ANNALES MATHÉMATIQUES

BLAISE PASCAL

David Mascré

Inégalités pour l’opérateur intégral fractionnaire sur différents espaces métriques mesurés

Volume 18, n° 2 (2011), p. 273-300.

<http://ambp.cedram.org/item?id=AMBP_2011__18_2_273_0>

Publication éditée par le laboratoire de mathématiques de l’université Blaise-Pascal, UMR 6620 du CNRS Clermont-Ferrand — France

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
http://www.cedram.org/

Annales mathématiques Blaise Pascal **18**, 273-300 (2011)

Inégalités pour l'opérateur intégral fractionnaire sur différents espaces métriques mesurés

David Mascré

Résumé

Le but de cet article est d'étendre les résultats classiques (inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev, inégalité de Hedberg) sur l'intégrale fractionnaire à deux types différents d'espaces métriques mesurés : les espaces métriques mesurés à mesure doublante d'une part, les espaces métriques mesurés à croissance polynomiale du volume d'autre part. Les deux résultats principaux que nous obtenons sont les suivants :

Etant donné (X, ρ, μ) un espace métrique mesuré de type homogène, étant donnés $p, q, \alpha \in \mathbf{R}$ tels que $1 \le p < 1/\alpha$, $1/q = 1/p - \alpha$, $0 < \alpha < 1$, l'opérateur intégral fractionnaire T_α défini en posant $T_\alpha f(x) = \int_X V(x,y)^{\alpha-1} f(y) d\mu(y)$ vérifie :

Si $p > 1$, alors

$$T_\alpha : L^p(X) \to L^q(X).$$

Si $p = 1$, alors

$$T_\alpha : L^1(X) \to L^{q,\infty}(X).$$

Etant donné un espace métrique mesuré de Vitali (X, ρ, μ) tel que $\forall\, x \in X$,

$$V(x,r) \le cr^d, \quad \forall\, r < 1 \qquad \text{et} \qquad V(x,r) \le cr^D, \quad \forall r \ge 1,$$

étant donné $p, q, a, n \in \mathbf{R}$ tels que $1 \le p < n/a$, $1/q = 1/p - a/n$,$d \le n \le D$, étant donnée $k_a\colon X \times X \to \mathbf{R}$ une fonction mesurable vérifiant les conditions de croissance (en 0 et en $+\infty$) suivantes

(i) $k_a(x,y) \le c\rho(x,y)^{a-d} \quad \forall\, x, y \in X$ tels que $\rho(x,y) < 1$,

(ii) $k_a(x,y) \le c\rho(x,y)^{a-D} \quad \forall\, x, y \in X$ tels que $\rho(x,y) \ge 1$,
l'opérateur intégral fractionnaire I_a associé au noyau k_a vérifie :

Si $p > 1$,

$$I_a\colon\ L^p(X) \to L^q(X).$$

Si $p = 1$,

$$I_a\colon\ L^1(X) \to L^{q,\infty}(X).$$

Classification math. : 26A33, 26D10, 42B35 .

1. Introduction

Le but de cet article est d'étendre les résultats classiques sur l'intégrale fractionnaire à certains espaces métriques mesurés à croissance polynomiale du volume.

Dans $\mathbf{R}^n$, l'intégrale fractionnaire d'ordre a est l'opérateur défini, pour $0 < a < n$, en posant

$$I_a f(x) = \int_{\mathbf{R}^n} |x-y|^{a-n} f(y) dy.$$

Cet opérateur présente de nombreuses propriétés remarquables (cf. par exemple [21]). Il vérifie en particulier l'inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev. En d'autres termes, pour $p, q, a \in \mathbf{R}$ tels que $1 \leq p < \frac{n}{a}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{a}{n}$, on a :
si $p > 1$,

$$\| I_a f \|_q \leq C \| f \|_p \qquad \forall f \in L^p(\mathbf{R}^n),$$

si $p = 1$,

$$\mu\{x \in \mathbf{R}^n : |I_a f(x)| > \lambda\} \leq C\lambda^{-q} \| f \|_1^q \qquad \forall f \in L^1(\mathbf{R}^n), \quad \forall \lambda > 0.$$

Dans toute la suite, on exprimera ce fait en disant que :
Si $p > 1$ alors

$$I_a : L^p(\mathbf{R}^n) \to L^q(\mathbf{R}^n).$$

Si $p = 1$ alors

$$I_a : L^1(\mathbf{R}^n) \to L^{q,\infty}(\mathbf{R}^n).$$

Dans le cadre euclidien, ces inégalités peuvent être obtenues de multiples manières (cf. par exemple Hardy-Littlewood [7], Stein [21], [22], Stein-Weiss [20], Lieb-Loss [11, p. 98] pour des démonstrations classiques). En règle générale, ces démonstrations font appel de manière explicite à la structure de groupe de $\mathbf{R}^n$ et au fait que l'intégrale fractionnaire puisse s'écrire sous la forme d'une convolution de fonctions ; de ce fait, elles ne se laissent pas directement généraliser à des espaces plus abstraits, comme les espaces métriques mesurés à croissance polynomiale du volume. Plusieurs travaux récents ont néanmoins permis d'obtenir de telles généralisations. Dans un premier temps, Gatto et Vagi (cf. [5]) puis Hajlasz et Koskela (cf. [6]) sont parvenus à étendre ces inégalités au cas des espaces de type homogène. Dans un second temps, Garcia-Cuerva et Martell (cf. [4], [14]) ont montré que ces inégalités restaient vraies dans le cas d'espaces euclidiens à croissance polynomiale du volume munis d'une mesure borélienne non nécessairement doublante. Enfin, Garcia-Cuerva et Gatto (cf. [3]) ont très récemment obtenu une généralisation de ce résultat au cas des espaces métriques mesurés à croissance polynomiale du volume d'ordre n.

Notre apport est double : d'une part nous proposons une démonstration simplifiée de l'inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev dans le cadre homogène ; d'autre part, nous étendons le résultat de Garcia-Cuerva et Gatto au cadre un peu plus général des espaces à croissance polynomiale double du volume.

La méthode que nous proposons nous permet en particulier d'étendre les résultats obtenus par Garcia-Cuerva et Martell au cas de certains espaces métriques mesurés à croissance polynomiale du volume. Notre méthode présente toutefois sur la leur l'avantage de nous permettre de nous affranchir du cadre euclidien dans lequel ces derniers travaillent. Dans [4] et [14], ces auteurs se placent en effet sur l'espace euclidien $\mathbf{R}^d$ muni d'une mesure borélienne μ d'ordre de croissance n, où $0 < n \leq d$, i.e. telle que $\mu(Q) \leq l(Q)^n$ pour tout cube $Q \subset \mathbf{R}^d$ de côtés parallèles aux axes. Ils montrent alors que l'opérateur I_a défini en posant

$$I_a f(x) = \int_{\mathbf{R}^d} |x-y|^{a-n} f(y) d\mu(y)$$

est borné de $L^p(\mu)$ dans $L^p(\mu)$ (pour $p > 1$) et de $L^1(\mu)$ dans $L^{1,\infty}(\mu)$. Leur méthode s'étend en fait sans peine aux espaces métriques mesurés à croissance polynomiale du volume vérifiant le lemme de Vitali. Par contre, elle ne permet pas de conclure dans les autres cas (en particulier dans les cas où l'on n'est plus assuré que la fonction maximale de Hardy-Littlewood est bornée de $L^p(\mu)$ dans $L^p(\mu)$). Nous montrons par une autre méthode que l'inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev reste vraie de manière générale dans le cas où l'espace métrique mesuré est à croissance polynomiale du volume d'ordre n, i.e. dans le cas où le volume de ses boules vérifie la condition de croissance :

$$V(x,r) \leq c r^n \quad \forall\, x \in X, \quad \forall\, r > 0. \tag{V_n^+}$$

L'analyse du problème nous conduit ainsi à distinguer deux catégories d'énoncés selon que l'espace est de type homogène ou métrique mesuré à croissance polynomiale du volume. Dans le premier cas (de type homogène), le noyau de l'opérateur est donné par une expression du type $k_\alpha(x,y) = V(x,y)^{\alpha-1}$ (cf. [5]), où $0 < \alpha < 1$ et où

$$V(x,y) = \mu(B(x, \rho(x,y)))$$

désigne le volume de la boule de rayon $\rho(x,y)$; dans ce cas, aucune condition n'est imposée sur la croissance du volume des boules. Dans le second cas, le noyau de l'opérateur est donné par une expression du type $k_a(x,y) = \rho(x,y)^{a-n}$ (cf. [4], [14, p. 109]), où $0 < a < n$; dans ce cas, la condition de croissance imposée aux boules de l'espace se présente sous la forme d'une majoration du volume. Ce schéma est résumé dans le système d'énoncés suivant :

Théorème 1.1. *Soit (X, ρ, μ) un espace métrique mesuré de type homogène. Soient $p, q, \alpha \in \mathbf{R}$ tels que $1 \leq p < 1/\alpha$, $1/q = 1/p - \alpha$, $0 < \alpha < 1$.*

Soit T_α l'opérateur défini en posant

$$T_\alpha f(x) = \int_X V(x,y)^{\alpha-1} f(y) d\mu(y).$$

Si $p > 1$, alors

$$T_\alpha : L^p(X) \to L^q(X).$$

Si $p = 1$, alors

$$T_\alpha : L^1(X) \to L^{q,\infty}(X).$$

Théorème 1.2. *Soit (X, ρ, μ) un espace métrique mesuré tel que*

$$V(x,r) \leq cr^n \qquad \forall\, x \in X, \qquad \forall\, r > 0. \tag{V_n^+}$$

Soient $p, q, a \in \mathbf{R}$ tels que $1 \leq p < n/a$, $1/q = 1/p - a/n$.

Soit I_a l'opérateur défini en posant

$$I_a f(x) = \int_X \rho(x,y)^{a-n} f(y) d\mu(y).$$

Si $p > 1$, alors

$$I_a\colon\ L^p(X) \to L^q(X).$$

Si $p = 1$ alors

$$I_a\colon\ L^1(X) \to L^{q,\infty}(X).$$

Le théorème 1.2 correspond, sous une forme légèrement différente, à l'énoncé récemment établi par Garcia Cuerva et Gatto dans [3]. Le théorème 1.1 est essentiellement équivalent à celui obtenu par Gatto et Vagi dans [5]. Par ailleurs, dans le cas présent, l'opérateur T_α s'exprime directement en fonction du volume. Ceci permet, en ajoutant des hypothèses de croissance du volume idoines, de retrouver comme cas particulier les théorèmes jusqu'à présent connus. En effet, dans le cas homogène, deux situations pouvaient jusqu'alors se présenter selon la nature des hypothèses faites sur la croissance du volume $V(x, y)$ des boules de l'espace : soit l'opérateur était donné par une expression du type $k_a(x, y) = \rho(x, y)^a V(x, y)^{-1}$ (cf. [6], [13], [14] p. 168) et alors la condition de croissance imposée aux boules de l'espace se présentait sous la forme d'une minoration du volume ; soit le noyau de l'opérateur était donné par une expression du type $k_a(x, y) = \rho(x, y)^{a-n}$ (cf. [4]) et alors la condition de croissance imposée aux boules de l'espace se présentait sous la forme d'une majoration du volume. En d'autres termes, on avait :

Théorème 1.3. *Soit (X, ρ, μ) un espace métrique mesuré de type homogène tel que*

$$V(x, r) \leq cr^n \qquad \forall\, x \in X, \qquad \forall\, r > 0. \tag{V_n^+}$$

Soient $p, q, a \in \mathbf{R}$ tels que $1 \leq p < \frac{n}{a}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{a}{n}$.

Soit I_a l'opérateur défini en posant

$$I_a f(x) = \int_X \rho(x, y)^{a-n} f(y) d\mu(y).$$

Si $p > 1$ alors

$$I_a : L^p(X) \to L^q(X).$$

Si $p = 1$ alors

$$I_a : L^1(X) \to L^{q,\infty}(X).$$

Théorème 1.4. *Soit (X, ρ, μ) un espace métrique mesuré de type homogène tel que*

$$V(x, r) \geq cr^n \qquad \forall\, x \in X, \qquad \forall\, r > 0. \tag{V_n^-}$$

Soient $p, q, a \in \mathbf{R}$ tels que $1 \leq p < \frac{n}{a}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{a}{n}$.
Soit J_a l'opérateur défini en posant

$$J_a f(x) = \int_X \rho(x, y)^a V(x, y)^{-1} f(y) d\mu(y).$$

Si $p > 1$ alors

$$J_a : L^p(X) \to L^q(X).$$

Si $p = 1$ alors

$$J_a : L^1(X) \to L^{q,\infty}(X).$$

Le théorème 1.3 est essentiellement équivalent à celui obtenu par Garcia-Cuerva et Martell (cf. [4], [14, p. 147]) tandis que le théorème 1.4 correspond dans l'esprit à celui obtenu par Hajlasz et Koskela (cf. [6, p. 26]) dans le cas particulier des espaces de type homogène de mesure finie.

Exprimés sous cette forme, les liens de dépendance entre les théorèmes 1.1, 1.2, 1.3 et 1.4 apparaissent clairement. Le théorème 1.4 et le théorème 1.3 sont des conséquences directes de 1.1, la forme de l'opérateur dépendant seulement de la nature des hypothèses faites sur la croissance du volume. En effet,

$$V(x,r) \geq cr^n \text{ et } \alpha > 0 \Rightarrow V(x,y)^{\alpha-1} \geq C\rho(x,y)^{\alpha n} V(x,y)^{-1},$$

tandis que

$$V(x,r) \leq cr^n \text{ et } \alpha < 1 \Rightarrow V(x,y)^{\alpha-1} \geq C\rho(x,y)^{\alpha n-n},$$

de sorte que,

$$\begin{aligned}(\mathrm{DV}) + (V_n^-) + (\ 0 < \alpha < 1) \quad &\Rightarrow \quad T_\alpha : L^p(X) \to L^q(X) \\ &\Rightarrow \quad J_a : L^p(X) \to L^q(X) \text{ avec } a = \alpha n\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(\mathrm{DV}) + (V_n^+) + (\ 0 < \alpha < 1) \quad &\Rightarrow \quad T_\alpha : L^p(X) \to L^q(X) \\ &\Rightarrow \quad I_a : L^p(X) \to L^q(X) \ \text{ avec } a = \alpha n.\end{aligned}$$

Par ailleurs le théorème 1.3 est une conséquence directe du théorème 1.2 dans le cas particulier où l'espace métrique mesuré est de type homogène. Quant au théorème 1.2, il est indépendant des précédents et relève d'un autre domaine d'analyse : celui des espaces métriques mesurés à croissance polynomiale du volume.

Par suite, il suffira pour retrouver l'ensemble des résultats déjà connus de démontrer les théorèmes 1.1 et 1.2. Pour ce faire, et conformément à ce qui a ce qui été dit plus haut, il conviendra donc de traiter séparément les cas homogène et à croissance polynomiale du volume.

Le cas homogène est traité dans la section 2, où l'on s'attache à démontrer le théorème 1.1 . La méthode pour ce faire est classique (cf. [21], [6], [5]) et consiste à étendre aux espaces de type homogène l'inégalité obtenue par Hedberg dans le cadre euclidien (cf. [8]). Cette inégalité, qui permet de relier l'intégrale fractionnaire T_α à la fonction maximale de Hardy-Littlewood M définie en posant $Mf(x) = \sup_{B \ni x} \frac{1}{\mu(B)} \int_B f(y) d\mu(y)$, prend dans le cas homogène la forme suivante :

Théorème 1.5. *Soit (X, ρ, μ) un espace de type homogène.*

Soient $p, q, \alpha \in \mathbf{R}$ tels que $1 \leq p < q < \infty$, $1/q = 1/p - \alpha$. Alors l'opérateur T_α vérifie pour toute fonction $f \in L^p(X)$, l'inégalité de Hedberg. En d'autres termes, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $x \in X$

$$|T_\alpha f(x)| \leq \; C \parallel f \parallel_p^{1-\frac{p}{q}} Mf(x)^{p/q}.$$

Cette inégalité établie, le théorème 1.1 est une conséquence directe du fait que la fonction maximale de Hardy-Littlewood soit bornée de $L^p(X)$ dans $L^p(X)$ (pour $p > 1$) et de $L^1(X)$ dans $L^{1,\infty}(X)$ (cf. [1], [22]). En effet :

Si $1 < p < \infty$, on a

$$\parallel T_\alpha f \parallel_q \leq C \parallel f \parallel_p^{1-\frac{p}{q}} \parallel Mf \parallel_p^{p/q} \leq C' \parallel f \parallel_p^{1-\frac{p}{q}} \parallel f \parallel_p^{p/q} = C' \parallel f \parallel_p$$

i.e.

$$T_\alpha : L^p(X) \to L^q(X).$$

Si $p = 1$, on a

$$\begin{aligned} \mu\{x \in X : |T_\alpha f(x)| > \lambda\} &\leq \mu\{x \in X : Mf(x) > c\lambda^q \parallel f \parallel_1^{1-q}\} \\ &\leq C \left(\lambda^{-q} \parallel f \parallel_1^{q-1}\right) \parallel f \parallel_1 \\ &= C\lambda^{-q} \parallel f \parallel_1^q \end{aligned}$$

i.e.

$$T_\alpha : L^1(X) \to L^{q,\infty}(X).$$

Dans le cas où l'espace métrique mesuré considéré est à croissance polynomiale du volume, la méthode précédente (désormais appelée méthode 1) ne permet généralement plus d'aboutir. En effet, on a besoin, pour que celle-ci s'applique, de pouvoir s'assurer que la fonction maximale de Hardy-Littlewood M soit bornée de $L^p(X)$ dans $L^p(X)$ (pour $p > 1$) et de $L^1(X)$ dans $L^{1,\infty}(X)$. Ceci est toujours le cas lorsque l'espace considéré vérifie le lemme de Vitali, mais tous les espaces métriques mesurés à croissance polynomiale du volume ne satisfont pas ce lemme.

Une solution possible, pour établir le théorème de manière générale, consiste alors à reprendre en la prolongeant la méthode introduite par Garcia-Cuerva et Gatto dans [3]. Celle-ci (désormais appelée méthode 2) consiste à établir en premier lieu, via l'inégalité de Tchebychev, le plongement de type (p,q) faible $I_a : L^p(X) \to L^{q,\infty}(X)$ pour des indices p et q vérifiant $1 \leq p < q < \infty$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{a}{n}$, puis à procéder par interpolation pour obtenir en second lieu l'inégalité forte $I_a : L^p(X) \to L^q(X)$ pour des indices p et q vérifiant $1 < p < q < \infty$. Cette méthode présente l'avantage de ne pas faire intervenir la fonction maximale de Hardy-Littlewood, et par là même de fonctionner indépendamment du fait que l'espace soit ou non de Vitali.

Dans la section 3, nous appliquons cette méthode au cas des espaces métriques mesurés à croissance polynomiale du volume. Mais au lieu de nous intéresser au seul cas des espaces à croissance polynomiale d'ordre n (i.e. pour lesquels le volume des boules satisfait la condition de croissance (V_n^+)), nous nous attachons à étudier le problème dans le cas d'espaces à croissance polynomiale d'ordre local et global différents (i.e. pour lesquels l'ordre de croissance du volume des boules diffère selon que le rayon r de ces boules est < 1 ou ≥ 1). Pour ce faire nous introduisons la notion d'espace à croissance polynomiale double du volume. Etant données une distance ρ et une mesure borélienne μ, on dit de l'espace métrique mesuré (X, ρ, μ) qu'il est à croissance polynomiale double du volume d'ordre local d et d'ordre global D si son volume satisfait aux conditions de croissance suivantes :

$$V(x,r) \leq Cr^d, \quad \forall\, x \in X, \quad \forall r < 1 \qquad (V_d^{loc})$$

et

$$V(x,r) \leq Cr^D, \quad \forall\, x \in X, \quad \forall r \geq 1 \qquad (V_D^{glob}).$$

On remarque, avec cette notation, que les conditions de croissance locale et globale vérifient une propriété de monotonie évidente. En effet, on a

$$(V_d^{loc}) \Rightarrow (V_{d'}^{loc}) \quad \text{si } d' \leq d$$

et

$$(V_D^{glob}) \Rightarrow (V_{D'}^{glob}) \quad \text{si } D' \geq D.$$

Le résultat que nous obtenons prend la forme suivante

Théorème 1.6. *Soit (X, ρ, μ) un espace métrique mesuré à croissance polynomiale du volume d'ordre local d et d'ordre global D.*

Soient $p, q, a, n \in \mathbf{R}$ tels que $1 \leq p < \frac{n}{a}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{a}{n}$, $d \leq n \leq D$.

Soit $k_a : X \times X \to \mathbf{R}$ une fonction mesurable vérifiant les conditions de croissance (en 0 et en $+\infty$) suivantes

(i) $k_a(x,y) \leq c\rho(x,y)^{a-d} \quad \forall\, x,y \in X$ *tels que* $\rho(x,y) < 1$,

(ii) $k_a(x,y) \leq c\rho(x,y)^{a-D} \quad \forall\, x,y \in X$ *tels que* $\rho(x,y) \geq 1$,
et soit I_a l'opérateur associé au noyau k_a. Alors
Si $p > 1$,

$$I_a : L^p(X) \to L^q(X).$$

Si $p = 1$,

$$I_a : L^1(X) \to L^{q,\infty}(X).$$

Comme le théorème 1.2 est clairement une conséquence du théorème 1.6 dans le cas particulier où $d = n = D$, il suffit, pour établir 1.2 de démontrer 1.6.

Dans le cas particulier où l'espace considéré est de Vitali, les deux méthodes précédemment décrites sont applicables, ce qui permet leur comparaison.

On remarque alors qu'elles présentent plusieurs similitudes. Dans chacune, on est en effet conduit à introduire un paramétrage continu de l'opérateur I_a au moyen d'un paramètre $r > 0$ mesurant la distance à un point fixé, à scinder l'opérateur initial en deux blocs distincts (un bloc local correspondant à l'étude de l'opérateur en 0 et un bloc global correspondant à l'étude de l'opérateur à l'infini) et à estimer ensuite chacun des termes ainsi obtenus. La seule différence tient au fait que dans l'une (méthode 1) on est conduit à optimiser sur r la somme des majorations finalement dégagées tandis que dans l'autre (méthode 2) l'idée consiste à choisir adéquatement la valeur de r de manière à s'assurer que $\mu\{x \in X : \left|I_a f \chi_{X\setminus B(x,r)}(x)\right| > \lambda\} = 0$. On notera que dans chacun des cas, la démonstration fait intervenir de manière décisive des estimations donnant la valeur de l'intégrale du noyau de l'opérateur sur une boule et sur le complémentaire de cette boule.

Le plan que nous suivrons sera donc le suivant : dans la section 2, nous traitons le cas des espaces de type homogène et démontrons le théorème 1.1. Dans la section 3, nous traitons le cas des espaces métriques mesurés à croissance polynomiale du volume d'ordre local et global différents et démontrons le théorème 1.6.

2. Inégalités faibles et fortes sur les espaces métriques mesurés de mesure doublante

Dans cette section, on se place dans le cadre d'espaces de type homogène. En d'autres termes on impose à l'espace métrique mesuré (X, ρ, μ) considéré de satisfaire la condition de doublement du volume

$$V(x, 2r) \leq CV(x, r) \quad \forall\, x \in X, \quad \forall\, r > 0\,. \tag{DV}$$

On supposera en outre dans toute la suite que l'espace (X, ρ, μ) est non-atomique et que les anneaux sont de mesure non nulle, i.e. que pour tout $x \in X$ et tout $r_1, r_2 \in \mathbf{R}$ tels que $0 < r_1 < r_2$,

$$\mu\{y \in X : r_1 \leq \rho(x, y) < r_2\} > 0.$$

2.1. Lemmes préliminaires

Lemme 2.1. *Soit (X, ρ, μ) un espace de type homogène.*
Etant donné $\alpha > 0$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $v > 0$

$$\int_{\{y \in X : V(x,y) < v\}} V(x, y)^{\alpha - 1} d\mu(y) \leq Cv^{\alpha} \quad \forall\, x \in X. \tag{2.1}$$

Etant donné $\alpha < 0$, il existe une constante $C' > 0$ telle que pour tout $v > 0$

$$\int_{\{y \in X : V(x,y) \geq v\}} V(x, y)^{\alpha - 1} d\mu(y) \leq C' v^{\alpha} \quad \forall\, x \in X. \tag{2.2}$$

La démonstration du lemme est standard et suit celle donnée par Gatto et Vagi dans [5].

Démonstration. La première chose dont il convient de s'assurer c'est qu'il existe des constantes c et $C > 0$ telles que pour tout $v \in \mathbf{R}$ tel que $0 < v \leq \mu(X)$

$$cv \leq \mu\{y \in X : V(x, y) < v\} \leq Cv. \tag{2.3}$$

Soit en effet $v \in \mathbf{R}$ tel que $0 < v \leq \mu(X)$. Comme les anneaux sont de mesure non nulle, il existe un entier relatif n tel que

$$0 \leq V(x, 2^n) < v \leq V(x, 2^{n+1}) \leq \mu(X). \tag{2.4}$$

Par ailleurs, on a

$$\rho(x, y) < 2^n \Leftrightarrow V(x, y) < V(x, 2^n) \tag{2.5}$$

En effet, on a d'une part trivialement

$$\mu\{z \in X : \rho(x,z) < \rho(x,y)\} < \mu\{z \in X : \rho(x,z) < 2^n\} \Rightarrow \rho(x,y) < 2^n$$

et d'autre part

$$\rho(x,y) < 2^n \Rightarrow \mu\{z \in X : \rho(x,z) < \rho(x,y)\} < \mu\{z \in X : \rho(x,z) < 2^n\}$$

où la dernière implication résulte du fait que $\mu\{z \in X : \rho(x,y) \leq \rho(x,z) < 2^n\} > 0$.

Par suite on a

$$\begin{aligned}
\mu\{y \in X : V(x,y) < v\} &\geq \mu\{y \in X : V(x,y) < V(x,2^n)\} && \text{(par 2.4)}\\
&= \mu\{y \in X : \rho(x,y) < 2^n\} && \text{(par 2.5)}\\
&= V(x,2^n)\\
&\geq cV(x,2^{n+1}) && \text{(par (DV))}\\
&\geq cv && \text{(par 2.4)}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mu\{y \in X : V(x,y) < v\} &\leq \mu\{y \in X : V(x,y) < V(x,2^{n+1})\} && \text{(par 2.4)}\\
&= \mu\{y \in X : \rho(x,y) < 2^{n+1}\} && \text{(par 2.5)}\\
&= V(x,2^{n+1})\\
&\leq CV(x,2^n) && \text{(par (DV))}\\
&\leq Cv && \text{(par 2.4)}
\end{aligned}$$

ce qui prouve équation (2.3).

Démontrons maintenant l'inégalité (2.1). Deux cas doivent être distingués selon que $0 < v \leq \mu(X)$ ou $\mu(X) < v$.

Etablissons le résultat pour $0 < v \leq \mu(X)$. Soit C_α le nombre défini en posant

$$\begin{aligned}
C_\alpha &= 2^{\alpha-1} && \text{si } \alpha > 1\\
C_\alpha &= 1 && \text{si } 0 < \alpha \leq 1.
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
\int_{\{y\in X:V(x,y)<v\}} & V(x,y)^{\alpha-1}d\mu(y) \\
&= \int_{\{y\in X:V(x,y)<v\}} V(x,y)^{\alpha-1}d\mu(y) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \int_{\{y\in X:2^{-j-1}v\leq V(x,y)<2^{-j}v\}} V(x,y)^{\alpha-1}d\mu(y) \\
&\leq C_\alpha \sum_{j=0}^{\infty} (2^{-j-1}v)^{\alpha-1} \int_{\{y\in X:V(x,y)<2^{-j}v\}} d\mu(y) \\
&\leq C \sum_{j=0}^{\infty} (2^{-j-1}v)^{\alpha} && \text{(par 2.3)} \\
&\leq Cv^\alpha. && \text{(car } \alpha>0)
\end{aligned}$$

Etablissons maintenant le résultat pour $\mu(X) < v$. Clairement

$$\begin{aligned}
\int_{\{y\in X:V(x,y)<v\}} V(x,y)^{\alpha-1}d\mu(y) &= \int_{\{y\in X:V(x,y)<\mu(X)\}} V(x,y)^{\alpha-1}d\mu(y) \\
&\quad + \int_{\{y\in X:\mu(X)\leq V(x,y)<v\}} V(x,y)^{\alpha-1}d\mu(y).
\end{aligned}$$

Or, compte tenu de ce qui précède, on a

$$\int_{\{y\in X:V(x,y)<\mu(X)\}} V(x,y)^{\alpha-1}d\mu(y) \leq C\mu(X)^\alpha.$$

Par ailleurs on a

$$\begin{aligned}
\int_{\{y\in X:\mu(X)\leq V(x,y)<v\}} & V(x,y)^{\alpha-1}d\mu(y) \\
&\leq \int_{\{y\in X:V(x,y)=\mu(X)\}} V(x,y)^{\alpha-1}d\mu(y) \\
&= \int_{\{y\in X:V(x,y)=\mu(X)\}} \mu(X)^{\alpha-1}d\mu(y) \\
&\leq C\mu(X)^\alpha.
\end{aligned}$$

Par suite, on a

$$\begin{aligned}\int_{\{y\in X: V(x,y)<v\}} V(x,y)^{\alpha-1} d\mu(y) &\leq C\mu(X)^{\alpha}\\ &\leq Cv^{\alpha}. \qquad (\text{car } \mu(X)<v \text{ et } \alpha>0)\end{aligned}$$

Dans tous les cas on a donc

$$\int_{\{y\in X: V(x,y)<v\}} V(x,y)^{\alpha-1} d\mu(y) \leq Cv^{\alpha}.$$

Démontrons de même l'inégalité (2.2). Si $v \leq \mu(X)$, on a, en désignant par l le nombre défini en posant $l = \min\{j \in \mathbf{N} : 2^{j+1}v \geq \mu(X)\}$,

$$\begin{aligned}\int_{\{y\in X: V(x,y)\geq v\}} & V(x,y)^{\alpha-1} d\mu(y)\\ &= \sum_{j=0}^{l} \int_{\{y\in X: 2^j v \leq V(x,y) < 2^{j+1}v\}} V(x,y)^{\alpha-1} d\mu(y)\\ &\leq C\sum_{j=0}^{l} (2^j v)^{\alpha-1} \int_{\{y\in X: V(x,y)<2^{j+1}v\}} d\mu(y)\\ &\leq C\sum_{j=0}^{l} (2^j v)^{\alpha} \qquad (\text{par } 2.3)\\ &\leq C\sum_{j=0}^{l} 2^{j\alpha} v^{\alpha}\\ &\leq Cv^{\alpha}. \qquad (\text{car } \alpha<0)\end{aligned}$$

Si $v > \mu(X)$, alors $\{y \in X : V(x,y) \geq v\} = \emptyset$ et l'inégalité (2.2) est à nouveau vraie. □

2.2. Démonstration du théorème 1.1

Démonstration du théorème 1.1. Soit $f \geq 0$. Etant donné $r > 0$, on a

$$\begin{aligned}T_\alpha f(x) =& \int_{\{y\in X: V(x,y)<v\}} f(y)V(x,y)^{\alpha-1} d\mu(y)\\ &+ \int_{\{y\in X: V(x,y)\geq v\}} f(y)V(x,y)^{\alpha-1} d\mu(y)\\ =& I_1 + I_2.\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
I_1 &= \sum_{j=0}^{\infty}\int_{\{y\in X:2^{-j-1}v\le V(x,y)<2^{-j}v\}} f(y)V(x,y)^{\alpha-1}d\mu(y)\\
&\le c_\alpha\sum_{j=0}^{\infty}(2^{-j-1}v)^{\alpha-1}\int_{\{y\in X:V(x,y)<2^{-j}v\}} f(y)d\mu(y)\\
&\le c\sum_{j=0}^{\infty}(2^{-j-1}v)^{\alpha}\frac{1}{\mu(\{y\in X:V(x,y)<2^{-j}v\})}\\
&\qquad\times\int_{\{y\in X:V(x,y)<2^{-j}v\}} f(y)d\mu(y) \quad \text{(par 2.3)}
\end{aligned}$$

Or, par (2.4), il existe pour tout $v'\in\mathbf{R}$ et tout $x\in X$ un entier $n\in\mathbf{Z}$ tel que $0\le V(x,2^n)<v'\le V(x,2^{n+1})\le\mu(X)$. Par suite, pour tout $v\in\mathbf{R}$ et tout $x\in X$, il existe $n\in\mathbf{Z}$ tel que $B(x,2^n)\subset\{y\in X: V(x,y)<2^{-j}v\}\subset B(x,2^{n+1})$. Par suite et compte tenu de la propriété de doublement du volume on a

$$\begin{aligned}
I_1 &\le c\sum_{j=0}^{\infty}(2^{-j-1}v)^{\alpha}\frac{1}{\mu(B(x,2^n))}\int_{B(x,2^{n+1})} f(y)d\mu(y)\\
&\le c\sum_{j=0}^{\infty}(2^{-j-1}v)^{\alpha}\frac{1}{\mu(B(x,2^{n+1}))}\int_{B(x,2^{n+1})} f(y)d\mu(y)\\
&\le cv^\alpha Mf(x) \quad \text{(car } \alpha>0).
\end{aligned}$$

D'un autre côté on a par l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned}
I_2 &\le \|f\|_p\left(\int_{\{y\in X:V(x,y)\ge v\}} V(x,y)^{(\alpha-1)p'}d\mu(y)\right)^{1/p'}\\
&\le Cv^{\alpha-\frac{1}{p}}\|f\|_p \quad \text{(par le lemme 2.1 (2.2) car } (1-\alpha)p'>1).
\end{aligned}$$

Par suite, il existe une constante $C>0$ telle que pour tout $r>0$

$$T_\alpha f(x)\le Cv^\alpha Mf(x)+Cv^{\alpha-\frac{1}{p}}\|f\|_p\,.$$

Choisissons alors v pour que

$$\frac{Mf(x)}{\|f\|_p}=v^{-1/p}$$

de sorte que les deux termes du membre de droite de l'inégalité soient égaux. On trouve

$$\begin{aligned} T_\alpha f(x) &\leq \ 2Cv^{\alpha-\frac{1}{p}} \parallel f \parallel_p \\ &= 2Cv^{\alpha-\frac{1}{p}} \parallel f \parallel_p^{1-\frac{p}{q}} \parallel f \parallel_p^{p/q} \\ &= 2Cv^{\alpha-\frac{1}{p}} \parallel f \parallel_p^{1-\frac{p}{q}} Mf(x)^{p/q} v^{1/q}. \end{aligned}$$

Compte tenu du fait que $1/q = 1/p - \alpha$, ceci entraîne l'inégalité de type Hedberg

$$T_\alpha f(x) \leq \ 2C \parallel f \parallel_p^{1-p/q} Mf(x)^{p/q}$$

où C ne dépend que de la constante de doublement. □

Remarque 2.2. La preuve du théorème 1.1 présentée ci-dessus est en fait essentiellement équivalente à celle proposée par Gatto et Vagi dans [5]. Elle présente toutefois l'avantage sur cette dernière de ne pas faire intervenir la notion d'espace normal. Un espace de type homogène (X, ρ, μ) est dit normal s'il existe des constantes C_1 et C_2 telles que pour tout $x \in X$ et tout $r > 0$

$$C_1 r \leq V(x,r) \leq C_2 r.$$

L'intérêt de cette notion tient alors au résultat suivant, dû à Macias et Segovia (cf. [12], p. 259) :

Théorème 2.3. Si (X, ρ, μ) est un espace de type homogène satisfaisant la propriété que toutes ses boules $B(x,r)$ soient ouvertes, alors la fonction $\widetilde{\rho}(x,y)$ définie en posant

$$\widetilde{\rho}(x,y) = \inf\{\mu(B) : B \ni x, y\}$$

est une quasi-distance sur X. En outre l'espace $(X, \widetilde{\rho}, \mu)$ est un espace normal pour lequel les topologies induites respectivement par ρ et $\widetilde{\rho}$ coïncident.

Par ailleurs, Gatto et Vagi ont montré le résultat suivant (cf. [5], pp. 178 et 187) :

Théorème 2.4. Soit (X, ρ', μ) un espace de type homogène normal. Soient $p, q, \alpha \in \mathbf{R}$ tels que $0 < \alpha < 1$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \alpha$, $1 \leq p < q < \infty$. Soit $\widetilde{I_\alpha}$ l'opérateur défini en posant

$$\widetilde{I_\alpha} f(x) = \int_X \rho'(x,y)^{\alpha-1} f(y) d\mu(y).$$

Si $p > 1$, *alors*

$$\widetilde{I_\alpha} : L^p(X) \to L^q(X).$$

Si $p = 1$, *alors*

$$\widetilde{I_\alpha} : L^1(X) \to L^{q,\infty}(X).$$

Sur la base de ces résultats, il est facile de montrer que les théorèmes 2.4 et 1.1 sont équivalents. Il suffit pour cela d'observer que la quasi-distance $\widetilde{\rho}(x,y)$ définie ci-dessus est équivalente au volume $V(x,y)$. En effet, soit $B(z,r)$ une boule contenant x et y. On a par définition de la quasi-distance ρ,

$$\rho(x,y) \leq a_1(\rho(x,z) + \rho(z,y)) \leq 2a_1 r = c_0 r,$$

ce qui entraîne, par la propriété de doublement du volume

$$V(x, \rho(x,y)) \leq V(x, c_0 r) \leq CV(x,r).$$

Comme par ailleurs $B(x,r) \subset B(z, a_1(1+c_0)r)$, on a

$$V(x,r) \leq CV(z, a_1(1+c_0)r)$$

ce qui entraîne, à nouveau par la propriété de doublement du volume,

$$V(x,r) \leq CV(z, a_1(1+c_0)r) \leq C'V(z,r).$$

Par suite, on a

$$V(x, \rho(x,y)) \leq C'V(z,r)$$

ce qui, compte tenu de la définition de $\widetilde{\rho}$, entraîne

$$V(x, \rho(x,y)) \leq C'\widetilde{\rho}(x,y).$$

Inversement, on a toujours

$$B(x, 2\rho(x,y)) \ni \{x,y\}$$

de sorte que, par la propriété de doublement du volume,

$$\widetilde{\rho}(x,y) \leq V(x, 2\rho(x,y)) \leq CV(x, \rho(x,y)).$$

Par suite, on a

$$cV(x, \rho(x,y)) \leq \widetilde{\rho}(x,y) \leq CV(x, \rho(x,y)).$$

ce qui entraîne, pour tout $f \geq 0$

$$c'T_\alpha f(x) \leq \widetilde{I_\alpha} f(x) \leq C'T_\alpha f(x).$$

Ceci établi, on a clairement que théorème 2.4 implique théorème 1.1. En effet, si (X, ρ, μ) est un espace de type homogène, on sait (par le théorème 2.3) qu'il est possible de définir une nouvelle quasi-distance $\widetilde{\rho}$ pour laquelle l'espace $(X, \widetilde{\rho}, \mu)$ soit un espace de type homogène normal. Sur cet espace, on sait (par le théorème 2.4) que l'opérateur $\widetilde{I_\alpha}$ associé à la quasi-distance $\rho' = \widetilde{\rho}$ est borné de $L^p(X)$ dans $L^q(X)$. Comme par ailleurs $c'T_\alpha f(x) \leq \widetilde{I_\alpha} f(x) \leq C'T_\alpha f(x)$, $\forall f \geq 0$, ceci entraîne que l'opérateur T_α est borné de $L^p(X)$ dans $L^q(X)$.

Réciproquement, on a que théorème 1.1 implique théorème 2.4 car théorème 2.4 est un simple cas particulier du théorème 1.1 dans le cas où l'espace est normal.

Remarque 2.5. Le théorème 1.1 peut par ailleurs être vu comme une conséquence du théorème fondamental de Sawyer et Wheeden donnant les conditions nécessaires et suffisantes pour que les opérateurs de type intégraux fractionnaires soient bornés de $L^p(X, w)$ dans $L^q(X, v)$, où p, q sont des réels tels que $1 < p \leq q < \infty$. Considérant en effet la classe des opérateurs T de noyau associé $k : X \times X \to \mathbf{R}_+$ vérifiant les conditions de monotonie suivantes (V) :

$$k(x, y) \leq C_1 k(x', y) \text{ dès que } \rho(x', y) \leq C_2 \rho(x, y),$$

$$k(x, y) \leq C_1 k(x, y') \text{ dès que } \rho(x, y') \leq C_2 \rho(x, y),$$

où C_1 et C_2 sont des constantes > 1, ces auteurs montrent (cf. [18, p. 821], [19, p. 531]) le :

Théorème 2.6. Soit (X, ρ, μ) un espace de type homogène, $p, q \in \mathbf{R}$ tels que $1 < p \leq q < \infty$, w et v deux poids sur X tels que $v d\mu$ et $w^{(1-p')} d\mu$ soient des mesures doublantes et T un opérateur de noyau k vérifiant la condition (V). On a

$$T : L^p(X, w) \to L^q(X, v)$$

si et seulement si pour toute boule $B \subset X$

$$\phi(B) \left(\int_B v(x) d\mu(x) \right)^{1/q} \left(\int_B w^{1-p'}(x) d\mu(x) \right)^{1/p'} \leq C,$$

où $\phi(B) = \sup\{k(x, y) : x, y \in B,\ \rho(x, y) \geq c(a_1) r(B)\}$, $r(B)$ étant le rayon de la boule B et $c(a_1)$ une constante positive suffisamment petite qui ne dépend que de la constante a_1 entrant dans la définition de la quasimétrique ρ.

Notre théorème 1.1 est un corollaire du théorème 2.6 dans le cas particulier où $w(x) = v(x) = 1$. En effet, $vd\mu = d\mu$ et $w^{1-p'}d\mu = d\mu$ sont alors des mesures doublantes, l'opérateur T_α de noyau associé $k_\alpha(x,y) = V(x,y)^{\alpha-1}$, $0 < \alpha < 1$, vérifie les conditions de monotonie souhaitées

$$\begin{aligned} V(x,y)^{\alpha-1} &\le C_1 V(x',y)^{\alpha-1} \ \text{ dès que } \rho(x',y) \le C_2\rho(x,y), \\ V(x,y)^{\alpha-1} &\le C_1 V(x,y')^{\alpha-1} \ \text{ dès que } \rho(x,y') \le C_2\rho(x,y), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \phi(B) &= \sup\{V(x,y)^{\alpha-1} : x, y \in B,\ \rho(x,y) \ge c(a_1)r(B)\} \\ &= V(x, c(a_1)r(B))^{\alpha-1} \end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} &\phi(B)\left(\int_B v(x)d\mu(x)\right)^{1/q}\left(\int_B w^{1-p'}(x)d\mu(x)\right)^{1/p'} \\ &= V(x, c(a_1)r(B))^{\alpha-1}\mu(B)^{1/q+1-1/p} \\ &\le C\mu(B)^{\alpha-1}\mu(B)^{1+1/q-1/p} && \text{(par (DV))} \\ &\le C. && \text{(car } 1/q = 1/p - \alpha \text{ pour toute boule } B \subset X) \end{aligned}$$

Par suite $I_a\colon\ L^p(X) \to L^q(X)$, dès que $p > 1$.

L'inégalité faible (pour $p \ge 1$) se déduit de manière analogue des conditions déquivalence faibles trouvées par Sawyer, Wheeden et Zhao (cf. [19, lemme 4.2]).

3. Inégalités faibles et fortes sur les espaces métriques mesurés à croissance polynomiale du volume

Dans cette section, on se place dans le cadre général d'un espace métrique mesuré non nécessairement homogène à croissance polynomiale du volume d'ordre local d et d'ordre global D. En d'autres termes, on considère un espace X doté d'une quasi-distance ρ et d'une mesure borélienne μ qui ne vérifie pas nécessairement la propriété de doublement du volume mais pour laquelle on a

$$V(x,r) \le Cr^d, \quad \forall\, x \in X, \quad \forall r < 1. \tag{V_d^{loc}}$$

et

$$V(x,r) \le Cr^D, \quad \forall\, x \in X, \quad \forall r \ge 1. \tag{V_D^{glob}}$$

Par souci de simplicité et d'économie dans les démonstrations, on supposera en outre dans toute la suite que cet espace X est non atomique, i.e. que $\mu\{x\} = 0 \ \forall x \in X$.

On démontre le théorème 1.6 qui étend le théorème 1.2 aux espaces métrique mesurés à croissance polynomiale double.

3.1. Résultats préliminaires

Définition 3.1. Soit (X, ρ, μ) un espace métrique mesuré à croissance polynomiale du volume d'ordre local d et d'ordre global D. Etant donné $a \in \mathbf{R}$, on dit du noyau $k_a : X \times X \to \mathbf{R}$ qu'il est de type $I(a, d, D)$ s'il satisfait aux conditions de croissance (en 0 et en $+\infty$) suivantes :

(i): $k_a(x, y) \leq c\rho(x, y)^{a-d} \quad \forall\, x, y \in X$ tels que $\rho(x, y) < 1$,

(ii): $k_a(x, y) \leq c\rho(x, y)^{a-D} \quad \forall\, x, y \in X$ tels que $\rho(x, y) \geq 1$.

Remarque 3.2. Tout noyau $k_a : X \times X \to \mathbf{R}$ de type $I(a, d, D)$ vérifie en particulier

$$k_a(x, y) \leq \rho(x, y)^a V(x, y)^{-1} \quad \forall x, y \in X.$$

Lemme 3.3. *Soit $(X,\ \rho,\ \mu)$ un espace métrique mesuré à croissance polynomiale du volume d'ordre local d et d'ordre global D. Soit $x \in X$, soit $\gamma \in \mathbf{R}$ et soit k_γ un noyau de type $I(\gamma, d, D)$.*

Si $\gamma > 0$, alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $r > 0$

$$\int_{B(x,r)} k_\gamma(x, y) d\mu(y) \leq Cr^\gamma. \tag{3.1}$$

Si $\gamma < 0$, alors il existe une constante $C' > 0$ telle que

$$\int_{X \setminus B(x,r)} k_\gamma(x, y) d\mu(y) \leq C' r^\gamma. \tag{3.2}$$

Démonstration. Montrons d'abord (3.1).

Soit $\Delta = \big\{(x, y) \in X \times X : \rho(x, y) < 1\big\}$ l'ensemble des points *proches de la diagonale* et soit $\Delta^c = \big\{(x, y) \in X \times X : \rho(x, y) \geq 1\big\}$ son complémentaire dans $X \times X$. Soit $Q_j(x, r) = \big\{y \in X : 2^j r \leq \rho(x, y) < 2^{j+1} r\big\}$ la couronne dyadique de centre x et d'ordre $2^j r$. Soit j_0 le nombre entier défini en posant $j_0 = \sup\{j \in \mathbf{N}_* \ /\ 2^{-j+1} r \geq 1\}$ si $r \geq 1$ et $j_0 = 0$ si

$r<1$. Soient $c_{\gamma-d}$ et $c_{\gamma-D}$ les nombres définis en posant

$$c_{\gamma-d}=\begin{cases}1 & \text{si } \gamma-d<0\\ 2^{\gamma-d} & \text{si } \gamma-d\geq 0\ ;\end{cases}\qquad c_{\gamma-D}=\begin{cases}1 & \text{si } \gamma-D<0\\ 2^{\gamma-D} & \text{si } \gamma-D\geq 0.\end{cases}$$

On a

$$\begin{aligned}
&\int_{B(x,r)} k_\gamma(x,y)d\mu(y)\\
&\qquad\leq \int_{B(x,r)}(\rho(x,y)^{\gamma-d}\chi_\Delta(x,y)+\rho(x,y)^{\gamma-D}\chi_{\Delta^c}(x,y))d\mu(y)\\
&\qquad\leq \sum_{j=0}^{j_0}\int_{Q_{-j}(x,r)}\rho(x,y)^{\gamma-D}d\mu(y)\\
&\qquad\qquad+\sum_{j=j_0+1}^{\infty}\int_{Q_{-j}(x,r)}\rho(x,y)^{\gamma-d}d\mu(y)\\
&\qquad\leq c_{\gamma-D}\sum_{j=0}^{j_0}(2^{-j}r)^{\gamma-D}V(x,2^{-j+1}r)\\
&\qquad\qquad+c_{\gamma-d}\sum_{j=j_0+1}^{\infty}(2^{-j}r)^{\gamma-d}V(x,2^{-j+1}r)\\
&\qquad\leq c_{\gamma-D}\sum_{j=0}^{j_0}(2^{-j}r)^{\gamma-D}(2^{-j+1}r)^{D}\\
&\qquad\qquad+c_{\gamma-d}\sum_{j=j_0+1}^{\infty}(2^{-j}r)^{\gamma-d}(2^{-j+1}r)^{d}\\
&\qquad\leq C\sum_{j=0}^{\infty}2^{-\gamma j}r^{\gamma}\\
&\qquad\leq Cr^{\gamma}(\text{car } \gamma>0).
\end{aligned}$$

Montrons maintenant (3.2) : soit j_1 le nombre entier défini en posant $j_1 = \sup\{j \in \mathbf{N} \;/\; 2^j r < 1\}$ si $r < 1$ et $j_1 = -1$ si $r \geq 1$.

$$\begin{aligned}
&\int_{X\setminus B(x,r)} k_\gamma(x,y)d\mu(y) \\
&\qquad \leq \int_{\{y/\rho(x,y)\geq r\}} (\rho(x,y)^{\gamma-d}\chi_\Delta(x,y) + \rho(x,y)^{\gamma-D}\chi_{\Delta^c}(x,y))d\mu(y) \\
&\qquad = \sum_{j=0}^{j_1}\int_{Q_j(x,r)} \rho(x,y)^{\gamma-d}d\mu(y) + \sum_{j=j_1+1}^{\infty}\int_{Q_j(x,r)} \rho(x,y)^{\gamma-D}d\mu(y) \\
&\qquad \leq c_{\gamma-d}\sum_{j=0}^{j_1}(2^j r)^{\gamma-d}V(x,2^{j+1}r) \\
&\qquad\qquad + c_{\gamma-D}\sum_{j=j_1+1}^{\infty}(2^j r)^{\gamma-D}V(x,2^{j+1}r) \\
&\qquad \leq c_{\gamma-d}\sum_{j=0}^{j_1}(2^j r)^{\gamma-d}(2^{j+1}r)^d + c_{\gamma-D}\sum_{j=j_1+1}^{\infty}(2^j r)^{\gamma-D}(2^{j+1}r)^D \\
&\qquad \leq C\sum_{j=0}^{\infty}2^{\gamma j}r^\gamma \leq Cr^\gamma. \qquad\qquad (\text{car } \gamma < 0)
\end{aligned}$$

□

3.2. Démonstration du théorème 1.6

Démonstration du théorème 1.6. Soit $f \in L^p(X,\mu)$ une fonction μ-mesurable positive et soit $\lambda > 0$. Etant donné $r > 0$, on a

$$I_a f(x) = I_a f\chi_{B(x,r)}(x) + I_a f\chi_{X\setminus B(x,r)}(x).$$

Intéressons nous d'abord à $I_a f\chi_{X\setminus B(x,r)}(x)$. Par Hölder, on a

$$\left|I_a f\chi_{X\setminus B(x,r)}(x)\right| \leq c\,\|\,f\,\|_p\,(\int_{X\setminus B(x,r)} k_a(x,y)^{p'}d\mu(y))^{1/p'}.$$

Estimons cette dernière intégrale.

Si $r \geq 1$, on a

$$\left(\int_{X\setminus B(x,r)} k_a(x,y)^{p'}d\mu(y)\right)^{1/p'} \leq \left(\int_{X\setminus B(x,r)} \rho(x,y)^{(a-D)p'}d\mu(y)\right)^{1/p'}.$$

Posant $\gamma = ap' - D(p'-1)$, il vient $(a-D)p' = \gamma - D$ où $\gamma/p' = a - D/p \leq a - n/p < 0$.
Par suite on a, en vertu du lemme 3.3 (3.2),

$$\begin{aligned}\left(\int_{X\setminus B(x,r)} k_a(x,y)^{p'} d\mu(y)\right)^{1/p'} &\leq cr^{\gamma/p'} \\ &= cr^{a-D/p} \\ &\leq cr^{a-n/p}. \qquad \text{(car } r \geq 1 \text{ et } n \leq D\text{)}\end{aligned}$$

Si $r < 1$, alors on a

$$\begin{aligned}\int_{X\setminus B(x,r)} k_a(x,y)^{p'} d\mu(y) \leq &\int_{B(x,1)\setminus B(x,r)} \rho(x,y)^{(a-d)p'} d\mu(y) \\ &+ \int_{X\setminus B(x,1)} \rho(x,y)^{(a-D)p'} d\mu(y).\end{aligned}$$

Posant $\gamma^* = ap' - d(p'-1)$, il vient $(a-d)p' = \gamma^* - d$ où $\gamma^*/p' = a - d(1-1/p') = a - d/p$. Par suite on a :
Si $\gamma^* \geq 0$,

$$\begin{aligned}\int_{B(x,1)\setminus B(x,r)} \rho(x,y)^{(a-d)p'} d\mu(y)) &\leq \int_{B(x,1)} \rho(x,y)^{\gamma^*-d} d\mu(y) \\ &\leq c. \qquad \text{(par le lemme 3.3 (3.1))}\end{aligned}$$

Si $\gamma^* < 0$,

$$\begin{aligned}\int_{B(x,1)\setminus B(x,r)} \rho(x,y)^{(a-d)p'} d\mu(y) &\leq \int_{B(x,1)\setminus B(x,r)} \rho(x,y)^{\gamma^*-d} d\mu(y) \\ &\leq cr^{\gamma^*}. \qquad \text{(par le lemme 3.3 (3.2))}\end{aligned}$$

Comme par ailleurs on a (par le lemme 3.3 (3.2))

$$\int_{X\setminus B(x,1)} \rho(x,y)^{(a-D)p'} d\mu(y) \leq c$$

on trouve finalement :

Si $\gamma^* < 0$,

$$\begin{aligned}\left(\int_{X\setminus B(x,r)} k_a(x,y)^{p'} d\mu(y)\right)^{1/p'} &\leq c(r^{\gamma^*} + c)^{1/p'} \\ &\leq cr^{\gamma^*/p'} &&\text{(car } r < 1\text{)} \\ &= cr^{a-d/p} \\ &\leq cr^{a-n/p}. &&\text{(car } r < 1 \text{ et } n \geq d\text{)}\end{aligned}$$

Si $\gamma^* \geq 0$,

$$\begin{aligned}\left(\int_{X\setminus B(x,r)} k_a(x,y)^{p'} d\mu(y)\right)^{1/p'} &\leq c^{1/p'} \\ &\leq cr^{a-\frac{n}{p}}. &&\text{(car } r < 1 \text{ et } a - n/p < 0\text{)}\end{aligned}$$

Par suite, il existe une constante $c_1 > 0$ telle que pour tout $r > 0$,

$$\left|I_a f\chi_{X\setminus B(x,r)}(x)\right| \leq c_1 \| f \|_p \, r^{a-n/p}.$$

On peut toujours, sans perte de généralité, supposer que $\| f \|_p = 1$. Choisissons alors r tel que $c_1 r^{a-n/p} = \lambda$. On a d'une part

$$\begin{aligned}&\{x \in X : |I_a f(x)| > 2\lambda\} \\ &\quad \subset \{x \in X : \left|I_a f\chi_{B(x,r)}(x)\right| > \lambda\} \cup \{x \in X : \left|I_a f\chi_{X\setminus B(x,r)}(x)\right| > \lambda\}\end{aligned}$$

et d'autre part, compte tenu du choix de r,

$$\{x \in X : \left|I_a f\chi_{X\setminus B(x,r)}(x)\right| > \lambda\} = \emptyset$$

de sorte que

$$\{x \in X : |I_a f(x)| > 2\lambda\} \subset \{x \in X : \left|I_a f\chi_{B(x,r)}(x)\right| > \lambda\}.$$

Par ailleurs, on a par Hölder,

$$\begin{aligned}\left|I_a f\chi_{B(x,r)}(x)\right| &\leq \left(\int_{B(x,r)} |f(y)|^p k_a(x,y)d\mu(y)\right)^{1/p}\\ &\qquad\times\left(\int_{B(x,r)} k_a(x,y)d\mu(y)\right)^{1/p'}\\ &\leq cr^{a/p'}(\int_{B(x,r)} |f(y)|^p k_a(x,y)d\mu(y))^{1/p}.\\ &\qquad\text{(par le lemme 3.3 (3.1) car } a>0)\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Tchebychev, on obtient alors

$$\begin{aligned}&\mu\{x\in X : \left|I_a f\chi_{B(x,r)}(x)\right| > \lambda\}\\ &\qquad\leq \mu\{x\in X : cr^{a/p'}(\int_{B(x,r)} |f(y)|^p k_a(x,y)d\mu(y))^{1/p} > \lambda\}\\ &\qquad\leq c\lambda^{-p}r^{ap/p'}\int_X\left(\int_{B(x,r)} |f(y)|^p k_a(x,y)d\mu(y)\right)d\mu(x)\\ &\qquad\leq c\lambda^{-p}r^{ap/p'}\int_X\left(\int_{B(y,a_0 r)} k_a(x,y)d\mu(x)\right)|f(y)|^p d\mu(y)\\ &\qquad\leq c\lambda^{-p}r^{ap/p'}r^a \qquad\text{(par le lemme 3.3 (3.1) et car } a>0)\\ &\qquad\leq c\lambda^{-p}r^{ap}\\ &\qquad\leq c\lambda^{-q}, \qquad (\text{car } c_1 r^{-n/q} = c_1 r^{a-n/p} = \lambda)\end{aligned}$$

ce qui donne finalement

$$\mu\{x\in X : |I_a f(x)| > 2\lambda\} \leq \mu\{x\in X : \left|I_a f\chi_{B(x,r)}(x)\right| > \lambda\} \leq c\lambda^{-q},$$

i.e.

$$I_a\colon\ L^p(X)\to L^{q,\infty}(X).$$

Une fois l'inégalité de type faible établie, l'inégalité forte

$$I_a\colon\ L^p(X)\to L^q(X),\ 1<p<q<\infty$$

s'obtient immédiatement. Il suffit d'appliquer le théorème d'interpolation de Marcinkiewicz à l'opérateur I_a pour des indices un peu plus grand et un peu plus petit que p. □

Remarque 3.4. On peut ici se demander s'il n'aurait pas été également possible de parvenir à une démonstration du théorème 1.2 en employant la méthode 1 fondée sur l'inégalité de Hedberg. Le problème est que celle-ci suppose, pour être appliquée, de savoir que la fonction maximale de Hardy-Littlewood est bornée de $L^p(X)$ dans $L^p(X)$ $(p > 1)$ et de $L^1(X)$ dans $L^{1,\infty}(X)$, ce qui n'est pas toujours le cas (cf. [17], [2]). Un tel résultat de bornitude suppose au minimum que l'espace (X, ρ, μ) soit un espace de Vitali, ce qui est assuré automatiquement dès que la mesure μ est doublante. Lorsque cette dernière condition n'est pas satisfaite, une solution possible est d'introduire l'opérateur

$$\mathcal{M}f(x) = \sup_{B \ni x} \frac{1}{r(B)^n} \int_B |f(y)| \, d\mu(y).$$

Cet opérateur est en effet de type (p, p) fort (pour $p > 1$) et de type $(1, 1)$ faible dès que (X, ρ, μ) est un espace de Vitali à croissance polynomiale du volume d'ordre n (cf. [15, p. 87]).

Une solution possible pour retrouver l'inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev dans le cadre des espaces métriques mesurés à croissance polynomiale du volume consistera donc à s'assurer que l'espace d'étude est un espace de Vitali et que l'inégalité de Hedberg est satisfaite. La démonstration est simple et sensiblement équivalente à celle explicitée dans la section 2 pour démontrer le théorème 1.1. L'inégalité de Hedberg, dans le cas des espaces métriques mesurés à croissance polynomiale du volume d'ordre n, prend alors la forme suivante (voir [4]) :

Théorème 3.5. Soit (X, ρ, μ) un espace métrique mesuré à croissance polynomiale du volume d'ordre n. Soient $a, p, q \in \mathbf{R}$ tels que $1 \le p < q < \infty$, $1/q = 1/p - a/n$.

Alors, il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute fonction $f \in L^p(X)$ et tout $x \in X$

$$I_a f(x) \le C \| f \|_p^{1-\frac{p}{q}} \mathcal{M}f(x)^{p/q}.$$

Une fois ce résultat établi, le théorème 1.2, sous l'hypothèse supplémentaire que l'espace (X, ρ, μ) soit de Vitali, est une conséquence directe du fait que la fonction maximale $\mathcal{M}$ soit bornée de $L^p(X)$ dans $L^p(X)$ (pour $p > 1$) et de $L^1(X)$ dans $L^{1,\infty}(X)$. La démonstration est analogue à celle exposée juste après l'énoncé du théorème 1.5.

Remarque 3.6. Dans le cas particulier où l'espace d'étude est $\mathbf{R}^n$, muni d'une mesure de Radon non nécessairement doublante, une troisième solution possible consiste à utiliser l'opérateur maximal de Hardy-Littlewood centré M^c défini en posant, pour f localement intégrable,

$$M^c f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\mu(Q(x,r))} \int_{Q(x,r)} |f(y)| d\mu(y).$$

En effet, ce dernier vérifie (cf. [16, p. 40, th. 2.19], [9, p. 11], [10, p. 8]) :

Si $p > 1$,

$$M^c : L^p(\mathbf{R}^n) \to L^p(\mathbf{R}^n).$$

Si $p = 1$,

$$M^c : L^1(\mathbf{R}^n) \to L^{1,\infty}(\mathbf{R}^n).$$

La preuve est la même que dans le cas avec doublement. La seule différence, c'est que l'inégalité de type faible résulte cette fois du lemme de Besicovitch et non, comme dans le cas classique, du lemme de Vitali (cf. [10, p. 12] et voir aussi [17, p. 2015] pour une extension de ce théorème au cas à poids).

Ce résultat établi, il suffit alors de raisonner comme précédemment et d'appliquer l'inégalité de Hedberg pour retrouver le résultat annoncé.

Références

[1] R. R. Coifman & G. Weiss – *Analyse harmonique non-commutative sur certains espaces homogènes*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 242, Springer-Verlag, Berlin, 1971, Étude de certaines intégrales singulières.

[2] L. Forzani, R. Scotto, P. Sjögren & W. Urbina – « On the L^p boundedness of the non-centered Gaussian Hardy-Littlewood maximal function », *Proc. Amer. Math. Soc.* **130** (2002), no. 1, p. 73–79 (electronic).

[3] J. García-Cuerva & A. E. Gatto – « Boundedness properties of fractional integral operators associated to non-doubling measures », *Studia Math.* **162** (2004), no. 3, p. 245–261.

[4] J. García-Cuerva & J. M. Martell – « Two-weight norm inequalities for maximal operators and fractional integrals on non-homogeneous spaces », *Indiana Univ. Math. J.* **50** (2001), no. 3, p. 1241–1280.

[5] A. E. Gatto & S. Vági – « Fractional integrals on spaces of homogeneous type », in *Analysis and partial differential equations*, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., vol. 122, Dekker, New York, 1990, p. 171–216.

[6] P. Hajłasz & P. Koskela – « Sobolev met Poincaré », *Mem. Amer. Math. Soc.* **145** (2000), no. 688, p. x+101.

[7] G. H. Hardy & J. E. Littlewood – « Some properties of fractional integrals. I », *Math. Z.* **27** (1928), no. 1, p. 565–606.

[8] L. I. Hedberg – « On certain convolution inequalities », *Proc. Amer. Math. Soc.* **36** (1972), p. 505–510.

[9] J. Heinonen – « Lectures on analysis on metric spaces », Preprint, 1999.

[10] ———, *Lectures on analysis on metric spaces*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 2001.

[11] E. H. Lieb & M. Loss – *Analysis*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 14, American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.

[12] R. A. Macías & C. Segovia – « Singular integrals on generalized Lipschitz and Hardy spaces », *Studia Math.* **65** (1979), no. 1, p. 55–75.

[13] J. Malý & L. Pick – « The sharp Riesz potential estimates in metric spaces », *Indiana Univ. Math. J.* **51** (2002), no. 2, p. 251–268.

[14] J.-M. Martell – « Desigualdades con pesos en el análisis de fourier : de los espacios de tipo homogéneo a la medidas no doblantes », Thèse, Facultad de Ciencias. Universidad Autonoma de Madrid, 2001.

[15] D. Mascré – « Inégalités à poids pour l'opérateur de Hardy-Littlewood-Sobolev dans les espaces métriques mesurés à deux demi-dimensions », *Colloq. Math.* **105** (2006), no. 1, p. 77–104.

[16] P. Mattila – *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 44, Cambridge University Press, Cambridge, 1995, Fractals and rectifiability.

[17] J. Orobitg & C. Pérez – « A_p weights for nondoubling measures in $\mathbf{R}^n$ and applications », *Trans. Amer. Math. Soc.* **354** (2002), no. 5, p. 2013–2033 (electronic).

[18] E. Sawyer & R. L. Wheeden – « Weighted inequalities for fractional integrals on Euclidean and homogeneous spaces », *Amer. J. Math.* **114** (1992), no. 4, p. 813–874.

[19] E. T. Sawyer, R. L. Wheeden & S. Zhao – « Weighted norm inequalities for operators of potential type and fractional maximal functions », *Potential Anal.* **5** (1996), no. 6, p. 523–580.

[20] E. M. Stein & G. Weiss – « Fractional integrals on n-dimensional Euclidean space », *J. Math. Mech.* **7** (1958), p. 503–514.

[21] E. M. Stein – *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton Mathematical Series, No. 30, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.

[22] ———, *Harmonic analysis : real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*, Princeton Mathematical Series, vol. 43, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993, With the assistance of Timothy S. Murphy, Monographs in Harmonic Analysis, III.

David Mascré
Université de Cergy-Pontoise
david.mascre@diplomatie.gouv.fr