence des lois fini-dimensionnelles de $\{A^n_t, t \geq 0\}_{n\geq 1}$. Il reste à montrer que cette famille est tendue dans $\mathbf{B}^{\omega_{\frac{\alpha-1}{\alpha}-\frac{\gamma}{\alpha},\nu},0}_{M_1,\infty}$ pour tout $\nu > 1$. Pour cela, il suffit d'après Lemme 3.4, de montrer qu'il existe $C > 0$ telle que pour tous $0 \leq t, s \leq 1$ on ait,

$$\|A^n_t - A^n_s\|_{M_1(dP)} \leq C|t-s|^{\frac{\alpha-1}{\alpha}-\frac{\gamma}{\alpha}}.$$

La formule d'occupation et la formule de scaling entraînent que

$$\begin{aligned}
&\|A_t^n - A_s^n\|_{M_1(dP)} \\
&\qquad = \|\frac{1}{n^{\frac{\alpha-1}{\alpha}-\frac{\gamma}{\alpha}}}\left[\int_0^{nt} f(X_u)du - \int_0^{ns} f(X_u)du\right]\|_{M_1(dP)} \\
&\qquad = n^{\frac{\gamma}{\alpha}}\|\int_{\mathbb{R}} f(x)L(t,\frac{x}{n^{\frac{1}{\alpha}}})dx - \int_{\mathbb{R}} f(x)L(s,\frac{x}{n^{\frac{1}{\alpha}}})dx\|_{M_1(dP)} \\
&\qquad = n^{\frac{\gamma}{\alpha}}\|\int_{\mathbb{R}} D_+^{\gamma}g(x)\left[L(t,\frac{x}{n^{\frac{1}{\alpha}}}) - L(s,\frac{x}{n^{\frac{1}{\alpha}}})\right]dx\|_{M_1(dP)}.
\end{aligned}$$

La Remarque 1.1 donne

$$\begin{aligned}
&\|A_t^n - A_s^n\|_{M_1(dP)} = \\
&\qquad \|\int_K g(x)\left[D_-^{\gamma}L(t,.)(\frac{x}{n^{\frac{1}{\alpha}}}) - D_-^{\gamma}L(s,.)(\frac{x}{n^{\frac{1}{\alpha}}})\right]dx\|_{M_1(dP)},
\end{aligned}$$

où K est le support de g.

Or d'après Lemme 2.3, on a

$$\begin{aligned}
&\|\int_K g(x)\left[D_-^{\gamma}L(t,.)(\frac{x}{n^{\frac{1}{\alpha}}}) - D_-^{\gamma}L(s,.)(\frac{x}{n^{\frac{1}{\alpha}}})\right]dx\|_{M_1(dP)} \\
&\le \int_K \|g(x)\left[D_-^{\gamma}L(t,.)(\frac{x}{n^{\frac{1}{\alpha}}}) - D_-^{\gamma}L(s,.)(\frac{x}{n^{\frac{1}{\alpha}}})\right]\|_{M_1(dP)}dx \\
&\le \int_K \|g\|_\infty \|D_-^{\gamma}L(t,.)(\frac{x}{n^{\frac{1}{\alpha}}}) - D_-^{\gamma}L(s,.)(\frac{x}{n^{\frac{1}{\alpha}}})\|_{M_1(dP)}dx.
\end{aligned}$$

Donc, d'après la relation (4.2) on obtient,

$$\|A_t^n - A_s^n\|_{M_1(dP)} \le C(\alpha,\gamma)|t-s|^{\frac{\alpha-1}{\alpha}-\frac{\gamma}{\alpha}}.$$

Ce qui termine la démonstration du Théorème 5.1. □

Démonstration du Théorème 5.2. Les convergences (1) et (2) du Théorème 5.2, ont été établies par Fitzsimmons et Getoor [10] dans l'espace des fonctions continues. Donc, on a la convergence des lois fini-dimensionnelles. Pour achever la preuve du théorème, on doit montrer la tension.

Montrons (1). Posons

$$\overline{A_t^n} = \frac{1}{n^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\log(n)}\int_0^{nt} f(X_s)ds,$$

et prouvons que $\overline{A_t^n}$ est tendue dans les espaces de Besov-Orlicz $\mathbf{B}_{M_1,\infty}^{\omega_{\frac{\alpha-1}{\alpha},\nu},0}$ pour tout $\nu > 1$.

Par les mêmes arguments de la démonstration du Théorème 5.1 on a

$$\overline{A_t^n} \overset{\mathcal{L}}{\equiv} \frac{1}{\log(n)} \int_{\mathbb{R}} g(x) D_-^0 \left(L(t,.)(\frac{x}{n^{\frac{1}{\alpha}}}) \right) dx - \alpha^{-1} \int_{\mathbb{R}} g(x) L(t, \frac{x}{n^{\frac{1}{\alpha}}}) dx$$
$$=: B_t^n - C_t^n.$$

Les mêmes techniques de la démonstration du Théorème 5.1 donnent

$$\|B_t^n - B_s^n\|_{M_1(dP)} \leq \frac{C(\alpha,\gamma)}{\log(n)} |t-s|^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}.$$

Donc, B_t^n converge en probabilité vers 0 dans l'espace $\mathbf{B}_{M_1,\infty}^{\omega_{\frac{\alpha-1}{\alpha},\nu},0}$ pour tout $\nu > 1$.

Montrons maintenant que C_t^n converge en loi vers

$$\left\{ -\alpha^{-1} (\int_{\mathbb{R}} g(x) dx) L(t,0) \right\}_{t \geq 0}$$

dans l'espace $\mathbf{B}_{M_1,\infty}^{\omega_{\frac{\alpha-1}{\alpha},\nu},0}$ pour tout $\nu > 1$.

D'après Lemme 2.3, on a

$$\|C_t^n - C_s^n\|_{M_1(dP)} = \alpha^{-1} \| \int_{\mathbb{R}} g(x) \left(L(t, \frac{x}{n^{\frac{1}{\alpha}}}) - L(s, \frac{x}{n^{\frac{1}{\alpha}}}) \right) dx \|_{M_1(dP)}$$
$$\leq \alpha^{-1} \int_K \|g\|_\infty \|L(t, \frac{x}{n^{\frac{1}{\alpha}}}) - L(s, \frac{x}{n^{\frac{1}{\alpha}}})\|_{M_1(dP)} dx,$$

où K est le support compact de g.

La relation (4.1) implique que

$$\|C_t^n - C_s^n\|_{M_1(dP)} \leq C(\alpha) |t-s|^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}.$$

Donc, C_t^n est tendue dans $\mathbf{B}_{M_1,\infty}^{\omega_{\frac{\alpha-1}{\alpha},\nu},0}$ pour tout $\nu > 1$.

Démontrons maintenant (2). De la même façon on a,

$$\left\{ \frac{1}{n^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}} \int_0^{nt} (f(X_s) + \alpha^{-1} \log(n) g(X_s)) ds \right\} \overset{\mathcal{L}}{\equiv} \int_{\mathbb{R}} g(x) D_-^0 L(t,.)(\frac{x}{n^{\frac{1}{\alpha}}}) dx.$$

Posons

$$E_t^n = \int_{\mathbb{R}} g(x) D_-^0 L(t,.)(\frac{x}{n^{\frac{1}{\alpha}}}) dx.$$

D'après Fitzsimmons et Getoor [10], la suite des processus E_t^n converge en loi, lorsque $n \to +\infty$, vers le processus $\{(\int_{\mathbb{R}} g(x)dx)D_-^0 L(t,.)(0)\}_{t\geq 0}$, et la convergence a lieu dans l'espace des fonctions continues. Pour conclure, on montre la tension de la suite (E_t^n) dans $B_{M_1,\infty}^{\omega_{\frac{\alpha-1}{\alpha}},\nu,0}$. D'après la relation (4.2), on a

$$\begin{aligned}
&\|E_t^n - E_s^n\|_{M_1(dP)} \\
&\qquad = \| \int_{\mathbb{R}} g(x) \left(D_-^0 L(t,.)(\frac{x}{n^{\frac{1}{\alpha}}}) - D_-^0 L(s,.)(\frac{x}{n^{\frac{1}{\alpha}}}) \right) dx \|_{M_1(dP)} \\
&\qquad \leq \int_K \|g\|_\infty \| D_-^0 L(t,.)(\frac{x}{n^{\frac{1}{\alpha}}}) - D_-^0 L(s,.)(\frac{x}{n^{\frac{1}{\alpha}}}) \|_{M_1(dP)}\, dx \\
&\qquad\qquad \leq C(\alpha)|t-s|^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}.
\end{aligned}$$

Ce qui termine la démonstration du Théorème 5.2. □

Remarque 5.3. De la même façon, on peut obtenir les généralisations des Théorèmes 10 (resp 11), dans Ait Ouahra et *al.* [17], dans les espaces de Besov-Orlicz $B_{M_1,\infty}^{\omega_{\frac{\alpha-1}{2\alpha}},\nu,0}$, (resp $B_{M_1,\infty}^{\omega_{\frac{\alpha-1}{\alpha}},\nu,0}$) pour tout $\nu > 1$. Ces résultats ont été démontrés dans le cas où la fonction f n'est pas une dérivée fractionnaire d'une fonction g.

Références

[1] M. Ait Ouahra, B. Boufoussi & E. Lakhel – « Théorèmes limites pour certaines fonctionnelles associées aux processus stables dans une classe d'espaces de Besov Standard », *Stochastics and Stochastics Reports* **74** (2002), p. 411–427.

[2] M. Ait Ouahra & M. Eddahbi – « Théorèmes limites pour certaines fonctionnelles associées aux processus stable sur l'espace de Hölder », *Pub. Math* **45** (2001), no. 2, p. 371–386.

[3] M. T. Barlow – « Necessary and sufficient conditions for the continuity of local time of Lévy processes », *Ann. Prob* **16** (1988), no. 4, p. 1389–1427.

[4] M. Benchekroun & A. Benkirane – « Sur l'algebre d'Orlicz-Sobolev », *Bull. Belg. Math. Soc* **2** (1995), p. 463–476.

[5] P. Billingsley – *Convergence of probability measures*, Wiley, New York, 1968.

[6] B. Boufoussi – « Espaces de Besov : Caractérisations et Applications », Thèse, Université Henri Poincaré. Nancy. France, 1994.
[7] E. S. Boylan – « Local times for a class of markov processes », *Illinois J. Math* **8** (1964), p. 19–39.
[8] Z. Ciesielski – « Orlicz space. Splines systems and brownian motion », *Constr. Approx.* **9** (1993), p. 191–208.
[9] Z. Ciesielski, G. Kerkyacharian & B. Roynette – « Quelques espaces fonctionnels associés à des processus gaussiens », *Studia Matimatica* **107** (1993), no. 2, p. 171–204.
[10] P. J. Fitzsimmons & R. K. Getoor – « Limit theorems and variation properties for fractional derivatives of the local time of stable process », *Ann. Inst. H. Poincaré* **28** (1992), no. 2, p. 311–333.
[11] S. Goes & R. Welland – « Compactness criteria for Khöte spaces », *Math. Ann.* **188** (1970), p. 251–269.
[12] G. H. Hardy & J. E. Littlewood – « Some properties of fractional integrals. I », *Math. Z.* **27** (1928), no. 1, p. 565–606.
[13] M. A. Krasnösel'skii & Y. B. Rutickii – *Convex functions and Orlicz spaces*, Noordhoff, Groningen, The Netherlands, 1961.
[14] N. Luxemburg – « Banach function spaces », Thèse, Technische Hogeschool te Delft, 1955.
[15] M. B. Marcus & G. Pisier – « Stochastic processes with sample paths in exponential Orlicz spaces », *Lecture Notes in Math.* **1158** (1985), p. 329–358.
[16] M. B. Marcus & J. Rosen – « P-variation of the local times of symmetric stable processes and of Gaussian processes with stationary increments », *Ann. Prob* **20** (1992), no. 4, p. 1685–1713.
[17] M. A. Ouahra, M. Eddahbi & M. Ouali – « Fractional derivatives of local times of stable Lévy processes as the limits of the occupation time problem in Besov space », *Probab. Math. Statist.* **24** (2004), no. 2, Acta Univ. Wratislav. No. 2732, p. 263–279.
[18] S. G. Samko, A. A. Kilbass & O. I. Marichev – *Fractional integrals and derivatives. theory and applications*, Gordon and Breach Science Publishers, Yverdon, 1993.
[19] E. C. Titchmarsh – *Introduction to the theory of fourier integrals*, Second ed. Clarendon Press, Oxford, 1948.
[20] T. Yamada – « On the fractional derivative of the brownian local time », *J. Math. Kyoto Univ* **25** (1985), no. 1, p. 49–58.

[21] T. Yamada – « On some limit theorems for occupation times of one-dimensional Brownian motion and its continuous additive functionals locally of zero energy », *J. Math. Kyoto Univ.* **26** (1986), no. 2, p. 309–322.

[22] ———, « Principal values of Brownian local times and their related topics », in *Itô's stochastic calculus and probability theory*, Springer, Tokyo, 1996, p. 413–422.

Mohamed Ait Ouahra
Laboratoire de Modélisation Stochastique et Déterministe et URAC 04
Faculté des Sciences Oujda
B.P. 717
Maroc
ouahra@ucam.ac.ma

Abdelghani Kissami
Laboratoire de Modélisation
Stochastique et Déterministe
Faculté des Sciences Oujda
B.P. 717
Maroc
Kissami@fso.ump.ma

Aissa Sghir
Laboratoire de Modélisation
Stochastique et Déterministe
Faculté des Sciences Oujda
B.P. 717
Maroc
semastai@hotmail.fr