ANNALES MATHÉMATIQUES

BLAISE PASCAL

Jean Chanzy

Inversion d'un opérateur de Toeplitz tronqué à symbole matriciel et théorèmes-limite de Szegö

Volume 13, n° 1 (2006), p. 111-205.

<http://ambp.cedram.org/item?id=AMBP_2006__13_1_111_0>

Publication éditée par les laboratoires de mathématiques
de l'université Blaise-Pascal, UMR 6620 du CNRS
Clermont-Ferrand — France

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
http://www.cedram.org/

Annales mathématiques Blaise Pascal **13**, 111-205 (2006)

Inversion d'un opérateur de Toeplitz tronqué à symbole matriciel et théorèmes-limite de Szegö

Jean Chanzy

Résumé

Ce travail est une étude théorique d'opérateurs de Toeplitz dont le symbole est une fonction matricielle régulière définie positive partout sur le tore à une dimension. Nous proposons d'abord une formule d'inversion exacte pour un opérateur de Toeplitz à symbole matriciel, démontrée au moyen d'un théorème établi en annexe et donnant la solution du problème de la prédiction relatif à un passé fini pour un processus stationnaire du second ordre. Nous établissons ensuite, à partir de cet inverse, un théorème de trace sous forme d'une expression asymptotique permettant d'obtenir une extension des trois théorèmes-limite de Szegö au cas matriciel.

1. Introduction

Ce travail s'inscrit à la fois dans le cadre de la théorie de la prédiction des processus stationnaires du second ordre, développée par H. Helson et D. Lowdenslager [14] pour un passé infini et dans celui de la théorie des espaces de Hilbert avec poids. Dans ce cadre, nous proposons de donner une formule d'inversion d'une matrice de Toeplitz à blocs, où le symbole est une fonction matricielle définie sur le tore à une dimension, et d'en déduire un théorème de trace sous forme d'une expression asymptotique « à la Szegö », permettant d'étendre au cas matriciel les trois théorèmes-limite de Szegö. Nous utilisons ici des techniques très différentes à base de séries d'opérateurs de Hankel[27], mais les symboles vérifieront les hypothèses de décomposition du théorème de Helson et Lowdenslager[14]. Ce théorème, cité au paragraphe 2.1, permet de décomposer une fonction matricielle hermitienne semi-définie positive partout sur le tore à une dimension, et intégrable, en le produit d'une fonction matricielle de type analytique (c'est-à-dire de carré intégrable et développable en série de Fourier) par son adjoint. Ce théorème a été établi à partir d'une généralisation au cas matriciel du théorème de Szegö relatif à la décomposition de

Lebesgue d'une mesure complexe en une partie régulière et une partie singulière. La démonstration du théorème d'inversion, très technique, utilise la solution du problème de la prédiction [14] pour un passé fini, exposée dans l'annexe B.

Les études les plus marquantes qui ont servi de point de départ à ce travail sont celle de Henry Helson et David Lowdenslager [14], sur la théorie de la prédiction, celle de F.L. Spitzer et C.J. Stone [29] sur l'application des opérateurs de Toeplitz à symbole fonctionnel aux marches aléatoires et qui met en évidence le noyau de Green du problème différentiel :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \dfrac{d^2 f}{dx^2} & = g \quad \text{sur} & [\,0,1\,] \\ \\ f(0) & = f(1) \; = \; 0, & \end{array} \right.$$

et enfin celles de Harold Widom [30, 31] sur le comportement asymptotique des matrices de Toeplitz à blocs et leurs déterminants.

Par ailleurs, les opérateurs de Toeplitz ont trouvé depuis quelques années un regain d'intérêt, et le cas du symbole fonctionnel a été étudié très en détail à l'Université de Paris-Sud Orsay où en particulier des calculs de noyaux de Green de différents problèmes différentiels ont été effectués [21, 22, 23, 27]...

En outre, Harold Widom dans ses deux articles de 1974 et 1976 traite des matrices de Toeplitz à blocs, où il utilise des blocs de matrices carrées de dimension fixe, et où il étend à des symboles matriciels les résultats obtenus par Ulf Grenander et Gabor Szegö concernant les matrices de Toeplitz à symbole fonctionnel. L'auteur traite l'opérateur de Toeplitz comme un opérateur de Fredholm d'indice 0, c'est-à-dire que son symbole est inversible, en tant que matrice, et que le logarithme de son déterminant a une détermination continue sur le tore à une dimension. Dans cette optique, et moyennant une factorisation du symbole du type Wiener-Hopf, il donne une formule asymptotique d'inversion en utilisant une limite en « norme-trace », ainsi qu'une extension au cas matriciel d'un théorème-limite de Szegö concernant le déterminant de l'opérateur de Toeplitz. Modifiant ensuite le cadre de travail, Harold Widom impose au symbole d'être la somme d'une fonction matricielle continue et d'une fonction matricielle de carré intégrable, bornée et de type analytique, sur le tore à une dimension. Dans ce nouveau cadre, qui se rapproche plus de celui dans lequel nous nous plaçons dans la suite de cette étude, il montre un nouveau théorème d'inversion asymptotique, caractérisé par la convergence forte en norme-opérateur de l'inverse de l'opérateur tronqué vers l'opérateur de Toeplitz, ainsi qu'un autre théorème-limite « à la Szegö » sur le déterminant de cet opérateur de Toeplitz.

Dans la présente étude, nous nous plaçons dans un cadre un peu moins général, les espaces de Lebesgue de fonctions matricielles, et nous utilisons une décomposition du symbole F plus particulière, celle établie par Henri Helson et David Lowdenslager pour la théorie de la prédiction, en le produit (a priori non commutatif) d'une fonction matricielle G de type analytique par son adjointe G^*. Nous supposerons néanmoins, pour simplifier les démonstrations, que cette matrice G est partout normale sur le tore à une dimension, c'est-à-dire qu'elle commute partout avec son adjointe. Cette restriction, qui est pour l'instant une contrainte exclusivement technique, motivée par la non-commutativité des matrices, est justifiée par le fait que toute fonction matricielle de type analytique dont les coefficients de Fourier sont des matrices hermitiennes qui commutent toutes les unes avec les autres vérifie cette propriété. En particulier, l'opérateur « Laplacien discret », ainsi que d'autres, construits à partir du Laplacien comme l'opérateur de Helmholtz, sont de ce type. Cependant, l'objectif ultérieur sera de s'affranchir de cette contrainte de « normalité » de la matrice G, pour traiter des cas plus généraux. Dans l'optique de la restriction précédente, nous établissons une formule d'inversion exacte de l'opérateur de Toeplitz tronqué donnant l'expression des blocs de la matrice inverse, et nous en déduisons une formule de trace permettant d'étendre au cas matriciel un théorème-limite de Szegö, avec une formule aussi explicite que celles de Szegö. Cette inversion exacte permettra également, ultérieurement, en libérant la taille de la matrice de Toeplitz ainsi que celle de ses blocs, d'établir un théorème « à la Spitzer-Stone » qui met en évidence un noyau de Green pour le problème de Poisson, avec conditions initiales de Dirichlet, sur un rectangle. Nous proposons aussi d'étendre les résultats de Harold Widom en prolongeant au cas matriciel les trois principaux théorèmes-limite de Szegö.

La théorie développée dans le présent article peut servir au moins à trois grands types d'applications :

- l'inversion du Laplacien discret [17],
- la résolution numérique du problème de Poisson avec des conditions aux limites de Dirichlet sur différents domaines rectangulaires [4],
- la restauration d'images [6].

Après avoir résumé dans une première partie les principaux résultats de la présente étude, nous abordons dans une deuxième partie la théorie des opérateurs de Toeplitz à symbole matriciel, en établissant un théorème d'inversion exacte à partir de la décomposition de Helson et Lowdenslager du symbole [14, 30, 31]. Celui-ci sera une fonction matricielle définie sur le tore à une dimension et une matrice hermitienne régulière, définie positive partout sur le tore à une dimension et intégrable dans un sens défini au paragraphe 2.1 du présent article.

Enfin, la dernière partie établit un théorème asymptotique estimant la trace de l'inverse à partir de la formule précédente, et démontre une extension au cas matriciel des trois principaux théorèmes-limite de Szegö. Le lecteur trouvera dans l'annexe A un résumé de ce qui existe concernant les opérateurs de Toeplitz tronqués à symboles fonctionnels [27], en particulier une estimation du polynôme de prédiction de Helson-Lowdenslager pour un passé fini et un théorème d'inversion dans le cas d'un symbole strictement positif, intégrable et régulier. Ce polynôme de prédiction relatif au symbole d'un opérateur de Toeplitz est très important, puisque, à une normalisation près, ses coefficients sont les éléments de la première colonne de l'inverse de l'opérateur de Toeplitz correspondant. Dans l'annexe B figure une étude du problème de la prédiction pour un passé fini dans le cas matriciel.

Remerciements : Ce travail constitue un chapitre de ma thèse, menée sous la direction de M. Abdellatif Seghier. Je remercie les participants du groupe de travail « Analyse, Probabilités et Applications » de l'Université de Paris-Sud/Orsay pour leurs nombreuses remarques tant sur le contenu que sur la forme de cet article qui s'en est trouvé grandement amélioré. Je remercie également Véronique Fisher, étudiante en thèse à Orsay pour ses conseils de rédaction, qui m'ont permis de clarifier la présentation de cet article.

2. Résultats principaux

La présente étude est effectuée dans le cadre suivant :

2.1. Cadre de l'étude

Définitions générales. On note $\mathbb{T}$ le tore à une dimension, identifié avec l'intervalle $]-\pi,\pi]$, σ la mesure de Haar sur $\mathbb{T}$, de sorte que, si $\theta \in]-\pi,\pi]$, $\mathrm{d}\sigma = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}$, et $\mathring{\imath}$ l'imaginaire pur de $\mathbb{C}$. On considère le caractère :

$$\begin{aligned}\chi :]-\pi,\pi] &\longrightarrow \mathbb{T}\\ \theta &\longmapsto e^{\mathring{\imath}\theta},\end{aligned}$$

qui permet de définir

$$\begin{aligned}\chi^k :]-\pi,\pi] &\longrightarrow \mathbb{T} & \overline{\chi}^k :]-\pi,\pi] &\longrightarrow \mathbb{T}\\ \theta &\longmapsto e^{\mathring{\imath}k\theta} & \theta &\longmapsto e^{-\mathring{\imath}k\theta}.\end{aligned}$$

On note $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ l'espace des matrices de dimension $n \times n$ à coefficients dans le corps des complexes $\mathbb{C}$ et Id la matrice identité de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

Si $M = (m_{i\,j})_{1\leq\, i\,,\,j\,\leq\, n} \in \mathbb{C}$, alors $M^* = (\overline{m_{j\,i}})_{1\leq\, i\,,\,j\,\leq\, n}$ est la matrice adjointe de M, et

$$\mathrm{tr}\,(MM^*) = \sum_{i\,=\,1}^{i\,=\,n}\sum_{k\,=\,1}^{k\,=\,n} m_{i\,k}\,\overline{m_{i\,k}} \;=\; \sum_{1\leq\, i\,,\,k\,\leq\, n} |m_{i\,k}|^2\,.$$

Nous définissons alors sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ la norme matricielle de Hilbert-Schmidt $\|M\|_2 = [\mathrm{tr}\,(MM^*)]^{1/2}$, associée au produit scalaire $\langle M, M'\rangle_2 = \mathrm{tr}\,(MM'^*)$. Cette norme permet en particulier de bénéficier de la commutativité de deux matrices à l'intérieur de la trace et d'utiliser la proposition suivante (voir [19]) :

Proposition 2.1. *Soit une famille finie de matrices carrées de mêmes dimensions $(A_p)_{1\leq p\leq S}$. Alors pour toute permutation circulaire σ des indices p, on a* $\mathrm{tr}\left(\prod_{p=1}^{p=S} A_{\sigma(p)}\right) = \mathrm{tr}\left(\prod_{p=1}^{p=S} A_p\right)$.

Cette propriété de commutativité est un avantage décisif pour obtenir des théorèmes d'inversion et de trace équivalents à la dimension 1.

Comme les opérateurs de Toeplitz que nous allons manipuler opèrent sur des matrices, nous allons en fait traiter ces matrices comme des vecteurs et nous allons donc munir $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ des trois normes vectorielles :

$\forall M = (m_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$,

$$\begin{aligned} \|M\|_1 &= \sum_{1\leq\, i\,,\, j\,\leq\, n} |m_{i\,j}\,|\,, \\ \|M\|_2 &= [\mathrm{tr}\ (MM^*)]^{1/2}\,, \\ \|M\|_\infty &= \max_{1\leq\, i\,,\, j\,\leq\, n} |m_{i\,j}\,|\,. \end{aligned}$$

Espaces de travail. Dans ce paragraphe, nous définissons les différents espaces dans lesquels nous nous plaçons dans la suite de cet ouvrage.

Espaces de Lebesgue de fonctions matricielles.

Il est impératif, dans cette étude, de pouvoir induire sur les fonctions matricielles des propriétés équivalentes à celles qu'ont leurs composantes. C'est pourquoi nous introduisons les espaces suivants :

(i) $L^2_{\mathfrak{M}}(\mathbb{T}) = \left\{ M : \mathbb{T} \longrightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) \ :\ \int_{\mathbb{T}} \|M\|_2^2 \ \mathrm{d}\sigma < +\infty \right\}$ est l'espace des fonctions matricielles « de carré intégrable » sur le tore $\mathbb{T}$, muni du produit scalaire $\langle M, M' \rangle_{L^2_{\mathfrak{M}}(\mathbb{T})} = \dfrac{1}{n} \displaystyle\int_{\mathbb{T}} \mathrm{tr}\ (MM'^*)\ \mathrm{d}\sigma$ et de la norme $\|M\|_{L^2_{\mathfrak{M}}(\mathbb{T})} = \left[\dfrac{1}{n} \displaystyle\int_{\mathbb{T}} \|M\|_2^2 \ \mathrm{d}\sigma \right]^{1/2}$.

(ii) $L^\infty_{\mathfrak{M}}(\mathbb{T}) = \left\{ M : \mathbb{T} \longrightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) \ : \|M\|_{L^\infty_{\mathfrak{M}}(\mathbb{T})} = \sup_{z\in\mathbb{T}} \|M(z)\|_\infty < +\infty \right\}$ est l'espace des fonctions matricielles « essentiellement bornées » sur le tore $\mathbb{T}$.

(iii) $L^1_{\mathfrak{M}}(\mathbb{T}) = \left\{ M : \mathbb{T} \longrightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) \ : \|M\|_{L^1_{\mathfrak{M}}(\mathbb{T})} = \dfrac{1}{n} \displaystyle\int_{\mathbb{T}} \|M\|_1 \ \mathrm{d}\sigma < +\infty \right\}$ est l'espace des fonctions matricielles « intégrables » sur le tore $\mathbb{T}$.

Ces définitions permettent d'affirmer que

$$\forall M : \mathbb{T} \longrightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}),\ M = (m_{ij})_{1\leq i,j\leq n},\ \forall p \in \{1; 2; +\infty\}.$$

$$M \in L^p_{\mathfrak{M}}(\mathbb{T}) \Longleftrightarrow \forall i, \forall j, m_{ij} \in L^p(\mathbb{T}).$$

Remarquons également que la normalisation $\dfrac{1}{n}$ figurant dans les normes $L^1_{\mathfrak{M}}(\mathbb{T})$ et $L^2_{\mathfrak{M}}(\mathbb{T})$ permet d'obtenir $\|\mathrm{Id}\|_{L^1_{\mathfrak{M}}(\mathbb{T})} = \|\mathrm{Id}\|_{L^2_{\mathfrak{M}}(\mathbb{T})} = 1$, et de définir ainsi certaines fonctions matricielles par des séries normalement convergentes, bien qu'aucun des $L^p_{\mathfrak{M}}(\mathbb{T})$, pour $p \in \{1; 2; +\infty\}$, ne soit, avec ces définitions, une algèbre de Banach (voir le lemme 4.9 ou le corollaire 2.10).

Espace de Lebesgue avec poids.

Nous aurons besoin dans la suite de définir le logarithme d'une matrice F hermitienne définie positive partout sur le tore $\mathbb{T}$, et appartenant à $L^1_{\mathfrak{M}}(\mathbb{T})$. On utilise alors la définition suivante (voir [16]) :

Définition 2.2. Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, de spectre $\sigma(M)$ et de rayon spectral $\varrho(M) = \max\{|\varphi| : \varphi \in \sigma(M)\}$ non nul et strictement inférieur à 1, alors $\forall t \in \mathbb{C}$, tel que $|t| < \dfrac{1}{\varrho(M)}$,

$$\log(\mathrm{Id} - tM) = -\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{t^{k+1}}{k+1} M^{k+1}. \tag{2.1}$$

Si $\varrho(M) = 0$, l'égalité précédente est vraie pour tout $t \in \mathbb{C}$.

La fonction matricielle $t \longmapsto \log(\mathrm{Id} - tM)$ est alors analytique sur le disque ouvert

$$\mathcal{D} = \left\{ t : t \in \mathbb{C} \ ; \ |t| < \frac{1}{\varrho(M)} \right\}.$$

Cet énoncé permet de définir $\log(F)$ de la manière suivante :

Toute matrice F peut être décomposée en $F = \tilde{D} - N$, différence d'une matrice diagonalisable $\tilde{D}$ et d'une matrice nilpotente N qui commutent. Or F s'écrit alors $F = \tilde{D}\left(\mathrm{Id} - \tilde{D}^{-1}N\right)$, et on vérifie facilement que la matrice $\tilde{D}^{-1}N$ est encore nilpotente. Comme $\tilde{D}^{-1}N$ est nilpotente, $\varrho(\tilde{D}^{-1}N) = 0$, et $\log\left(\mathrm{Id} - \tilde{D}^{-1}N\right)$ peut être défini par la série (2.1) (avec $t = 1$), qui est en fait une somme finie. En utilisant la réduction de Jordan, on sait d'autre part que les valeurs propres de F sont aussi celles de $\tilde{D}$. F étant hermitienne et définie positive, ses valeurs propres sont réelles et strictement positives et donc celles de $\tilde{D}$ aussi. On en déduit qu'il existe une matrice H dont toutes les valeurs propres sont strictement inférieures à 1, et telle que $\tilde{D} = \mathrm{Id} - H$, ce qui permet de définir également $\log\left(\tilde{D}\right)$ par la série (2.1), avec $t = 1$. Par ailleurs, si on définit l'exponentielle de toute matrice A par la série $e^A = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k!}A^k$ et son logarithme, quand il existe, par la série (2.1) écrite sous la forme

$$\log(A) = -\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k+1}(\mathrm{Id} - A)^{k+1}, \tag{2.2}$$

on a $A = e^{\log(A)}$ (voir [16]). Dans ces conditions, on a $\tilde{D} = e^{\log\left(\tilde{D}\right)}$ et $\mathrm{Id} - \tilde{D}^{-1}N = e^{\log\left(\mathrm{Id}-\tilde{D}^{-1}N\right)}$ et comme $\tilde{D}$ commute avec N, $\tilde{D}$ commute avec $\mathrm{Id}-\tilde{D}^{-1}N$, $\mathrm{Id}-\tilde{D}$ commute avec $\tilde{D}^{-1}N$ et par la série (2.2), $\log\left(\tilde{D}\right)$ commute aussi avec $\log\left(\mathrm{Id} - \tilde{D}^{-1}N\right)$. Ainsi :

$$F = e^{\log\left(\tilde{D}\right)}e^{\log\left(\mathrm{Id}-\tilde{D}^{-1}N\right)} = e^{\log\left(\tilde{D}\right)+\log\left(\mathrm{Id}-\tilde{D}^{-1}N\right)},$$

ce qui nous autorise à définir $\log(F)$ par

$$\log(F) = \log\left(\tilde{D}\right) + \log\left(\mathrm{Id} - \tilde{D}^{-1}N\right).$$

Dans toute la suite, nous définirons $\log(F)$ de cette manière et imposerons que $\log(F)$ soit dans $L^1_{\mathfrak{M}}(\mathbb{T})$, pour pouvoir utiliser le théorème de Helson-Lowdenslager et la décomposition $F = GG^*$. La fonction matricielle F ainsi fixée permet alors d'introduire :

$$L^2_{\mathfrak{M},F}(\mathbb{T}) = \left\{M : \mathbb{T} \longrightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) \ : \ \int_{\mathbb{T}} \mathrm{tr}(MFM^*)\ \mathrm{d}\sigma < +\infty\right\},$$

un espace de Hilbert de fonctions matricielles sur le tore $\mathbb{T}$, muni du produit scalaire

$$\langle M, M'\rangle_{L^2_{\mathfrak{M},F}(\mathbb{T})} = \frac{1}{n}\int_{\mathbb{T}} \mathrm{tr}\ (MFM'^*)\ \mathrm{d}\sigma.$$

Espaces de Hardy.

(i) $H^{2+}_{\mathfrak{M}}(\mathbb{T}) = \left\{M \in L^2_{\mathfrak{M}}(\mathbb{T}) : \widehat{M}(k) = 0 \ si\ k < 0\right\}$ est l'espace de Hardy des fonctions matricielles « de carré intégrable » et de type analytique sur le tore $\mathbb{T}$, avec $\widehat{M}(k) = \int_{\mathbb{T}} \overline{\chi}^k M(\chi) \, \mathrm{d}\sigma(\chi)$.

(ii) $H^{2-}_{\mathfrak{M}}(\mathbb{T}) = \left\{ M \in L^2_{\mathfrak{M}}(\mathbb{T}) : \widehat{M}(k) = 0 \text{ } si \text{ } k \geq 0 \right\}$ est l'espace supplémentaire orthogonal de $H^{2+}_{\mathfrak{M}}(\mathbb{T})$ dans $L^2_{\mathfrak{M}}(\mathbb{T})$.

(iii) On pose $H^{\infty}_{\mathfrak{M}}(\mathbb{T}) = H^{2+}_{\mathfrak{M}}(\mathbb{T}) \cap L^{\infty}_{\mathfrak{M}}(\mathbb{T})$.

Dans toute la suite, nous imposerons que $G \in H^{\infty}_{\mathfrak{M}}(\mathbb{T})$ et $G^{-1} \in H^{\infty}_{\mathfrak{M}}(\mathbb{T})$.

Espace des polynômes matriciels.
Soit $\mathscr{P}_N = \mathrm{Lin}_{\mathfrak{M}} \left\{ \chi^k \mathrm{Id} : k \in \mathbb{N} \, ; 0 \leq k \leq N \right\}$ l'espace des polynômes trigonométriques matriciels de degré inférieur ou égal à N. Notons que

$$\mathscr{P}_N \subset H^{2+}_{\mathfrak{M}}(\mathbb{T}).$$

Espaces de Hardy avec poids.
On note

$$H^{2+}_{\mathfrak{M},F}(\mathbb{T}) = \overline{\mathrm{Lin}_{\mathfrak{M}} \left\{ \chi^k \mathrm{Id} : \ k \in \mathbb{N} \right\}}^{L^2_{\mathfrak{M},F}(\mathbb{T})},$$

l'espace de Hardy des fonctions de type analytique sur le tore $\mathbb{T}$, dans $L^2_{\mathfrak{M},F}(\mathbb{T})$, et

$$H^{2-}_{\mathfrak{M},F}(\mathbb{T}) = \overline{\mathrm{Lin}_{\mathfrak{M}} \left\{ \overline{\chi}^k \mathrm{Id} : k \in \mathbb{N}^* \right\}}^{L^2_{\mathfrak{M},F}(\mathbb{T})},$$

son supplémentaire orthogonal dans $L^2_{\mathfrak{M},F}(\mathbb{T})$.

Projections et opérateurs de Hankel.

Nous considérons d'abord un symbole matriciel F décomposable en $F = GG^*$, où G est partout sur $\mathbb{T}$ une matrice normale, telle que $G \in H^{\infty}_{\mathfrak{M}}(\mathbb{T})$ et $G^{-1} \in H^{\infty}_{\mathfrak{M}}(\mathbb{T})$ et nous définissons ensuite la matrice complexe $\Phi_N = \chi^N G^{-1*} G$, puis les opérateurs suivants :

$\pi_+ : L^2_{\mathfrak{M}}(\mathbb{T}) \longrightarrow H^{2+}_{\mathfrak{M}}(\mathbb{T})$ est la projection orthogonale sur $H^{2+}_{\mathfrak{M}}(\mathbb{T})$

$\pi_- : L^2_{\mathfrak{M}}(\mathbb{T}) \longrightarrow H^{2-}_{\mathfrak{M}}(\mathbb{T})$ est la projection orthogonale sur $H^{2-}_{\mathfrak{M}}(\mathbb{T})$.

$$H_{\Phi_N} : H^{2+}_{\mathfrak{M}}(\mathbb{T}) \longrightarrow H^{2-}_{\mathfrak{M}}(\mathbb{T}) \qquad H^*_{\Phi_N} : H^{2-}_{\mathfrak{M}}(\mathbb{T}) \longrightarrow H^{2+}_{\mathfrak{M}}(\mathbb{T})$$
$$M \longmapsto \pi_-(M\Phi_N) \qquad M' \longmapsto \pi_+(M'\Phi^*_N).$$

H_{Φ_N} et $H^*_{\Phi_N}$ sont respectivement le premier et le second opérateur de Hankel.

Opérateur de Toeplitz tronqué à blocs.

Définition 2.3. On définit d'abord $\pi^{(1)}_N$ la projection orthogonale de $L^2_{\mathfrak{M}}(\mathbb{T})$ sur $\mathscr{P}_N$, puis l'opérateur de Toeplitz tronqué à blocs, à symbole matriciel F, par

$$\begin{array}{rcccc} T_N(F) : \mathscr{P}_N & \longrightarrow & L^2_{\mathfrak{M}}(\mathbb{T}) & \longrightarrow & \mathscr{P}_N \\ Q & \longmapsto & Q.F & \longmapsto & \pi^{(1)}_N(Q.F) \end{array}$$

Définition du polynôme de prédiction pour un passé fini.

Considérons un processus stationnaire centré du second ordre $(X_N)_{N\in\mathbb{Z}}$, indexé par $\mathbb{Z}$, à valeurs dans $\mathbb{C}^n$, de densité $F = (f_{ij})_{1\le i,j\le n}$, avec $F \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose connues les variables aléatoires $\{X_0; X_1; \dots; X_{N-1}\}$ du processus et on veut approcher la variable aléatoire X_N en minimisant la distance de X_N à l'espace $\mathrm{Lin}_{L^2_{\mathfrak{M}}}\{X_0; X_1; \dots; X_{N-1}\}$. Or il existe une isométrie bijective entre $\mathrm{Lin}_{L^2_{\mathfrak{M}}}\{X_0; X_1; \dots; X_N\}$ muni de la métrique définie par la matrice de covariance et $\mathscr{P}_N$. On cherche alors le polynôme P_{N-1} de $\mathscr{P}_{N-1}$ qui réalise le minimum de $\left\|\chi^N\mathrm{Id} - Z_{N-1}(\chi)\right\|_{L^2_{\mathfrak{M},F}(\mathbb{T})}$, pour Z_{N-1} décrivant $\mathscr{P}_{N-1}$. Mais

$$\begin{aligned}
\left\|\chi^N\mathrm{Id} - P_{N-1}(\chi)\right\|_{L^2_{\mathfrak{M},F}(\mathbb{T})} &= \left\|\overline{\chi}^N\mathrm{Id} - P^*_{N-1}(\overline{\chi})\right\|_{L^2_{\mathfrak{M},F}(\mathbb{T})} \\
&= \left\|\mathrm{Id} - \chi^N P^*_{N-1}(\overline{\chi})\right\|_{L^2_{\mathfrak{M},F}(\mathbb{T})} \\
&= \left\|\mathrm{Id} - \chi\tilde{P}_{N-1}(\chi)\right\|_{L^2_{\mathfrak{M},F}(\mathbb{T})}
\end{aligned}$$

où $\tilde{P}_{N-1}$ est le polynôme matriciel de $\mathscr{P}_{N-1}$ qui minimise $\left\|\mathrm{Id} - \chi \tilde{Z}_{N-1}(\chi)\right\|_{L^2_{\mathfrak{M},F}(\mathbb{T})}$ pour $\tilde{Z}_{N-1}$ décrivant $\mathscr{P}_{N-1}$ (voir [13, 32, 33]).

Alors le polynôme de prédiction relatif à un passé fini pour ce processus est défini ainsi :

Définition 2.4.
Soit $S_N = \sum\limits_{k=1}^{k=N} \chi^k A_k$ le polynôme de $\chi\mathscr{P}_{N-1}$ qui réalise le minimum de $\|\mathrm{Id} - Q_N\|_{L^2_{\mathfrak{M},F}(\mathbb{T})}$, quand Q_N décrit $\chi\mathscr{P}_{N-1}$. On appelle polynôme de prédiction pour un passé fini le polynôme

$$R_N = \mathrm{Id} - S_N,$$

orthogonal à $\chi\mathscr{P}_{N-1}$ dans $L^2_{\mathfrak{M},F}(\mathbb{T})$.

Par ailleurs, la présente étude est fondée sur le théorème de Helson-Lowdenslager, équivalent exact du théorème de décomposition de Szegö utilisé dans le cas fonctionnel. En voici l'énoncé :

Théorème de Helson-Lowdenslager [14]**.** *Soit F une fonction matricielle définie sur le tore $\mathbb{T}$, à valeurs dans le sous-ensemble de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ des matrices semi-définies positives et hermitiennes partout sur $\mathbb{T}$, telle que $F \in L^1_{\mathfrak{M}}(\mathbb{T})$. Alors il existe une fonction matricielle $G \in H^{2+}_{\mathfrak{M}}(\mathbb{T})$ telle que $F = GG^*$ et $\det \widehat{G}(0) \neq 0$ si et seulement si*

$$\int_{\mathbb{T}} \mathrm{tr}(\log(F))\ \mathrm{d}\sigma > -\infty.$$

Si cette condition est vérifiée, nous pouvons choisir G telle que

$$\int_{\mathbb{T}} \log\left(|\det G|\right)\ \mathrm{d}\sigma = \log\left(|\det \widehat{G}(0)|\right).$$

Remarque 2.5 sur la dimension 1 : Le cadre utilisé dans la section suivante pour les opérateurs de Toeplitz à symbole fonctionnel se déduit des définitions et théorème précédents en prenant $n = 1$, c'est-à-dire en remplaçant toutes les matrices par des fonctions scalaires. On retrouve alors toutes les définitions usuelles sur les espaces de Lebesgue classiques. ♣

Dans toute la suite, nous écrirons L^2, $L^2_{\mathfrak{M}}$, H^{2+}, $H^{2+}_{\mathfrak{M}}$,... (nous omettrons le tore $\mathbb{T}$ dans l'expression des espaces de Lebesgue et des espaces de Hardy) à chaque fois qu'aucune confusion ne sera possible. Il est à noter que les techniques d'analyse utilisées dans la suite sont apparentées à celles d'ouvrages cités dans la bibliographie : [1, 2, 3, 7, 20]. Pour les espaces de Hardy, citons [24, 25], et pour les techniques algébriques, citons [10, 11, 8, 9, 18, 28, 34].

2.2. Énoncé des théorèmes principaux

Nous utilisons d'abord la démonstration du théorème de projection de l'annexe B concernant le problème de la prédiction pour établir une formule d'inversion exacte d'un opérateur de Toeplitz tronqué à symbole matriciel :

Théorème 2.5. Inversion exacte d'un opérateur de Toeplitz à symbole matriciel. *Soit F un symbole matriciel décomposable en $F = GG^*$, G étant une matrice normale et inversible sur $\mathbb{T}$, telle que $G \in H^\infty_{\mathfrak{M}}$ et $G^{-1} \in H^\infty_{\mathfrak{M}}$. Alors*

(i) $\exists\, \alpha \in]0,1[\, :\ \forall N \in \mathbb{N} \qquad \rho_{N+1}(F^{-1}) = \|H_{\Phi_{N+1}}\|_{L^2_{\mathfrak{M}}} \leq \alpha,$

(ii) *$T_N(F)$ est inversible et on a pour tout $Q \in \mathscr{P}_N$,*

$$T_N(F)^{-1}(Q) = \pi_+(QG^{-1*})\ G^{-1}$$
$$-\pi_+\left[\left\{\left(\mathrm{Id} - H^*_{\Phi_{N+1}} H_{\Phi_{N+1}}\right)^{-1}\left(\pi_+\left(\pi_+(QG^{-1*})\Phi^*_{N+1}\right)\right)\right\}\ \Phi_{N+1}\right]\ G^{-1}.$$

Un cas particulier important de la formule d'inversion précédente est celui où le symbole G est l'inverse d'un polynôme matriciel, ce qui donne le corollaire suivant :

Corollaire 2.6. *Soit $P \in \mathscr{P}_N \cap H^\infty_{\mathfrak{M}}$, P non nul et inversible sur $\mathbb{T}$ et tel que $P^{-1} \in H^\infty_{\mathfrak{M}}$. Si $G = P^{-1}$, alors*

$$H_{\Phi_{N+1}} = H^*_{\Phi_{N+1}} = 0,$$

et on a pour tout $Q \in \mathscr{P}_N$,

$$T_N\left((P^*P)^{-1}\right)^{-1}(Q) = \pi_+(QP^*)\ P - \pi_+\left(QP^*\Phi^*_{N+1}\right)\ \Phi_{N+1}P.$$

Nous déduisons ensuite des deux formules précédentes une estimation asymptotique de la trace de $\big(T_N(F)^{-1} - T_N(F^{-1})\big)$ dans le cas général où $F = GG^*$, G étant une matrice normale sur $\mathbb{T}$, et une forme explicite de cette même trace dans le cas particulier où G est l'inverse d'un polynôme matriciel, à rapprocher des formules obtenues en particulier par Ulf Grenander, Gabor Szegö [13] et Harold Widom [30, 31] :

Théorème 2.7. Théorème de trace « à la Szegö ».
(i) *Soit* $P \in \mathscr{P}_N \cap H^\infty_{\mathfrak{M}}$, *$P$ non nul et inversible sur $\mathbb{T}$ et tel que* $P^{-1} \in H^\infty_{\mathfrak{M}}$. *Si* $G = P^{-1}$ *et* $P = \sum\limits_{k=0}^{k=N} \chi^k A_k$, *alors*

$$\mathrm{tr}\ \Big(T_N(F)^{-1} - T_N(F^{-1})\Big) = -\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{k=N} k\,\|A_k\|_2^2 = -2\left\langle \chi\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}(\chi), P(\chi)\right\rangle_{L^2_{\mathfrak{M}}},$$

(ii) *Dans le cas général, si G et G^{-1} sont dans $H^\infty_{\mathfrak{M}}$, on pose* $G^{-1} = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \chi^k \Gamma_k$, *avec*

$$\Gamma_k = \widehat{G^{-1}}(k) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}),\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Alors si $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} k\,\|\Gamma_k\|_2^2 < +\infty$,

$$\left|\mathrm{tr}\ \Big(T_N(F)^{-1} - T_N(F^{-1})\Big) + \frac{2}{n}\left(\sum_{k=0}^{k=N} k\,\|\Gamma_k\|_2^2 + (N+1)\sum_{k\geq N+1}\|\Gamma_k\|_2^2\right)\right|$$
$$\leq \frac{4}{n}\ \frac{\rho_{N+1}(F^{-1})}{1-(\rho_{N+1}(F^{-1}))^2}\ \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} k\,\|\Gamma_k\|_2^2\right).$$

Comme $\lim\limits_{N\to+\infty}\rho_{N+1}(F^{-1}) = 0$, *on en déduit*

$$\lim_{N\to+\infty}\mathrm{tr}\ \Big(T_N(F)^{-1} - T_N(F^{-1})\Big) = -\frac{2}{n}\ \sum_{k\in\mathbb{N}} k\left\|\widehat{G^{-1}}(k)\right\|_2^2.$$

Si de plus G^{-1} est dérivable, avec $\dfrac{\mathrm{d}G^{-1}}{\mathrm{d}z} \in L^1_{\mathfrak{M}}$,

$$\lim_{N\to+\infty}\mathrm{tr}\ \Big(T_N(F)^{-1} - T_N(F^{-1})\Big) = -\frac{2}{n}\ \sum_{k\in\mathbb{N}} k\left\|\widehat{G^{-1}}(k)\right\|_2^2,$$
$$= -\frac{2}{n}\int_{\mathbb{T}}\chi\ \mathrm{tr}\left(\frac{d(G^{-1})}{dz}(\chi)G^{-1*}(\overline{\chi})\right)\ \mathrm{d}\sigma.$$

Si la somme $\sum_{k\in\mathbb{N}} k\,\|\Gamma_k\|_2^2$ *est infinie, alors* $\lim_{N\to+\infty} \mathrm{tr}\ \left(T_N(F)^{-1} - T_N(F^{-1})\right) = -\infty$.

Enfin, à partir du théorème de trace précédent, nous étendons les trois principaux théorèmes-limite de Szegö au cas matriciel. Nous introduisons l'espace de Hilbert :

$$\mathscr{B}_{\mathfrak{M}}^{2,1/2}(\mathbb{T}) = \left\{ M : \mathbb{T} \longrightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})\ ;\ M \in L^2_{\mathfrak{M}}\ ;\ \sum_{k\in\mathbb{Z}} |k| \left\| \widehat{M}(k) \right\|_2^2 < +\infty \right\},$$

muni du produit scalaire hermitien

$$\langle M_1, M_2 \rangle_{\mathscr{B}_{\mathfrak{M}}^{2,1/2}} = \frac{1}{n} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |k| \mathrm{tr}\left[\widehat{M_1}(k) \widehat{M_2}^*(k) \right],$$

et nous faisons désormais l'hypothèse $\mathbf{(\mathfrak{H})}$ suivante :

Hypothèse $\mathbf{(\mathfrak{H})}$:

(1) $F \in L^1_{\mathfrak{M}}$ et $\log(F) \in L^1_{\mathfrak{M}}$. D'après le théorème de Helson et Lowdenslager, il existe alors une décomposition de F en $F = GG^*$, avec $G \in H^{2+}_{\mathfrak{M}}$.

(2) G est partout sur $\mathbb{T}$ une matrice normale et inversible, $G \in H^\infty_{\mathfrak{M}}$, $G^{-1} \in H^\infty_{\mathfrak{M}}$.

(3) Tous les coefficients de Fourier de G^{-1} commutent les uns avec les autres, $G^{-1} \in \mathscr{B}_{\mathfrak{M}}^{2,1/2}$ et $\log\left(G^{-1}\right) \in \mathscr{B}_{\mathfrak{M}}^{2,1/2}$.

♠

Nous avons alors le théorème suivant :

Théorème 2.8. *Soit F une fonction matricielle définie sur le tore $\mathbb{T}$, à valeurs dans le sous-ensemble de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ des matrices définies positives et hermitiennes partout, telle que F vérifie l'hypothèse* $\mathbf{(\mathfrak{H})}$ *et* $\log(F) \in \mathscr{B}_{\mathfrak{M}}^{2,1/2}$, $F^{-1} \in \mathscr{B}_{\mathfrak{M}}^{2,1/2}$. *Alors*

$$\begin{aligned}\lim_{N\to+\infty} \mathrm{tr}\ \left(T_N(F)^{-1} - T_N(F^{-1})\right) &= \frac{1}{n} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |k|\ \mathrm{tr}\ \left[\widehat{\log(F)}(k) \widehat{F^{-1}}^*(k) \right], \\ &= \left\langle \log(F), F^{-1} \right\rangle_{\mathscr{B}_{\mathfrak{M}}^{2,1/2}}.\end{aligned}$$

Théorème 2.9. *Avec les mêmes hypothèses que le théorème 2.8,*

$$\begin{aligned}\lim_{N\to+\infty} \ln(\det T_N(F)) - \mathrm{tr}\ (T_N(\log(F))) &= \frac{1}{2n} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |k| \ \left\| \widehat{\log(F)}(k) \right\|_2^2, \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k\in\mathbb{N}^*} k \ \left\| \widehat{\log(F)}(k) \right\|_2^2.\end{aligned}$$

Corollaire 2.10. *Soient F un symbole vérifiant les hypothèses du théorème 2.8 et $\mathscr{D}$ le disque fermé de $\mathbb{C}$ de centre 0 et de rayon $n\|F\|_{L^\infty_{\mathfrak{M}}}$:*

$$\mathscr{D} = \left\{ w : w \in \mathbb{C}; |w| \leq n\|F\|_{L^\infty_{\mathfrak{M}}} \right\}.$$

Soient Ω un ouvert connexe borné de $\mathbb{C}$ contenant 0 et le spectre $\sigma(F)$ de F, et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction analytique sur Ω, dont le développement en 0 est

$$f(z) = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k z^k.$$

Alors f induit sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ une fonction $\tilde{f} : \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, $\tilde{f}(M)$ soit de type analytique, c'est-à-dire que

$$\tilde{f}(M) = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k M^k,$$

chaque composante de M étant dans Ω. On suppose en outre que la matrice $w\mathrm{Id} - F$ vérifie le théorème 2.8 pour tout $w \in \Omega\backslash\mathscr{D}$. Dans ces conditions, pour tout (Γ), contour rectifiable fermé de $\Omega\backslash\mathscr{D}$ entourant $\sigma(F)$,

$$\begin{aligned}&\lim_{N\to+\infty} \mathrm{tr}\ \left(\tilde{f}\left(T_N(F)\right) - T_N\left(\tilde{f}(F)\right)\right) \\ &\qquad = \frac{1}{2\mathring{\imath}\pi} \int_\Gamma f(w) \left\langle \log(w\mathrm{Id} - F), (w\mathrm{Id} - F)^{-1} \right\rangle_{\mathscr{B}^{2,1/2}_{\mathfrak{M}}} \mathrm{d}w.\end{aligned}$$

Dans l'annexe B, nous donnons la solution du problème de la prédiction relatif à un passé fini pour un processus stationnaire centré du second ordre, indexé par $\mathbb{Z}$, à valeurs dans $\mathbb{C}^n$, de densité $F = (f_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$:

Théorème 2.11. *On suppose que F admet une décomposition de Helson-Lowdenslager en $F = GG^*$, G étant une matrice normale et inversible sur*

$\mathbb{T}$, telle que $G \in H^\infty_{\mathfrak{M}}$ et $G^{-1} \in H^\infty_{\mathfrak{M}}$. Alors la projection orthogonale de toute matrice M de $L^2_{\mathfrak{M},F}$ sur $\mathscr{P}_{N-1}$ est donnée par

$$\Pi_N^{(F)}(M) =$$
$$\left\{\pi_+(MG) - \pi_+\left[\left\{\left(\mathrm{Id} - H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N}\right)^{-1} \left(\pi_+\left(\pi_+(MG)\Phi_N^*\right)\right)\right\}\ \Phi_N\right]\right\} G^{-1},$$

$\Big($avec $\Pi_N^{(F)} : L^2_{\mathfrak{M},F} \longrightarrow \mathscr{P}_{N-1}\Big)$.

3. Inversion des Opérateurs de Toeplitz à symbole matriciel (dimension supérieure à 1)

Dans cette section, nous établissons une formule d'inversion exacte pour un opérateur de Toeplitz à symbole matriciel, qui se présente sous la forme d'une matrice à blocs. Cette formule donne l'expression des blocs de la matrice inverse.

Considérons un symbole matriciel F hermitien, défini positif, intégrable et régulier, c'est-à-dire que $F = F^*$; $F > 0$; $F \in L^1_{\mathfrak{M}}$; F est inversible dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ et $\log(F) \in L^1_{\mathfrak{M}}$.
Considérons également les espaces $L^2_{\mathfrak{M},F^{-1}}$ et

$$K = \mathscr{P}_N.F = \mathrm{Lin}_{\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})}\left\{\chi^p : p \in \mathbb{N}\ ; 1 \leq p \leq N\right\}.F,$$

ce qui entraîne $\dim_{\mathbb{C}}(K) < +\infty$.

Nous avons alors la proposition suivante :

Proposition 3.1. *$K \subset L^2_{\mathfrak{M},F^{-1}}$ et $K^{\perp L^2_{\mathfrak{M},F^{-1}}} \subset \mathscr{P}_N^{\perp L^2_{\mathfrak{M}}}$*

Démonstration. On sait que $\mathscr{P}_N \subset L^2_{\mathfrak{M},F}$. Par ailleurs, si $M \in K$, $\exists P \in \mathscr{P}_N$; $M = PF$.

$$\begin{aligned}
\|M\|^2_{L^2_{\mathfrak{M},F^{-1}}} &= \frac{1}{n}\int_{\mathbb{T}} \mathrm{tr}\ \left(P.F.F^{-1}.F^*.P^*\right)\ \mathrm{d}\sigma \\
&= \frac{1}{n}\int_{\mathbb{T}} \mathrm{tr}\ \left(PF^*P^*\right)\ \mathrm{d}\sigma \\
&= \frac{1}{n}\int_{\mathbb{T}} \mathrm{tr}\ \left(PFP^*\right)\ \mathrm{d}\sigma \\
&= \|P\|^2_{L^2_{\mathfrak{M},F}},
\end{aligned}$$

donc $\|M\|_{L^2_{\mathfrak{M},F^{-1}}} = \|P\|_{L^2_{\mathfrak{M},F}}$, et $M \in L^2_{\mathfrak{M},F^{-1}}$.

On a donc $K \subset L^2_{\mathfrak{M},F^{-1}}$. Posant maintenant $L^2_{\mathfrak{M},F^{-1}} = K \overset{\perp}{\oplus} K^\perp$, on obtient $\forall M \in L^2_{\mathfrak{M},F^{-1}}$; $M \in K^\perp$, $\forall M' \in \mathscr{P}_N$,

$$0 = \langle M'F, M\rangle_{L^2_{\mathfrak{M},F^{-1}}} = \langle M', M\rangle_{L^2_{\mathfrak{M}}},$$

donc $M \in \mathscr{P}_N^\perp$, d'où la proposition. $\square$

Remarque 3.2. $L^2_{\mathfrak{M},F^{-1}} \subseteq L^1_{\mathfrak{M}}$. En effet, comme F est une matrice hermitienne, inversible et définie positive, il existe une unique matrice inversible $H = F^{1/2}$, définie à partir de la forme diagonale de F obtenue par une matrice de passage unitaire, les valeurs propres de F étant toutes réelles et strictement positives.

Soit $M \in L^2_{\mathfrak{M},F^{-1}}$. En utilisant l'inégalité (4.1) du lemme 4.3 énoncé au paragraphe 4.1, on peut écrire :

$$\|M\|_{L^1_{\mathfrak{M}}} = \|MF^{-1/2}F^{1/2}\|_{L^1_{\mathfrak{M}}} \le n\|MF^{-1/2}\|_{L^2_{\mathfrak{M}}}\|F^{1/2}\|_{L^2_{\mathfrak{M}}},$$

si ces deux dernières normes existent.
Or

$$\left\|MF^{-1/2}\right\|^2_{L^2_{\mathfrak{M}}} = \frac{1}{n}\int_{\mathbb{T}} \mathrm{tr}\, \left(MF^{-1/2}F^{-1/2*}M^*\right)\ \mathrm{d}\sigma = \|M\|^2_{L^2_{\mathfrak{M},F^{-1}}} < +\infty,$$

et

$$\left\|F^{1/2}\right\|^2_{L^2_{\mathfrak{M}}} = \frac{1}{n}\int_{\mathbb{T}} \mathrm{tr}\, \left(F^{1/2}F^{1/2*}\right)\ \mathrm{d}\sigma \le \|F\|_{L^1_{\mathfrak{M}}} < +\infty.$$

Finalement,

$$\|M\|_{L^1_{\mathfrak{M}}} \le n\left(\|F\|_{L^1_{\mathfrak{M}}}\right)^{1/2}\|M\|_{L^2_{\mathfrak{M},F^{-1}}} < +\infty,$$

donc $M \in L^1_{\mathfrak{M}}$, et l'inclusion est vérifiée.

Viennent ensuite deux lemmes techniques, pour aboutir enfin à la formule d'inversion :
Lemme technique 1. *$\forall Q \in \mathscr{P}_N$, $T_N(F)^{-1}(Q) = \pi_K(Q)F^{-1}$, où*

$$\pi_K : L^2_{\mathfrak{M},F^{-1}} \longrightarrow K$$

est la projection orthogonale sur K.

Démonstration. Rappelons que $\pi_N^{(1)}$ est la projection orthogonale de $L^2_{\mathfrak{M}}$ sur $\mathscr{P}_N$.
$\forall Q \in \mathscr{P}_N$, $Q = PF + (Q - PF)$ avec $P \in \mathscr{P}_N$, $PF \in K$ et $Q - PF \in K^{\perp L^2_{\mathfrak{M},F^{-1}}}$. Or $Q = \pi_N^{(1)}(Q)$, donc $Q = \pi_N^{(1)}(PF) + \pi_N^{(1)}(Q - PF)$. Par ailleurs, $Q - PF \in K^{\perp L^2_{\mathfrak{M},F^{-1}}} \Longrightarrow \pi_N^{(1)}(Q - PF) = 0$, par la proposition précédente. Donc $Q = \pi_N^{(1)}(PF) = T_N(F)(P)$. Ainsi $\forall Q \in \mathscr{P}_N$, $\exists P \in \mathscr{P}_N$ tel que $Q = T_N(F)(P)$. L'opérateur $T_N(F)$ est alors surjectif, donc bijectif, puisque $\dim_{\mathbb{C}} \mathscr{P}_N < +\infty$. $T_N(F)$ est donc inversible sur $\mathscr{P}_N$ et $P = T_N(F)^{-1}(Q)$. Comme $\pi_K(Q) = PF$, $\pi_K(Q) = T_N(F)^{-1}(Q)F$ et

$$T_N(F)^{-1}(Q) = \pi_K(Q)F^{-1}.$$

□

Maintenant, $K = \mathscr{P}_N.F = \left[H^{2+}_{\mathfrak{M}} \cap \left(\Phi_{N+1}G^{-1}H^{2-}_{\mathfrak{M}}G\right)\right]G^*$, puisque d'après l'expression (B.2) :

$$\mathscr{P}_N = \left[H^{2+}_{\mathfrak{M}} \cap \left(\Phi_{N+1}G^{-1}H^{2-}_{\mathfrak{M}}G\right)\right]G^{-1}.$$

Posant alors

$$K_0 = H^{2+}_{\mathfrak{M}} \cap \left(\Phi_{N+1}G^{-1}H^{2-}_{\mathfrak{M}}G\right),$$

il vient $K = K_0G^*$ et $K_0 = \mathscr{P}_N.G$.
On établit alors le lemme suivant, qui prépare la formule d'inversion de l'opérateur $T_N(F)$:
Lemme technique 2. *Soit $\pi_{K_0} : L^2_{\mathfrak{M}} \longrightarrow K_0$ la projection orthogonale sur K_0. Alors $\forall Q \in \mathscr{P}_N$,*

$$\pi_K(Q) = \pi_{K_0}\left(QG^{-1*}\right)G^*$$
$$T_N(F)^{-1}(Q) = \pi_{K_0}\left(QG^{-1*}\right)G^{-1}.$$

Démonstration. Comme $\pi_K(Q) \perp (Q - \pi_K(Q))$ dans $L^2_{\mathfrak{M},F^{-1}}$, $\langle \pi_K(Q), Q - \pi_K(Q)\rangle_{L^2_{\mathfrak{M},F^{-1}}} = 0$. Or

$$\begin{aligned}
\langle \pi_K(Q), Q - \pi_K(Q)\rangle_{L^2_{\mathfrak{M},F^{-1}}} &= \frac{1}{n}\int_{\mathbb{T}} \mathrm{tr}\,\left(\pi_K(Q)F^{-1}\left(Q - \pi_K(Q)\right)^*\right)\,\mathrm{d}\sigma\\
&= \frac{1}{n}\int_{\mathbb{T}} \mathrm{tr}\,\left(\pi_K(Q)G^{-1*}G^{-1}\left(Q - \pi_K(Q)\right)^*\right)\,\mathrm{d}\sigma\\
&= \langle \pi_K(Q)G^{-1*}, \left(Q - \pi_K(Q)\right)G^{-1*}\rangle_{L^2_{\mathfrak{M}}}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Or $\pi_K(Q)G^{-1*} \in KG^{-1*} = K_0$, donc $\pi_K(Q)G^{-1*}$ est la projection orthogonale de QG^{-1*} sur K_0 dans $L^2_{\mathfrak{M}}$. Par unicité de la projection orthogonale, $\pi_{K_0}\left(QG^{-1*}\right) = \pi_K(Q)G^{-1*}$ et

$$\pi_K(Q) = \pi_{K_0}\left(QG^{-1*}\right)G^*.$$

Par conséquent :

$$T_N(F)^{-1}(Q) = \pi_{K_0}\left(QG^{-1*}\right)G^*F^{-1} = \pi_{K_0}\left(QG^{-1*}\right)G^{-1}.$$

□

Le lemme précédent permet d'établir le théorème d'inversion suivant :

Théorème 2.5 : Inversion exacte d'un opérateur de Toeplitz à symbole matriciel.

Soit F un symbole matriciel décomposable en $F = GG^*$, G étant une matrice normale et inversible partout sur $\mathbb{T}$, telle que $G \in H^\infty_{\mathfrak{M}}$ et $G^{-1} \in H^\infty_{\mathfrak{M}}$. Alors

(i) $\exists\, \alpha \in \,]0,1[\,:\ \forall N \in \mathbb{N} \qquad \|H_{\Phi_{N+1}}\|_{L^2_{\mathfrak{M}}} \leq \alpha$,

(ii) *$T_N(F)$ est inversible et on a pour tout $Q \in \mathscr{P}_N$,*

$$\begin{aligned}
T_N(F)^{-1}(Q) &= \pi_+(QG^{-1*})G^{-1}\\
&\quad -\pi_+\left[\left\{\left(\mathrm{Id} - H^*_{\Phi_{N+1}}H_{\Phi_{N+1}}\right)^{-1}\left(\pi_+\left(\pi_+(QG^{-1*})\Phi^*_{N+1}\right)\right)\right\}\Phi_{N+1}\right]G^{-1}.
\end{aligned}$$

On pourra comparer cette formule à [30, 31].

Démonstration. La démonstration de (i) est faite au paragraphe B.2 (proposition B.4) et celle de (ii) est calquée sur celle du théorème 2.11 du paragraphe B.3 (voir annexe B).

En utilisant les notations des lemmes techniques 1 et 2, et comme $\pi_{K_0}(QG^{-1*}) \in H^{2+}_{\mathfrak{M}} \cap \left(\Phi_{N+1}G^{-1}H^{2-}_{\mathfrak{M}}G\right)$, par une démarche analogue à la démonstration du théorème 2.11, on obtient

$$\begin{aligned}\pi_{K_0}\left(QG^{-1*}\right) &= \pi_+(QG^{-1*})\\ &\quad - \pi_+\left[\left\{\left(\mathrm{Id} - H^*_{\Phi_{N+1}}H_{\Phi_{N+1}}\right)^{-1}\left(\pi_+\left(\pi_+(QG^{-1*})\Phi^*_{N+1}\right)\right)\right\}\Phi_{N+1}\right],\end{aligned}$$

et $T_N(F)^{-1}(Q) = \pi_{K_0}\left(QG^{-1*}\right)G^{-1}$, d'où le théorème. $\square$

Corollaire 2.6. *Soient $P \in \mathscr{P}_N \cap H^\infty_{\mathfrak{M}}$, P non nul et inversible avec $P^{-1} \in H^\infty_{\mathfrak{M}}$ et $G = P^{-1}$, alors*

$$H_{\Phi_{N+1}} = H^*_{\Phi_{N+1}} = 0,$$

et on a pour tout $Q \in \mathscr{P}_N$,

$$T_N\left((P^*P)^{-1}\right)^{-1}(Q) = \pi_+(QP^*)P - \pi_+\left(QP^*\Phi^*_{N+1}\right)\Phi_{N+1}P.$$

Démonstration. En prenant $G = P^{-1}$ dans le théorème , on obtient

$$T_N(F)^{-1}(Q) = \pi_+(QP^*)P - \pi_+\left[\pi_+\left(\pi_+(QP^*)\Phi^*_{N+1}\right)\Phi_{N+1}\right]P.$$

Or $\pi_+\left(\pi_+(QP^*)\Phi^*_{N+1}\right) = \pi_+\left(QP^*\Phi^*_{N+1}\right) - H^*_{\Phi_{N+1}}\left(\pi_-(QP^*)\right)$.
Par ailleurs, $\forall M \in H^{2+}_{\mathfrak{M}}$,

$$\begin{aligned}\langle H^*_{\Phi_{N+1}}\left(\pi_-(QP^*)\right), M\rangle_{L^2_{\mathfrak{M}}} &= \langle \pi_-(QP^*)\Phi^*_{N+1}, M\rangle_{L^2_{\mathfrak{M}}}\\ &= \langle \pi_-(QP^*), M\Phi_{N+1}\rangle_{L^2_{\mathfrak{M}}}\end{aligned}$$

mais $M\Phi_{N+1} = M(\chi^{N+1}P^*)P^{-1}$ et on a simultanément $M \in H^{2+}_{\mathfrak{M}}$, $\chi^{N+1}P^* \in H^{2+}_{\mathfrak{M}}$, et $P^{-1} \in H^{2+}_{\mathfrak{M}}$,
donc $M\Phi_{N+1} \in H^{2+}_{\mathfrak{M}}$ et $\langle \pi_-(QP^*), M\Phi_{N+1}\rangle_{L^2_{\mathfrak{M}}} = 0$.
Finalement, $H^*_{\Phi_{N+1}}\left(\pi_-(QP^*)\right) = 0$ et

$$\pi_+\left(\pi_+(QP^*)\Phi^*_{N+1}\right) = \pi_+\left(QP^*\Phi^*_{N+1}\right) = B.$$

$$\begin{aligned}\pi_+\left[\pi_+\left(\pi_+(QP^*)\Phi^*_{N+1}\right)\Phi_{N+1}\right] &= \pi_+(B\Phi_{N+1})\\ &= B\Phi_{N+1} - \pi_-(B\Phi_{N+1})\\ &= B\Phi_{N+1} - H_{\Phi_{N+1}}(B).\end{aligned}$$

Mais $H_{\Phi_{N+1}}(B) = 0$, et donc $T_N(F)^{-1}(Q) = \pi_+(QP^*)P - B\Phi_{N+1}P$. $\square$

4. **Extension au cas matriciel des théorèmes-limite de Szegö**

Dans cette section, nous établissons à partir de la formule d'inversion du paragraphe précédent un théorème de trace asymptotique dont une conséquence est une extension au cas matriciel des théorèmes-limite de Szegö.

Nous commençons par introduire la notion d'angle de sous-espaces d'un espace de Hilbert :

4.1. **Angle de sous-espaces d'un espace de Hilbert**

On considère l'espace de Hilbert $L^2_{\mathfrak{M},U}$, où U est une fonction matricielle sur $\mathbb{T}$, à valeurs dans le sous-ensemble de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ des matrices définies positives partout sur le tore $\mathbb{T}$.

Définition 4.1. On appelle angle des deux sous-espaces $\chi^k H^{2+}_{\mathfrak{M},U}$ et $H^{2-}_{\mathfrak{M},U}$ le nombre réel positif ou nul :

$$\mu_k(U) = \sup\left\{\left|\langle\chi^k M, M'\rangle_{L^2_{\mathfrak{M},U}}\right|\right\} = \sup\left\{\left|\frac{1}{n}\int_{\mathbb{T}} \mathrm{tr}\ (\chi^k MUM'^*)\ \ \mathrm{d}\sigma\right|\right\},$$

la borne supérieure étant prise pour M décrivant $L^\infty_{\mathfrak{M}}\cap H^{2+}_{\mathfrak{M},U}$, M' décrivant $L^\infty_{\mathfrak{M}} \cap H^{2-}_{\mathfrak{M},U}$ de sorte que $\|M\|_{L^2_{\mathfrak{M},U}} = \|M'\|_{L^2_{\mathfrak{M},U}} = 1$.

Si $\log(U) \in L^1_{\mathfrak{M}}$, on peut décomposer U en $U = V^*V$ avec $V \in H^{2+}_{\mathfrak{M}}$ et $V^{-1} \in H^{2+}_{\mathfrak{M}}$, d'où

$$\mathrm{tr}\ (\chi^k MUM'^*) = \mathrm{tr}\ \Big((MV)(\chi^k V^{-1}V^*)(VM'^*)\Big).$$

On suppose de plus que $V \in H^\infty_{\mathfrak{M}}$ et $V^{-1} \in H^\infty_{\mathfrak{M}}$. Posant alors $\varphi_k(V^{-1}) = \chi^k V^{-1}V^*$, $W = (VM'^*)(MV)$, $\tilde{W} = \dfrac{1}{n}W$ et $H^1_{\mathfrak{M}} = L^1_{\mathfrak{M}} \cap H^\infty_{\mathfrak{M}}$, on a la proposition suivante :

Proposition 4.2.

$$\mu_k(U) = \sup\left\{\left|\int_{\mathbb{T}} \mathrm{tr}\ \left(\tilde{W}\varphi_k(V^{-1})\right)\ \ \mathrm{d}\sigma\right| : \tilde{W} \in H^1_{\mathfrak{M}}, \|\tilde{W}\|_{L^1_{\mathfrak{M}}} \leq 1\right\},$$
$$= \sup\left\{\left|\langle\varphi_k(V^{-1}), W^*\rangle_{L^2_{\mathfrak{M}}}\right| : W \in H^1_{\mathfrak{M}}, \|W\|_{L^1_{\mathfrak{M}}} \leq n\right\}.$$

Démonstration. Nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 4.3.

$$\text{(i) } \forall A \in L^2_{\mathfrak{M}}\ ,\ \forall B \in L^2_{\mathfrak{M}}\ ,\ \|AB\|_{L^1_{\mathfrak{M}}} \leq n\|A\|_{L^2_{\mathfrak{M}}}\|B\|_{L^2_{\mathfrak{M}}}\ , \tag{4.1}$$
$$\text{(ii) } \forall A \in L^\infty_{\mathfrak{M}}\ ,\ \forall B \in L^\infty_{\mathfrak{M}}\ ,\ \|AB\|_{L^\infty_{\mathfrak{M}}} \leq n\|A\|_{L^\infty_{\mathfrak{M}}}\|B\|_{L^\infty_{\mathfrak{M}}}. \tag{4.2}$$

Démonstration. (i) Posons $A = (a_{i\ j})_{1\leq i,j\leq n}$ et $B = (b_{i\ j})_{1\leq i,j\leq n}$. Alors

$$\|AB\|_1 = \sum_{1\leq i,j\leq n}\left|\sum_{k=1}^{k=n} a_{i\ k}b_{k\ j}\right| \leq \sum_{1\leq i,j\leq n}\sum_{k=1}^{k=n}|a_{i\ k}||b_{k\ j}|,$$

ce qui donne successivement les majorations :

$$\begin{aligned}
\|AB\|_1 &\leq \sum_{1\leq i,j\leq n}\left(\sum_{k=1}^{k=n}|a_{i\ k}|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{k=n}|b_{k\ j}|^2\right)^{1/2} \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{i=n}\left(\sum_{k=1}^{k=n}|a_{i\ k}|^2\right)^{1/2}\right)\left(\sum_{j=1}^{j=n}\left(\sum_{k=1}^{k=n}|b_{k\ j}|^2\right)^{1/2}\right) \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k=1}^{k=n}|a_{i\ k}|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{i=n}1\right)^{1/2}\left(\sum_{j=1}^{j=n}\sum_{k=1}^{k=n}|b_{k\ j}|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{j=1}^{j=n}1\right)^{1/2} \\
&\leq \sqrt{n}\left(\sum_{1\leq i,k\leq n}|a_{i\ k}|^2\right)^{1/2}\sqrt{n}\left(\sum_{1\leq k,j\leq n}|b_{k\ j}|^2\right)^{1/2},
\end{aligned}$$

en utilisant trois fois l'inégalité de Schwarz. Or

$$\sum_{1\leq i,k\leq n}|a_{i\ k}|^2 = \mathrm{tr}\ (AA^*),$$

et

$$\sum_{1\leq k,j\leq n}|b_{k\ j}|^2 = \mathrm{tr}\ (BB^*),$$

donc

$$\begin{aligned} \|AB\|_1 &\le (n \text{ tr } (AA^*))^{1/2} (n \text{ tr } (BB^*))^{1/2} \\ \|AB\|_1 &\le n (\text{tr } (AA^*))^{1/2} (\text{tr } (BB^*))^{1/2} \\ \frac{1}{n}\|AB\|_1 &\le \|A\|_2 \|B\|_2. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\|AB\|_{L^1_{\mathfrak{M}}} \le \int_{\mathbb{T}} \|A\|_2 \|B\|_2 \, \mathrm{d}\sigma,$$

et

$$\begin{aligned} \|AB\|_{L^1_{\mathfrak{M}}} &\le \left(\int_{\mathbb{T}} \|A\|_2^2 \, \mathrm{d}\sigma \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{T}} \|B\|_2^2 \, \mathrm{d}\sigma \right)^{1/2} \\ \|AB\|_{L^1_{\mathfrak{M}}} &\le \left(n \|A\|^2_{L^2_{\mathfrak{M}}} \right)^{1/2} \left(n \|B\|^2_{L^2_{\mathfrak{M}}} \right)^{1/2} \\ \|AB\|_{L^1_{\mathfrak{M}}} &\le n \|A\|_{L^2_{\mathfrak{M}}} \|B\|_{L^2_{\mathfrak{M}}}, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

(ii) Posons $A = (a_{i\,j})_{1 \le i,j \le n}$ et $B = (b_{i\,j})_{1 \le i,j \le n}$. Alors

$$\|AB\|_\infty = \max_{1 \le i,j \le n} \left| \sum_{k=1}^{k=n} a_{i\,k} b_{k\,j} \right|,$$

ce qui donne successivement les majorations :

$$\begin{aligned} \|AB\|_\infty &\le \max_{1 \le i \le n} \left(\left(\sum_{k=1}^{k=n} |a_{i\,k}|^2 \right)^{1/2} \right) \max_{1 \le j \le n} \left(\left(\sum_{k=1}^{k=n} |b_{k\,j}|^2 \right)^{1/2} \right) \\ &\le \left(\sqrt{n} \max_{1 \le i,k \le n} |a_{i\,k}| \right) \left(\sqrt{n} \max_{1 \le k,j \le n} |b_{k\,j}| \right) \\ &\le n \|A\|_\infty \|B\|_\infty. \end{aligned}$$

En passant à la borne supérieure sur le tore $\mathbb{T}$, on obtient

$$\|AB\|_{L^\infty_{\mathfrak{M}}} \le n \|A\|_{L^\infty_{\mathfrak{M}}} \|B\|_{L^\infty_{\mathfrak{M}}}.$$

□

Montrons maintenant la proposition 4.2 :

Comme $\|M\|_{L^2_{\mathfrak{M},U}} = \|MV\|_{L^2_{\mathfrak{M}}}$ et $\|M'\|_{L^2_{\mathfrak{M},U}} = \|VM'^*\|_{L^2_{\mathfrak{M}}}$, $MV \in H^{2+}_{\mathfrak{M}}$ et $VM'^* \in H^{2+}_{\mathfrak{M}}$, donc $W \in H^{2+}_{\mathfrak{M}}$ et on déduit du lemme précédent que

$$W \in H^1_{\mathfrak{M}} = L^1_{\mathfrak{M}} \cap H^\infty_{\mathfrak{M}},$$

puisque

$$\|W\|_{L^1_{\mathfrak{M}}} \leq n\|MV\|_{L^2_{\mathfrak{M}}}\|VM^{'*}\|_{L^2_{\mathfrak{M}}} < +\infty,$$
$$\text{et } \|W\|_{L^\infty_{\mathfrak{M}}} \leq n\|MV\|_{L^\infty_{\mathfrak{M}}}\|VM^{'*}\|_{L^\infty_{\mathfrak{M}}} < +\infty.$$

Par ailleurs, si $\|MV\|_{L^2_{\mathfrak{M}}} = 1$ et $\|VM^{'*}\|_{L^2_{\mathfrak{M}}} = 1$, $\|W\|_{L^1_{\mathfrak{M}}} \leq n$ et $\|\tilde{W}\|_{L^1_{\mathfrak{M}}} \leq 1$. D'autre part,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\int_{\mathbb{T}} \mathrm{tr}\ (\chi^k MUM'^*)\ \ \mathrm{d}\sigma &= \frac{1}{n}\int_{\mathbb{T}} \mathrm{tr}\ \Big((VM'^*)(MV)\varphi_k(V^{-1})\Big)\ \ \mathrm{d}\sigma,\\
&= \frac{1}{n}\int_{\mathbb{T}} \mathrm{tr}\ \Big(W\varphi_k(V^{-1})\Big)\ \ \mathrm{d}\sigma,\\
&= \langle \varphi_k(V^{-1}), W^*\rangle_{L^2_{\mathfrak{M}}},\\
&= \int_{\mathbb{T}} \mathrm{tr}\ \Big(\tilde{W}\varphi_k(V^{-1})\Big)\ \ \mathrm{d}\sigma.
\end{aligned}$$

En passant aux bornes supérieures, on obtient l'expression annoncée. □

La proposition suivante exprime le lien qui existe entre l'angle des deux sous-espaces $\chi^N H^{2+}_{\mathfrak{M},F^{-1}}$ et $H^{2-}_{\mathfrak{M},F^{-1}}$ et la norme-opérateur de l'opérateur de Hankel H_{Φ_N}, et permettra de donner dans le paragraphe suivant une estimation de $\rho_N(F^{-1})$:

Proposition 4.4. *Pour $k = N$, $V = G^{-1}$ et $U = F^{-1}$, on a*

$$\mu_k(U) = \|H_{\Phi_N}\|_{L^2_{\mathfrak{M}}} = \rho_N(F^{-1}),$$

et

$$\begin{aligned}
\rho_N(F^{-1}) &= \sup\left\{\left|\langle \Phi_N, W^*\rangle_{L^2_{\mathfrak{M}}}\right| : W \in H^1_{\mathfrak{M}}, \|W\|_{L^1_{\mathfrak{M}}} \leq n\right\}\\
\rho_N(F^{-1}) &= \sup\left\{\left|\langle W, \Phi_N^*\rangle_{L^2_{\mathfrak{M}}}\right| : W \in H^1_{\mathfrak{M}}, \|W\|_{L^1_{\mathfrak{M}}} \leq n\right\}\\
\rho_N(F^{-1}) &= \sup\left\{\left|\int_{\mathbb{T}} \mathrm{tr}\ \Big(\tilde{W}\Phi_N\Big)\ \ \mathrm{d}\sigma\right| : \tilde{W} \in H^1_{\mathfrak{M}}, \|\tilde{W}\|_{L^1_{\mathfrak{M}}} \leq 1\right\}.
\end{aligned}$$

Démonstration. En effet, on vérifie facilement que $\forall M \in H^{2+}_{\mathfrak{M},F^{-1}}$ et $\forall M' \in H^{2-}_{\mathfrak{M},F^{-1}}$,

$$\langle \chi^N M, M'\rangle_{L^2_{\mathfrak{M},F^{-1}}} = \langle MG^{-1}\Phi_N, M'G^{-1*}\rangle_{L^2_{\mathfrak{M}}}.$$

Par ailleurs, si $M \in H^{2+}_{\mathfrak{M},F^{-1}}$, $MG^{-1} \in H^{2+}_{\mathfrak{M}}$ et si $M' \in H^{2-}_{\mathfrak{M},F^{-1}}$, $M'G^{-1*} \in H^{2-}_{\mathfrak{M}}$, avec

$\|MG^{-1}\|_{L^2_{\mathfrak{M}}} = \|M\|_{L^2_{\mathfrak{M},F^{-1}}}$ et $\|M'G^{-1*}\|_{L^2_{\mathfrak{M}}} = \|M'\|_{L^2_{\mathfrak{M},F^{-1}}}$.
On en déduit que

$$\begin{aligned}\langle \chi^N M, M' \rangle_{L^2_{\mathfrak{M},F^{-1}}} &= \langle \pi_- \left(MG^{-1}\Phi_N \right), M'G^{-1*} \rangle_{L^2_{\mathfrak{M}}}, \\ &= \langle H_{\Phi_N} \left(MG^{-1} \right), M'G^{-1*} \rangle_{L^2_{\mathfrak{M}}},\end{aligned}$$

et ainsi, en passant aux bornes supérieures,

$$\mu_N(F^{-1}) = \|H_{\Phi_N}\|_{L^2_{\mathfrak{M}}} = \rho_N(F^{-1}).$$

D'autre part, $\varphi_k(V^{-1}) = \chi^N GG^{-1*} = \chi^N G^{-1*}G = \Phi_N$, et

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\int_{\mathbb{T}} \operatorname{tr}\left(\chi^k MUM'^*\right) \, \mathrm{d}\sigma &= \frac{1}{n}\int_{\mathbb{T}} \operatorname{tr}\left((MV)(VM'^*)\varphi_k(V^{-1}) \right) \, \mathrm{d}\sigma \\ &= \int_{\mathbb{T}} \operatorname{tr}\left(\tilde{W}\Phi_N \right) \, \mathrm{d}\sigma.\end{aligned}$$

□

4.2. Théorème de trace asymptotique

Dans cette section, nous montrons un théorème de trace asymptotique dont une conséquence immédiate est une extension au cas matriciel d'un théorème-limite de Szegö. Nous nous plaçons toujours dans le cas d'un symbole F à décomposition de Helson-Lowdenslager en $F = GG^*$, G étant une matrice normale et inversible sur $\mathbb{T}$, telle que $G \in H^\infty_{\mathfrak{M}}$ et $G^{-1} \in H^\infty_{\mathfrak{M}}$.

Proposition 4.5.
(i) *Pour toute fonction matricielle F définie sur le tore $\mathbb{T}$, telle que $F \in L^1_{\mathfrak{M}}$, $\log(F) \in L^1_{\mathfrak{M}}$, et $F = GG^*$, G étant une matrice normale et inversible sur $\mathbb{T}$, telle que $G \in H^\infty_{\mathfrak{M}}$ et $G^{-1} \in H^\infty_{\mathfrak{M}}$,*

$$\lim_{N\to+\infty} \rho_N(F^{-1}) = 0.$$

(ii) *En particulier, si $P \in \mathscr{P}_{N-1} \cap H^\infty_{\mathfrak{M}}$, P non nul et inversible, avec $P^{-1} \in H^\infty_{\mathfrak{M}}$ et $G = P^{-1}$, alors*

$$\rho_N(F^{-1}) = 0.$$

Démonstration. Nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 4.6.
(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $\forall M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$,

$$\begin{aligned}\|M\|_\infty \leq \|M\|_1 &\leq n^2 \|M\|_\infty ,\\ \|M\|_\infty \leq \|M\|_2 &\leq n \|M\|_\infty ,\\ \|M\|_2 \leq \|M\|_1 &\leq n \|M\|_2 .\end{aligned}$$

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, *et pour toute fonction matricielle* M *définie sur* $\mathbb{T}$ *et* σ*-mesurable ,*

$$\begin{aligned}\|M\|_{L^1_{\mathfrak{M}}} &\leq n \|M\|_{L^\infty_{\mathfrak{M}}} ,\\ \|M\|_{L^2_{\mathfrak{M}}} &\leq n^{3/2} \|M\|_{L^\infty_{\mathfrak{M}}} ,\\ \|M\|_{L^1_{\mathfrak{M}}} &\leq \sqrt{n} \|M\|_{L^2_{\mathfrak{M}}} .\end{aligned}$$

Démonstration.
(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $\forall M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$,

$$\begin{aligned}\|M\|_\infty &= \max_{1\leq i , j \leq n} |m_{i j}| ,\\ &\leq \sum_{1\leq i , j \leq n} |m_{i j}| ,\\ &\leq \sum_{1\leq i , j \leq n} \sup_{1\leq i , j \leq n} |m_{i j}| ,\end{aligned}$$

d'où

$$\|M\|_\infty \leq \|M\|_1 \leq n^2 \|M\|_\infty .$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\|M\|_\infty^2 &= \left(\max_{1\leq i , j \leq n} |m_{i j}| \right)^2\\ &= \max_{1\leq i , j \leq n} \left(|m_{i j}|^2 \right) ,\end{aligned}$$

ce qui donne successivement les majorations :

$$\begin{aligned}
\|M\|_\infty^2 &\leq \sum_{1\leq\, i\,,\, j\,\leq\, n} |m_{i\,j}\,|^2\,,\\
&\leq \sum_{1\leq\, i\,,\, j\,\leq\, n} \left(\max_{1\leq\, i\,,\, j\,\leq\, n} |m_{i\,j}\,|\right)^2,\\
&\leq n^2 \left(\max_{1\leq\, i\,,\, j\,\leq\, n} |m_{i\,j}\,|\right)^2,\\
&\leq \left(n \max_{1\leq\, i\,,\, j\,\leq\, n} |m_{i\,j}\,|\right)^2.
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\|M\|_\infty \leq \|M\|_2 \leq n\,\|M\|_\infty\,.$$

Enfin,

$$\sum_{1\leq\, i\,,\, j\,\leq\, n} |m_{i\,j}\,|^2 \leq \left(\sum_{1\leq\, i\,,\, j\,\leq\, n} |m_{i\,j}\,|\right)^2,$$

et

$$\sum_{1\leq\, i\,,\, j\,\leq\, n} |m_{i\,j}\,| \leq \left(\sum_{1\leq\, i\,,\, j\,\leq\, n} |m_{i\,j}\,|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{1\leq\, i\,,\, j\,\leq\, n} 1\right)^{1/2},$$

donc

$$\|M\|_2 \leq \|M\|_1 \leq n\,\|M\|_2\,.$$

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, et pour toute fonction matricielle M définie sur $\mathbb{T}$ et σ-mesurable, on a

$$\begin{aligned}
\|M\|_{L^1_{\mathfrak{M}}} &= \frac{1}{n}\int_{\mathbb{T}} \|M\|_1 \,\mathrm{d}\sigma,\\
&\leq \frac{1}{n}\int_{\mathbb{T}} n^2\,\|M\|_\infty \,\mathrm{d}\sigma,\\
&\leq n\int_{\mathbb{T}} \|M\|_\infty \,\mathrm{d}\sigma,\\
&\leq n\,\|M\|_{L^\infty_{\mathfrak{M}}}\,.
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\|M\|_{L^1_{\mathfrak{M}}} &\leq \int_{\mathbb{T}} \|M\|_2 \ \mathrm{d}\sigma,\\ &\leq \left(\int_{\mathbb{T}} \|M\|_2^2 \ \mathrm{d}\sigma\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{T}} 1 \ \mathrm{d}\sigma\right)^{1/2},\\ &\leq \left(n \|M\|^2_{L^2_{\mathfrak{M}}}\right)^{1/2},\\ &\leq \sqrt{n} \|M\|_{L^2_{\mathfrak{M}}}.\end{aligned}$$

Enfin,

$$\|M\|^2_{L^2_{\mathfrak{M}}} = \frac{1}{n}\int_{\mathbb{T}} \|M\|_2^2 \ \mathrm{d}\sigma,$$

et ainsi

$$\begin{aligned}\|M\|^2_{L^2_{\mathfrak{M}}} &\leq \frac{1}{n}\int_{\mathbb{T}} \|M\|_1^2 \ \mathrm{d}\sigma,\\ &\leq \frac{1}{n}\int_{\mathbb{T}} n^4 \|M\|_\infty^2 \ \mathrm{d}\sigma,\\ &\leq n^3 \|M\|^2_{L^\infty_{\mathfrak{M}}}.\end{aligned}$$

Donc

$$\|M\|_{L^2_{\mathfrak{M}}} \leq n^{3/2} \|M\|_{L^\infty_{\mathfrak{M}}}.$$

Finalement,

$$\begin{aligned}\|M\|_{L^1_{\mathfrak{M}}} &\leq n \|M\|_{L^\infty_{\mathfrak{M}}},\\ \|M\|_{L^2_{\mathfrak{M}}} &\leq n^{3/2} \|M\|_{L^\infty_{\mathfrak{M}}},\\ \|M\|_{L^1_{\mathfrak{M}}} &\leq \sqrt{n} \|M\|_{L^2_{\mathfrak{M}}}.\end{aligned}$$

$\square$

Montrons maintenant la proposition 4.5 :
On a $\Phi_N = \chi^N G^{-1*}G$. Posons $G^{-1*}G = \sum\limits_{l\in\mathbb{Z}} \chi^l \Omega_l$, qui est une série normalement convergente dans $L^2_{\mathfrak{M}}$, comme produit des deux séries normalement convergentes dans $L^2_{\mathfrak{M}} \cap L^\infty_{\mathfrak{M}}$:

$$G^{-1*} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \overline{\chi}^k \Gamma_k^*, \left(G^{-1} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \chi^k \Gamma_k\right),$$

et
$$G = \sum_{k\in\mathbb{N}} \chi^k G_k.$$

Pour tout $\tilde{W} \in H^1_{\mathfrak{M}}$, on pose $\tilde{W} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \chi^k W_k$, qui converge dans $L^2_{\mathfrak{M}}$.

On peut écrire
$$G^{-1*}G = \sum_{l=-N+1}^{l=N-1} \chi^l \Omega_l + \sum_{|l|>N-1} \chi^l \Omega_l,$$
et donc
$$\tilde{W}\Phi_N = \chi^N \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \chi^k W_k\right)\left(\sum_{l=-N+1}^{l=N-1} \chi^l \Omega_l\right) + \chi^N \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \chi^k W_k\right)\left(\sum_{|l|>N-1} \chi^l \Omega_l\right).$$

Alors
$$\chi^N \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \chi^k W_k\right)\left(\sum_{l=-N+1}^{l=N-1} \chi^l \Omega_l\right) = \chi^N \left(\sum_{p\geq N-1} \chi^p \left(\sum_{k=-N+1}^{k=N-1} W_{p-k}\Omega_k\right)\right) + \sum_{p=-N+1}^{p=N-2} \chi^p \left(\sum_{k=-N+1}^{k=p} W_{p-k}\Omega_k\right),$$

$$\chi^N \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \chi^k W_k\right)\left(\sum_{l\geq N} \chi^l \Omega_l\right) = \chi^N \left(\sum_{k\geq N} \left(\sum_{p\geq k} \chi^p W_{p-k}\Omega_k\right)\right),$$
$$\chi^N \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \chi^k W_k\right)\left(\sum_{l\leq -N} \chi^l \Omega_l\right) = \chi^N \left(\sum_{k\leq -N} \left(\sum_{p\geq k} \chi^p W_{p-k}\Omega_k\right)\right).$$

On a alors
$$\tilde{W}\Phi_N = \chi^N \left(\sum_{p\geq N-1} \chi^p \left(\sum_{k=-N+1}^{k=N-1} W_{p-k}\Omega_k\right) + \sum_{p=-N+1}^{p=N-2} \chi^p \left(\sum_{k=-N+1}^{k=p} W_{p-k}\Omega_k\right)\right) + \chi^N \left(\sum_{k\geq N} \left(\sum_{p\geq k} \chi^p W_{p-k}\Omega_k\right) + \sum_{k\leq -N} \left(\sum_{p\geq k} \chi^p W_{p-k}\Omega_k\right)\right),$$

et

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}} \operatorname{tr}\ \left(\tilde{W}\Phi_N\right)\ \mathrm{d}\sigma = &\sum_{p\geq N-1}\ \sum_{k=-N+1}^{k=N-1} \int_{\mathbb{T}} \chi^{p+N} \operatorname{tr}\ \left(W_{p-k}\Omega_k\right)\ \mathrm{d}\sigma \\ &+ \sum_{p=-N+1}^{p=N-2}\ \sum_{k=-N+1}^{k=p} \int_{\mathbb{T}} \chi^{p+N} \operatorname{tr}\ \left(W_{p-k}\Omega_k\right)\ \mathrm{d}\sigma \\ &+ \sum_{k\geq N}\ \sum_{p\geq k} \int_{\mathbb{T}} \chi^{p+N} \operatorname{tr}\ \left(W_{p-k}\Omega_k\right)\ \mathrm{d}\sigma \\ &+ \sum_{k\leq -N}\ \sum_{p\geq k} \int_{\mathbb{T}} \chi^{p+N} \operatorname{tr}\ \left(W_{p-k}\Omega_k\right)\ \mathrm{d}\sigma,\end{aligned}$$

ce qui entraîne $\int_{\mathbb{T}} \operatorname{tr}\ \left(\tilde{W}\Phi_N\right)\ \mathrm{d}\sigma = \sum_{k\in\mathbb{N}} \operatorname{tr}\ \left(W_k\Omega_{-(N+k)}\right)$, puisque les trois premières sommes de la précédente égalité sont nulles et la dernière est égale à $\sum_{k\in\mathbb{N}} \operatorname{tr}\ \left(W_k\Omega_{-(N+k)}\right)$. On en déduit que

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{T}} \operatorname{tr}\ \left(\tilde{W}\Phi_N\right)\ \mathrm{d}\sigma\right| &\leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \left|\operatorname{tr}\ \left(W_k\Omega_{-(N+k)}\right)\right| \\ &\leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \left\|W_k\right\|_2 \left\|\Omega_{-(N+k)}\right\|_2 \\ &\leq \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \left\|W_k\right\|_2^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \left\|\Omega_{-(N+k)}\right\|_2^2\right)^{1/2},\end{aligned}$$

en appliquant deux fois l'inégalité de Schwarz. Or

$$\left\|\tilde{W}\right\|_{L^2_{\mathfrak{M}}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \left\|W_k\right\|_2^2\right)^{1/2},$$

donc

$$\left|\int_{\mathbb{T}} \operatorname{tr}\ \left(\tilde{W}\Phi_N\right)\ \mathrm{d}\sigma\right| \leq \left(\sum_{l\geq N} \left\|\Omega_{-l}\right\|_2^2\right)^{1/2} \sqrt{n} \left\|\tilde{W}\right\|_{L^2_{\mathfrak{M}}}.$$

Comme $\tilde{W}$ est dans $H^1_{\mathfrak{M}}$, on a $\left\|\tilde{W}\right\|_{L^2_{\mathfrak{M}}} < +\infty$, et on peut trouver une constante $C_n > 0$ telle que

$$\left\|\tilde{W}\right\|_{L^2_{\mathfrak{M}}} \leq C_n < +\infty.$$

En passant alors à la borne supérieure, on obtient

$$0 \leq \rho_N(F^{-1}) \leq \sqrt{n}\ C_n \left(\sum_{|l| \geq N} \|\Omega_l\|_2^2 \right)^{1/2}.$$

Alors,

$$\lim_{N \to +\infty} \sum_{|l| \geq N} \|\Omega_l\|_2^2 = 0 \implies \lim_{N \to +\infty} \rho_N(F^{-1}) = 0.$$

Par ailleurs, on a vu que si $P \in \mathscr{P}_{N-1} \cap H^\infty_{\mathfrak{M}}$, P non nul et inversible, avec $P^{-1} \in H^\infty_{\mathfrak{M}}$ et $G = P^{-1}$, alors $H_{\Phi_N} = 0$, donc $\rho_N(F^{-1}) = 0$. $\square$

Théorème 2.7 : Théorème de trace « à la Szegö ».
(i) *Soit* $P \in \mathscr{P}_N \cap H^\infty_{\mathfrak{M}}$, *$P$ non nul et inversible sur* $\mathbb{T}$ *et tel que* $P^{-1} \in H^\infty_{\mathfrak{M}}$. *Si* $G = P^{-1}$ *et* $P = \sum_{k=0}^{k=N} \chi^k A_k$, *alors*

$$\operatorname{tr}\ \left(T_N(F)^{-1} - T_N(F^{-1})\right) = -\frac{2}{n} \sum_{k=0}^{k=N} k \left\|A_k\right\|_2^2 = -2 \left\langle \chi \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}(\chi), P(\chi) \right\rangle_{L^2_{\mathfrak{M}}},$$

(ii) *Dans le cas général, si* G *et* G^{-1} *sont dans* $H^\infty_{\mathfrak{M}}$, *on pose* $G^{-1} = \sum_{k \in \mathbb{N}} \chi^k \Gamma_k$, *avec*

$$\Gamma_k = \widehat{G^{-1}}(k) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}),\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Alors, si $\sum_{k \in \mathbb{N}} k \left\|\Gamma_k\right\|_2^2 < +\infty$,

$$\left| \operatorname{tr}\ \left(T_N(F)^{-1} - T_N(F^{-1})\right) + \frac{2}{n} \left(\sum_{k=0}^{k=N} k \left\|\Gamma_k\right\|_2^2 + (N+1) \sum_{k \geq N+1} \left\|\Gamma_k\right\|_2^2 \right) \right|$$
$$\leq \frac{4}{n}\ \frac{\rho_{N+1}(F^{-1})}{1 - (\rho_{N+1}(F^{-1}))^2}\ \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} k \left\|\Gamma_k\right\|_2^2 \right).$$

On en déduit

$$\lim_{N\to+\infty} \operatorname{tr}\ \Big(T_N(F)^{-1} - T_N(F^{-1})\Big) = -\frac{2}{n}\ \sum_{k\in\mathbb{N}} k\left\|\widehat{G^{-1}}(k)\right\|_2^2.$$

Si de plus G^{-1} *est dérivable, avec* $\dfrac{\mathrm{d}\left(G^{-1}\right)}{\mathrm{d}z} \in L^1_{\mathfrak{M}}$*,*

$$\begin{aligned}\lim_{N\to+\infty} \operatorname{tr}\ \Big(T_N(F)^{-1} - T_N(F^{-1})\Big) &= -\frac{2}{n}\ \sum_{k\in\mathbb{N}} k\left\|\widehat{G^{-1}}(k)\right\|_2^2,\\ &= -\frac{2}{n}\int_{\mathbb{T}} \chi\ \operatorname{tr}\left(\frac{d(G^{-1})}{dz}(\chi)G^{-1*}(\chi)\right)\ \mathrm{d}\sigma.\end{aligned}$$

Si la somme $\sum_{k\in\mathbb{N}} k\left\|\Gamma_k\right\|_2^2$ *est infinie, alors* $\lim_{N\to+\infty} \operatorname{tr}\ \left(T_N(F)^{-1} - T_N(F^{-1})\right) = -\infty$*.*

Démonstration.
(i) Cas $G = P^{-1}$: $\forall Q \in \mathscr{P}_N$,

$$\begin{aligned}T_N(F)^{-1}(Q) &= \pi_+(QP^*)P - \pi_+\left(QP^*\Phi^*_{N+1}\right)\Phi_{N+1}P,\\ &= QF^{-1} - \pi_-(QP^*)P - \pi_+\left(QP^*\Phi^*_{N+1}\right)\Phi_{N+1}P,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T_N(F)^{-1}(Q) = T_N(F^{-1})(Q) &- \pi^{(1)}_N\left(\pi_-(QP^*)P\right)\\ &- \pi^{(1)}_N\left(\pi_+\left(QP^*\Phi^*_{N+1}\right)\Phi_{N+1}P\right),\end{aligned}$$

puisque $T_N(F)^{-1}(Q) \in \mathscr{P}_N$ et en utilisant $\pi^{(1)}_N : L^2_{\mathfrak{M}} \longrightarrow \mathscr{P}_N$, la projection orthogonale sur $\mathscr{P}_N$. Nous devons donc calculer

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}\ \Big(T_N(F)^{-1} - T_N(F^{-1})\Big) &= -\sum_{k=0}^{k=N}\langle\pi^{(1)}_N\Big(\pi_-(\chi^k P^*)P\Big), \chi^k\rangle_{L^2_{\mathfrak{M}}}\\ &\quad - \sum_{k=0}^{k=N}\langle\pi^{(1)}_N\Big(\pi_+\Big(\chi^k P^*\Phi^*_{N+1}\Big)\Phi_{N+1}P\Big), \chi^k\rangle_{L^2_{\mathfrak{M}}}.\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}\langle \pi_N^{(1)}\left(\pi_-(\chi^k P^*)P\right), \chi^k\rangle_{L^2_{\mathfrak{M}}} &= \langle \pi_-(\chi^k P^*)P, \chi^k\rangle_{L^2_{\mathfrak{M}}},\\ &= \langle \pi_-(\chi^k P^*), \chi^k P^*\rangle_{L^2_{\mathfrak{M}}},\\ &= \left\|\pi_-(\chi^k P^*)\right\|^2_{L^2_{\mathfrak{M}}}.\end{aligned}$$

Si $P = \sum\limits_{k=0}^{k=N} \chi^k A_k$, et si $k \neq N$, alors $\pi_-(\chi^k P^*) = \sum\limits_{s=1}^{s=N-k} \overline{\chi}^s A^*_{s+k}$, et

$$\left\|\pi_-(\chi^k P^*)\right\|^2_{L^2_{\mathfrak{M}}} = \sum_{s=1}^{s=N-k} \|A^*_{s+k}\|^2_{L^2_{\mathfrak{M}}} = \frac{1}{n}\sum_{s=1}^{s=N-k} \|A_{s+k}\|^2_2.$$

Si $k = N$, alors $\chi^N P^* = \sum\limits_{l=0}^{l=N} \overline{\chi}^{l-N} A^*_l = \sum\limits_{s=-N}^{s=0} \overline{\chi}^s A^*_{s+N}$, et $\pi_-(\chi^N P^*) = 0$. On a donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{k=N-1} \langle \pi_N^{(1)}\left(\pi_-(\chi^k P^*)P\right), \chi^k\rangle_{L^2_{\mathfrak{M}}} &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=N-1}\sum_{s=0}^{s=N-k} \|A_{s+k}\|^2_2\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=N-1}\sum_{l=k+1}^{l=N} \|A_l\|^2_2\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=N} k\,\|A_k\|^2_2\end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}\langle \pi_N^{(1)}\left(\pi_+\left(\chi^k P^*\Phi^*_{N+1}\right)\Phi_{N+1}P\right), \chi^k\rangle_{L^2_{\mathfrak{M}}} &= \langle \pi_+\left(\chi^k P^*\Phi^*_{N+1}\right)\Phi_{N+1}P, \chi^k\rangle_{L^2_{\mathfrak{M}}}\\ &= \langle \pi_+\left(\chi^k P^*\Phi^*_{N+1}\right), \chi^k P^*\Phi^*_{N+1}\rangle_{L^2_{\mathfrak{M}}}.\end{aligned}$$

D'où

$$\langle \pi_N^{(1)}\left(\pi_+\left(\chi^k P^*\Phi^*_{N+1}\right)\Phi_{N+1}P\right), \chi^k\rangle_{L^2_{\mathfrak{M}}} = \left\|\pi_+\left(\chi^k P^*\Phi^*_{N+1}\right)\right\|^2_{L^2_{\mathfrak{M}}}.$$

D'autre part, si $k \neq 0$,

$$\chi^k P^*\Phi^*_{N+1} = \overline{\chi}^{N+1-k} P = \sum_{l=0}^{l=N} \chi^{l+k-(N+1)} A_l = \sum_{s=k-(N+1)}^{s=k-1} \chi^s A_{s-k+N+1},$$

donc $\pi_+\left(\chi^k P^*\Phi_{N+1}^*\right) = \sum_{s=0}^{s=k-1} \chi^s A_{s-k+N+1}$, et

$$\left\|\pi_+\left(\chi^k P^*\Phi_{N+1}^*\right)\right\|_{L^2_{\mathfrak{M}}}^2 = \frac{1}{n}\sum_{s=0}^{s=k-1}\|A_{s-k+N+1}\|_2^2 = \frac{1}{n}\sum_{l=N+1-k}^{l=N}\|A_l\|_2^2 .$$

Si $k=0$, $P^*\Phi_{N+1}^* = \sum_{l=0}^{l=N}\chi^{l-(N+1)}A_l = \sum_{s=-(N+1)}^{s=-1}\chi^s A_{s+N+1}$, donc

$$\pi_+\left(P^*\Phi_{N+1}^*\right) = 0.$$

On a donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{k=N}\langle \pi_N^{(1)}\left(\pi_+\left(\overline{\chi}^{N+1-k}P\right)\Phi_{N+1}P\right), \chi^k\rangle_{L^2_{\mathfrak{M}}} &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=N}\sum_{l=N+1-k}^{l=N}\|A_l\|_2^2 \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=N} k\,\|A_k\|_2^2 .\end{aligned}$$

Finalement,

$$\operatorname{tr}\left(T_N(F)^{-1} - T_N(F^{-1})\right) = -\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{k=N} k\,\|A_k\|_2^2 = -2\left\langle \chi\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}(\chi), P(\chi)\right\rangle_{L^2_{\mathfrak{M}}} .$$

(ii)

$$\begin{aligned}T_N(F)^{-1}(Q) &= \pi_+(QG^{-1*})G^{-1} \\ &\quad -\pi_+\left[\left\{\left(\mathrm{Id} - H_{\Phi_{N+1}}^* H_{\Phi_{N+1}}\right)^{-1}\left(\pi_+\left(\pi_+(QG^{-1*})\Phi_{N+1}^*\right)\right)\right\}\Phi_{N+1}\right]G^{-1}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&T_N(F)^{-1}(Q) = T_N(F^{-1})(Q) - \pi_N^{(1)}\left(\pi_-(QG^{-1*})G^{-1}\right) \\ &-\pi_N^{(1)}\left(\pi_+\left[\left\{\left(\mathrm{Id} - H_{\Phi_{N+1}}^* H_{\Phi_{N+1}}\right)^{-1}\left(\pi_+\left(\pi_+(QG^{-1*})\Phi_{N+1}^*\right)\right)\right\}\Phi_{N+1}\right]G^{-1}\right).\end{aligned}$$

Or

$$\left(\mathrm{Id} - H_{\Phi_{N+1}}^* H_{\Phi_{N+1}}\right)^{-1} = \mathrm{Id} + H_{\Phi_{N+1}}^* H_{\Phi_{N+1}}\left(\mathrm{Id} - H_{\Phi_{N+1}}^* H_{\Phi_{N+1}}\right)^{-1},$$

donc, en posant $\mathcal{K} = H^*_{\Phi_{N+1}} H_{\Phi_{N+1}} \left(\mathrm{Id} - H^*_{\Phi_{N+1}} H_{\Phi_{N+1}}\right)^{-1}$,

$$\begin{aligned} T_N(F)^{-1}(Q) = T_N(F^{-1})(Q) &- \pi_N^{(1)}\left(\pi_-(QG^{-1*})G^{-1}\right) \\ &- \pi_N^{(1)}\left(\pi_+\left(\pi_+\left(\pi_+(QG^{-1*})\Phi^*_{N+1}\right)\Phi_{N+1}\right)G^{-1}\right) \\ &- \pi_N^{(1)}\left(\pi_+\left[\left\{\mathcal{K}\left(\pi_+\left(\pi_+(QG^{-1*})\Phi^*_{N+1}\right)\right)\right\}\Phi_{N+1}\right]G^{-1}\right). \end{aligned}$$

Posons $\mathcal{A}(Q) = \pi_N^{(1)}\left(\pi_+\left(\pi_+\left(\pi_+(QG^{-1*})\Phi^*_{N+1}\right)\Phi_{N+1}\right)G^{-1}\right)$.

$$\begin{aligned} \pi_+\Big(\pi_+\Big(\pi_+(QG^{-1*})\Phi^*_{N+1}\Big)\Phi_{N+1}\Big)G^{-1} &= \pi_+\left(\pi_+(QG^{-1*})\Phi^*_{N+1}\right)\Phi_{N+1}G^{-1} \\ &\quad - H_{\Phi_{N+1}} H^*_{\Phi_{N+1}}\left(\pi_+(QG^{-1*})\right)G^{-1} \\ &= \pi_+\left(QG^{-1*})\Phi^*_{N+1}\right)\Phi_{N+1}G^{-1} \\ &\quad - \pi_+\left(\pi_-(QG^{-1*})\Phi^*_{N+1}\right)\Phi_{N+1}G^{-1} \\ &\quad - H_{\Phi_{N+1}} H^*_{\Phi_{N+1}}\left(\pi_+(QG^{-1*})\right)G^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}(\chi^k), \chi^k\rangle_{L^2_{\mathfrak{M}}} = \langle \pi_+ &\left(\chi^k G^{-1*}\Phi^*_{N+1}\right)\Phi_{N+1}G^{-1}, \chi^k\rangle_{L^2_{\mathfrak{M}}} \\ &- \langle \pi_+\left(\pi_-(\chi^k G^{-1*})\Phi^*_{N+1}\right)\Phi_{N+1}G^{-1}, \chi^k\rangle_{L^2_{\mathfrak{M}}} \\ &\qquad - \langle H_{\Phi_{N+1}} H^*_{\Phi_{N+1}}\left(\pi_+(\chi^k G^{-1*})\right)G^{-1}, \chi^k\rangle_{L^2_{\mathfrak{M}}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}(\chi^k), \chi^k\rangle_{L^2_{\mathfrak{M}}} &= \left\|\pi_+\left(\chi^k G^{-1*}\Phi^*_{N+1}\right)\right\|^2_{L^2_{\mathfrak{M}}} \\ &\qquad - \langle H^*_{\Phi_{N+1}}\left(\pi_-(\chi^k G^{-1*})\right), \pi_+\left(\chi^k G^{-1*}\Phi^*_{N+1}\right)\rangle_{L^2_{\mathfrak{M}}}, \end{aligned}$$

en utilisant $H^*_{\Phi_{N+1}}\left(\pi_+(\chi^k G^{-1*})\right) = 0$.

Finalement,

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}\left(T_N(F)^{-1}-T_N(F^{-1})\right) &= -\sum_{k=0}^{k=N}\left\|\pi_-\left(\chi^k G^{-1*}\right)\right\|^2_{L^2_{\mathfrak{M}}}\\ &\quad-\sum_{k=0}^{k=N}\left\|\pi_+\left(\overline{\chi}^{N+1-k}G^{-1}\right)\right\|^2_{L^2_{\mathfrak{M}}}\\ &\quad+\sum_{k=0}^{k=N}\langle H^*_{\Phi_{N+1}}\left(\pi_-(\chi^k G^{-1*})\right),\pi_+\left(\overline{\chi}^{N+1-k}G^{-1}\right)\rangle_{L^2_{\mathfrak{M}}}\\ &\quad-\sum_{k=0}^{k=N}\langle H^*_{\Phi_{N+1}}H_{\Phi_{N+1}}\left(\mathrm{Id}-H^*_{\Phi_{N+1}}H_{\Phi_{N+1}}\right)^{-1}(M_{k,N}),(M_{k,N})\rangle_{L^2_{\mathfrak{M}}},\end{aligned}$$

avec : $M_{k,N}=\pi_+\left(\pi_+(\chi^k G^{-1*})\Phi^*_{N+1}\right)=H^*_{\Phi_{N+1}}\left(\pi_+(\chi^k G^{-1*})\right)$.
Evaluons les deux premiers termes de la somme précédente. Si $G^{-1}=\sum\limits_{l\in\mathbb{N}}\chi^l\Gamma_l$, alors

$$\pi_-(\chi^k G^{-1*})=\sum_{s\in\mathbb{N}^*}\overline{\chi}^s\Gamma^*_{k+s},$$

$$\pi_+(\chi^k G^{-1*})=\sum_{s=0}^{s=k}\chi^s\Gamma^*_{k-s},$$

et

$$\pi_+\left(\overline{\chi}^{N+1-k}G^{-1}\right)=\sum_{p\in\mathbb{N}}\chi^p\Gamma_{p-k+N+1}.$$

On en déduit par un calcul direct que

$$\sum_{k=0}^{k=N}\left\|\pi_-\left(\chi^k G^{-1*}\right)\right\|^2_{L^2_{\mathfrak{M}}}=\frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{k=N}k\left\|\Gamma_k\right\|_2^2+(N+1)\sum_{k\geq N+1}\left\|\Gamma_k\right\|_2^2\right),$$

et de même

$$\sum_{k=0}^{k=N}\left\|\pi_+\left(\overline{\chi}^{N+1-k}G^{-1}\right)\right\|^2_{L^2_{\mathfrak{M}}}=\frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{k=N}k\left\|\Gamma_k\right\|_2^2+(N+1)\sum_{k\geq N+1}\left\|\Gamma_k\right\|_2^2\right).$$

On obtient alors

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{tr}\,\Big(T_N(F)^{-1}-T_N(F^{-1})\Big)+\frac{2}{n}\left(\sum_{k=0}^{k=N}k\,\|\Gamma_k\|_2^2+(N+1)\sum_{k\geq N+1}\|\Gamma_k\|_2^2\right)\\
&\qquad=\sum_{k=0}^{k=N}\langle H^*_{\Phi_{N+1}}\Big(\pi_-(\chi^k G^{-1*})\Big),\pi_+\Big(\overline{\chi}^{N+1-k}G^{-1}\Big)\rangle_{L^2_{\mathfrak{M}}}\\
&\qquad-\sum_{k=0}^{k=N}\langle H^*_{\Phi_{N+1}}H_{\Phi_{N+1}}\Big(\mathrm{Id}-H^*_{\Phi_{N+1}}H_{\Phi_{N+1}}\Big)^{-1}(M_{k,N}),(M_{k,N})\rangle_{L^2_{\mathfrak{M}}}.
\end{aligned}
$$

On peut majorer les deux sommes du deuxième membre de l'égalité précédente :

<u>Première somme :</u>

$$
\begin{aligned}
&\left|\sum_{k=0}^{k=N}\langle H^*_{\Phi_{N+1}}\Big(\pi_-(\chi^k G^{-1*})\Big),\pi_+\Big(\overline{\chi}^{N+1-k}G^{-1}\Big)\rangle_{L^2_{\mathfrak{M}}}\right|\\
&\qquad\leq\rho_{N+1}(F^{-1})\ \left(\sum_{k=0}^{k=N}\left\|\pi_-\Big(\chi^k G^{-1*}\Big)\right\|_{L^2_{\mathfrak{M}}}\right.\\
&\qquad\qquad\qquad\left.\left\|\pi_+\Big(\overline{\chi}^{N+1-k}G^{-1}\Big)\right\|_{L^2_{\mathfrak{M}}}\right)\\
&\qquad\leq\rho_{N+1}(F^{-1})\ \left(\sum_{k=0}^{k=N}\left\|\pi_-\Big(\chi^k G^{-1*}\Big)\right\|^2_{L^2_{\mathfrak{M}}}\right)^{1/2}\\
&\qquad\qquad\qquad\left(\sum_{k=0}^{k=N}\left\|\pi_+\Big(\overline{\chi}^{N+1-k}G^{-1}\Big)\right\|_{L^2_{\mathfrak{M}}}\right)^{1/2},
\end{aligned}
$$

d'où

$$\left|\sum_{k=0}^{k=N}\langle H^*_{\Phi_{N+1}}\left(\pi_-(\chi^k G^{-1*})\right),\pi_+\left(\overline{\chi}^{N+1-k}G^{-1}\right)\rangle_{L^2_{\mathfrak{M}}}\right|$$
$$\leq \rho_{N+1}(F^{-1})\ \frac{1}{n}\ \left(\sum_{k=0}^{k=N}k\left\|\Gamma_k\right\|_2^2+(N+1)\sum_{k\geq N+1}\left\|\Gamma_k\right\|_2^2\right).$$

Deuxième somme :

$$\left|\sum_{k=0}^{k=N}\langle H^*_{\Phi_{N+1}}H_{\Phi_{N+1}}\left(\mathrm{Id}-H^*_{\Phi_{N+1}}H_{\Phi_{N+1}}\right)^{-1}(M_{k,N}),(M_{k,N})\rangle_{L^2_{\mathfrak{M}}}\right|$$
$$\leq \frac{\left(\rho_{N+1}(F^{-1})\right)^2}{1-\left(\rho_{N+1}(F^{-1})\right)^2}\ \sum_{k=0}^{k=N}\left\|M_{k,N}\right\|^2_{L^2_{\mathfrak{M}}}.$$

Majorons $\|M_{k,N}\|^2_{L^2_{\mathfrak{M}}}$, avec
$M_{k,N}=\pi_+\left(\pi_+(\chi^k G^{-1*})\Phi^*_{N+1}\right)=\pi_+\left(\overline{\chi}^{N+1-k}G^{-1}\right)-H^*_{\Phi_{N+1}}\left(\pi_-\left(\chi^k G^{-1*}\right)\right)$.
Il vient alors

$$\begin{aligned}\left\|M_{k,N}\right\|^2_{L^2_{\mathfrak{M}}}=&\left\|\pi_+\left(\overline{\chi}^{N+1-k}G^{-1}\right)\right\|^2_{L^2_{\mathfrak{M}}}+\left\|H^*_{\Phi_{N+1}}\left(\pi_-\left(\chi^k G^{-1*}\right)\right)\right\|^2_{L^2_{\mathfrak{M}}}\\&-\langle\pi_+\left(\overline{\chi}^{N+1-k}G^{-1}\right),H^*_{\Phi_{N+1}}\left(\pi_-\left(\chi^k G^{-1*}\right)\right)\rangle_{L^2_{\mathfrak{M}}}\\&-\langle H^*_{\Phi_{N+1}}\left(\pi_-\left(\chi^k G^{-1*}\right)\right),\pi_+\left(\overline{\chi}^{N+1-k}G^{-1}\right)\rangle_{L^2_{\mathfrak{M}}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left\|M_{k,N}\right\|^2_{L^2_{\mathfrak{M}}}\leq&\left\|\pi_+\left(\overline{\chi}^{N+1-k}G^{-1}\right)\right\|^2_{L^2_{\mathfrak{M}}}+\left(\rho_{N+1}(F^{-1})\right)^2\left\|\pi_-\left(\chi^k G^{-1*}\right)\right\|^2_{L^2_{\mathfrak{M}}}\\&+2\rho_{N+1}(F^{-1})\left\|\pi_+\left(\overline{\chi}^{N+1-k}G^{-1}\right)\right\|_{L^2_{\mathfrak{M}}}\left\|\pi_-\left(\chi^k G^{-1*}\right)\right\|_{L^2_{\mathfrak{M}}}.\end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{k=N}\left\|M_{k,N}\right\|^2_{L^2_{\mathfrak{M}}}\leq\frac{1}{n}\left(1+\rho_{N+1}(F^{-1})\right)^2\left(\sum_{k=0}^{k=N}k\left\|\Gamma_k\right\|_2^2+(N+1)\sum_{k\geq N+1}\left\|\Gamma_k\right\|_2^2\right),$$

et donc, en posant

$$\mathcal{S} = \sum_{k=0}^{k=N} k \left\|\Gamma_k\right\|_2^2 + (N+1) \sum_{k \geq N+1} \left\|\Gamma_k\right\|_2^2 ,$$

$$\begin{aligned}
&\left| \mathrm{tr} \left(T_N(F)^{-1} - T_N(F^{-1}) \right) + \frac{2}{n} \mathcal{S} \right| \\
&\quad \leq \frac{1}{n} \left(\rho_{N+1}(F^{-1}) + \frac{\left(\rho_{N+1}(F^{-1})\right)^2 \left(1 + \rho_{N+1}(F^{-1})\right)^2}{1 - \left(\rho_{N+1}(F^{-1})\right)^2} \right) \mathcal{S}, \\
&\quad \leq \frac{1}{n} \frac{\rho_{N+1}(F^{-1}) \left(1 - \left(\rho_{N+1}(F^{-1})\right)^4 \right)}{\left(1 - \rho_{N+1}(F^{-1})\right)^2 \left(1 + \rho_{N+1}(F^{-1})\right)} \mathcal{S}, \\
&\quad \leq \frac{4}{n} \frac{\rho_{N+1}(F^{-1})}{1 - \left(\rho_{N+1}(F^{-1})\right)^2} \left(\sum_{k \in \mathbb{N}^*} k \left\|\Gamma_k\right\|_2^2 \right).
\end{aligned}$$

Comme

$$\lim_{N \to +\infty} \rho_{N+1}(F^{-1}) = 0,$$

on obtient la limite annoncée, si $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} k \left\|\Gamma_k\right\|_2^2 < +\infty$. Enfin, un calcul direct permet d'établir, si G^{-1} est dérivable et sa dérivée est dans $L^1_{\mathfrak{M}}$,

$$\frac{1}{n} \sum_{k \in \mathbb{N}} k \left\| \widehat{G^{-1}}(k) \right\|_2^2 = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{T}} \chi \ \mathrm{tr} \left(\frac{d(G^{-1})}{dz}(\chi) G^{-1*}(\overline{\chi}) \right) \ d\sigma.$$

Si $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} k \left\|\Gamma_k\right\|_2^2 = +\infty$, alors, par l'inégalité triangulaire inverse,

$$\left| \mathrm{tr} \ \left(T_N(F)^{-1} - T_N(F^{-1}) \right) \right| \geq \frac{2}{n} \frac{2 - \left(\rho_{N+1}(F^{-1}) + 1\right)^2}{1 - \left(\rho_{N+1}(F^{-1})\right)^2} \left(\sum_{k \in \mathbb{N}^*} k \left\|\Gamma_k\right\|_2^2 \right).$$

et donc

$$\lim_{N \to +\infty} \mathrm{tr} \ \left(T_N(F)^{-1} - T_N(F^{-1}) \right) = -\infty.$$

$\square$

4.3. Théorèmes-limite « à la Szegö »

Dans cette section, nous étendons au cas matriciel les trois principaux théorèmes-limite de Szegö. Nous introduisons l'espace de Hilbert

$$\mathscr{B}_{\mathfrak{M}}^{2,1/2}(\mathbb{T}) = \left\{ M : \mathbb{T} \longrightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) \ ; \ M \in L^2_{\mathfrak{M}} \ ; \ \sum_{k\in\mathbb{Z}} |k| \left\| \widehat{M}(k) \right\|_2^2 < +\infty \right\},$$

muni du produit scalaire hermitien

$$\langle M_1, M_2 \rangle_{\mathscr{B}_{\mathfrak{M}}^{2,1/2}} = \frac{1}{n} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |k| \mathrm{tr} \left[\widehat{M_1}(k) \widehat{M_2}^*(k) \right],$$

associé à la norme

$$\|M\|_{\mathscr{B}_{\mathfrak{M}}^{2,1/2}} = \left(\frac{1}{n} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |k| \left\| \widehat{M}(k) \right\|_2^2 \right)^{1/2}.$$

Remarque 4.7. (i) Le lecteur pourra se reporter à [5] ou [2], qui traitent des espaces de Besov dans le cas scalaire. Nous pouvons en particulier définir un espace de Besov d' « ordre $2, \frac{1}{2}$ » dans le cas matriciel par $\mathscr{B}_{\mathfrak{M}}^{2,1/2}(\mathbb{T})$, à partir de l' espace de Besov scalaire d' « ordre $2, \frac{1}{2}$ » dans lequel nous plaçons les composantes de nos matrices.
(ii) Pour toute fonction matricielle M_1 de $\mathscr{B}_{\mathfrak{M}}^{2,1/2}$, dérivable sur $\mathbb{T}$, et telle que M_1 soit dans $H^{2+}_{\mathfrak{M}}$ et $\frac{\mathrm{d}M_1}{\mathrm{d}z}$ soit dans $L^1_{\mathfrak{M}}$, et pour toute fonction matricielle M_2 de $\mathscr{B}_{\mathfrak{M}}^{2,1/2}$, on peut écrire

$$\begin{aligned} &\langle M_1, M_2 \rangle_{\mathscr{B}_{\mathfrak{M}}^{2,1/2}} = \\ &\frac{1}{n} \sum_{k\in\mathbb{N}^*} k \ \mathrm{tr} \left(\widehat{M_1}(k) \widehat{M_2}^*(k) \right) = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{T}} \chi \ \mathrm{tr} \left(\frac{\mathrm{d}M_1}{\mathrm{d}z}(\chi) M_2^*(\overline{\chi}) \right) \mathrm{d}\sigma. \end{aligned} \tag{4.3}$$

En particulier, si $M_2 = M_1 = M$,

$$\|M\|^2_{\mathscr{B}_{\mathfrak{M}}^{2,1/2}} = \frac{1}{n} \sum_{k\in\mathbb{N}^*} k \left\| \widehat{M}(k) \right\|_2^2 = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{T}} \chi \ \mathrm{tr} \left(\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}z}(\chi) M^*(\overline{\chi}) \right) \mathrm{d}\sigma. \tag{4.4}$$

Ces propriétés se vérifient par un calcul direct.
(iii) On utilisera dans le théorème 2.9 la propriété suivante de la norme

de $\mathscr{B}^{2,1/2}_{\mathfrak{M}}$:
$\forall M_1 \in \mathscr{B}^{2,1/2}_{\mathfrak{M}}$, $\forall M_2 \in \mathscr{B}^{2,1/2}_{\mathfrak{M}}$, hermitiennes,

$$\langle M_1, M_2 \rangle_{\mathscr{B}^{2,1/2}_{\mathfrak{M}}} = \frac{2}{n}.\, \Re \left(\sum_{k\in\mathbb{N}^*} k \ \mathrm{tr} \left[\widehat{M_1}(k) \widehat{M_2}^*(k) \right] \right),$$

et si $M_1 = M_2 = M$,

$$\|M\|^2_{\mathscr{B}^{2,1/2}_{\mathfrak{M}}} = \frac{2}{n} \sum_{k\in\mathbb{N}^*} k \ \left\| \widehat{M}(k) \right\|_2^2 .$$

Dans toute la suite, nous utiliserons l'hypothèse $(\mathfrak{H})$ suivante :

Hypothèse $(\mathfrak{H})$:

(1) $F \in L^1_{\mathfrak{M}}$ et $\log(F) \in L^1_{\mathfrak{M}}$. D'après le théorème de Helson et Lowdenslager, il existe alors une décomposition de F en $F = GG^*$, avec $G \in H^{2+}_{\mathfrak{M}}$.

(2) G est partout sur $\mathbb{T}$ une matrice normale et inversible, $G \in H^\infty_{\mathfrak{M}}$, $G^{-1} \in H^\infty_{\mathfrak{M}}$.

(3) Tous les coefficients de Fourier de G^{-1} commutent les uns avec les autres, $G^{-1} \in \mathscr{B}^{2,1/2}_{\mathfrak{M}}$ et $\log\left(G^{-1}\right) \in \mathscr{B}^{2,1/2}_{\mathfrak{M}}$.

♠

Nous avons alors le théorème suivant, qui correspond au premier théorème de Szegö dans le cas scalaire :

Théorème 2.8. *Soit F une fonction matricielle définie sur le tore $\mathbb{T}$, à valeurs dans le sous-ensemble de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ des matrices définies positives et hermitiennes partout, telle que F vérifie l'hypothèse $(\mathfrak{H})$ et $\log(F) \in \mathscr{B}^{2,1/2}_{\mathfrak{M}}$, $F^{-1} \in \mathscr{B}^{2,1/2}_{\mathfrak{M}}$. Alors*

$$\lim_{N\to+\infty} \mathrm{tr} \left(T_N(F)^{-1} - T_N(F^{-1}) \right) = \frac{1}{n} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |k| \ \mathrm{tr} \ \left[\widehat{\log(F)}(k) \widehat{F^{-1}}^*(k) \right],$$
$$= \left\langle \log(F), F^{-1} \right\rangle_{\mathscr{B}^{2,1/2}_{\mathfrak{M}}} .$$

Démonstration. Nous aurons besoin de deux lemmes et d'un lemme technique :

Lemme 4.8. *Pour toute fonction M de $H^{2+}_{\mathfrak{M}}$, dérivable sur $\mathbb{T}$, dont tous les coefficients de Fourier commutent les uns avec les autres, et telle que $\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}z}$ soit dans $L^1_{\mathfrak{M}}$, M commute partout sur $\mathbb{T}$ avec sa dérivée, c'est-à-dire $\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}z}\,M = M\,\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}z}$.*

Démonstration. Toute fonction matricielle M de $H^{2+}_{\mathfrak{M}}$ vérifie, pour tous caractères χ_1 et χ_2,

$$M(\chi_1) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \chi_1^k \widehat{M}(k),$$

et

$$M(\chi_2) = \sum_{l\in\mathbb{N}} \chi_2^l \widehat{M}(l).$$

Alors le produit des deux est de la forme

$$M(\chi_1)\, M(\chi_2) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{l\in\mathbb{N}} \chi_1^k \chi_2^l \widehat{M}(k)\widehat{M}(l).$$

La série $\displaystyle\sum_{l\in\mathbb{N}} \chi_1^k \chi_2^l \widehat{M}(k)\widehat{M}(l)$ converge normalement dans $L^2_{\mathfrak{M}}$, puisque

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{l\in\mathbb{N}} \chi_1^k \chi_2^l \widehat{M}(k)\widehat{M}(l) \right\|^2_{L^2_{\mathfrak{M}}} &= \frac{1}{n} \sum_{l\in\mathbb{N}} \left\| \widehat{M}(k)\widehat{M}(l) \right\|_2^2, \\
&\leq \frac{1}{n} \sum_{l\in\mathbb{N}} \left\| \widehat{M}(k) \right\|_2^2 \left\| \widehat{M}(l) \right\|_2^2, \\
&\leq \frac{1}{n} \left\| \widehat{M}(k) \right\|_2^2 \sum_{l\in\mathbb{N}} \left\| \widehat{M}(l) \right\|_2^2, \\
&\leq \left\| \widehat{M}(k) \right\|_2^2 \|M(\chi_2)\|^2_{L^2_{\mathfrak{M}}} < +\infty,
\end{aligned}$$

et la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{l\in\mathbb{N}} \chi_1^k \chi_2^l \widehat{M}(k)\widehat{M}(l) \right\|_{L^2_{\mathfrak{M}}}^2$ est convergente, puisque

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{l\in\mathbb{N}} \chi_1^k \chi_2^l \widehat{M}(k)\widehat{M}(l) \right\|_{L^2_{\mathfrak{M}}}^2 &\leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \left\| \widehat{M}(k) \right\|_2^2 \left\| M(\chi_2) \right\|_{L^2_{\mathfrak{M}}}^2 , \\
&\leq n \ \left\| M(\chi_1) \right\|_{L^2_{\mathfrak{M}}}^2 \left\| M(\chi_2) \right\|_{L^2_{\mathfrak{M}}}^2 < +\infty,
\end{aligned}$$

ce qui assure la convergence de la série-produit dans $L^2_{\mathfrak{M}}$. On a donc, puisque les coefficients de Fourier commutent,

$$\begin{aligned}
M\left(\chi_1\right) M\left(\chi_2\right) &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{l\in\mathbb{N}} \chi_1^k \chi_2^l \widehat{M}(k)\widehat{M}(l), \\
&= \sum_{l\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{N}} \chi_2^l \chi_1^k \widehat{M}(l)\widehat{M}(k), \\
&= M\left(\chi_2\right) M\left(\chi_1\right).
\end{aligned}$$

Soient h un réel non nul et $\theta \in]-\pi, \pi]$. On déduit alors de ce qui précède que

$$M\left(e^{\mathring{\imath}\theta}\right) M\left(e^{\mathring{\imath}(\theta+h)}\right) = M\left(e^{\mathring{\imath}(\theta+h)}\right) M\left(e^{\mathring{\imath}\theta}\right),$$

et

$$\begin{aligned}
&M\left(e^{\mathring{\imath}\theta}\right) \left(\frac{M\left(e^{\mathring{\imath}(\theta+h)}\right) - M\left(e^{\mathring{\imath}\theta}\right)}{h} \right) \\
&\qquad\qquad = \left(\frac{M\left(e^{\mathring{\imath}(\theta+h)}\right) - M\left(e^{\mathring{\imath}\theta}\right)}{h} \right) M\left(e^{\mathring{\imath}\theta}\right).
\end{aligned}$$

Un passage à la limite quand $h \to 0$ nous donne alors

$$M\left(e^{\mathring{\imath}\theta}\right) \ \frac{\mathrm{d}\left(M\left(e^{\mathring{\imath}\theta}\right)\right)}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}\left(M\left(e^{\mathring{\imath}\theta}\right)\right)}{\mathrm{d}\theta} \ M\left(e^{\mathring{\imath}\theta}\right).$$

Mais $\dfrac{\mathrm{d}\left(M\left(e^{\mathring{i}\theta}\right)\right)}{\mathrm{d}\theta} = \mathring{i}\chi\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}z}(\chi)$, ce qui achève la démonstration. $\square$

Lemme 4.9.
(i) *Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, de spectre $\sigma(M)$ et de rayon spectral*

$$\varrho(M) = \max\{|\varphi| : \varphi \in \sigma(M)\}$$

non nul et strictement inférieur à 1, alors $\forall t \in \mathbb{C}$, tel que $|t| < \dfrac{1}{\varrho(M)}$,

$$\log(\mathrm{Id} - tM) = -\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{t^{k+1}}{k+1} M^{k+1}. \tag{4.5}$$

Si $\varrho(M) = 0$, l'égalité précédente est vraie $\forall t \in \mathbb{C}$.

La fonction matricielle $t \longmapsto \log(\mathrm{Id} - tM)$ est donc analytique sur le disque ouvert

$$\mathcal{D} = \left\{t : t \in \mathbb{C}\ ;\ |t| < \frac{1}{\varrho(M)}\right\},$$

et sa dérivée s'écrit

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\log(\mathrm{Id} - tM)\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{Id} - tM)(\mathrm{Id} - tM)^{-1} = (\mathrm{Id} - tM)^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{Id} - tM)\\ &= -M(\mathrm{Id} - tM)^{-1} = -(\mathrm{Id} - tM)^{-1}M.\end{aligned}$$

(ii) *Pour toute fonction matricielle M de $L^\infty_{\mathfrak{M}}$ telle que*

$$\|M\|_{L^\infty_{\mathfrak{M}}} < \frac{1}{n},$$

la série de (i) *converge dans $L^\infty_{\mathfrak{M}}$, $\forall t \in \mathbb{C}$, tel que*

$$|t| < \frac{1}{n\ \|M\|_{L^\infty_{\mathfrak{M}}}},$$

La fonction matricielle $t \longmapsto \log(\mathrm{Id}-tM)$ est donc analytique sur le disque ouvert

$$\mathcal{D}' = \left\{t : t \in \mathbb{C}\ ;\ |t| < \frac{1}{n\ \|M\|_{L^\infty_{\mathfrak{M}}}}\right\},$$

et sa dérivée s'écrit

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\log(\mathrm{Id} - tM)\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{Id} - tM)(\mathrm{Id} - tM)^{-1} = (\mathrm{Id} - tM)^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{Id} - tM)\\ &= -M(\mathrm{Id} - tM)^{-1} = -(\mathrm{Id} - tM)^{-1}M.\end{aligned}$$

(iii) *Pour toute fonction matricielle* M *de* $H^{\infty}_{\mathfrak{M}}$*, dérivable sur* $\mathbb{T}$*, avec* $\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}z} \in L^1_{\mathfrak{M}}$*, dont tous les coefficients de Fourier commutent les uns avec les autres, et telle que :*

$$\|M\|_{L^{\infty}_{\mathfrak{M}}} < \frac{1}{n},$$

la série de (i) *converge dans* $L^1_{\mathfrak{M}}$*,* $\forall t \in \mathbb{C}$*, tel que*

$$|t| < \frac{1}{n\ \|M\|_{L^{\infty}_{\mathfrak{M}}}},$$

l'égalité (4.5) est vérifiée dans $L^1_{\mathfrak{M}}$*, et on a*

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\log(\mathrm{Id}-tM)\right) = \frac{\partial}{\partial z}(\mathrm{Id}-tM)(\mathrm{Id}-tM)^{-1} = (\mathrm{Id}-tM)^{-1}\frac{\partial}{\partial z}(\mathrm{Id}-tM).$$

Démonstration. Pour la démonstration de (i), voir [16].
(ii) Remarquons d'abord (voir [15] et lemme 4.6 (i)) que

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\left(\varrho\left(M(z)\right)\right)^2 &\leq \frac{1}{n}\ \varrho\left(\left(M(z)M^*(\overline{z})\right)\right),\\ &\leq \frac{1}{n}\ \mathrm{tr}\left(M(z)M^*(\overline{z})\right),\\ &\leq n\ \|M(z)\|^2_{\infty} \leq n\ \|M\|^2_{L^{\infty}_{\mathfrak{M}}},\end{aligned}$$

et

$$\varrho\left(M(z)\right) \leq \|M(z)\|_2 \leq n\ \|M(z)\|_{\infty} \leq n\ \|M\|_{L^{\infty}_{\mathfrak{M}}}, \tag{4.6}$$

donc

$$\sup_{z\in\mathbb{T}} \varrho\left(M(z)\right) \leq n\ \|M\|_{L^{\infty}_{\mathfrak{M}}}. \tag{4.7}$$

Dans ces conditions, si $\|M\|_{L^{\infty}_{\mathfrak{M}}} < \frac{1}{n}$, alors $\forall z \in \mathbb{T}$, $\varrho\left(M(z)\right) < 1$. Par ailleurs , le lemme 4.3 (ii) montre que $\forall A \in L^{\infty}_{\mathfrak{M}}$, $\forall B \in L^{\infty}_{\mathfrak{M}}$, $\|AB\|_{L^{\infty}_{\mathfrak{M}}} \leq n\ \|A\|_{L^{\infty}_{\mathfrak{M}}}\|B\|_{L^{\infty}_{\mathfrak{M}}}$. Ainsi $\|M^2\|_{L^{\infty}_{\mathfrak{M}}} \leq n\ \|M\|^2_{L^{\infty}_{\mathfrak{M}}}$ et par itération du procédé, $\|M^k\|_{L^{\infty}_{\mathfrak{M}}} \leq n^{k-1}\ \|M\|^k_{L^{\infty}_{\mathfrak{M}}}$, donc $\|M^k\|_{L^{\infty}_{\mathfrak{M}}} \leq \frac{1}{n}\ \left(n\ \|M\|_{L^{\infty}_{\mathfrak{M}}}\right)^k$. On en déduit que $\forall S_1 \in \mathbb{N}$, $\forall S_2 \in \mathbb{N}$, tels que $S_1 \leq S_2$,

$$\left\|\sum_{k=S_1}^{k=S_2}\frac{t^{k+1}}{k+1}M^{k+1}\right\|_{L^{\infty}_{\mathfrak{M}}} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=S_1}^{k=S_2}\frac{\left(n\ |t|\|M\|_{L^{\infty}_{\mathfrak{M}}}\right)^{k+1}}{k+1}.$$

Cette dernière somme tend vers 0 quand S_1 et S_2 tendent vers $+\infty$, dès que $n\ |t|\|M\|_{L^\infty_{\mathfrak{M}}} < 1$, ce qui assure la convergence normale de la série dans $L^\infty_{\mathfrak{M}}$, et l'égalité (4.5) est vérifiée dans $L^\infty_{\mathfrak{M}}$. Enfin, $\forall S \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(-\sum_{k=0}^{k=S}\frac{t^{k+1}}{k+1}M^{k+1}\right)=-\sum_{k=0}^{k=S}t^kM^{k+1}=-M\sum_{k=0}^{k=S}t^kM^k=-\left(\sum_{k=0}^{k=S}t^kM^k\right)M.$$

Par passage à la limite quand $S \to +\infty$, on obtient

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\log(\mathrm{Id}-tM)\right) = -M(\mathrm{Id}-tM)^{-1} = -(\mathrm{Id}-tM)^{-1}M.$$

(iii) L'inégalité $\|M(z)\|_2 \leq n\ \|M(z)\|_\infty$ de (4.6) entraîne $\|M\|_{L^2_{\mathfrak{M}}} \leq \sqrt{n}\ \|M\|_{L^\infty_{\mathfrak{M}}}$ et si $\|M\|_{L^\infty_{\mathfrak{M}}} < \dfrac{1}{n}$, alors $\|M\|_{L^2_{\mathfrak{M}}} < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, et d'après (4.7), $\sup\limits_{z\in\mathbb{T}} \varrho\left(M(z)\right) < 1$. Par ailleurs , le lemme 4.3 montre que $\forall A \in L^\infty_{\mathfrak{M}}$, $\forall B \in L^\infty_{\mathfrak{M}}$,

$$\|AB\|_{L^1_{\mathfrak{M}}} \leq n\ \|A\|_{L^2_{\mathfrak{M}}}\|B\|_{L^2_{\mathfrak{M}}} \leq n^2\ \|A\|_{L^\infty_{\mathfrak{M}}}\|B\|_{L^\infty_{\mathfrak{M}}}.$$

Ainsi $\|M^2\|_{L^1_{\mathfrak{M}}} \leq n^2\ \|M\|^2_{L^\infty_{\mathfrak{M}}}$ et par itération du procédé,

$$\|M^k\|_{L^1_{\mathfrak{M}}} \leq n^k\ \|M\|^k_{L^\infty_{\mathfrak{M}}},$$

donc

$$\|M^k\|_{L^1_{\mathfrak{M}}} \leq \left(n\ \|M\|_{L^\infty_{\mathfrak{M}}}\right)^k.$$

On en déduit que $\forall S_1 \in \mathbb{N}$, $\forall S_2 \in \mathbb{N}$, tels que $S_1 \leq S_2$,

$$\left\|\sum_{k=S_1}^{k=S_2}\frac{t^{k+1}}{k+1}M^{k+1}\right\|_{L^1_{\mathfrak{M}}} \leq \sum_{k=S_1}^{k=S_2}\frac{\left(n\ |t|\|M\|_{L^\infty_{\mathfrak{M}}}\right)^{k+1}}{k+1}.$$

Cette dernière somme tend vers 0 quand S_1 et S_2 tendent vers $+\infty$, dès que $n\ |t|\|M\|_{L^\infty_{\mathfrak{M}}} < 1$, ce qui assure la convergence normale de la série dans $L^1_{\mathfrak{M}}$, et l'égalité (4.5) est vérifiée dans $L^1_{\mathfrak{M}}$. Enfin, par le lemme 4.8,

$\forall S \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}\left(-\sum_{k=0}^{k=S}\frac{t^{k+1}}{k+1}M^{k+1}\right) &= -\sum_{k=0}^{k=S} t^{k+1}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}z}M^k,\\ &= -t\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}z}\sum_{k=0}^{k=S} t^k M^k,\\ &= \frac{\partial}{\partial z}(\mathrm{Id} - tM)\sum_{k=0}^{k=S} t^k M^k.\end{aligned}$$

Par passage à la limite quand $S \to +\infty$, on obtient

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\log(\mathrm{Id} - tM)\right) = \frac{\partial}{\partial z}(\mathrm{Id} - tM)(\mathrm{Id} - tM)^{-1}.$$

Par un raisonnement analogue, on montre la deuxième égalité.

□

Lemme technique 3. *La fonction matricielle G^{-1} possède les propriétés suivantes :*
(i) *G^{-1} est limite radiale d'une fonction matricielle M_r définie sur $\mathbb{T}$ par $M_r(\chi) = \widetilde{G}^{-1}(r\chi)$, $\forall \chi \in \mathbb{T}$ et $\forall r \in]0,1[$, $\widetilde{G}^{-1}$ étant définie sur $\mathbb{D} = \{z :$* $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < 1\}$ *telle que si $G^{-1}(\chi) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \chi^k \Gamma_k$, $\forall \chi \in \mathbb{T}$, $\widetilde{G}^{-1}(z) = \sum_{k\in\mathbb{N}} z^k \Gamma_k$, $\forall z \in \mathbb{D}$. De plus, $\lim_{\substack{r\to 1\\ 0<r<1}} M_r(\chi) = G^{-1}(\chi)$ presque partout sur $\mathbb{T}$ et en norme $L^2_{\mathfrak{M}}$.*

(ii) *On peut définir la même détermination continue de* $\log(M_r)$ *pour toute la famille $(M_r)_r$, dès que r est suffisamment proche de 1 $(0 < r < 1)$, et pour* $\log\left(G^{-1}\right)$. *On peut donc définir* $\log(M_r)$ *et* $\log\left(G^{-1}\right)$ *par*

$$\log(M_r) = \log(\Gamma_0) + \log(\mathrm{Id} - 2(n+1)K_r),$$

avec $K_r = -\dfrac{r}{2(n+1)}\chi\sum_{k\in\mathbb{N}} r^k\chi^k\Gamma_0^{-1}\Gamma_{k+1}$, et

$$\log\left(G^{-1}\right) = \log(\Gamma_0) + \log(\mathrm{Id} - 2(n+1)K),$$

avec $K = -\dfrac{1}{2(n+1)}\chi\sum_{k\in\mathbb{N}} \chi^k\Gamma_0^{-1}\Gamma_{k+1}$.

(iii) *Les coefficients de Fourier de* $\log\left(G^{-1}\right)$ *vérifient*

$$\widehat{\log\left(M_r\right)}(k) = r^k \widehat{\log\left(G^{-1}\right)}(k).$$

Démonstration.
(i) Posons $G^{-1} = (\breve{\gamma}_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$. Les $\breve{\gamma}_{ij}$ sont des fonctions de type analytique définies sur le tore $\mathbb{T}$, et de carré intégrable sur $\mathbb{T}$. Si

$$\mathbb{D} = \{z : z \in \mathbb{C} \text{ avec } |z| < 1\},$$

comme G^{-1} est dérivable, nous savons (voir [26]) qu'il existe presque partout sur $\mathbb{D}$, $\forall i, \forall j$, une fonction u_{ij} de la classe de Hardy

$$\mathcal{H}^2(\mathbb{D}) = \Big\{ f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C} \text{ holomorphes } ; \\ \exists \mu \in \mathbb{R}_+ ; \forall r \in]0,1[\ ; \int_{\mathbb{T}} \left|f\left(r\chi\right)\right|^2 \, \mathrm{d}\sigma \leq \mu < +\infty \Big\},$$

telle que $\lim\limits_{\substack{r\to 1 \\ 0<r<1}} u_{ij}\left(r\chi\right) = \breve{\gamma}_{ij}(\chi)$, presque partout pour $\chi \in \mathbb{T}$, et

$$\lim_{\substack{r\to 1 \\ 0<r<1}} \int_{\mathbb{T}} \left|u_{ij}\left(r\chi\right) - \breve{\gamma}_{ij}(\chi)\right|^2 \, \mathrm{d}\sigma = 0.$$

Posant alors $\widetilde{G}^{-1} = \left(u_{ij}\right)_{1\leq i,j\leq n}$ et $M_r(\chi) = \widetilde{G}^{-1}\left(r\chi\right)$, on peut définir une classe de Hardy pour des fonctions à valeurs dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$:

$$\mathcal{H}^2_{\mathfrak{M}}(\mathbb{D}) = \Big\{ M : \mathbb{D} \longrightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) \text{ holomorphes } ; \\ \exists \nu = n^2\mu \in \mathbb{R}_+ ; \forall r \in]0,1[\ ; \int_{\mathbb{T}} \left\|M\left(r\chi\right)\right\|_2^2 \, \mathrm{d}\sigma \leq \nu < +\infty \Big\}.$$

Alors $\widetilde{G}^{-1} \in \mathcal{H}^2_{\mathfrak{M}}(\mathbb{D})$ et $\forall r \in]0,1[$, $\|M_r\|^2_{L^2_{\mathfrak{M}}} \leq n\mu$. On a donc $\lim\limits_{\substack{r\to 1 \\ 0<r<1}} M_r\left(\chi\right) = G^{-1}(\chi)$, presque partout sur $\mathbb{T}$, et

$$\lim_{\substack{r\to 1 \\ 0<r<1}} \|M_r - G^{-1}\|_{L^2_{\mathfrak{M}}} = 0.$$

On sait d'autre part, en raisonnant sur les composantes des matrices, que si $\mathcal{C}$ désigne le cercle-unité parcouru dans le sens positif, M_r est l'intégrale de Cauchy de G^{-1} :

$$M_r(\chi) = \frac{1}{2\mathring{\imath}\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{G^{-1}(\xi)}{\xi - r\chi} \, \mathrm{d}\xi,$$

et

$$\widetilde{G}^{-1}(z) = \frac{1}{2\mathring{\imath}\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{G^{-1}(\xi)}{\xi - z} \, \mathrm{d}\xi. \tag{4.8}$$

Calculons maintenant les coefficients de Fourier de M_r :

$$\begin{aligned} \widehat{M_r}(k) &= \int_{\mathbb{T}} M_r(\chi)\chi^{-k} \, \mathrm{d}\sigma(\chi), \\ &= \frac{1}{2\mathring{\imath}\pi} \int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\mathcal{C}} \frac{G^{-1}(\xi)}{\xi - r\chi} \, \mathrm{d}\xi \right) \chi^{-k} \, \mathrm{d}\sigma(\chi). \end{aligned}$$

Par le théorème de Fubini-Lebesgue sur les fonctions intégrables, appliqué aux composantes des matrices, on obtient alors

$$\begin{aligned} \widehat{M_r}(k) &= \frac{1}{2\mathring{\imath}\pi} \int_{\mathcal{C}} G^{-1}(\xi) \left(\int_{\mathbb{T}} \frac{\chi^{-k}}{\xi - r\chi} \, \mathrm{d}\sigma(\chi) \right) \mathrm{d}\xi, \\ &= \frac{1}{4\mathring{\imath}\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} G^{-1}\left(e^{\mathring{\imath}t}\right) \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-\mathring{\imath}k\theta}}{e^{\mathring{\imath}t} - re^{\mathring{\imath}\theta}} \, \mathrm{d}\theta \right) \mathring{\imath}e^{\mathring{\imath}t} \, \mathrm{d}t, \end{aligned}$$

d'où

$$\widehat{M_r}(k) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} G^{-1}\left(e^{\mathring{\imath}t}\right) \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-\mathring{\imath}k\theta}}{1 - re^{\mathring{\imath}(\theta - t)}} \, \mathrm{d}\theta \right) \mathrm{d}t.$$

Mais

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-\mathring{\imath}k\theta}}{1 - re^{\mathring{\imath}(\theta - t)}} \, \mathrm{d}\theta = 2\pi r^k e^{-\mathring{\imath}kt},$$

ce qui entraîne $\widehat{M_r}(k) = r^k \widehat{G^{-1}}(k)$, $\forall k \in \mathbb{N}$, et si $G^{-1}(\chi) = \sum\limits_{k \in \mathbb{N}} \chi^k \Gamma_k$, $\widetilde{G}^{-1}(z) = \sum\limits_{k \in \mathbb{N}} z^k \Gamma_k$.

(ii) Toute fonction matricielle de type analytique partout sur le tore $\mathbb{T}$

a des valeurs propres analytiques partout sur $\mathbb{T}$ et on peut donc définir une unique détermination continue du logarithme $\log(M_r)$ pour toute la famille $(M_r)_r$, dès que r est suffisamment proche de 1, et même pour la limite G^{-1}.

Par ailleurs, pour chaque $r \in]0,1[$, il existe un t_r tel que M_r puisse s'écrire $M_r = \Gamma_0 (\mathrm{Id} - t_r K_r)$, avec $\Gamma_0 \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ et $K_r \in H^{2+}_{\mathfrak{M}}$. En effet, si $\widetilde{G}^{-1} = \sum_{k\in\mathbb{N}} z^k \Gamma_k$, on a

$$M_r(\chi) = \sum_{k\in\mathbb{N}} r^k \chi^k \Gamma_k = \Gamma_0 \left(\mathrm{Id} + r\chi \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} r^k \chi^k \Gamma_0^{-1} \Gamma_{k+1} \right) \right).$$

On peut donc prendre $K_r(\chi) = -\dfrac{r\chi}{t_r} \sum_{k\in\mathbb{N}} r^k \chi^k \Gamma_0^{-1}\Gamma_{k+1}$. On a $\left\| \Gamma_0^{-1} \widetilde{G}^{-1} \right\|_{L^2_{\mathfrak{M}}} > \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, puisque le coefficient de Fourier d'ordre 0 de $\Gamma_0^{-1}\widetilde{G}^{-1}$ est Id, d'où :

$$\left\| \Gamma_0^{-1} \widetilde{G}^{-1} \right\|_{L^\infty_{\mathfrak{M}}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \left\| \Gamma_0^{-1} \widetilde{G}^{-1} \right\|_{L^2_{\mathfrak{M}}} > \frac{1}{n}.$$

On doit donc avoir

$$\begin{aligned} \|K_r\|_{L^\infty_{\mathfrak{M}}} &\leq \frac{1}{|t_r|} \left\| \Gamma_0^{-1} \widetilde{G}^{-1} - \mathrm{Id} \right\|_{L^\infty_{\mathfrak{M}}}, \\ &\leq \frac{1}{|t_r|} \left(1 + \left\| \Gamma_0^{-1} \widetilde{G}^{-1} \right\|_{L^\infty_{\mathfrak{M}}} \right) < \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

d'où

$$|t_r| > n \left(1 + \left\| \Gamma_0^{-1} \widetilde{G}^{-1} \right\|_{L^\infty_{\mathfrak{M}}} \right) > n+1.$$

Si on choisit $t_r = 2(n+1)$, on a $|t_r| < \dfrac{1}{n\ \|K_r\|_{L^\infty_{\mathfrak{M}}}}$ pour $\|K_r\|_{L^\infty_{\mathfrak{M}}} < \dfrac{1}{2n(n+1)} < \dfrac{1}{n}$, ce qui impose $2(n+1) > 1$. Comme $n \geq 1$, $n+1 > \dfrac{1}{2}$. On peut alors utiliser le lemme 4.9 (iii) pour définir $\log(\mathrm{Id} - 2(n+1)K_r)$. Pour la matrice Γ_0, le théorème de Helson-Lowdenslager nous autorise à la choisir comme on veut. Or aucune de ses valeurs propres n'est nulle, puisque $\det(\Gamma_0) \neq 0$, ce qui permet de la choisir de façon à assurer l'existence de $\log(\Gamma_0)$ comme dans le paragraphe 2.1 quand nous avons défini

$\log(F)$, par exemple en prenant Γ_0 hermitienne définie positive. Alors, comme les Γ_k commutent tous entre eux, on peut définir $\log(M_r)$ par

$$\log\left(M_r\right) = \log\left(\Gamma_0\right) + \log\left(\mathrm{Id} - 2(n+1)K_r\right).$$

Le même raisonnement appliqué à G^{-1} permet de définir

$$\log\left(G^{-1}\right) = \log\left(\Gamma_0\right) + \log\left(\mathrm{Id} - 2(n+1)K\right),$$

avec $K = -\dfrac{\chi}{2(n+1)} \sum_{k\in\mathbb{N}} \chi^k \Gamma_0^{-1}\Gamma_{k+1}$.

(iii) On peut écrire

$$\begin{aligned}
\log\left(M_r\right) &= \log\left(\Gamma_0\right) - \sum_{p\in\mathbb{N}} \frac{(2(n+1))^{p+1}}{p+1} K_r^{p+1}, \\
&= \log\left(\Gamma_0\right) - \sum_{p\in\mathbb{N}} \frac{(2(n+1))^{p+1}}{p+1} \left(-\frac{r}{2(n+1)}\chi \sum_{k\in\mathbb{N}} r^k \chi^k \Gamma_0^{-1}\Gamma_{k+1}\right)^{p+1}, \\
&= \log\left(\Gamma_0\right) + \sum_{p\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^p r^{p+1}}{p+1} \chi^{p+1} \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} r^k \chi^k A_k^{(p+1)}\right),
\end{aligned}$$

où les $A_k^{(p+1)}$ sont des matrices qui sont des sommes de produits des Γ_k et de Γ_0^{-1}. On a alors

$$\widehat{\log\left(M_r\right)}(k) = r^k \left(\sum_{p=1}^{p=k} \frac{(-1)^{p-1}}{p} A_{k-p}^{(p)}\right),$$

et on vérifie facilement, par un calcul identique à celui effectué pour $\log(M_r)$, que

$$\sum_{p=1}^{p=k} \frac{(-1)^{p-1}}{p} A_{k-p}^{(p)} = \widehat{\log\left(G^{-1}\right)}(k),$$

ce qui achève la démonstration. □

Montrons maintenant le théorème 2.8. Nous allons procéder en deux étapes :

Première étape ; limite de $\mathbf{2}\left\|\mathbf{M_r}\right\|_{\mathscr{B}_{\mathfrak{M}}^{\mathbf{2,1/2}}}$ en fonction de $\mathbf{G^{-1}}$:

Comme

$$\left\|M_r\right\|^2_{\mathscr{B}_{\mathfrak{M}}^{2,1/2}} = \frac{1}{n}\sum_{k\in\mathbb{N}^*} k\ r^{2k}\left\|\widehat{G^{-1}}(k)\right\|^2_2,\ \text{avec } 0<r<1,$$

et

$$\left\|G^{-1}\right\|^2_{\mathscr{B}_{\mathfrak{M}}^{2,1/2}} = \frac{1}{n}\sum_{k\in\mathbb{N}^*} k\left\|\widehat{G^{-1}}(k)\right\|^2_2,$$

on a

$$\begin{aligned}\left\|M_r-G^{-1}\right\|_{\mathscr{B}_{\mathfrak{M}}^{2,1/2}} &= \frac{1}{n}\sum_{k\in\mathbb{N}^*} k\left\|\widehat{M_r}(k)-\widehat{G^{-1}}(k)\right\|^2_2,\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k\in\mathbb{N}^*} k\left(1-r^k\right)^2\left\|\widehat{G^{-1}}(k)\right\|^2_2,\\ &\leq \left\|G^{-1}\right\|_{\mathscr{B}_{\mathfrak{M}}^{2,1/2}} < +\infty.\end{aligned}$$

La série à termes positifs définissant $\left\|M_r-G^{-1}\right\|^2_{\mathscr{B}_{\mathfrak{M}}^{2,1/2}}$ étant majorée par une série à termes positifs convergente et indépendante de r, celle-là converge uniformément par rapport à r, sur $[0,1]$. D'où, par le théorème d'interversion des limites,

$$\lim_{\substack{r\to 1\\ 0<r<1}}\left\|M_r-G^{-1}\right\|_{\mathscr{B}_{\mathfrak{M}}^{2,1/2}} = 0.$$

De même, comme $\left\|M_r-G^{-1}\right\|_{\mathscr{B}_{\mathfrak{M}}^{2,1/2}} = \left\|M_r^*-G^{-1*}\right\|_{\mathscr{B}_{\mathfrak{M}}^{2,1/2}}$,

$$\lim_{\substack{r\to 1\\ 0<r<1}}\left\|M_r^*-G^{-1*}\right\|_{\mathscr{B}_{\mathfrak{M}}^{2,1/2}} = 0,$$

Compte-tenu de $\left\|M_r\right\|_{\mathscr{B}_{\mathfrak{M}}^{2,1/2}} = \left\|M_r^*\right\|_{\mathscr{B}_{\mathfrak{M}}^{2,1/2}}$, on en déduit

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{r\to 1\\ 0<r<1}}\left(\left\|M_r\right\|^2_{\mathscr{B}_{\mathfrak{M}}^{2,1/2}}+\left\|M_r^*\right\|^2_{\mathscr{B}_{\mathfrak{M}}^{2,1/2}}\right) &= 2\lim_{\substack{r\to 1\\ 0<r<1}}\left\|M_r\right\|^2_{\mathscr{B}_{\mathfrak{M}}^{2,1/2}}\\ &= 2\left\|G^{-1}\right\|^2_{\mathscr{B}_{\mathfrak{M}}^{2,1/2}}. \qquad (4.9)\end{aligned}$$

Par ailleurs, la condition $0 < r < 1$ assure que M_r est dérivable et que $\dfrac{\mathrm{d}M_r}{\mathrm{d}z}$ est dans $L^1_{\mathfrak{M}}$, d'où, d'après (4.4),

$$\|M_r\|^2_{\mathscr{B}^{2,1/2}_{\mathfrak{M}}} = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{T}} \mathrm{tr}\, \left[\chi \frac{\mathrm{d}(M_r)}{\mathrm{d}z}(\chi) M_r^*(\overline{\chi})\right] \,\mathrm{d}\sigma,$$
$$\|M_r^*\|^2_{\mathscr{B}^{2,1/2}_{\mathfrak{M}}} = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{T}} \mathrm{tr}\, \left[\chi \frac{\mathrm{d}(M_r^*)}{\mathrm{d}z}(\overline{\chi}) M_r(\chi)\right] \,\mathrm{d}\sigma.$$

Deuxième étape ; limite de $\mathbf{2\,\|M_r\|_{\mathscr{B}^{2,1/2}_{\mathfrak{M}}}}$ en fonction de F :

Calculons $\|M_r\|^2_{\mathscr{B}^{2,1/2}_{\mathfrak{M}}}$ en introduisant $\log\left(G^{-1}\right)$:

$$\begin{aligned}\|M_r\|^2_{\mathscr{B}^{2,1/2}_{\mathfrak{M}}} &= \frac{1}{n} \int_{\mathbb{T}} \mathrm{tr}\, \left[\chi \frac{\mathrm{d}(M_r)}{\mathrm{d}z}(\chi) M_r^*(\overline{\chi})\right] \,\mathrm{d}\sigma,\\ &= \frac{1}{n} \int_{\mathbb{T}} \mathrm{tr}\, \left[\chi \left(\frac{\mathrm{d}(M_r)}{\mathrm{d}z}(\chi) M_r^{-1}(\chi)\right) M_r(\chi) M_r^*(\overline{\chi})\right] \,\mathrm{d}\sigma.\end{aligned}$$

Pour transformer cette intégrale en une série, on utilise le lemme 4.9 (iii) et le lemme technique 3 (ii), qui permettent d'écrire

$$\frac{\mathrm{d}(\log(M_r))}{\mathrm{d}z}(\chi) = \frac{\mathrm{d}(M_r)}{\mathrm{d}z}(\chi) M_r^{-1}(\chi).$$

Comme $M_r^{-1} \in L^\infty_{\mathfrak{M}}$, $\dfrac{\mathrm{d}(\log(M_r))}{\mathrm{d}z}$ est dans $L^1_{\mathfrak{M}}$, donc, d'après (4.3),

$$\begin{aligned}\|M_r\|^2_{\mathscr{B}^{2,1/2}_{\mathfrak{M}}} &= \frac{1}{n} \int_{\mathbb{T}} \mathrm{tr}\, \left[\chi \left(\frac{\mathrm{d}(\log(M_r))}{\mathrm{d}z}(\chi)\right) M_r(\chi) M_r^*(\overline{\chi})\right] \,\mathrm{d}\sigma,\\ &= \frac{1}{n} \sum_{k\in\mathbb{N}^*} k \;\mathrm{tr}\left[\widehat{\log(M_r)}(k) \widehat{M_r M_r^*}^{\,*}(k)\right],\end{aligned}$$

et

$$\frac{1}{n} \sum_{k\in\mathbb{N}^*} k \;\mathrm{tr}\left[\widehat{\log(M_r)}(k) \widehat{M_r M_r^*}^{\,*}(k)\right] = \frac{1}{n} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |k| \mathrm{tr}\left[\widehat{\log(M_r)}(k) \widehat{M_r M_r^*}^{\,*}(k)\right],$$

puisque les coefficients de Fourier d'ordre négatif de $\log(M_r)$ sont nuls. De même,

$$\|M_r^*\|^2_{\mathscr{B}^{2,1/2}_{\mathfrak{M}}} = \frac{1}{n} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |k| \mathrm{tr}\left[\widehat{\log(M_r^*)}(k) \widehat{M_r^* M_r}^{\,*}(k)\right].$$

Calculons maintenant

$$\lim_{\substack{r\to 1\\ 0<r<1}} \frac{1}{n}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|k|\mathrm{tr}\left[\widehat{\log(M_r)}(k)\widehat{M_rM_r^*}^*(k)\right]$$

et

$$\lim_{\substack{r\to 1\\ 0<r<1}} \frac{1}{n}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|k|\mathrm{tr}\left[\widehat{\log(M_r^*)}(k)\widehat{M_r^*M_r}^*(k)\right].$$

Pour ceci, remarquons d'abord que, comme $\log\left(G^{-1}\right)$ et F^{-1}sont dans $\mathscr{B}_{\mathfrak{M}}^{2,1/2}$, la série

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}|k|\mathrm{tr}\left[\widehat{\log(G^{-1})}(k)\widehat{F^{-1}}^*(k)\right]$$

est convergente. Majorons alors la différence

$$\Delta(r) = \frac{1}{n}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|k|\mathrm{tr}\left[\widehat{\log(M_r)}(k)\widehat{M_rM_r^*}^*(k)\right] - \frac{1}{n}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|k|\mathrm{tr}\left[\widehat{\log(G^{-1})}(k)\widehat{F^{-1}}^*(k)\right],$$

$$\Delta(r) = \frac{1}{n}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|k|\mathrm{tr}\left[\widehat{\log(M_r)}(k)\widehat{M_rM_r^*}^*(k) - \widehat{\log(G^{-1})}(k)\widehat{F^{-1}}^*(k)\right],$$

$$\Delta(r) = \frac{1}{n}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|k|\mathrm{tr}\Big[\left(\widehat{\log(M_r)}(k) - \widehat{\log(G^{-1})}(k)\right)\widehat{M_rM_r^*}^*(k) + \widehat{\log(G^{-1})}(k)\left(\widehat{M_rM_r^*}^*(k) - \widehat{F^{-1}}^*(k)\right)\Big].$$

$$\Delta(r) = \frac{1}{n}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|k|\mathrm{tr}\left[\left(\widehat{\log(M_r)}(k) - \widehat{\log(G^{-1})}(k)\right)\widehat{M_rM_r^*}^*(k)\right] + \frac{1}{n}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|k|\mathrm{tr}\left[\widehat{\log(G^{-1})}(k)\left(\widehat{M_rM_r^*}^*(k) - \widehat{F^{-1}}^*(k)\right)\right],$$

ce qui s'écrit

$$\Delta(r)=\left\langle \log(M_r) - \log(G^{-1}), M_rM_r^*\right\rangle_{\mathscr{B}_{\mathfrak{M}}^{2,1/2}} + \left\langle \log(G^{-1}), M_rM_r^* - F^{-1}\right\rangle_{\mathscr{B}_{\mathfrak{M}}^{2,1/2}}.$$

Ces deux produits scalaires, comme nous allons le voir maintenant, sont non seulement finis à cause des hypothèses du théorème 2.8, mais de plus ils convergent vers 0 quand r tend vers 1. Majorons donc $|\Delta(r)|$:

$$|\Delta(r)| \leq \left|\left\langle \log(M_r) - \log(G^{-1}), M_r M_r^* \right\rangle_{\mathscr{B}_{\mathfrak{M}}^{2,1/2}}\right| + \left|\left\langle \log(G^{-1}), M_r M_r^* - F^{-1} \right\rangle_{\mathscr{B}_{\mathfrak{M}}^{2,1/2}}\right|,$$

$$|\Delta(r)| \leq \left\|\log(M_r) - \log(G^{-1})\right\|_{\mathscr{B}_{\mathfrak{M}}^{2,1/2}} \|M_r M_r^*\|_{\mathscr{B}_{\mathfrak{M}}^{2,1/2}} + \left\|\log(G^{-1})\right\|_{\mathscr{B}_{\mathfrak{M}}^{2,1/2}} \left\|M_r M_r^* - F^{-1}\right\|_{\mathscr{B}_{\mathfrak{M}}^{2,1/2}}.$$

Or

$$\begin{aligned}
\left\|\log(M_r) - \log(G^{-1})\right\|^2_{\mathscr{B}_{\mathfrak{M}}^{2,1/2}} &= \frac{1}{n}\sum_{k\in\mathbb{N}^*} k \left\|\widehat{\log(M_r)}(k) - \widehat{\log(G^{-1})}(k)\right\|_2^2, \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k\in\mathbb{N}^*} k \left(1 - r^k\right)^2 \left\|\widehat{\log(G^{-1})}(k)\right\|_2^2, \\
&\leq \left\|\log(G^{-1})\right\|^2_{\mathscr{B}_{\mathfrak{M}}^{2,1/2}} < +\infty.
\end{aligned}$$

La série à termes positifs définissant $\|\log(M_r) - \log(G^{-1})\|^2_{\mathscr{B}_{\mathfrak{M}}^{2,1/2}}$ étant majorée par une série à termes positifs convergente et indépendante de r, celle-là converge uniformément par rapport à r, sur $[0,1]$. D'où, par le théorème d'interversion des limites,

$$\lim_{\substack{r\to 1\\ 0<r<1}} \left\|\log(M_r) - \log(G^{-1})\right\|_{\mathscr{B}_{\mathfrak{M}}^{2,1/2}} = 0.$$

Par ailleurs,

$$\left\|M_r M_r^* - F^{-1}\right\|_{\mathscr{B}_{\mathfrak{M}}^{2,1/2}} = \left\|M_r(M_r^* - G^{-1*}) + (M_r - G^{-1})G^{-1*}\right\|_{\mathscr{B}_{\mathfrak{M}}^{2,1/2}},$$

$$\left\|M_r M_r^* - F^{-1}\right\|_{\mathscr{B}_{\mathfrak{M}}^{2,1/2}} \leq \|M_r\|_{\mathscr{B}_{\mathfrak{M}}^{2,1/2}} \left\|M_r^* - G^{-1*}\right\|_{\mathscr{B}_{\mathfrak{M}}^{2,1/2}} + \left\|M_r - G^{-1}\right\|_{\mathscr{B}_{\mathfrak{M}}^{2,1/2}} \left\|G^{-1*}\right\|_{\mathscr{B}_{\mathfrak{M}}^{2,1/2}}.$$

Or on a vu dans la première étape que

$$\lim_{\substack{r\to 1\\ 0<r<1}} \left\|M_r - G^{-1}\right\|_{\mathscr{B}^{2,1/2}_{\mathfrak{M}}} = 0,$$

et donc

$$\lim_{\substack{r\to 1\\ 0<r<1}} \|M_r\|_{\mathscr{B}^{2,1/2}_{\mathfrak{M}}} = \left\|G^{-1}\right\|_{\mathscr{B}^{2,1/2}_{\mathfrak{M}}},$$

et que

$$\lim_{\substack{r\to 1\\ 0<r<1}} \left\|M_r^* - G^{-1*}\right\|_{\mathscr{B}^{2,1/2}_{\mathfrak{M}}} = 0,$$

ce qui entraîne

$$\lim_{\substack{r\to 1\\ 0<r<1}} \left\|M_r^* M_r - F^{-1}\right\|_{\mathscr{B}^{2,1/2}_{\mathfrak{M}}} = 0,$$

et

$$\lim_{\substack{r\to 1\\ 0<r<1}} \|M_r^* M_r\|_{\mathscr{B}^{2,1/2}_{\mathfrak{M}}} = \left\|F^{-1}\right\|_{\mathscr{B}^{2,1/2}_{\mathfrak{M}}}.$$

On en déduit que

$$\lim_{\substack{r\to 1\\ 0<r<1}} \Delta(r) = 0,$$

et

$$\lim_{\substack{r\to 1\\ 0<r<1}} \frac{1}{n}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|k|\mathrm{tr}\left[\widehat{\log(M_r)}(k)\widehat{M_r M_r^*}^*(k)\right] = \frac{1}{n}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|k|\mathrm{tr}\left[\widehat{\log(G^{-1})}(k)\widehat{F^{-1}}^*(k)\right].$$

Par un raisonnement analogue, on obtient aussi

$$\lim_{\substack{r\to 1\\ 0<r<1}} \frac{1}{n}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|k|\mathrm{tr}\left[\widehat{\log(M_r^*)}(k)\widehat{M_r^* M_r}^*(k)\right] = \frac{1}{n}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|k|\mathrm{tr}\left[\widehat{\log(G^{-1*})}(k)\widehat{F^{-1}}^*(k)\right].$$

Finalement, par l'égalité $\log\left(F^{-1}\right) = \log\left(G^{-1}\right) + \log\left(G^{-1*}\right)$ (puisque les matrices G et G^{-1} sont normales),

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{r\to 1\\ 0<r<1}} \left(\|M_r\|^2_{\mathscr{B}^{2,1/2}_{\mathfrak{M}}} + \|M_r^*\|^2_{\mathscr{B}^{2,1/2}_{\mathfrak{M}}}\right) &= \frac{1}{n}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|k|\mathrm{tr}\left[\widehat{\log(G^{-1})}(k)\widehat{F^{-1}}^*(k)\right]\\ &+ \frac{1}{n}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|k|\mathrm{tr}\left[\widehat{\log(G^{-1*})}(k)\widehat{F^{-1}}^*(k)\right],\end{aligned}$$

$$\lim_{\substack{r\to 1\\ 0<r<1}}\left(\|M_r\|^2_{\mathscr{B}^{2,1/2}_{\mathfrak{M}}}+\|M_r^*\|^2_{\mathscr{B}^{2,1/2}_{\mathfrak{M}}}\right)=\frac{1}{n}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|k|\operatorname{tr}\left[\left(\log(G^{-1}G^{-1*})\right)\widehat{}\,(k)\widehat{F^{-1}}^*(k)\right],$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|k|\operatorname{tr}\left[\widehat{\log(F^{-1})}(k)\widehat{F^{-1}}^*(k)\right].$$

Compte-tenu du résultat (4.9), on a alors

$$2\left\|G^{-1}\right\|^2_{\mathscr{B}^{2,1/2}_{\mathfrak{M}}}=\frac{1}{n}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|k|\operatorname{tr}\left[\widehat{\log(F^{-1})}(k)\widehat{F^{-1}}^*(k)\right].$$

Mais $F.F^{-1}=F^{-1}.F=\mathrm{Id}$, ce qui entraîne que $\log(F)+\log(F^{-1})=\log(\mathrm{Id})=0$ et donc

$$2\left\|G^{-1}\right\|^2_{\mathscr{B}^{2,1/2}_{\mathfrak{M}}}=-\frac{1}{n}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|k|\operatorname{tr}\left[\widehat{\log(F)}(k)\widehat{F^{-1}}^*(k)\right]$$
$$=-\left\langle\log(F),F^{-1}\right\rangle_{\mathscr{B}^{2,1/2}_{\mathfrak{M}}},\quad (4.10)$$

ce qui, en utilisant le théorème de trace 2.7, achève la démonstration du théorème 2.8. □

Théorème 2.9. *Avec les mêmes hypothèses que le théorème 2.8,*

$$\lim_{N\to+\infty}\ln(\det T_N(F))-\operatorname{tr}\left(T_N(\log(F))\right)=\frac{1}{2n}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|k|\ \left\|\widehat{\log(F)}(k)\right\|_2^2,$$
$$=\frac{1}{2}\left\|\log(F)\right\|^2_{\mathscr{B}^{2,1/2}_{\mathfrak{M}}},$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{k\in\mathbb{N}^*}k\ \left\|\widehat{\log(F)}(k)\right\|_2^2.$$

Remarque 4.10. A notre connaissance, le seul théorème voisin du théorème 2.9 a été démontré par Harold Widom dans [31]. Celui-ci obtient pour limite de l'expression $\ln(\det T_N(F))-\operatorname{tr}\left(T_N(\log(F))\right)$, quand N tend vers l'infini, la quantité $\ln\left(\det\left(T(F)T(F^{-1})\right)\right)$, $T(F)$ étant l'opérateur de Toeplitz non tronqué, c'est-à-dire la limite forte en « norme-opérateur » de l'opérateur tronqué $T_N(F)$. Les composantes de la matrice-symbole F sont alors pour Harold Widom des fonctions appartenant à la fois à l'algèbre de Wiener

$$W = \left\{ \varphi : \varphi \in L^{\infty}; \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(k)| < +\infty \right\},$$

et à l'espace de Besov

$$B_2^{1/2} = \left\{ \varphi : \varphi \in L^{2}; \sum_{k\in\mathbb{Z}} |k||\widehat{\varphi}(k)|^2 < +\infty \right\}.$$

Démonstration du théorème 2.9. Pour cette démonstration, nous aurons besoin de trois lemmes :

Lemme 4.11. *Soit $t \mapsto M(t)$ une fonction à valeur matricielle définie et dérivable sur un ouvert E de $\mathbb{R}$. Alors la fonction $t \mapsto \det(M)(t)$ est dérivable sur E et on a*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\det(M)\right) = \mathrm{tr}\left({}^t\mathrm{Com}(M)\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}\right),$$

$\forall t \in E$, et si $M(t)$ est inversible sur E, $M^{-1}(t) = \dfrac{1}{\det(M)(t)}{}^t\mathrm{Com}\left(M(t)\right)$, ce qui entraîne

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\ln\left(\det(M)\right)\right) = \mathrm{tr}\left(M^{-1}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}\right) = \mathrm{tr}\left(\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}M^{-1}\right),$$

où $\mathrm{Com}(M)$ est la matrice des cofacteurs de M.

Démonstration. Pour la démonstration de ce lemme, voir [12]. □

Lemme 4.12. *Soit H une fonction matricielle définie sur le tore $\mathbb{T}$, à valeurs dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Si le rayon spectral de H vérifie $\varrho(H) < 1$, alors $\forall t \in]0,1]$,*

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}&\left[\ln\left(\det\left(T_N(\mathrm{Id}-tH)\right)\right) - \mathrm{tr}\ \left(T_N\left(\log(\mathrm{Id}-tH)\right)\right)\right] \\ &= -\frac{1}{t}\ \mathrm{tr}\ \left[\left(T_N(\mathrm{Id}-tH)\right)^{-1} - T_N\left((\mathrm{Id}-tH)^{-1}\right)\right],\end{aligned}$$

et si $t = 0$, $\left(\ln\left(\det\left(T_N(\mathrm{Id}-tH)\right)\right) - \mathrm{tr}\ \left(T_N\left(\log(\mathrm{Id}-tH)\right)\right)\right)(0) = 0$ et sa dérivée en zéro est nulle.

Démonstration. Remarquons d'abord que si $\varrho(H) < 1$, $\log(\mathrm{Id} - tH)$ existe et est défini par la série (4.5), pour tout t de l'intervalle $[0, 1]$, d'après le lemme 4.9 (i). D'autre part, $(\mathrm{Id} - tH)^{-1}$ existe aussi et est défini par la série $\sum\limits_{p \in \mathbb{N}} t^p H^p$, pour tout t de l'intervalle $[0, 1]$. Les fonctions $t \mapsto \log(\mathrm{Id} - tH)$ et $t \mapsto (\mathrm{Id} - tH)^{-1}$ sont alors continues sur $[0, 1]$. Posons alors, $\forall N \in \mathbb{N}$,

$$U_N(t) = \ln\left(\det\left(T_N(\mathrm{Id} - tH)\right)\right) - \mathrm{tr}\ \left(T_N\left(\log(\mathrm{Id} - tH)\right)\right),$$

suite de fonctions définie sur $[0, 1]$.

$$U'_N(t) = \mathrm{tr}\ \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(T_N(\mathrm{Id} - tH)\right)\left(T_N(\mathrm{Id} - tH)\right)^{-1} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(T_N\left(\log(\mathrm{Id} - tH)\right)\right)\right],$$

par le lemme 4.11. Par ailleurs, $T_N(\mathrm{Id} - tH) = \mathrm{Id} - tT_N(H)$ et donc

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(T_N(\mathrm{Id} - tH)\right) = -T_N(H).$$

D'autre part, comme $\varrho(H) < 1$, les deux séries définissant $\log\left(\mathrm{Id} - tH\right)$ et $(\mathrm{Id} - tH)^{-1}$ sont convergentes sur le disque

$$\mathcal{D} = \left\{t : t \in \mathbb{C}\ ;\ |t| < \frac{1}{\varrho(H)}\right\},$$

et la projection $\pi_N^{(1)} : L^2_{\mathfrak{M}} \mapsto \mathscr{P}_N$ permettant de définir $T_N\left(\left(\log\left(\mathrm{Id} - tH\right)\right)\right)$ vérifie que $\forall Q \in \mathscr{P}_N$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\pi_N^{(1)}\left(Q \log\left(\mathrm{Id} - tH\right)\right)\right) = \pi_N^{(1)}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(Q \log\left(\mathrm{Id} - tH\right)\right)\right),$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\pi_N^{(1)}\left(Q \log\left(\mathrm{Id} - tH\right)\right)\right) = \pi_N^{(1)}\left(Q \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\log\left(\mathrm{Id} - tH\right)\right)\right),$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(T_N\left(\log\left(\mathrm{Id} - tH\right)\right)\right)(Q) = T_N\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\log\left(\mathrm{Id} - tH\right)\right)\right)(Q),$$

donc

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(T_N\left(\log\left(\mathrm{Id} - tH\right)\right)\right) = T_N\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\log\left(\mathrm{Id} - tH\right)\right)\right),$$

ce qui, en utilisant le lemme 4.9 (i), s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(T_N\left(\log\left(\mathrm{Id} - tH\right)\right)\right) = -T_N\left(H(\mathrm{Id} - tH)^{-1}\right).$$

Finalement,

$$U'_N(t) = -\mathrm{tr}\ \left(T_N(H).\left(T_N(\mathrm{Id} - tH)\right)^{-1} - T_N\left(H(\mathrm{Id} - tH)^{-1}\right)\right).$$

Mais
$T_N\Big((\mathrm{Id}-tH)(\mathrm{Id}-tH)^{-1}\Big)=\mathrm{Id}=T_N\Big((\mathrm{Id}-tH)^{-1}\Big)-tT_N\Big(H(\mathrm{Id}-tH)^{-1}\Big)$,
et donc

$$T_N\left(H(\mathrm{Id}-tH)^{-1}\right)=\frac{1}{t}\left(T_N\left((\mathrm{Id}-tH)^{-1}\right)-\mathrm{Id}\right).$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}T_N(\mathrm{Id}-tH)\left(T_N(\mathrm{Id}-tH)\right)^{-1}&=\mathrm{Id},\\&=\left(\mathrm{Id}-tT_N(H)\right)\left(T_N(\mathrm{Id}-tH)\right)^{-1},\\&=\left(T_N(\mathrm{Id}-tH)\right)^{-1}-tT_N(H)\left(T_N(\mathrm{Id}-tH)\right)^{-1},\end{aligned}$$

d'où $T_N(H)\left(T_N(\mathrm{Id}-tH)\right)^{-1}=\dfrac{1}{t}\Big(\left(T_N(\mathrm{Id}-tH)\right)^{-1}-\mathrm{Id}\Big)$, ce qui donne la formule annoncée pour $t\neq 0$. Pour $t=0$, $U_N(0)=U_N'(0)=0$, puisqu'au premier ordre en t,

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\left[\left(T_N(\mathrm{Id}-tH)\right)^{-1}-T_N\left((\mathrm{Id}-tH)^{-1}\right)\right]=t^2\mathrm{tr}\left[\left(T_N(H)\right)^2-T_N\left(H^2\right)\right]\\+O(t^3).\end{aligned}$$

□

Lemme 4.13. *En vertu du théorème de trace 2.7 et avec ses hypothèses, nous avons la majoration*

$$\begin{aligned}\left|\mathrm{tr}\ \left(T_N(F)^{-1}-T_N(F^{-1})\right)\right|&\le 2\ \frac{2-\left(1-\rho_{N+1}(F^{-1})\right)^2}{1-\left(\rho_{N+1}(F^{-1})\right)^2}\ \left\|G^{-1}\right\|^2_{\mathscr{B}^{2,1/2}_{\mathfrak{M}}},\\&\le\frac{2-\left(1-\rho_{N+1}(F^{-1})\right)^2}{1-\left(\rho_{N+1}(F^{-1})\right)^2}\left|\left\langle\log(F),F^{-1}\right\rangle_{\mathscr{B}^{2,1/2}_{\mathfrak{M}}}\right|.\end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{N\to+\infty}\rho_{N+1}(F^{-1})=0$, *il existe* $N_0\in\mathbb{N}$ *tel que, pour tout* $N>N_0$, $0<\rho_{N+1}(F^{-1})\le\dfrac{1}{2}$. *Alors, pour tout* $N>N_0$,

$$\begin{aligned}\left|\mathrm{tr}\ \left(T_N(F)^{-1}-T_N(F^{-1})\right)\right|&\le\frac{14}{3}\ \left\|G^{-1}\right\|^2_{\mathscr{B}^{2,1/2}_{\mathfrak{M}}},\\&\le\frac{7}{3}\ \left|\left\langle\log(F),F^{-1}\right\rangle_{\mathscr{B}^{2,1/2}_{\mathfrak{M}}}\right|.\end{aligned}$$

Démonstration. Le théorème de trace 2.7 a pour conséquence, en utilisant l'inégalité triangulaire inverse,

$$\left|\mathrm{tr}\,\left(T_N(F)^{-1}-T_N(F^{-1})\right)\right| \leq \frac{2}{n}\left(\sum_{k=0}^{k=N} k\,\|\Gamma_k\|_2^2+(N+1)\sum_{k\geq N+1}\|\Gamma_k\|_2^2\right) + \frac{4}{n}\,\frac{\rho_{N+1}(F^{-1})}{1-(\rho_{N+1}(F^{-1}))^2}\left(\sum_{k\in\mathbb{N}} k\,\|\Gamma_k\|_2^2\right),$$

ce qui entraîne

$$\left|\mathrm{tr}\,\left(T_N(F)^{-1}-T_N(F^{-1})\right)\right| \leq \frac{2}{n}\left(\sum_{k\in\mathbb{N}} k\,\|\Gamma_k\|_2^2\right) + \frac{4}{n}\,\frac{\rho_{N+1}(F^{-1})}{1-(\rho_{N+1}(F^{-1}))^2}\left(\sum_{k\in\mathbb{N}} k\,\|\Gamma_k\|_2^2\right),$$

d'où

$$\left|\mathrm{tr}\,\left(T_N(F)^{-1}-T_N(F^{-1})\right)\right| \leq \frac{2}{n}\left(1+\frac{2\rho_{N+1}(F^{-1})}{1-(\rho_{N+1}(F^{-1}))^2}\right)\left(\sum_{k\in\mathbb{N}} k\,\|\Gamma_k\|_2^2\right),$$

et

$$\begin{aligned}\left|\mathrm{tr}\,\left(T_N(F)^{-1}-T_N(F^{-1})\right)\right| &\leq \frac{2}{n}\left(\frac{2-\left(1-\rho_{N+1}(F^{-1})\right)^2}{1-(\rho_{N+1}(F^{-1}))^2}\right)\left(\sum_{k\in\mathbb{N}} k\,\|\Gamma_k\|_2^2\right),\\ &\leq 2\left(\frac{2-\left(1-\rho_{N+1}(F^{-1})\right)^2}{1-(\rho_{N+1}(F^{-1}))^2}\right)\left\|G^{-1}\right\|^2_{\mathscr{B}^{2,1/2}_{\mathfrak{M}}}\\ &\leq \frac{2-\left(1-\rho_{N+1}(F^{-1})\right)^2}{1-(\rho_{N+1}(F^{-1}))^2}\left|\left\langle \log(F),F^{-1}\right\rangle_{\mathscr{B}^{2,1/2}_{\mathfrak{M}}}\right|,\end{aligned}$$

en utilisant (4.10). Enfin, pour tout $N>N_0$, $0<\rho_{N+1}(F^{-1})\leq\dfrac{1}{2}$ entraîne $\dfrac{2-\left(1-\rho_{N+1}(F^{-1})\right)^2}{1-(\rho_{N+1}(F^{-1}))^2}\leq\dfrac{7}{3}$. □

Montrons maintenant le théorème 2.9 :
On suppose que pour tout t de l'intervalle $[0,1]$, la matrice $\mathrm{Id}-tH$ vérifie les hypothèses du théorème 2.8. Dans ces conditions, en appliquant ce

théorème et en reprenant les notations de la démonstration du lemme 4.12, la fonction U'_N définie $\forall N \in \mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} \forall t \in]0,1] & U'_N(t) = -\dfrac{1}{t} \text{ tr } \left[(T_N(\mathrm{Id} - tH))^{-1} - T_N\left((\mathrm{Id} - tH)^{-1}\right)\right] \\ & U'_N(0) = 0 \end{cases}$$

converge partout sur $[0,1]$ quand $N \to +\infty$, vers la fonction U' définie par

$$\begin{cases} \forall t \in]0,1] & U'(t) = -\dfrac{1}{t}\dfrac{1}{n} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |k| \text{tr}\left[(\log(\mathrm{Id}-tH))\hat{}(k)\left((\mathrm{Id}-tH)^{-1}\right)\hat{}^{*}(k)\right] \\ & U'(0) = 0. \end{cases}$$

Posons

$$Y(t) = \frac{1}{n} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |k| \text{ tr}\left[(\log(\mathrm{Id} - tH))\hat{}(k)\,(\log(\mathrm{Id} - tH))\hat{}^{*}(k)\right].$$

Cette série converge sur $[0,1]$, puisque $\log(\mathrm{Id} - tH) \in \mathscr{B}^{2,1/2}_{\mathfrak{M}}$, $\forall t \in [0,1]$. Dérivons son terme général :

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\text{tr}\left[(\log(\mathrm{Id} - tH))\hat{}(k)\,(\log(\mathrm{Id} - tH))\hat{}^{*}(k)\right]\right) \\ &\qquad = \text{tr}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left((\log(\mathrm{Id} - tH))\hat{}(k)\right)\ (\log(\mathrm{Id} - tH))\hat{}^{*}(k)\right. \\ &\qquad\qquad \left. + (\log(\mathrm{Id} - tH))\hat{}(k)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left((\log(\mathrm{Id} - tH))\hat{}^{*}(k)\right)\right]. \end{aligned}$$

Or, en utilisant un théorème classique de dérivation sous le signe somme et le lemme 4.9 (i),

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left((\log(\mathrm{Id} - tH))\hat{}(k)\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{\mathbb{T}} \chi^{-k}\log(\mathrm{Id} - tH)\ \mathrm{d}\sigma\right),$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left((\log(\mathrm{Id} - tH))\hat{}(k)\right) &= \int_{\mathbb{T}} \chi^{-k}\left(-H(\mathrm{Id} - tH)^{-1}\right)\ \mathrm{d}\sigma, \\ &= \left(-H(\mathrm{Id} - tH)^{-1}\right)\hat{}(k). \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} &\text{tr}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left((\log(\mathrm{Id} - tH))\hat{}(k)\,(\log(\mathrm{Id} - tH))\hat{}^{*}(k)\right)\right] \\ &\qquad = \text{tr}\left[\left(-H(\mathrm{Id} - tH)^{-1}\right)\hat{}(k)\,(\log(\mathrm{Id} - tH))\hat{}^{*}(k)\right], \end{aligned}$$

$$\operatorname{tr}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left((\log(\mathrm{Id}-tH))\widehat{\ }(k)\,(\log(\mathrm{Id}-tH))\widehat{\ }^{*}(k)\right)\right]$$
$$=\operatorname{tr}\left[(\log(\mathrm{Id}-tH))\widehat{\ }(-k)\left(-H(\mathrm{Id}-tH)^{-1}\right)\widehat{\ }^{*}(-k)\right],$$

en remarquant que $\forall M \in L^2_{\mathfrak{M}}$, hermitienne,

$$\widehat{M}^{*}(k)=\widehat{M}(-k),$$

et en utilisant la commutativité de deux matrices dans la trace. De même,

$$\operatorname{tr}\left[(\log(\mathrm{Id}-tH))\widehat{\ }(k)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left((\log(\mathrm{Id}-tH))\widehat{\ }^{*}(k)\right)\right]$$
$$=\operatorname{tr}\left[(\log(\mathrm{Id}-tH))\widehat{\ }^{*}(-k)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left((\log(\mathrm{Id}-tH))\widehat{\ }(-k)\right)\right],$$

$$\operatorname{tr}\left[(\log(\mathrm{Id}-tH))\widehat{\ }(k)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left((\log(\mathrm{Id}-tH))\widehat{\ }^{*}(k)\right)\right]$$
$$=\operatorname{tr}\left[(\log(\mathrm{Id}-tH))\widehat{\ }^{*}(-k)\left(\left(-H(\mathrm{Id}-tH)^{-1}\right)\widehat{\ }(-k)\right)\right],$$

$$\operatorname{tr}\left[(\log(\mathrm{Id}-tH))\widehat{\ }(k)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left((\log(\mathrm{Id}-tH))\widehat{\ }^{*}(k)\right)\right]$$
$$=\operatorname{tr}\left[(\log(\mathrm{Id}-tH))\widehat{\ }(k)\left(\left(-H(\mathrm{Id}-tH)^{-1}\right)\widehat{\ }^{*}(k)\right)\right].$$

Mais

$$\left(-H(\mathrm{Id}-tH)^{-1}\right)\widehat{\ }(k)=-\frac{1}{t}\ \left((\mathrm{Id}-tH)^{-1}\right)\widehat{\ }(k),$$

si $k\neq 0$, et

$$\left(-H(\mathrm{Id}-tH)^{-1}\right)\widehat{\ }(0)=\frac{1}{t}\left(\mathrm{Id}-\left((\mathrm{Id}-tH)^{-1}\right)\widehat{\ }(0)\right),$$

si $k=0$, donc, si $k\neq 0$,

$$\operatorname{tr}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left((\log(\mathrm{Id}-tH))\widehat{\ }(k)\,(\log(\mathrm{Id}-tH))\widehat{\ }^{*}(k)\right)\right]$$
$$=-\frac{1}{t}\ \operatorname{tr}\left[(\log(\mathrm{Id}-tH))\widehat{\ }(-k)\left((\mathrm{Id}-tH)^{-1}\right)\widehat{\ }^{*}(-k)\right],$$

et

$$\operatorname{tr}\left[(\log(\mathrm{Id}-tH))\widehat{\ }(k)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left((\log(\mathrm{Id}-tH))\widehat{\ }^{*}(k)\right)\right]$$
$$=-\frac{1}{t}\operatorname{tr}\left[(\log(\mathrm{Id}-tH))\widehat{\ }(k)\left(\left((\mathrm{Id}-tH)^{-1}\right)\widehat{\ }^{*}(k)\right)\right].$$

Or, comme le théorème 2.8 est supposé vérifié sur $[0,1]$, la série

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}|k|\operatorname{tr}\left[(\log(\mathrm{Id}-tH))\widehat{\ }(k)\left(\left((\mathrm{Id}-tH)^{-1}\right)\widehat{\ }^{*}(k)\right)\right]$$

est convergente sur $[0,1]$, et

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}|k|\operatorname{tr}\left[(\log(\mathrm{Id}-tH))\widehat{\ }(-k)\left((\mathrm{Id}-tH)^{-1}\right)\widehat{\ }^{*}(-k)\right]$$
$$=\sum_{k\in\mathbb{Z}}|k|\operatorname{tr}\left[(\log(\mathrm{Id}-tH))\widehat{\ }(k)\left(\left((\mathrm{Id}-tH)^{-1}\right)\widehat{\ }^{*}(k)\right)\right],$$

en changeant k en $-k$, ce qui prouve que cette deuxième série converge aussi sur $[0,1]$. On en déduit que la série dérivée de $Y(t)$ est convergente sur $[0,1]$, puisque le théorème 2.8 est supposé vérifié, et

$$Y'(t)=-\frac{1}{t}\ \frac{2}{n}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|k|\ \operatorname{tr}\left[(\log(\mathrm{Id}-tH))\widehat{\ }(k)\left((\mathrm{Id}-tH)^{-1}\right)\widehat{\ }^{*}(k)\right],$$

si $t\in]0,1]$, avec $Y'(0)=Y(0)=0$. Finalement, $Y'=2U'$ sur $[0,1]$. D'autre part, comme la matrice $\mathrm{Id}-tH$ vérifie le théorème 2.8 pour tout t de $[0,1]$, le produit scalaire $\left|\langle\log(\mathrm{Id}-tH),(\mathrm{Id}-tH)^{-1}\rangle_{\mathscr{B}_{\mathfrak{M}}^{2,1/2}}\right|$ est fini $\forall t\in[0,1]$. Comme les fonctions $t\mapsto\log(\mathrm{Id}-tH)$ et $t\mapsto(\mathrm{Id}-tH)^{-1}$ sont continues sur $[0,1]$, la fonction $t\mapsto\left|\langle\log(\mathrm{Id}-tH),(\mathrm{Id}-tH)^{-1}\rangle_{\mathscr{B}_{\mathfrak{M}}^{2,1/2}}\right|$ est également continue sur $[0,1]$, et donc intégrable sur $[0,1]$. En vertu du lemme 4.13, la suite $|U_N'(t)|$ est donc majorée par une fonction intégrable indépendante de N, à partir d'un certain rang N_0.

Puisque $\forall t\in[0,1]$, $U_N(t)=\displaystyle\int_0^t U_N'(\xi)\mathrm{d}\xi$ et $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}U_N'(t)=U'(t)=$

$\dfrac{1}{2}\, Y'(t)$ d'après le lemme 4.12 et ce qui précède, par le théorème de convergence dominée, on a alors $\lim\limits_{N\to+\infty} U_N(t) = \dfrac{1}{2}\, Y(t)$, $\forall t \in [0,1]$, avec :

$$Y(t) = \int_0^t Y'(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

Finalement, $\forall t \in [0,1]$,

$$\lim_{N\to+\infty} (\ln(\det T_N(\mathrm{Id} - tH)) - \mathrm{tr}\,(T_N(\log(\mathrm{Id} - tH)))$$
$$= \frac{1}{2n} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |k| \;\; \|(\log(\mathrm{Id} - tH))\widehat{\ }(k)\|_2^2\,,$$

$$\lim_{N\to+\infty} (\ln(\det T_N(\mathrm{Id} - tH)) - \mathrm{tr}\,(T_N(\log(\mathrm{Id} - tH)))$$
$$= \frac{1}{n} \sum_{k\in\mathbb{N}^*} k \;\; \|(\log(\mathrm{Id} - tH))\widehat{\ }(k)\|_2^2\,.$$

Maintenant, pour tout symbole F vérifiant les hypothèses du théorème 2.8, on peut écrire

$$F = \hat{F}(0) + \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} \chi^k \widehat{F}(0) = \widehat{F}(0) \left(\mathrm{Id} + \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} \chi^k \left(\widehat{F}(0)\right)^{-1} \widehat{F}(k) \right),$$

ce qui permet d'utiliser la limite précédente, avec $t = 1$,

$$H = -\sum_{k\in\mathbb{Z}^*} \chi^k \left(\widehat{F}(0)\right)^{-1} \widehat{F}(k)$$

et achève la démonstration du théorème 2.9, puisque H ainsi défini possède les propriétés requises. La deuxième somme du théorème résulte de la remarque du début du paragraphe 4.3. □

Dans toute la suite, nous notons $\mathscr{D}$ le disque fermé de $\mathbb{C}$ de centre 0 et de rayon $n\|F\|_{L^\infty_{\mathfrak{M}}}$:

$$\mathscr{D} = \left\{ w : w \in \mathbb{C}; |w| \leq n\|F\|_{L^\infty_{\mathfrak{M}}} \right\}.$$

Corollaire 2.10. *Soit F un symbole vérifiant les hypothèses du théorème 2.8.*
Soient Ω un ouvert connexe borné de $\mathbb{C}$ contenant 0 et le spectre $\sigma(F)$ de

F, et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction analytique sur Ω, dont le développement en 0 est

$$f(z) = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k z^k.$$

Alors f induit sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ une fonction $\tilde{f} : \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, $\tilde{f}(M)$ soit de type analytique,c'est-à-dire que

$$\tilde{f}(M) = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k M^k,$$

chaque composante de M étant dans Ω. On suppose en outre que la matrice $w\mathrm{Id} - F$ vérifie le théorème 2.8 pour tout $w \in \Omega \backslash \mathscr{D}$. Dans ces conditions, pour tout (Γ), contour rectifiable fermé de $\Omega \backslash \mathscr{D}$ entourant $\sigma(F)$,

$$\lim_{N \to +\infty} \mathrm{tr} \, \left(\tilde{f}\left(T_N(F)\right) - T_N\left(\tilde{f}(F)\right) \right)$$
$$= \frac{1}{2\mathring{\imath}\pi} \int_\Gamma f(w) \left\langle \log(w\mathrm{Id} - F), (w\mathrm{Id} - F)^{-1} \right\rangle_{\mathscr{B}^{2,1/2}_{\mathfrak{M}}} \mathrm{d}w.$$

Démonstration. Soit (Γ) un contour rectifiable inclus dans $\Omega \backslash \mathscr{D}$ et entourant $\sigma(F)$. Alors on peut écrire (voir [8]) :

$$\tilde{f}(F) = \frac{1}{2\mathring{\imath}\pi} \int_\Gamma f(w)(w\mathrm{Id} - F)^{-1} \mathrm{d}w.$$

Remarquons que $T_N(F)$ est une matrice à blocs, dont les blocs sont les $\widehat{F}(k-l)$, pour k et l entiers variant de 0 à N, k étant l'indice ligne et l, l'indice colonne.

Or $\widehat{F}(k) = \int_\mathbb{T} \chi^{-k} F(\chi) \, \mathrm{d}\sigma$, et $\left\| \widehat{F}(k) \right\|_\infty \leq \int_\mathbb{T} \|F\|_\infty \, \mathrm{d}\sigma \leq \|F\|_{L^\infty_\mathfrak{M}}$, $\forall k$, ce qui entraîne

$$\begin{aligned} \|T_N(F)\|_\infty &\leq \|F\|_{L^\infty_\mathfrak{M}}, \\ \|T_N(F)\|_{L^\infty_\mathfrak{M}} &\leq \|F\|_{L^\infty_\mathfrak{M}}, \end{aligned} \tag{4.11}$$

et assure, par l'inégalité (4.7),

$$\sup_{z \in \mathbb{T}} \varrho\left(T_N(F)(z)\right) \leq n \, \|T_N(F)\|_{L^\infty_\mathfrak{M}},$$

que $\sigma\left(T_N(F)\right)$ est contenu dans $\mathscr{D}$ et que (Γ) entoure aussi $\sigma\left(T_N(F)\right)$. Alors pour tout (Γ) vérifiant les hypothèses du corollaire 2.10,

$$\begin{aligned}\tilde{f}\left(T_N(F)\right) &= \frac{1}{2\mathring{\imath}\pi}\int_\Gamma f(w)\left(w\mathrm{Id}-T_N(F)\right)^{-1}\mathrm{d}w,\\ &= \frac{1}{2\mathring{\imath}\pi}\int_\Gamma f(w)\left(T_N(w\mathrm{Id}-F)\right)^{-1}\mathrm{d}w.\end{aligned}$$

Par ailleurs, l'inégalité (4.11) montre que l'opérateur T_N défini par

$$\begin{aligned}T_N : L^\infty_{\mathfrak{M}} &\longrightarrow L^\infty_{\mathfrak{M}}\\ F &\longmapsto T_N(F),\end{aligned}$$

est un opérateur linéaire continu et contractant.

Démontrons maintenant le corollaire 2.10 : $\forall S_1 \in \mathbb{N}$, $\forall S_2 \in \mathbb{N}$, $S_1 \leq S_2$,

$$\begin{aligned}\left\|\int_\Gamma \frac{f(w)}{w}\left(\sum_{k=S_1}^{k=S_2}\frac{1}{w^k}F^k\right)\mathrm{d}w\right\|_{L^\infty_{\mathfrak{M}}} &\leq \sum_{k=S_1}^{k=S_2}\left|\int_\Gamma \frac{f(w)}{w^{k+1}}\mathrm{d}w\right| n^{k-1}\|F\|^k_{L^\infty_{\mathfrak{M}}},\\ &\leq \frac{1}{n}\sum_{k=S_1}^{k=S_2}\left|\int_\Gamma \frac{f(w)}{w}\left(\frac{n\|F\|_{L^\infty_{\mathfrak{M}}}}{w}\right)^k\mathrm{d}w\right|,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\left\|\int_\Gamma \frac{f(w)}{w}\left(\sum_{k=S_1}^{k=S_2}\frac{1}{w^k}F^k\right)\mathrm{d}w\right\|_{L^\infty_{\mathfrak{M}}}\\ &\qquad\leq \frac{1}{n}\,\frac{l\,(\Gamma)}{\mathrm{d}\,(\mathrm{O},(\Gamma))}\,\sup_{w\in(\Gamma)}|f(w)|\sum_{k=S_1}^{k=S_2}\left(\frac{n\|F\|_{L^\infty_{\mathfrak{M}}}}{\mathrm{d}\,(\mathrm{O},(\Gamma))}\right)^k,\end{aligned}$$

où $l(\Gamma)$ est la longueur du contour (Γ), et $\mathrm{d}\,(\mathrm{O},(\Gamma)) = \inf\{|w| : w \in (\Gamma)\}$ est la distance de l'origine à la courbe fermée (Γ).
Comme $n\|F\|_{L^\infty_{\mathfrak{M}}} < |w|$, pour tout $w \in (\Gamma)$, $n\|F\|_{L^\infty_{\mathfrak{M}}} < \mathrm{d}\,(\mathrm{O},(\Gamma))$, d'où

$$\lim_{\substack{S_1\to+\infty\\ S_2\to+\infty}}\left\|\int_\Gamma \frac{f(w)}{w}\left(\sum_{k=S_1}^{k=S_2}\frac{1}{w^k}F^k\right)\mathrm{d}w\right\|_{L^\infty_{\mathfrak{M}}} = 0,$$

et la série

$$\frac{1}{2\mathring{\imath}\pi}\sum_{k\in\mathbb{N}}\left(\int_\Gamma \frac{f(w)}{w^{k+1}}\mathrm{d}w\right)F^k$$

converge normalement dans $L^\infty_{\mathfrak{M}}$.

Comme $\left\|\sum_{k=S_1}^{k=S_2}\frac{1}{w^k}F^k\right\|_{L^\infty_{\mathfrak{M}}} \leq \sum_{k=S_1}^{k=S_2}\left(\frac{n\|F\|_{L^\infty_{\mathfrak{M}}}}{\mathrm{d}\left(\mathrm{O},(\Gamma)\right)}\right)^k$, la série $\sum_{k=S_1}^{k=S_2}\frac{1}{w^k}F^k$ converge aussi normalement dans $L^\infty_{\mathfrak{M}}$, et

$$\frac{1}{2\mathring{\imath}\pi}\sum_{k\in\mathbb{N}}\left(\int_\Gamma \frac{f(w)}{w^{k+1}}\mathrm{d}w\right)F^k = \tilde{f}(F). \tag{4.12}$$

Par ailleurs, par linéarité, on a

$$T_N\left(\frac{1}{2\mathring{\imath}\pi}\sum_{k=S_1}^{k=S_2}\left(\int_\Gamma \frac{f(w)}{w^{k+1}}\mathrm{d}w\right)F^k\right) = \frac{1}{2\mathring{\imath}\pi}\sum_{k=S_1}^{k=S_2}\left(\int_\Gamma \frac{f(w)}{w^{k+1}}\mathrm{d}w\right)T_N\left(F^k\right), \tag{4.13}$$

et, compte-tenu du fait que par le lemme 4.3 (ii), si $F \in L^\infty_{\mathfrak{M}}$, alors $F^k \in L^\infty_{\mathfrak{M}}$, $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k=S_1}^{k=S_2}\left(\int_\Gamma \frac{f(w)}{w^{k+1}}\mathrm{d}w\right)T_N\left(F^k\right)\right\|_{L^\infty_{\mathfrak{M}}} &\leq \sum_{k=S_1}^{k=S_2}\left|\int_\Gamma \frac{f(w)}{w^{k+1}}\mathrm{d}w\right|\left\|T_N(F^k)\right\|_{L^\infty_{\mathfrak{M}}},\\ &\leq \sum_{k=S_1}^{k=S_2}\left|\int_\Gamma \frac{f(w)}{w^{k+1}}\mathrm{d}w\right|\left\|F^k\right\|_{L^\infty_{\mathfrak{M}}},\end{aligned}$$

$$\left\|\sum_{k=S_1}^{k=S_2}\left(\int_\Gamma \frac{f(w)}{w^{k+1}}\mathrm{d}w\right)T_N\left(F^k\right)\right\|_{L^\infty_{\mathfrak{M}}} \leq \frac{1}{n}\ \frac{l\left(\Gamma\right)}{\mathrm{d}\left(\mathrm{O},(\Gamma)\right)}\ \sup_{w\in(\Gamma)}|f(w)|\sum_{k=S_1}^{k=S_2}\left(\frac{n\|F\|_{L^\infty_{\mathfrak{M}}}}{\mathrm{d}\left(\mathrm{O},(\Gamma)\right)}\right)^k.$$

On en déduit que la série $\sum_{k\in\mathbb{N}}\left(\int_\Gamma \frac{f(w)}{w^{k+1}}\mathrm{d}w\right)T_N\left(F^k\right)$ converge normalement dans $L^\infty_{\mathfrak{M}}$. Or le premier membre de (4.13) s'écrit aussi

$$T_N\left(\frac{1}{2\mathring{\imath}\pi}\sum_{k=S_1}^{k=S_2}\left(\int_\Gamma \frac{f(w)}{w^{k+1}}\mathrm{d}w\right)F^k\right)=T_N\left(\frac{1}{2\mathring{\imath}\pi}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w}\left(\sum_{k=S_1}^{k=S_2}\frac{1}{w^k}F^k\right)\mathrm{d}w\right),$$

et, compte-tenu de (4.11) et de (4.12), il converge normalement dans $L^\infty_{\mathfrak{M}}$ vers $T_N\left(\tilde{f}(F)\right)$, ce qui entraîne

$$\frac{1}{2\mathring{\imath}\pi}\sum_{k\in\mathbb{N}}\left(\int_\Gamma \frac{f(w)}{w^{k+1}}\mathrm{d}w\right)T_N\left(F^k\right)=T_N\left(\tilde{f}(F)\right).$$

Par ailleurs, comme la série $\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{1}{w^{k+1}}\ F^k$ converge normalement dans $L^\infty_{\mathfrak{M}}$, et comme T_N est contractante, la série $\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{1}{w^{k+1}}\ T_N(F^k)$ converge aussi normalement dans $L^\infty_{\mathfrak{M}}$, et on en déduit que

$$\begin{aligned}T_N\left(\tilde{f}(F)\right)&=\frac{1}{2\mathring{\imath}\pi}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w}\left(\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{1}{w^k}T_N\left(F^k\right)\right)\mathrm{d}w\\&=\frac{1}{2\mathring{\imath}\pi}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w}\ T_N\left(\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{1}{w^k}\ F^k\right)\mathrm{d}w\\&=\frac{1}{2\mathring{\imath}\pi}\int_\Gamma f(w)T_N\left((w\mathrm{Id}-F)^{-1}\right)\mathrm{d}w.\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}&\tilde{f}\left(T_N(F)\right)-T_N\left(\tilde{f}(F)\right)\\&\qquad=\frac{1}{2\mathring{\imath}\pi}\int_\Gamma f(w)\left(\left(T_N(w\mathrm{Id}-F)\right)^{-1}-T_N\left((w\mathrm{Id}-F)^{-1}\right)\right)\mathrm{d}w,\end{aligned}$$

et en posant $g_N(w)=\mathrm{tr}\ \left(\left(T_N(w\mathrm{Id}-F)\right)^{-1}-T_N\left((w\mathrm{Id}-F)^{-1}\right)\right)$, on obtient par linéarité,

$$\mathrm{tr}\ \left(\tilde{f}\left(T_N(F)\right)-T_N\left(\tilde{f}(F)\right)\right)=\frac{1}{2\mathring{\imath}\pi}\int_\Gamma f(w)g_N(w)\mathrm{d}w.$$

D'après le théorème 2.8, $\forall w \in \Omega\backslash\mathscr{D}$,

$$\lim_{N\to+\infty} g_N(w) = \left\langle \log(w\mathrm{Id}-F), (w\mathrm{Id}-F)^{-1} \right\rangle_{\mathscr{B}^{2,1/2}_{\mathfrak{M}}}.$$

Par ailleurs, en vertu du lemme 4.13, on a, $\forall N > N_0$, $\forall w \in (\Gamma)$,

$$|g_N(w)| \leq \frac{7}{3} \left| \left\langle \log(w\mathrm{Id}-F), (w\mathrm{Id}-F)^{-1} \right\rangle_{\mathscr{B}^{2,1/2}_{\mathfrak{M}}} \right|.$$

Or $w\mathrm{Id}-F = w\left(\mathrm{Id}-\frac{1}{w}F\right)$ et $\log\left(\mathrm{Id}-\frac{1}{w}F\right)$ et $\left(\mathrm{Id}-\frac{1}{w}F\right)^{-1}$ peuvent être définies, $\forall w \in \Omega\backslash\mathscr{D}$, par

$$\log\left(\mathrm{Id}-\frac{1}{w}F\right) = -\sum_{p\in\mathbb{N}} \frac{1}{(p+1)w^{p+1}} F^{p+1},$$

$$(\mathrm{Id}-\frac{1}{w}F)^{-1} = \sum_{p\in\mathbb{N}} \frac{1}{w^p} F^p.$$

Comme ces séries sont normalement convergentes dans $L^\infty_{\mathfrak{M}}$, $\forall w \in \Omega\backslash\mathscr{D}$, les fonctions

$$\begin{aligned} \Omega\backslash\mathscr{D} &\longrightarrow L^\infty_{\mathfrak{M}} \\ w &\longmapsto \log(w\mathrm{Id}-F) \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} \Omega\backslash\mathscr{D} &\longrightarrow L^\infty_{\mathfrak{M}} \\ w &\longmapsto (w\mathrm{Id}-F)^{-1} \end{aligned}$$

sont continues, donc la fonction

$$\begin{aligned} \Omega\backslash\mathscr{D} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ w &\longmapsto \langle \log(w\mathrm{Id}-F), (w\mathrm{Id}-F)^{-1} \rangle_{\mathscr{B}^{2,1/2}_{\mathfrak{M}}} \end{aligned}$$

aussi, et par suite, elle est intégrable. Par le théorème de convergence dominée, il vient alors

$$\begin{aligned} &\lim_{N\to+\infty} \mathrm{tr}\ \left(\tilde{f}\left(T_N(F)\right) - T_N\left(\tilde{f}(F)\right)\right) \\ &\qquad = \frac{1}{2\mathring{\imath}\pi} \int_\Gamma f(w) \left\langle \log(w\mathrm{Id}-F), (w\mathrm{Id}-F)^{-1} \right\rangle_{\mathscr{B}^{2,1/2}_{\mathfrak{M}}} \mathrm{d}w. \end{aligned}$$

□

5 Annexes

Dans ces annexes, nous esquissons un résumé de la théorie des opérateurs de Toeplitz à symbole scalaire, et nous donnons dans le cas matriciel la solution du problème de la prédiction relatif à un passé fini, nous calculons le polynôme de prédiction et en donnons une estimation au moyen d'une majoration en norme.

Annexe A. **Opérateur de Toeplitz scalaire (dimension 1)**

Dans cette annexe, nous calculons le polynôme de prédiction relatif à un passé fini et en donnons une estimation asymptotique, puis nous énonçons la formule d'inversion de l'opérateur de Toeplitz scalaire. Les fonctions utilisées dans la suite sont dans l'espace $L^2(\mathbb{T})$ des fonctions de carré intégrable sur le tore $\mathbb{T}$ ou dans l'espace $L^\infty(\mathbb{T})$ des fonctions essentiellement bornées sur $\mathbb{T}$.

A.1. **Le polynôme de prédiction pour un passé fini**

On prend comme symbole une fonction $f \geq 0$, telle que $f \in L^1$ et $\log(f) \in L^1$. Selon la définition du paragraphe 2.1, le polynôme de prédiction pour un passé fini, en dimension 1, est défini comme la différence entre 1 et sa projection orthogonale sur $\chi\mathscr{P}_{N-1}$ dans L^2_f. Aussi avons-nous besoin de connaître la projection orthogonale $\pi_N^{(f)} : L^2_f \longrightarrow \mathscr{P}_{N-1}$, pour le produit scalaire $\langle\, . \,,\, . \,\rangle_{L^2_f}$.

A.1.1. **Etude du projecteur $\pi_N^{(f)}$**

Les deux propositions suivantes, dont nous esquissons ici une démonstration rapide, peuvent être consultées dans [27]. On décompose f selon le théorème de Szegö en $f = g\bar{g} = |g|^2$ avec g et g^{-1} dans H^∞ et on définit l'opérateur de Hankel par

$$\begin{aligned} H_{\Phi_N} :\ H^{2+} &\longrightarrow H^{2-} \\ \xi &\longmapsto \pi_-(\xi\Phi_N)\ , \end{aligned}$$

avec $\Phi_N = \chi^N \dfrac{g}{\bar{g}}$ et $\pi_- = \mathrm{Id} - \pi_+ : L^2 \longrightarrow H^{2-}$, projection orthogonale de L^2 sur H^{2-}. Id est l'identité de L^2 et π_+ la projection orthogonale de L^2 sur H^{2+}. On a

$$\mathscr{P}_{N-1} = H^{2+}_f \cap \chi^N H^{2-}_f = \frac{1}{g} H^{2+} \cap \chi^N \frac{1}{\bar{g}} H^{2-} = \frac{1}{g}\left(H^{2+} \cap \Phi_N H^{2-}\right).$$

En introduisant la projection $\pi_N^{(2)} : L^2 \longrightarrow g\mathscr{P}_{N-1}$, il vient immédiatement

$$\pi_N^{(2)}(g\psi) = g\pi_N^{(f)}(\psi)\ ,\ \forall\psi \in L^2_f.$$

Par ailleurs, $(g\mathscr{P}_{N-1})^\perp = \overline{\Phi_N H^{2+} + H^{2-}}^{L^2}$. Comme $\Phi_N H^{2+} + H^{2-}$ est fermé dans L^2, si

$$\pi_N^{(2)\perp} = \mathrm{Id} - \pi_N^{(2)},$$

on a $\pi_N^{(2)\perp} : L^2 \longrightarrow \Phi_N H^{2+} + H^{2-}$ et

$$\Phi_N H^{2+} + H^{2-} = H^{2-} \overset{\perp}{\oplus} \Phi_N L_N,$$

L_N étant le supplémentaire orthogonal de $H^{2+} \cap \Phi_N H^{2-}$ dans H^{2+}. On a également, si $H^*_{\Phi_N}$ est le deuxième opérateur de Hankel défini au paragraphe 2.1,

$$L_N = \overline{\pi_+\left(\overline{\Phi_N} H^{2+}\right)}^{L^2} = \left(\ker\left(\mathrm{Id} - H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N}\right)\right)^\perp,$$

ce qui signifie que $\ker\left(\mathrm{Id} - H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N}\right) = H^{2+} \cap \Phi_N H^{2-}$ et

$$L_N = \overline{\mathrm{im}\left(\mathrm{Id} - H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N}\right)}^{L^2},$$

puisque $\mathrm{Id} - H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N}$ est auto-adjoint.

Proposition A.1. *$\forall\psi \in L^2_f$,*

$$\begin{aligned}\pi_N^{(f)}(\psi) &= \frac{1}{g}\pi_N^{(2)}(g\psi)\\ &= \frac{1}{g}\pi_+(g\psi) - \frac{1}{g}\pi_+\left(\Phi_N\left(\mathrm{Id} - H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N}\right)^{-1}\left(\pi_+\left(\overline{\Phi_N}\pi_+(g\psi)\right)\right)\right).\end{aligned}$$

Proposition A.2. *Soit P un polynôme trigonométrique de degré inférieur ou égal à N tel que $|P| > 0$ et $g = \dfrac{1}{P} \in H^\infty$. Alors*

$$\begin{aligned}\pi_N^{(f)}(\psi) &= P\pi_+\left(\frac{\psi}{P}\right) - P\pi_+\left(\Phi_N\pi_+\left(\overline{\Phi_N}\pi_+\left(\frac{\psi}{P}\right)\right)\right)\\ &= P\pi_+\left(\frac{\psi}{P}\right) - \overline{P}\chi^N\pi_+\left(\frac{\overline{\chi}^N}{\overline{P}}\psi\right).\end{aligned}$$

A.1.2. **Calcul du polynôme de prédiction pour un passé fini**

Dans cette section, nous donnons une majoration en norme L_f^2 du polynôme de prédiction défini au paragraphe 2.1, dans le cas scalaire.

Proposition A.3. *Le polynôme de prédiction en dimension* 1 *pour un passé fini s'écrit*

$$R_N = 1 - \chi \pi_N^{(f)}(\overline{\chi}).$$

Démonstration. Par définition de R_N, $\exists\ \xi \in \mathscr{P}_{N-1}$ tel que $R_N = 1 - \chi \pi_N^{(f)}(\xi)$, et $\int_{\mathbb{T}} \left|1 - \chi \pi_N^{(f)}(\xi)\right|^2 f \,\mathrm{d}\sigma$ soit minimale. Or

$$\int_{\mathbb{T}} \left|1 - \chi \pi_N^{(f)}(\xi)\right|^2 f \,\mathrm{d}\sigma = \int_{\mathbb{T}} \left|\overline{\chi} - \pi_N^{(f)}(\xi)\right|^2 g.\overline{g} \,\mathrm{d}\sigma = \int_{\mathbb{T}} \left|g\overline{\chi} - g\pi_N^{(f)}(\xi)\right|^2 \,\mathrm{d}\sigma.$$

On en déduit

$$\pi_N^{(2)}(g\overline{\chi}) = g\pi_N^{(f)}(\xi) = g\pi_N^{(f)}(\overline{\chi}),$$

et donc $\pi_N^{(f)}(\xi) = \pi_N^{(f)}(\overline{\chi})$. □

On définit alors dans L_φ^2 l'angle des deux sous-espaces $\chi^k H_\varphi^{2+}$ $(k \in \mathbb{Z})$ et H_φ^{2-} par

$$\rho_k(\varphi) = \sup \left\{ \left| \int_{\mathbb{T}} \chi^k \psi_1 \overline{\psi_2} \varphi \,\mathrm{d}\sigma \right| : \psi_1 \in H_\varphi^{2+}; \psi_2 \in H_\varphi^{2-}; \|\psi_1\|_{L_\varphi^2} = \|\psi_2\|_{L_\varphi^2} = 1 \right\}.$$

Or

$$\|H_{\Phi_N}\|_{L^2} = \sup \left\{ |\langle \pi_-(\xi \Phi_N), \theta \rangle_{L^2}| : \xi \in H^{2+}; \theta \in H^{2-}; \|\xi\|_{L^2} = \|\theta\|_{L^2} = 1 \right\},$$

$$\|H_{\Phi_N}\|_{L^2} = \sup \left\{ \left| \int_{\mathbb{T}} \Phi_N \xi \overline{\theta} \,\mathrm{d}\sigma \right| : \xi \in H^{2+}; \theta \in H^{2-}; \|\xi\|_{L^2} = \|\theta\|_{L^2} = 1 \right\},$$

$$\|H_{\Phi_N}\|_{L^2} = \sup\left\{ \left| \int_{\mathbb{T}} \chi^N g\xi \, \overline{\overline{g}\theta} \, \frac{1}{f} \, \mathrm{d}\sigma \right| : g\xi \in H^{2+}_{1/f}; \overline{g}\theta \in H^{2-}_{1/f}; \right.$$
$$\left. \|g\xi\|_{L^2_{1/f}} = \|\overline{g}\theta\|_{L^2_{1/f}} = 1 \right\},$$

avec $f = g\overline{g}$. On en déduit que $\|H_{\Phi_N}\|_{L^2} = \rho_N\left(\frac{1}{f}\right) < 1$.

Proposition A.4. *Le polynôme de prédiction pour un passé fini, dans le cas scalaire, vérifie l'inégalité*

$$0 \leq \|R_N\|^2_{L^2_f} - |\hat{g}(0)|^2 \leq \frac{\rho_N^2\left(\frac{1}{f}\right)}{\left(1-\rho_N^2\left(\frac{1}{f}\right)\right)^2} |\hat{g}(0)|^2,$$

où $\rho_N\left(\frac{1}{f}\right)$ est la norme-opérateur de H_{Φ_N} dans L^2 et $\widehat{g}(0)$ le coefficient de Fourier d'ordre 0 *de g.*

Comme on peut montrer que $\lim_{N\to+\infty} \rho_N\left(\frac{1}{f}\right) = 0$ (voir [27]*), on obtient*

$$\lim_{N\to+\infty} \|R_N\|_{L^2_f} = |\hat{g}(0)|.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} R_N &= 1-\chi\left(\frac{1}{g}\pi_+(g\overline{\chi}) - \frac{1}{g}\pi_+\left(\Phi_N\left(\mathrm{Id} - H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N}\right)^{-1}\left(\pi_+\left(\overline{\Phi_N}\pi_+(g\overline{\chi})\right)\right)\right)\right) \\ &= 1 - \frac{\chi}{g}\pi_+(g\overline{\chi}) + \frac{\chi}{g}\pi_+\left(\Phi_N\left(\mathrm{Id} - H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N}\right)^{-1}\left(\pi_+\left(\overline{\Phi_N}\pi_+(g\overline{\chi})\right)\right)\right). \end{aligned}$$

Or $\pi_+(g\overline{\chi}) + \pi_-(g\overline{\chi}) = g\overline{\chi}$, donc $1 - \frac{\chi}{g}\pi_+(g\overline{\chi}) = \frac{\chi}{g}\pi_-(g\overline{\chi})$. Alors

$$R_N = \frac{\chi}{g}\pi_-(g\overline{\chi}) + \frac{\chi}{g}\pi_+\left(\Phi_N\left(\mathrm{Id} - H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N}\right)^{-1}\left(\pi_+\left(\overline{\Phi_N}\pi_+(g\overline{\chi})\right)\right)\right).$$

On pose $\mathcal{O}\left(\Phi_N, g\right) = \pi_+\left(\Phi_N\left(\mathrm{Id} - H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N}\right)^{-1}\left(\pi_+\left(\overline{\Phi_N}\pi_+(g\overline{\chi})\right)\right)\right)$. On obtient alors

$$R_N = \frac{\chi}{g}\left(\pi_-(g\overline{\chi}) + \mathcal{O}\left(\Phi_N, g\right)\right)$$

et

$$\begin{aligned}\|R_N\|^2_{L^2_f} &= |\hat{g}(0)|^2 + \|\mathcal{O}(\Phi_N, g)\|^2_{L^2}\\ &= \exp\left(\int_{\mathbb{T}} \log(f)\ \mathrm{d}\sigma\right) + \|\mathcal{O}(\Phi_N, g)\|^2_{L^2}\end{aligned}$$

d'après la théorie de Grënander et Szegö. On peut également estimer

$$\|\mathcal{O}(\Phi_N, g)\|^2_{L^2}.$$

Posant alors $\omega_N = \pi_+\left(\overline{\Phi_N}\pi_+(g\overline{\chi})\right)$, on peut écrire

$$\|\mathcal{O}(\Phi_N, g)\|_{L^2} \leq \left\|\left(\mathrm{Id} - H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N}\right)^{-1}\right\|_{L^2} \|\omega_N\|_{L^2},$$

avec $\left\|H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N}\right\|_{L^2} = \|H_{\Phi_N}\|^2_{L^2} = \rho_N^2\left(\frac{1}{f}\right) < 1$, et donc

$$\begin{aligned}\left\|\left(\mathrm{Id} - H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N}\right)^{-1}\right\|_{L^2} &\leq 1 + \sum_{r\geq 1}\left(\rho_N^2\left(\frac{1}{f}\right)\right)^r\\ &\leq \frac{1}{1-\rho_N^2\left(\frac{1}{f}\right)}.\end{aligned}$$

Finalement,

$$\|\mathcal{O}(\Phi_N, g)\|_{L^2} \leq \frac{\|\omega_N\|_{L^2}}{1-\rho_N^2\left(\frac{1}{f}\right)}.$$

$\omega_N = \pi_+(\overline{\Phi_N}\pi_+(g\overline{\chi})) = \pi_+(\overline{\Phi_N}g\overline{\chi}) - \pi_+(\overline{\Phi_N}\pi_-(g\overline{\chi}))$.
Or, $\overline{\Phi_N}g\overline{\chi} = \overline{g}\ \overline{\chi}^{N+1} \in H^{2-}$ et donc $\pi_+(\overline{\Phi_N}g\overline{\chi}) = 0$. Alors

$$\omega_N = -\pi_+(\overline{\Phi_N}\pi_-(g\overline{\chi})) = -H^*_{\Phi_N}(\pi_-(g\overline{\chi}))$$

et

$$\|\omega_N\|_{L^2} \leq \left\|H^*_{\Phi_N}\right\|_{L^2} \|\pi_-(g\overline{\chi})\|_{L^2},$$

d'où

$$\|\omega_N\|_{L^2} \leq \rho_N\left(\frac{1}{f}\right)|\hat{g}(0)|.$$

On en déduit

$$\|\mathcal{O}(\Phi_N, g)\|_{L^2} \leq \frac{\rho_N\left(\frac{1}{f}\right)}{1-\rho_N^2\left(\frac{1}{f}\right)}|\hat{g}(0)|,$$

et

$$0 \leq \|R_N\|^2_{L^2_f} - |\hat{g}(0)|^2 \leq \frac{\rho_N^2\left(\frac{1}{f}\right)}{\left(1-\rho_N^2\left(\frac{1}{f}\right)\right)^2} |\hat{g}(0)|^2 .$$

□

A.2. **Inverse d'un opérateur de Toeplitz pour un symbole intégrable, strictement positif et régulier**

Soient $f \in L^1$, $f > 0$, et K une partie finie de $L^2_{1/f}$ définie par $K = f\mathscr{P}_N$. Par l'inégalité de Schwarz, $L^2_{1/f} \subset L^1$. On peut également écrire $L^2_{1/f} = K \overset{\perp}{\oplus} K^\perp$. Soients $\pi_N^{(1)} : L^2 \longrightarrow \mathscr{P}_N$ et $\pi_K : L^2_{1/f} \longrightarrow K$ les projections orthogonales.

Proposition A.5. $K^{\perp L^2_{1/f}} \subset \mathscr{P}_N^{\perp L^2}$.

Lemme A.6. $\forall q \in \mathscr{P}_N, T_N(f)^{-1}(q) = \frac{1}{f}\pi_K(q)$.

Démonstration. On décompose q en $q = fp + (q - fp)$ avec $fp \in K$, $p \in \mathscr{P}_N$ et $q - fp \in K^{\perp L^2_{1/f}}$. D'après la proposition précédente,

$$q - fp \in K^{\perp L^2_{1/f}} \Longrightarrow \pi_N^{(1)}(q - fp) = 0.$$

On a

$$q = \pi_N^{(1)}(q) = \pi_N^{(1)}(fp) + \pi_N^{(1)}(q - fp) = \pi_N^{(1)}(fp) = T_N(f)(p)$$

et donc $T_N(f)$ est surjectif donc bijectif. Alors

$$p = T_N(f)^{-1}(q) = \frac{1}{f}(fp) = \frac{1}{f}\pi_K(q).$$

□

Lemme A.7.

$$K = \frac{f}{g}\left(H^{2+} \cap \Phi_{N+1}H^{2-}\right) = \overline{g}\left(H^{2+} \cap \Phi_{N+1}H^{2-}\right) = \overline{g}K_0,$$

avec $K_0 = H^{2+} \cap \Phi_{N+1}H^{2-}$.

On note $\pi_{K_0} : L^2 \longrightarrow K_0$ la projection orthogonale sur K_0.

Lemme A.8. $\forall q \in \mathscr{P}_N, \pi_K(q) = \overline{g}\pi_{K_0}\left(\frac{q}{\overline{g}}\right)$.

Démonstration. Comme $\pi_K(q)$ est orthogonal à $q - \pi_K(q)$ dans $L^2_{1/f}$, le produit scalaire
$\langle \pi_K(q), q - \pi_K(q)\rangle_{L^2_{1/f}} = 0$. Mais

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}} \pi_K(q)\, \overline{(q - \pi_K(q))}\, \frac{1}{f}\ \mathrm{d}\sigma &= \int_{\mathbb{T}} \frac{\pi_K(q)}{\overline{g}}\ \overline{\left(\frac{q}{\overline{g}} - \frac{\pi_K(q))}{\overline{g}}\right)}\ \mathrm{d}\sigma \\ &= \left\langle \frac{\pi_K(q)}{\overline{g}}, \frac{q}{\overline{g}} - \frac{\pi_K(q)}{\overline{g}} \right\rangle_{L^2} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Par unicité de la projection orthogonale, on a $\dfrac{\pi_K(q)}{\overline{g}} = \pi_{K_0}\left(\dfrac{q}{\overline{g}}\right)$, puisque

$$\left\langle \pi_{K_0}\left(\frac{q}{\overline{g}}\right), \frac{q}{\overline{g}} - \pi_{K_0}\left(\frac{q}{\overline{g}}\right) \right\rangle_{L^2} = 0.$$

□

On a donc $T_N(f)^{-1}(q) = \dfrac{1}{g}\pi_{K_0}\left(\dfrac{q}{\overline{g}}\right)$, et on en déduit le théorème d'inversion suivant :

Théorème A.9. *$\forall f = g\overline{g}$, avec $g \in H^\infty$ et $\dfrac{1}{g} \in H^\infty$, on a les deux assertions :*
(i) $\exists \alpha : \alpha \in]0,1[\,; \forall N \in \mathbb{N}, \left\|H_{\Phi_{N+1}}\right\|_{L^2} \leq \alpha,$
(ii) $T_N(f)$ *est inversible et* $\forall q \in \mathscr{P}_N$,

$$\begin{aligned} T_N(f)^{-1}(q) &= \frac{1}{g}\ \pi_+\left(\frac{q}{\overline{g}}\right) \\ &\quad - \frac{1}{g}\ \pi_+\left(\Phi_{N+1}\left(\mathrm{Id} - H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N}\right)^{-1} \pi_+\left(\overline{\Phi_{N+1}}\ \pi_+\left(\frac{q}{\overline{g}}\right)\right)\right).\end{aligned}$$

Tous les théorèmes et propositions de la partie A.1 seront démontrés dans l'annexe B, dans le cas matriciel(dimension supérieure à 1), et ceux de la partie A.2 sont établis dans la partie 3, également dans le cas matriciel.

Annexe B. Théorie de la prédiction dans le cas matriciel

Dans la suite, nous supposerons que F est une fonction à valeurs matricielles qui possède une décomposition en $F = GG^*$ vérifiant les hypothèses du théorème de Helson et Lowdenslager [14] et que, de plus, c'est une matrice hermitienne définie positive partout sur $\mathbb{T}$, telle que $F \in L^1_{\mathfrak{M}}$ et $\log(F) \in L^1_{\mathfrak{M}}$. Nous imposons également que G est une matrice normale partout sur $\mathbb{T}$, et que G et G^{-1} sont dans $H^\infty_{\mathfrak{M}}$. On peut alors écrire, à partir de la définition de $H^{2+}_{\mathfrak{M},F}$,

$$\chi^N H^{2-}_{\mathfrak{M},F} = \overline{\mathrm{Lin}_{\mathfrak{M}}\left\{\chi^p \mathrm{Id} : p \in \mathbb{Z}; p \leq N-1\right\}}^{L^2_{\mathfrak{M},F}}$$

et alors

$$\mathscr{P}_{N-1} = H^{2+}_{\mathfrak{M},F} \cap \chi^N H^{2-}_{\mathfrak{M},F}. \tag{B.1}$$

La solution du problème de la prédiction est la projection de n'importe quelle matrice de l'espace de Hilbert avec poids $L^2_{\mathfrak{M},F}$ sur l'espace $\chi\mathscr{P}_{N-1}$, sous-espace convexe de $L^2_{\mathfrak{M},F}$. Son calcul passe par les étapes suivantes :

– expression de $\mathscr{P}_{N-1}$ et de son orthogonal dans $L^2_{\mathfrak{M}}$ en fonction des espaces de Hardy :
$$\mathscr{P}_{N-1} = \left(H^{2+}_{\mathfrak{M}} \cap \Phi_N G^{-1} H^{2-}_{\mathfrak{M}} G\right) G^{-1}$$
et
$$\mathscr{P}^\perp_{N-1} = \overline{H^{2-}_{\mathfrak{M}} G^* + \chi^N G H^{2+}_{\mathfrak{M}}}^{L^2_{\mathfrak{M}}},$$
– étude de la projection $\pi^{(2)}_N$ de $L^2_{\mathfrak{M}}$ sur $H^{2+}_{\mathfrak{M}} \cap \Phi_N G^{-1} H^{2-}_{\mathfrak{M}} G$,

– étude de la projection $\Pi^{(F)}_N$ de $L^2_{\mathfrak{M},F}$ sur $\mathscr{P}_{N-1}$ et expression de la solution du problème de la prédiction.

B.1. Lemmes techniques et expression de $\mathscr{P}_{N-1}$ et $\mathscr{P}^\perp_{N-1}$

Proposition B.1. $\mathscr{P}_N \subset H^{2+}_{\mathfrak{M},F} \subset L^2_{\mathfrak{M},F}$.

Démonstration. Ceci tient au fait que tout polynôme $P \in \mathscr{P}_N$ est de type analytique dans $L^2_{\mathfrak{M}}$, et que, si $P = \sum_{k=0}^{k=N} \chi^k A_k \in \mathscr{P}_N$, on a

$$\|\chi^k A_k\|_{L^2_{\mathfrak{M},F}} = \|A_k G\|_{L^2_{\mathfrak{M}}} \leq \|A_k\|_2 \|G\|_{L^2_{\mathfrak{M}}}.$$

On en déduit que P est dans $L^2_{\mathfrak{M},F}$ et donc dans $H^{2+}_{\mathfrak{M},F}$. □

Lemme technique 4.

$$\text{(i)} H^{2+}_{\mathfrak{M},F} = H^{2+}_{\mathfrak{M}} G^{-1} \qquad \text{(ii)} \left(H^{2+}_{\mathfrak{M},F}\right)^{\perp L^2_{\mathfrak{M}}} = H^{2-}_{\mathfrak{M}} G^*$$

$$\text{(iii)} H^{2-}_{\mathfrak{M},F} = G^{-1*} H^{2-}_{\mathfrak{M}} \qquad \text{(iv)} \left(H^{2-}_{\mathfrak{M},F}\right)^{\perp L^2_{\mathfrak{M}}} = G H^{2+}_{\mathfrak{M}}.$$

Démonstration.
(i) $\forall M \in H^{2+}_{\mathfrak{M},F}$, $\exists (P_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{P}_N$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|P_m - M\|_{L^2_{\mathfrak{M},F}} = 0$. Or

$$\|P_m - M\|_{L^2_{\mathfrak{M},F}} = \|(P_m - M)G\|_{L^2_{\mathfrak{M}}}.$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P_m G = MG$ dans $L^2_{\mathfrak{M}}$ et comme $P_m G \in H^{2+}_{\mathfrak{M}}$, $MG \in H^{2+}_{\mathfrak{M}}$ et $M \in H^{2+}_{\mathfrak{M}} G^{-1}$.
Alors $H^{2+}_{\mathfrak{M},F} \subset H^{2+}_{\mathfrak{M}} G^{-1}$.
Réciproquement, $\forall M \in H^{2+}_{\mathfrak{M}} G^{-1}$, $\exists (P_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{P}_N$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|P_m - MG\|_{L^2_{\mathfrak{M}}} = 0$. Or

$$\|P_m - MG\|_{L^2_{\mathfrak{M}}} = \|(P_m G^{-1} - M)\|_{L^2_{\mathfrak{M},F}}.$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P_m G^{-1} = M$ dans $L^2_{\mathfrak{M},F}$. Mais $\forall m \in \mathbb{N}$, $P_m \in H^{2+}_{\mathfrak{M},F}$ et

$$\|G^{-1}\|_{L^2_{\mathfrak{M},F}} = 1 < +\infty,$$

donc $G^{-1} \in H^{2+}_{\mathfrak{M},F}$. Alors $P_m G^{-1} \in H^{2+}_{\mathfrak{M},F}$ et $\|P_m G^{-1}\|_{L^2_{\mathfrak{M},F}} = \|P_m\|_{L^2_{\mathfrak{M}}}$.
On en déduit que $M \in H^{2+}_{\mathfrak{M},F}$ et

$$H^{2+}_{\mathfrak{M}} G^{-1} \subset H^{2+}_{\mathfrak{M},F}.$$

Finalement ,

$$H^{2+}_{\mathfrak{M},F} = H^{2+}_{\mathfrak{M}} G^{-1}.$$

(ii), (iii) et (iv) se déduisent de (i) par calcul direct. □

Il vient alors, sachant que $\Phi_N = \chi^N G^{-1*}G$, et en utilisant (B.1),

$$\begin{aligned}\mathscr{P}_{N-1} &= H^{2+}_{\mathfrak{M},F} \cap \chi^N H^{2-}_{\mathfrak{M},F}\\ &= H^{2+}_{\mathfrak{M}} G^{-1} \cap \chi^N G^{-1*} H^{2-}_{\mathfrak{M}}\\ &= \left(H^{2+}_{\mathfrak{M}} \cap \chi^N G^{-1*} H^{2-}_{\mathfrak{M}} G\right) G^{-1},\end{aligned}$$

et donc

$$\mathscr{P}_{N-1} = \left(H^{2+}_{\mathfrak{M}} \cap \Phi_N G^{-1} H^{2-}_{\mathfrak{M}} G\right) G^{-1}. \tag{B.2}$$

Maintenant, on note :

$$\Pi_N^{(F)} : L^2_{\mathfrak{M},F} \longrightarrow \mathscr{P}_{N-1} \tag{B.3}$$

$$\pi_N^{(2)} : L^2_{\mathfrak{M}} \longrightarrow H^{2+}_{\mathfrak{M}} \cap \Phi_N G^{-1} H^{2-}_{\mathfrak{M}} G = \mathscr{P}_{N-1} G, \tag{B.4}$$

les projections orthogonales respectivement sur $\mathscr{P}_{N-1}$ et $\mathscr{P}_{N-1}G$.
Lemme technique 5.

$$\forall M \in L^2_{\mathfrak{M},F} \ , \ \Pi_N^{(F)}(M) = \pi_N^{(2)}(MG)G^{-1}.$$

Démonstration. $P = \Pi_N^{(F)}(M)$ est le polynôme matriciel tel que

$$\min_{Q \in \mathscr{P}_{N-1}} \|M - Q\|_{L^2_{\mathfrak{M},F}} = \mathrm{d}\left(M, \mathscr{P}_{N-1}\right) = \|M - P\|_{L^2_{\mathfrak{M},F}}.$$

Or, $\|M - Q\|_{L^2_{\mathfrak{M},F}} = \|MG - QG\|_{L^2_{\mathfrak{M}}}$. Donc si $M \in L^2_{\mathfrak{M},F}$, alors $MG \in L^2_{\mathfrak{M}}$ et
$\|M - P\|_{L^2_{\mathfrak{M},F}} = \|MG - PG\|_{L^2_{\mathfrak{M}}}$. Donc $PG = \pi_N^{(2)}(MG) = \Pi_N^{(F)}(M)G$, et

$$\forall M \in L^2_{\mathfrak{M},F} \ , \ \Pi_N^{(F)}(M) = \pi_N^{(2)}(MG)G^{-1}.$$

□

Rappelons les deux résultats classiques suivants des espaces de Hilbert, donnés sans démonstration :

Proposition B.2.
(i) *Soient E un espace de Hilbert et A et B deux sous-espaces vectoriels de E, alors*

$$(A \cap B)^{\perp} = \overline{A^{\perp} + B^{\perp}}^{E}.$$

(ii) *Soit E un espace de Hilbert. Si A et B sont deux sous-espaces vectoriels fermés orthogonaux de E, alors $A + B$ est fermé dans E.*

L' application de (i), permet d'écrire

$$\begin{aligned}\mathscr{P}_{N-1}^{\perp} &= \overline{\left(H^{2+}_{\mathfrak{M},F}\right)^{\perp L^2_{\mathfrak{M}}} + \left(\chi^N H^{2-}_{\mathfrak{M},F}\right)^{\perp L^2_{\mathfrak{M}}}}^{L^2_{\mathfrak{M}}} \\ &= \overline{H^{2-}_{\mathfrak{M}} G^* + \chi^N G H^{2+}_{\mathfrak{M}}}^{L^2_{\mathfrak{M}}},\end{aligned}$$

et

$$\left(H^{2+}_{\mathfrak{M}} \cap \left(\Phi_N G^{-1} H^{2-}_{\mathfrak{M}} G\right)\right)^{\perp L^2_{\mathfrak{M}}} = \overline{\left(H^{2+}_{\mathfrak{M}}\right)^{\perp L^2_{\mathfrak{M}}} + \left(\Phi_N G^{-1} H^{2-}_{\mathfrak{M}} G\right)^{\perp L^2_{\mathfrak{M}}}}^{L^2_{\mathfrak{M}}}.$$

L'application de (i) et (ii) permet d'établir le lemme suivant :
Lemme technique 6.

$$\left(H^{2+}_{\mathfrak{M}} \cap \left(\Phi_N G^{-1} H^{2-}_{\mathfrak{M}} G\right)\right)^{\perp L^2_{\mathfrak{M}}} = \left(H^{2-}_{\mathfrak{M}} + \chi^N H^{2+}_{\mathfrak{M}}\right) G^{-1*}.$$

Démonstration. $\forall A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, $\forall B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
De plus, $\left(H^{2+}_{\mathfrak{M}}\right)^{\perp L^2_{\mathfrak{M}}} = H^{2-}_{\mathfrak{M}}$.
Montrons que $\left(\Phi_N G^{-1} H^{2-}_{\mathfrak{M}} G\right)^{\perp L^2_{\mathfrak{M}}} = \chi^N G H^{2+}_{\mathfrak{M}} G^{-1*}$:
$\forall M \in H^{2+}_{\mathfrak{M}}$, $\forall M' \in H^{2-}_{\mathfrak{M}}$,

$$\Phi_N G^{-1} M' G = \chi^N G^{-1*} M' G \in \Phi_N G^{-1} H^{2-}_{\mathfrak{M}} G,$$

et

$$\chi^N G M G^{-1*} \in \chi^N G H^{2+}_{\mathfrak{M}} G^{-1*}.$$

$$\begin{aligned}\langle \chi^N G M G^{-1*}, \chi^N G^{-1*} M' G \rangle_{L^2_{\mathfrak{M}}} &= \langle G M G^{-1*}, G^{-1*} M' G \rangle_{L^2_{\mathfrak{M}}} \\ &= \frac{1}{n} \int_{\mathbb{T}} \mathrm{tr}\ \left(G M G^{-1*} \left(G^{-1*} M' G\right)^*\right)\ \mathrm{d}\sigma \\ &= \frac{1}{n} \int_{\mathbb{T}} \mathrm{tr}\ \left(G M G^{-1*} G^* M'^* G^{-1}\right)\ \mathrm{d}\sigma \\ &= \frac{1}{n} \int_{\mathbb{T}} \mathrm{tr}\ \left(G M M'^* G^{-1}\right)\ \mathrm{d}\sigma \\ &= \frac{1}{n} \int_{\mathbb{T}} \mathrm{tr}\ \left(M M'^*\right)\ \mathrm{d}\sigma \\ &= \langle M, M' \rangle_{L^2_{\mathfrak{M}}} = 0.\end{aligned}$$

On a donc $\left(\Phi_N G^{-1} H^{2-}_{\mathfrak{M}} G\right)^{\perp L^2_{\mathfrak{M}}} = \chi^N G H^{2+}_{\mathfrak{M}} G^{-1*}$ et

$$\left(H^{2+}_{\mathfrak{M}} \cap \left(\Phi_N G^{-1} H^{2-}_{\mathfrak{M}} G\right)\right)^{\perp L^2_{\mathfrak{M}}} = \overline{H^{2-}_{\mathfrak{M}} + \chi^N G H^{2+}_{\mathfrak{M}} G^{-1*}}^{L^2_{\mathfrak{M}}},$$

$$\left(H^{2+}_{\mathfrak{M}} \cap \left(\Phi_N G^{-1} H^{2-}_{\mathfrak{M}} G\right)\right)^{\perp L^2_{\mathfrak{M}}} = \overline{\left(H^{2-}_{\mathfrak{M}} G^* + \chi^N G H^{2+}_{\mathfrak{M}}\right) G^{-1*}}^{L^2_{\mathfrak{M}}}.$$

Comme $G \in H^{2+}_{\mathfrak{M}}$ et $G^* \in H^{2-}_{\mathfrak{M}}$, on a

$$G H^{2+}_{\mathfrak{M}} = H^{2+}_{\mathfrak{M}} = H^{2+}_{\mathfrak{M}} G,$$

et

$$H^{2-}_{\mathfrak{M}} G^* = H^{2-}_{\mathfrak{M}} = G^* H^{2-}_{\mathfrak{M}}.$$

Donc

$$\left(H^{2+}_{\mathfrak{M}} \cap \left(\Phi_N G^{-1} H^{2-}_{\mathfrak{M}} G\right)\right)^{\perp L^2_{\mathfrak{M}}} = \overline{\left(H^{2-}_{\mathfrak{M}} + \chi^N H^{2+}_{\mathfrak{M}}\right) G^{-1*}}^{L^2_{\mathfrak{M}}}.$$

Or $H^{2-}_{\mathfrak{M}}$ et $\chi^N H^{2+}_{\mathfrak{M}}$ sont non vides, fermés et orthogonaux, et d'après la proposition B.2 (ii),
$H^{2-}_{\mathfrak{M}} + \chi^N H^{2+}_{\mathfrak{M}}$ est fermé dans $L^2_{\mathfrak{M}}$. Comme G^{-1*} est inversible, le produit à droite par G^{-1*} est une application bijective et bicontinue sur $L^2_{\mathfrak{M}}$ et donc $\left(H^{2-}_{\mathfrak{M}} + \chi^N H^{2+}_{\mathfrak{M}}\right) G^{-1*}$ est aussi fermé dans $L^2_{\mathfrak{M}}$. Finalement,

$$\left(H^{2+}_{\mathfrak{M}} \cap \left(\Phi_N G^{-1} H^{2-}_{\mathfrak{M}} G\right)\right)^{\perp L^2_{\mathfrak{M}}} = \left(H^{2-}_{\mathfrak{M}} + \chi^N H^{2+}_{\mathfrak{M}}\right) G^{-1*}.$$

□

B.2. **Étude de la projection** $\pi_N^{(2)}$

Le lemme technique 6 précédent permet de définir la projection :

$$\pi_N^{(2)\perp} = Id - \pi_N^{(2)} : L^2_{\mathfrak{M}} \longrightarrow \left(H^{2-}_{\mathfrak{M}} + \chi^N H^{2+}_{\mathfrak{M}}\right) G^{-1*} = \left(\mathscr{P}_{N-1} G\right)^{\perp L^2_{\mathfrak{M}}}.$$

Comme $\Phi_N = \chi^N G G^{-1*}$, on a

$$\left(H^{2-}_{\mathfrak{M}} + \chi^N H^{2+}_{\mathfrak{M}}\right) G^{-1*} = H^{2-}_{\mathfrak{M}} + H^{2+}_{\mathfrak{M}} \Phi_N.$$

Or, pour deux sous-espaces vectoriels A et B d'un espace de Hilbert, la somme $A + B$ s'écrit

$$A + B = A \overset{\perp}{\oplus} (A \cap B)^{\perp B},$$

où $(A\cap B)^{\perp B}$ est l'orthogonal de $A\cap B$ dans B. Donc

$$H^{2-}_{\mathfrak{M}} + H^{2+}_{\mathfrak{M}}\Phi_N = H^{2-}_{\mathfrak{M}} \overset{\perp}{\oplus} \left(H^{2-}_{\mathfrak{M}} \cap H^{2+}_{\mathfrak{M}}\Phi_N\right)^{\perp H^{2+}_{\mathfrak{M}}\Phi_N}.$$

D'autre part, $\Phi_N^*\Phi_N = \overline{\chi}^N G^* G^{-1}\chi^N G G^{-1*} = \mathrm{Id} = \Phi_N\Phi_N^*$ et donc

$$H^{2-}_{\mathfrak{M}} + H^{2+}_{\mathfrak{M}}\Phi_N = H^{2-}_{\mathfrak{M}} \overset{\perp}{\oplus} \left(\left(H^{2-}_{\mathfrak{M}}\Phi_N^* \cap H^{2+}_{\mathfrak{M}}\right)^{\perp H^{2+}_{\mathfrak{M}}}\right)\Phi_N.$$

On pose alors $L_N = \left(H^{2-}_{\mathfrak{M}}\Phi_N^* \cap H^{2+}_{\mathfrak{M}}\right)^{\perp H^{2+}_{\mathfrak{M}}}$, et ainsi

$$H^{2-}_{\mathfrak{M}} + H^{2+}_{\mathfrak{M}}\Phi_N = H^{2-}_{\mathfrak{M}} \overset{\perp}{\oplus} L_N\Phi_N.$$

Etudions maintenant cet ensemble L_N , qui a les propriétés suivantes :

Proposition B.3.

(i) $L_N = \overline{\pi_+\left(H^{2+}_{\mathfrak{M}}\Phi_N^*\right)}^{L^2_{\mathfrak{M}}}$.

(ii) $H^{2+}_{\mathfrak{M}} \cap H^{2-}_{\mathfrak{M}}\Phi_N^* = \ker\left(\mathrm{Id} - H^*_{\Phi_N}H_{\Phi_N}\right)$

$$\iff L_N = \left(\ker\left(\mathrm{Id} - H^*_{\Phi_N}H_{\Phi_N}\right)\right)^{\perp H^{2+}_{\mathfrak{M}}}.$$

Démonstration. (i)$\forall M \in \pi_+\left(H^{2+}_{\mathfrak{M}}\Phi_N^*\right)$, $\exists M' \in H^{2+}_{\mathfrak{M}}$ tel que

$$M = \pi_+(M'\Phi_N^*).$$

$\forall M_1 \in H^{2-}_{\mathfrak{M}}\Phi_N^* \cap H^{2+}_{\mathfrak{M}}$, $\exists M_1' \in H^{2-}_{\mathfrak{M}}$ tel que $M_1 = M_1'\Phi_N^*$. Or

$$\begin{aligned}\langle M, M_1\rangle_{L^2_{\mathfrak{M}}} &= \langle \pi_+(M'\Phi_N^*), M_1'\Phi_N^*\rangle_{L^2_{\mathfrak{M}}} \\ &= \langle M'\Phi_N^*, M_1'\Phi_N^*\rangle_{L^2_{\mathfrak{M}}} \\ &= \langle M', M_1'\rangle_{L^2_{\mathfrak{M}}} = 0.\end{aligned}$$

Donc $\pi_+\left(H^{2+}_{\mathfrak{M}}\Phi_N^*\right) \subset L_N$, qui est fermé, ce qui entraîne

$$L_N = \overline{\pi_+\left(H^{2+}_{\mathfrak{M}}\Phi_N^*\right)}^{L^2_{\mathfrak{M}}}$$

(ii)$\forall M \in H^{2-}_{\mathfrak{M}}\Phi_N^* \cap H^{2+}_{\mathfrak{M}}$, $\exists M' \in H^{2-}_{\mathfrak{M}}$ tel que $M = M'\Phi_N^*$.
$H_{\Phi_N}(M) = \pi_-(M\Phi_N) = \pi_-(M'\Phi_N^*\Phi_N) = \pi_-(M') = M'$.
$H^*_{\Phi_N}H_{\Phi_N}(M) = H^*_{\Phi_N}(M') = \pi_+(M'\Phi_N^*) = \pi_+(M) = M$, et donc

$$(\mathrm{Id} - H^*_{\Phi_N}H_{\Phi_N})(M) = 0.$$

Alors $M \in \ker(\mathrm{Id} - H^*_{\Phi_N}H_{\Phi_N})$ et $H^{2-}_{\mathfrak{M}}\Phi_N^* \cap H^{2+}_{\mathfrak{M}} \subset \ker(\mathrm{Id} - H^*_{\Phi_N}H_{\Phi_N})$.

Réciproquement, si $M \in \ker(\mathrm{Id} - H^*_{\Phi_N}H_{\Phi_N})$, alors $M \in H^{2+}_{\mathfrak{M}}$ et

$$H^*_{\Phi_N}H_{\Phi_N}(M) = M.$$

$$\begin{aligned}\|M\|_{L^2_{\mathfrak{M}}} &= \|\pi_+\left(H_{\Phi_N}(M)\Phi_N^*\right)\|_{L^2_{\mathfrak{M}}} \\ &\leq \|H_{\Phi_N}(M)\Phi_N^*\|_{L^2_{\mathfrak{M}}} \\ &\leq \|H_{\Phi_N}(M)\|_{L^2_{\mathfrak{M}}} \\ &\leq \|\pi_-(M\Phi_N)\|_{L^2_{\mathfrak{M}}}.\end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned}\|M\Phi_N\|^2_{L^2_{\mathfrak{M}}} &= \|\pi_+(M\Phi_N)\|^2_{L^2_{\mathfrak{M}}} + \|\pi_-(M\Phi_N)\|^2_{L^2_{\mathfrak{M}}} \\ &= \|M\|^2_{L^2_{\mathfrak{M}}} \\ &\leq \|\pi_-(M\Phi_N)\|^2_{L^2_{\mathfrak{M}}}\end{aligned}$$

et donc $\pi_+(M\Phi_N) = 0$. Alors $M\Phi_N \in H^{2-}_{\mathfrak{M}}$ et $M \in H^{2-}_{\mathfrak{M}}\Phi_N^*$, ce qui entraîne

$$M \in H^{2-}_{\mathfrak{M}}\Phi_N^* \cap H^{2+}_{\mathfrak{M}},$$

et

$$\ker(\mathrm{Id} - H^*_{\Phi_N}H_{\Phi_N}) \subset H^{2-}_{\mathfrak{M}}\Phi_N^* \cap H^{2+}_{\mathfrak{M}}.$$

Donc

$$\ker(\mathrm{Id} - H^*_{\Phi_N}H_{\Phi_N}) = H^{2-}_{\mathfrak{M}}\Phi_N^* \cap H^{2+}_{\mathfrak{M}},$$

et $L_N = \left(\ker\left(\mathrm{Id} - H^*_{\Phi_N}H_{\Phi_N}\right)\right)^{\perp H^{2+}_{\mathfrak{M}}}$. □

Proposition B.4.
(i) $\exists \eta \in]0,1[\,:\, \|H_{\Phi_N}\|_{L^2_{\mathfrak{M}}} \leq \eta$.
(ii) *L'opérateur* $\mathrm{Id} - zH^*_{\Phi_N}H_{\Phi_N}$ *est inversible et*

$$\left(\mathrm{Id} - zH^*_{\Phi_N}H_{\Phi_N}\right)^{-1} = \sum_{p\in\mathbb{N}} z^p \left(H^*_{\Phi_N}H_{\Phi_N}\right)^p,$$

$\forall z \in \mathbb{C}$ *tel que* $|z| < \dfrac{1}{\eta}$. *En particulier,* $\mathrm{Id} - H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N}$ *est inversible.*

Démonstration. La preuve nécessite l'utilisation du lemme classique suivant, donné sans démonstration :

Lemme B.5. *Soient A et B deux sous-espaces vectoriels d'un espace de Hilbert E, tels que $A \cap B = \{0\}$.*
Alors $A + B$ fermé $\Longleftrightarrow \exists \eta \in]0,1[\ :\ \forall a \in A\ ,\ \forall b \in B\ ,\ |\langle a, b\rangle_E| \leq \eta \|a\|_E \|b\|_E$.

Comme $H^{2-}_{\mathfrak{M}} + H^{2+}_{\mathfrak{M}} \Phi_N$ est fermé, puisque c'est

$$\left(H^{2+}_{\mathfrak{M}} \cap \left(\Phi_N G^{-1} H^{2-}_{\mathfrak{M}} G\right)\right)^{\perp L^2_{\mathfrak{M}}},$$

$H^{2-}_{\mathfrak{M}} \overset{\perp}{\oplus} L_N \Phi_N$ l'est aussi et on définit

$$\|H_{\Phi_N}\|_{L^2_{\mathfrak{M}}} = \sup \left\{ \frac{\left|\langle M', H_{\Phi_N}(M)\rangle_{L^2_{\mathfrak{M}}}\right|}{\|M\|_{L^2_{\mathfrak{M}}} \|M'\|_{L^2_{\mathfrak{M}}}} : M \in H^{2+}_{\mathfrak{M}} - \{0\}; M' \in H^{2-}_{\mathfrak{M}} - \{0\} \right\}.$$

Comme $H^{2+}_{\mathfrak{M}} = L_N \overset{\perp}{\oplus} \left(H^{2-}_{\mathfrak{M}} \Phi_N^* \cap H^{2+}_{\mathfrak{M}}\right)$, on a directement

$$\|H_{\Phi_N}\|_{L^2_{\mathfrak{M}}} = \sup \left\{ \frac{\left|\langle M', M\Phi_N\rangle_{L^2_{\mathfrak{M}}}\right|}{\|M\|_{L^2_{\mathfrak{M}}} \|M'\|_{L^2_{\mathfrak{M}}}} : M \in L_N - \{0\}; M' \in H^{2-}_{\mathfrak{M}} - \{0\} \right\}.$$

On applique alors le lemme précédent à $A = H^{2-}_{\mathfrak{M}}$ et $B = L_N \Phi_N$. $H^{2-}_{\mathfrak{M}} \overset{\perp}{\oplus} L_N \Phi_N$ étant fermé en tant qu'orthogonal de $\mathscr{P}_{N-1} G$ dans $L^2_{\mathfrak{M}}$, $\exists \eta \in]0,1[$ tel que $\forall M' \in H^{2-}_{\mathfrak{M}}$, $\forall M \in L_N$,

$$\left|\langle M', M\Phi_N\rangle_{L^2_{\mathfrak{M}}}\right| \leq \eta \|M'\|_{L^2_{\mathfrak{M}}} \|M\Phi_N\|_{L^2_{\mathfrak{M}}}.$$

Comme $\|M\Phi_N\|_{L^2_{\mathfrak{M}}} = \|M\|_{L^2_{\mathfrak{M}}}$, on en déduit que $\|H_{\Phi_N}\|_{L^2_{\mathfrak{M}}} \leq \eta < 1$. Par ailleurs,

$$\begin{array}{rccccc} H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N} : & H^{2+}_{\mathfrak{M}} & \longrightarrow & H^{2-}_{\mathfrak{M}} & \longrightarrow & H^{2+}_{\mathfrak{M}} \\ & M & \longmapsto & \pi_-(M\Phi_N) & \longmapsto & \pi_+\left(\pi_-(M\Phi_N)\Phi_N^*\right). \end{array}$$

Or $\forall M' \in H^{2+}_{\mathfrak{M}}$, $\forall M \in H^{2+}_{\mathfrak{M}}$,

$$\begin{aligned}\langle M', \left(H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N}\right)(M)\rangle_{L^2_{\mathfrak{M}}} &= \langle M', \pi_+\left(\pi_-(M\Phi_N)\Phi_N^*\right)\rangle_{L^2_{\mathfrak{M}}} \\ &= \langle M', \pi_-(M\Phi_N)\Phi_N^*\rangle_{L^2_{\mathfrak{M}}} \\ &= \langle M'\Phi_N, H_{\Phi_N}(M)\rangle_{L^2_{\mathfrak{M}}}.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}|\langle M', \left(H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N}\right)(M)\rangle_{L^2_{\mathfrak{M}}}| &\leq |\langle M'\Phi_N, H_{\Phi_N}(M)\rangle_{L^2_{\mathfrak{M}}}| \\ &\leq \|H_{\Phi_N}\|_{L^2_{\mathfrak{M}}} \|M\|_{L^2_{\mathfrak{M}}} \|M'\Phi_N\|_{L^2_{\mathfrak{M}}} \\ &\leq \|H_{\Phi_N}\|_{L^2_{\mathfrak{M}}} \|M\|_{L^2_{\mathfrak{M}}} \|M'\|_{L^2_{\mathfrak{M}}}.\end{aligned}$$

On obtient alors

$$\|H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N}\|_{L^2_{\mathfrak{M}}} \leq \|H_{\Phi_N}\|_{L^2_{\mathfrak{M}}} \leq \eta < 1,$$

et

$$\forall z \ : \ |z| \|H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N}\|_{L^2_{\mathfrak{M}}} \leq |z|\eta < 1 \ ,$$

l'opérateur $\mathrm{Id} - zH^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N}$ est donc inversible, et son inverse a la forme annoncée. □

B.3. Étude de la projection $\Pi_N^{(F)}$; solution du problème de la prédiction

Les lemmes techniques de la section B.1 nous amènent au résultat suivant :

Théorème 2.11. $\forall M \in L^2_{\mathfrak{M},F}$,

$$\Pi_N^{(F)}(M) =$$
$$\left\{\pi_+(MG) - \pi_+\left[\left\{\left(\mathrm{Id} - H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N}\right)^{-1}\left(\pi_+\left(\pi_+(MG)\Phi_N^*\right)\right)\right\}\Phi_N\right]\right\} G^{-1}.$$

Démonstration. $\forall M \in L^2_{\mathfrak{M},F}$, $\pi_N^{(2)}(MG) = MG - \pi_N^{(2)\perp}(MG)$.
(Si $M \in L^2_{\mathfrak{M},F}$, alors $MG \in L^2_{\mathfrak{M}}$: $\|MG\|_{L^2_{\mathfrak{M}}} = \|M\|_{L^2_{\mathfrak{M},F}}$). En utilisant la

définition (B.4) de la projection $\pi_N^{(2)}$, on peut écrire $\pi_N^{(2)\perp}(MG) = U + V\Phi_N$ avec $U \in H^{2-}_{\mathfrak{M}}$ et $V \in L_N \subset H^{2+}_{\mathfrak{M}}$.

$$\pi_N^{(2)}(MG) \in H^{2+}_{\mathfrak{M}} \Longrightarrow \pi_-\left(\pi_N^{(2)}(MG)\right) = 0,$$

donc

$$\pi_-(MG) - \pi_-\left(\pi_N^{(2)\perp}(MG)\right) = 0$$

et $U + \pi_-(V\Phi_N) = \pi_-(MG)$. Finalement , $U + H_{\Phi_N}(V) = \pi_-(MG)$.
D'autre part, $\pi_N^{(2)}(MG) \in \Phi_N G^{-1} H^{2-}_{\mathfrak{M}} G$, donc $\exists M' \in H^{2-}_{\mathfrak{M}}$ tel que

$$\pi_N^{(2)}(MG) = \Phi_N G^{-1} M' G = MG - (U + V\Phi_N)$$

et

$$U + V\Phi_N = MG - \Phi_N G^{-1} M' G.$$

On obtient donc le système suivant, d'inconnues U et V :

$$\begin{cases} U + H_{\Phi_N}(V) & = \pi_-(MG) \\ U + V\Phi_N & = MG - \Phi_N G^{-1} M' G \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} U + H_{\Phi_N}(V) & = \pi_-(MG) \\ U\Phi_N^* + V & = MG\Phi_N^* - \Phi_N G^{-1} M' G \Phi_N^*, \end{cases}$$

ce qui entraîne

$$\begin{cases} U + H_{\Phi_N}(V) & = \pi_-(MG) \\ \pi_+(U\Phi_N^*) + V & = \pi_+(MG\Phi_N^*) - \pi_+(\Phi_N G^{-1} M' G \Phi_N^*), \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} U & = \pi_-(MG) - H_{\Phi_N}(V) \\ H^*_{\Phi_N}(U) + V & = \pi_+(MG\Phi_N^*) - \pi_+(\Phi_N G^{-1} M' G \Phi_N^*). \end{cases}$$

En remplaçant U dans la deuxième équation, on obtient

$$H^*_{\Phi_N}\left(\pi_-(MG) - H_{\Phi_N}(V)\right) + V = \pi_+(MG\Phi_N^*) - \pi_+(\Phi_N G^{-1} M' G \Phi_N^*),$$

qui équivaut aux équations suivantes :

$$\left(\mathrm{Id} - H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N}\right)(V) = \pi_+(MG\Phi_N^*) - \pi_+(\Phi_N G^{-1} M' G \Phi_N^*) - H^*_{\Phi_N}(\pi_-(MG)),$$

$$\left(\mathrm{Id} - H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N}\right)(V) = \pi_+(MG\Phi_N^*) - \pi_+(\Phi_N G^{-1} M' G \Phi_N^*) - \pi_+(\pi_-(MG)\Phi_N^*),$$

$$\left(\mathrm{Id} - H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N}\right)(V) = \pi_+\left(\pi_+(MG)\Phi_N^*\right) - \pi_+(\Phi_N G^{-1} M' G \Phi_N^*).$$

Or $\forall M'' \in H^{2+}_{\mathfrak{M}}$, $\forall M' \in H^{2-}_{\mathfrak{M}}$,

$$\begin{aligned}
\langle \Phi_N G^{-1} M' G \Phi_N^*, M'' \rangle_{L^2_{\mathfrak{M}}} &= \frac{1}{n}\int_{\mathbb{T}} \operatorname{tr}\left(\chi^N G^{-1*} G G^{-1} M' G \overline{\chi}^N G^* G^{-1} M''^*\right) \, \mathrm{d}\sigma \\
&= \frac{1}{n}\int_{\mathbb{T}} \operatorname{tr}\left(\chi^N G^{-1*} M' \overline{\chi}^N G G^* G^{-1} M''^*\right) \, \mathrm{d}\sigma \\
&= \frac{1}{n}\int_{\mathbb{T}} \operatorname{tr}\left(\chi^N G^{-1*} M' \overline{\chi}^N G^* G G^{-1} M''^*\right) \, \mathrm{d}\sigma \\
&= \frac{1}{n}\int_{\mathbb{T}} \operatorname{tr}\left(G^{-1*} M' G^* M''^*\right) \, \mathrm{d}\sigma \\
&= \langle G^{-1*} M', M'' G \rangle_{L^2_{\mathfrak{M}}} = 0.
\end{aligned}$$

Donc $\Phi_N G^{-1} M' G \Phi_N^* \in H^{2-}_{\mathfrak{M}}$ et $\pi_+\left(\Phi_N G^{-1} M' G \Phi_N^*\right) = 0$.
On obtient alors :

$$\left\{\begin{array}{rl} U & = \pi_-(MG) - H_{\Phi_N}(V) \\ \left(\mathrm{Id} - H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N}\right)(V) & = \pi_+\left(\pi_+(MG)\Phi_N^*\right), \end{array}\right.$$

ce qui équivaut à

$$\left\{\begin{array}{ll} U & = \pi_-(MG) - \pi_-(V\Phi_N) \\ V & = \left(\mathrm{Id} - H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N}\right)^{-1}\left(\pi_+(\pi_+(MG)\Phi_N^*)\right). \end{array}\right.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\pi_N^{(2)}(MG) &= MG - (U + V\Phi_N) \\
&= MG - \pi_-(MG) + \pi_-(V\Phi_N) - V\Phi_N \\
&= \pi_+(MG) - \pi_+(V\Phi_N).
\end{aligned}$$

Finalement ,

$$\pi_N^{(2)}(MG) = \pi_+(MG) - \pi_+\left[\left\{\left(\mathrm{Id} - H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N}\right)^{-1}\left(\pi_+\left(\pi_+(MG)\Phi_N^*\right)\right)\right\}\Phi_N\right],$$

et $\Pi_N^{(F)}(M) = \pi_N^{(2)}(MG)G^{-1}$, d'où le théorème. $\square$

Corollaire du théorème 2.11.

Si P est un polynôme trigonométrique matriciel non nul, inversible, avec $P \in \mathscr{P}_{N-1} \cap H^\infty_{\mathfrak{M}}$ et $P^{-1} \in H^\infty_{\mathfrak{M}}$, et si $G = P^{-1}$, de sorte que $F = P^{-1}P^{-1*} = (P^*P)^{-1}$, alors

$$\Pi_N^{(F)}(M) = \pi_+(MP^{-1})P - \pi_+\left(MP^{-1}\Phi_N^*\right)\Phi_N P.$$

Démonstration. On applique l'égalité du théorème avec $G = P^{-1}$. Dans ces conditions,

$$\forall M \in H^{2+}_{\mathfrak{M}},\ \left(H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N}\right)(M) = \pi_+ \left(\pi_-(M\Phi_N)\Phi_N^*\right),$$

et $M\Phi_N = M\chi^N P^{-1}P^* = MP^{-1}\chi^N P^*$. Or, si $P = \sum_{k=0}^{k=N-1} \chi^k A_k$, avec $A_k \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, alors $\forall k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq k \leq N-1$, $\chi^N P^* = \sum_{k=0}^{k=N-1} \chi^{N-k} A_k^*$, avec $1 \leq N-k \leq N$. Donc $\chi^N P^* \in H^{2+}_{\mathfrak{M}}$. Comme $P^{-1} \in H^{2+}_{\mathfrak{M}}$, on en déduit que $M\Phi_N \in H^{2+}_{\mathfrak{M}}$ et $\pi_-(M\Phi_N) = 0$. Ainsi, $H_{\Phi_N} = 0$ sur $H^{2+}_{\mathfrak{M}}$. On a alors

$$\Pi_N^{(F)}(M) = \left[\pi_+(MP^{-1}) - \pi_+ \left[\left(\pi_+ \left(\pi_+(MP^{-1})\Phi_N^*\right)\right) \Phi_N\right]\right] P.$$

Or

$$\pi_+ \left(\pi_+(MP^{-1})\Phi_N^*\right) = \pi_+ \left(\left(MP^{-1} - \pi_-(MP^{-1})\right) \Phi_N^*\right).$$

Comme $M \in H^{2+}_{\mathfrak{M}}$ et $P^{-1} \in H^{2+}_{\mathfrak{M}}$, $\pi_-(MP^{-1}) = 0$. Donc

$$\pi_+ \left(\pi_+(MP^{-1})\Phi_N^*\right) = \pi_+(MP^{-1}\Phi_N^*) = \mathcal{A},$$

et

$$\begin{aligned}\pi_+ \left[\left(\pi_+ \left(\pi_+(MP^{-1})\Phi_N^*\right)\right) \Phi_N\right] &= \pi_+(\mathcal{A}\Phi_N) \\ &= \mathcal{A}\Phi_N - \pi_-(\mathcal{A}\Phi_N) \\ &= \mathcal{A}\Phi_N - H_{\Phi_N}(\mathcal{A}).\end{aligned}$$

Comme $\mathcal{A} \in H^{2+}_{\mathfrak{M}}$, ce qui entraîne que $\mathcal{A}\Phi_N \in H^{2+}_{\mathfrak{M}}$, on en déduit que $H_{\Phi_N}(\mathcal{A}) = 0$ et donc

$$\pi_+ \left[\left(\pi_+ \left(\pi_+(MP^{-1})\Phi_N^*\right)\right) \Phi_N\right] = \mathcal{A}\Phi_N = \pi_+(MP^{-1}\Phi_N^*)\Phi_N.$$

Finalement,

$$\Pi_N^{(F)}(M) = \pi_+(MP^{-1})P - \pi_+ \left(MP^{-1}\Phi_N^*\right) \Phi_N P.$$

□

B.4. Estimation du polynôme de prédiction

Le but de cette section est de donner une estimation asymptotique en norme $L^2_{\mathfrak{M},F}$ du polynôme de prédiction.

Proposition B.6. *Le polynôme de prédiction pour un passé fini, dans le cas vectoriel, s'écrit*

$$R_N = \mathrm{Id} - \chi\Pi_N^{(F)}(\overline{\chi}\mathrm{Id}).$$

Démonstration. Par définition de R_N, $\exists\ M \in \mathscr{P}_{N-1}$ tel que $R_N = \mathrm{Id} - \chi\Pi_N^{(F)}(M)$, et

$$\left\|\mathrm{Id} - \chi\Pi_N^{(F)}(M)\right\|_{L^2_{\mathfrak{M},F}}$$

soit minimale. Or

$$\left\|\mathrm{Id} - \chi\Pi_N^{(F)}(M)\right\|_{L^2_{\mathfrak{M},F}} = \left\|\overline{\chi}\mathrm{Id} - \Pi_N^{(F)}(M)\right\|_{L^2_{\mathfrak{M},F}} = \left\|\overline{\chi}G - \Pi_N^{(F)}(M)G\right\|_{L^2_{\mathfrak{M}}}$$

On en déduit que

$$\pi_N^{(2)}(\overline{\chi}G) = \Pi_N^{(F)}(M)G = \Pi_N^{(F)}(\overline{\chi}\mathrm{Id})G,$$

et donc $\Pi_N^{(F)}(M) = \Pi_N^{(F)}(\overline{\chi}\mathrm{Id})$. □

Nous allons en déduire une estimation de $\|R_N\|^2_{L^2_{\mathfrak{M},F}}$:

$$\begin{aligned}\Pi_N^{(F)}(\overline{\chi}\mathrm{Id}) &= \pi_+(\overline{\chi}G)G^{-1}\\ &\quad - \pi_+\left[\left\{\left(\mathrm{Id} - H^*_{\Phi_N}H_{\Phi_N}\right)^{-1}\left(\pi_+\left(\pi_+(\overline{\chi}G)\Phi_N^*\right)\right)\right\}\Phi_N\right]G^{-1}.\end{aligned}$$

Posons

$$\mathcal{O}\left(N,G\right) = \pi_+\left[\left\{\left(\mathrm{Id} - H^*_{\Phi_N}H_{\Phi_N}\right)^{-1}\left(\pi_+\left(\pi_+(\overline{\chi}G)\Phi_N^*\right)\right)\right\}\Phi_N\right].$$

Alors

$$R_N = \mathrm{Id} - \chi\left(\pi_+(\overline{\chi}G)G^{-1} - \mathcal{O}\left(N,G\right)G^{-1}\right).$$

Comme $\pi_+(\overline{\chi}G) = \overline{\chi}G - \pi_-(\overline{\chi}G)$, $R_N = \chi\left(\pi_-(\overline{\chi}G) + \mathcal{O}\left(N,G\right)\right)G^{-1}$.
On a alors $\|R_N\|^2_{L^2_{\mathfrak{M},F}} = \|\pi_-(\overline{\chi}G) + \mathcal{O}\left(N,G\right)\|^2_{L^2_{\mathfrak{M}}}$, et comme $\pi_-(\overline{\chi}G)$ et $\mathcal{O}\left(N,G\right)$ sont orthogonaux dans $L^2_{\mathfrak{M}}$,

$$\|R_N\|^2_{L^2_{\mathfrak{M},F}} = \|\pi_-(\overline{\chi}G)\|^2_{L^2_{\mathfrak{M}}} + \|\mathcal{O}\left(N,G\right)\|^2_{L^2_{\mathfrak{M}}}.$$

D'autre part, G est de la forme $G = \sum_{k\in\mathbb{N}} \chi^k G_k$ et donc $\overline{\chi}G = \overline{\chi}G_0 + \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \chi^{k-1} G_k$,
donc $\pi_-(\overline{\chi}G) = \overline{\chi}G_0$ et $\|\pi_-(\overline{\chi}G)\|_{L^2_{\mathfrak{M}}} = \|G_0\|_2 = \|\widehat{G}(0)\|_2$.
Maintenant, pour estimer $\|\mathcal{O}\,(N,G)\,\|^2_{L^2_{\mathfrak{M}}}$, posons $\omega_N = \pi_+\left(\pi_+(\overline{\chi}G)\Phi_N^*\right)$.
Alors

$$\mathcal{O}\,(N,G) = \pi_+\left[\left(\mathrm{Id} - H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N}\right)^{-1}(\omega_N)\,\Phi_N\right],$$

et

$$\|\mathcal{O}\,(N,G)\,\|_{L^2_{\mathfrak{M}}} \leq \left\|\left(\mathrm{Id} - H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N}\right)^{-1}\right\|_{L^2_{\mathfrak{M}}} \|\,\omega_N\|_{L^2_{\mathfrak{M}}}.$$

Or

$$\begin{aligned}\omega_N &= \pi_+(\overline{\chi}G\Phi_N^*) - \pi_+\left(\pi_-(\overline{\chi}G)\Phi_N^*\right)\\ &= \pi_+(\overline{\chi}G\Phi_N^*) - H^*_{\Phi_N}\left(\pi_-(\overline{\chi}G)\right).\end{aligned}$$

Soit $u_N = \pi_+(\overline{\chi}G\Phi_N^*) \in H^{2+}_{\mathfrak{M}}$. Alors $\forall M \in H^{2+}_{\mathfrak{M}}$,

$$\begin{aligned}\langle u_N, M\rangle_{L^2_{\mathfrak{M}}} &= \langle \overline{\chi}G\Phi_N^*, M\rangle_{L^2_{\mathfrak{M}}}\\ &= \langle \overline{\chi}^{N+1} G G^* G^{-1}, M\rangle_{L^2_{\mathfrak{M}}}\\ &= \langle \overline{\chi}^{N+1} G^* G G^{-1}, M\rangle_{L^2_{\mathfrak{M}}}\\ &= \langle \overline{\chi}^{N+1}\mathrm{Id}, MG\rangle_{L^2_{\mathfrak{M}}}.\end{aligned}$$

Comme $MG \in H^{2+}_{\mathfrak{M}}$, $\langle \overline{\chi}^{N+1}\mathrm{Id}, MG\rangle_{L^2_{\mathfrak{M}}} = 0$, donc $\langle u_N, M\rangle_{L^2_{\mathfrak{M}}} = 0$ et $u_N = 0$.
Finalement, $\omega_N = -H^*_{\Phi_N}\left(\pi_-(\overline{\chi}G)\right)$. On en déduit une estimation de $\|\,\omega_N\|_{L^2_{\mathfrak{M}}}$ sous la forme

$$\|\,\omega_N\|_{L^2_{\mathfrak{M}}} \leq \|H^*_{\Phi_N}\|_{L^2_{\mathfrak{M}}} \|\widehat{G}(0)\|_2.$$

Par ailleurs, $\forall M \in H^{2-}_{\mathfrak{M}}$, $\forall M' \in H^{2+}_{\mathfrak{M}}$,

$$\begin{aligned}\langle H^*_{\Phi_N}(M), M'\rangle_{L^2_{\mathfrak{M}}} &= \langle \pi_+(M\Phi^*_N), M'\rangle_{L^2_{\mathfrak{M}}},\\ &= \langle M\Phi^*_N, M'\rangle_{L^2_{\mathfrak{M}}},\\ &= \langle M, M'\Phi_N\rangle_{L^2_{\mathfrak{M}}},\\ &= \langle M, \pi_-\left(M'\Phi_N\right)\rangle_{L^2_{\mathfrak{M}}}.\end{aligned}$$

Finalement, $\forall M \in H^{2-}_{\mathfrak{M}}$, $\forall M' \in H^{2+}_{\mathfrak{M}}$,

$$\langle H^*_{\Phi_N}(M), M'\rangle_{L^2_{\mathfrak{M}}} = \langle M, H_{\Phi_N}(M')\rangle_{L^2_{\mathfrak{M}}},$$

$H^*_{\Phi_N}$ est l'adjoint de H_{Φ_N} et $\|H^*_{\Phi_N}\|_{L^2_{\mathfrak{M}}} = \|H_{\Phi_N}\|_{L^2_{\mathfrak{M}}}$. On en déduit que $H^*_{\Phi_N}H_{\Phi_N}$ est auto-adjoint. Par conséquent, $\forall M \in H^{2+}_{\mathfrak{M}}$,

$$\langle H^*_{\Phi_N}H_{\Phi_N}(M), M\rangle_{L^2_{\mathfrak{M}}} = \|H_{\Phi_N}(M)\|^2_{L^2_{\mathfrak{M}}},$$

ce qui entraîne

$$\|H^*_{\Phi_N}H_{\Phi_N}\|_{L^2_{\mathfrak{M}}} = \|H_{\Phi_N}\|^2_{L^2_{\mathfrak{M}}}.$$

Posons alors $\|H_{\Phi_N}\|_{L^2_{\mathfrak{M}}} = \rho_N(F^{-1})$.

Nous avons vu aux paragraphes 4.1 et 4.2 une méthode pour évaluer cette norme.
Or on a vu précédemment que

$$\left(\mathrm{Id} - H^*_{\Phi_N}H_{\Phi_N}\right)^{-1} = \mathrm{Id} + \sum_{k\in\mathbb{N}^*}\left(H^*_{\Phi_N}H_{\Phi_N}\right)^k.$$

On obtient donc

$$\begin{aligned}\left\|\left(\mathrm{Id} - H^*_{\Phi_N}H_{\Phi_N}\right)^{-1}\right\|_{L^2_{\mathfrak{M}}} &\le \|\mathrm{Id}\|_{L^2_{\mathfrak{M}}} + \sum_{k\in\mathbb{N}^*}\left\|H^*_{\Phi_N}H_{\Phi_N}\right\|^k_{L^2_{\mathfrak{M}}}\\ &\le 1 + \sum_{k\in\mathbb{N}^*}\left[\rho_N(F^{-1})\right]^{2k}\\ &\le \frac{1}{1-[\rho_N(F^{-1})]^2},\end{aligned}$$

et

$$\|\mathcal{H}\,(N, G)\,\|_{L^2_{\mathfrak{M}}} \le \frac{1}{1-[\rho_N(F^{-1})]^2}\;\rho_N(F^{-1})\;\|\widehat{G}(0)\|_2.$$

Ce qui précède nous amène à la proposition suivante :

Proposition B.7. *On peut estimer la norme au carré du polynôme de prédiction pour un passé fini par l'expression asymptotique suivante :*

$$0 \leq \|R_N\|^2_{L^2_{\mathfrak{M},F}} - \|\widehat{G}(0)\|^2_2 \leq \frac{\left[\rho_N(F^{-1})\right]^2}{\left(1 - \left[\rho_N(F^{-1})\right]^2\right)^2} \|\widehat{G}(0)\|^2_2 ,$$

où $\rho_N(F^{-1})$ *est la norme-opérateur de* H_{Φ_N} *dans* $L^2_{\mathfrak{M}}$ *et* $\widehat{G}(0)$ *le coefficient de Fourier d'ordre* 0 *de* G.

En vertu de la proposition 4.5 démontrée au paragraphe 4.2, on en déduit

$$\lim_{N \to +\infty} \|R_N\|_{L^2_{\mathfrak{M},F}} = \|\widehat{G}(0)\|_2,$$

puisque $\lim_{N \to +\infty} \rho_N(F^{-1}) = 0$.

Références

[1] A. Böttcher et B. Silberman – *Asymptotics of Toeplitz matrices*, Akademie-Verlag, Berlin, 1983.

[2] ———, *Analysis of Toeplitz operators*, Springer, 1990.

[3] ———, *Introduction to large truncated Toeplitz matrices*, Springer, 1999.

[4] B. Buzbee, G. Golub et C. Nielson – « On direct methods for solving Poisson's equations », *SIAM Journal of Numerical Analysis* **7** (Décembre 1970), no. 4, p. 627–656.

[5] Bylund – *Besov spaces and measures on arbitrary closed sets*, Thèse University of Umeå, 1994.

[6] R. H. Chan, K. Ng et R. J. Plemmons – « Generalization of Strang's preconditioner with applications to Toeplitz least squares problems », *Journal of Numerical Linear Algebra with Applications* (1996).

[7] R. G. Douglas – *Banach algebra techniques in theory of Toeplitz operators*, American mathematical society, 1973.

[8] I. Gohberg, P. Lancaster et L. Rodman – *Matrix polynomials*, Academic Press, 1982.

[9] ———, *Matrices and indefinite scalar products*, Birkhaüser-Verlag Basel, 1983.

[10] I. Gohberg, S. Goldberg et M. A. Kaashoek – *Class of linear operators. Volume I*, Birkhaüser-Verlag Basel, 1990.

[11] ———, *Class of linear operators. Volume II*, Birkhaüser-Verlag Basel, 1993.

[12] M. Golberg – « The derivative of a determinant », *American Mathematica Monthly* **79** (1972), p. 1124–1126.

[13] U. Grenander et G. Szegö – *Toeplitz forms and their applications*, Chelsea Publishing Company, New York, 1958.

[14] H. Helson et D. Lowdenslager – « Prediction theory and Fourier series in several variables », *Acta Mathematica* **99** (10/06/1958), p. 165–202.

[15] R. A. Horn et C. R. Johnson – *Matrix analysis*, Cambridge University Press, 1985.

[16] ———, *Topics in matrix analysis*, Cambridge University Press, 1986.

[17] R. Kenyon – « The asymptotic determinant of the discrete Laplacian », *Prépublication Orsay* **9854** (1998).

[18] G. Litvinchuk et I. Spitkovskii – *Factorisation of measurable matrix functions*, Birkhaüser-Verlag Basel, 1987.

[19] M. Marcus et H. Minc – *A survey of matrix theory and matrix inequalities*, Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1964.

[20] N. V. Nikolski – *Operators, functions, and systems : An easy reading, volume I : Hardy, Hankel and Toeplitz, volume II : Model operators and systems*, American mathematical society, 2002.

[21] P. Rambour, J. Rinkel et A. Seghier – « Développement asymptotique de l'inverse de matrices de Toeplitz et noyaux de Green », *Prépublication de l'Université de Paris-Sud* **47** (2000).

[22] P. Rambour et A. Seghier – « Exact and asymptotic inverse of the Toeplitz matrix with polynomial singular symbol », *Prépublication de l'Université de Paris-Sud* **17** (2002).

[23] J. Rinkel – *Inverses et propriétés spectrales des matrices de Toeplitz à symbole singulier*, Thèse Université Paris-Sud Orsay, 23 octobre 2001.

[24] M. Rosenblum et J. Rovnyak – *Hardy classes and operator theory*, Oxford university press, 1985.

[25] ———, *Topics in Hardy classes and univalent functions*, Birkhaüser-Verlag Basel, 1994.

[26] W. Rudin – *Analyse réelle et complexe*, Masson, 1987.

[27] A. Seghier – « Opérateurs de Toeplitz et théorèmes-limites de Szegö », Cours de troisième cycle. DEA de Mathématiques Pures. Orsay, 1999-2000.

[28] D. Serre – *Les matrices. Théorie et pratique*, Dunod, 2001.

[29] F. Spitzer et C. Stone – « A class of Toeplitz forms and their applications to probability theory », *Illinois J.Math* **4** (1960), p. 253–277.

[30] H. Widom – « Asymptotic behavior of block Toeplitz matrices and determinants », *Advances in Mathematics* **13** (1974), p. 284–322.

[31] ______, « Asymptotic behavior of block Toeplitz matrices and determinants.II », *Advances in Mathematics* **21** (1976), p. 1–29.

[32] N. Wiener et P. Masani – « The prediction theory of multivariate stochastic processes.I : the regularity conditions », *Acta Mathematica* **98** (1957), p. 111–150.

[33] ______, « The prediction theory of multivariate stochastic processes.II : the linear predictor », *Acta Mathematica* **99** (1958), p. 93–137.

[34] F. Zhang – *Matrix theory. Basic results and techniques*, Springer-Verlag, 1999.

Jean Chanzy
Laboratoire de Mathématiques
Bâtiment 425
Université de Paris-Sud XI
F-91405 Orsay cedex
FRANCE
Jean.Chanzy@math.u-psud.fr