ANNALES
DE LA FACULTÉ
DES SCIENCES
DE
TOULOUSE
Mathématiques

CAMILLE BIÈCHE

Le problème d'équivalence locale pour un système scalaire complet d'équations aux dérivées partielles d'ordre deux à n variables indépendantes

Tome XVI, n° 1 (2007), p. 1-36.

<http://afst.cedram.org/item?id=AFST_2007_6_16_1_1_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. XVI, n° 1, 2007
pp. 1–36

Le problème d'équivalence locale pour un système scalaire complet d'équations aux dérivées partielles d'ordre deux à n variables indépendantes[(*)]

Camille Bièche [(1)]

Résumé. — Dans le présent article, nous établissons une caractérisation des systèmes scalaires d'équations aux dérivées partielles analytiques d'ordre deux à n variables indépendantes équivalents par un changement de coordonnées analytique au système $u_{x^\alpha x^\beta} = 0$, $1 \leqslant \alpha,\ \beta \leqslant n$.

Abstract. — In this paper, we give a caracterization of second ordrer scalar analytic systems of partial differential equations with n independent variables equivalent by a suitable analytic change of variables to the system $u_{x^\alpha x^\beta} = 0$, $1 \leqslant \alpha,\ \beta \leqslant n$.

1. Introduction

Nous étudions ici les transformations d'un système d'équations aux dérivées partielles holomorphes d'ordre deux sous l'effet d'un changement de coordonnées analytique. Soit un tel système à n variables indépendantes $x^1, \ldots,\ x^n$ et une variable dépendante u de la forme :

$$(\mathcal{S})\ :\ u_{x^\alpha x^\beta} = F_{\alpha\beta}(x, u, u_x),\ F_{\alpha\beta} = F_{\beta\alpha},\ \alpha, \beta = 1, \ldots, n.$$

Nous supposons que le système $(\mathcal{S})$ est complètement intégrable au voisinage de l'origine, c'est-à-dire qu'en tout point $(x_0, u_0, u_0^{(1)})$ au voisinage de l'origine passe une unique solution $u = u(x)$ de $(\mathcal{S})$ telle que $u(x_0) = u_0$ et $(u_{x^1}(x_0), \ldots, u_{x^n}(x_0)) = u_0^{(1)}$. Nous nous intéressons au problème de l'existence d'un changement de coordonnées analytique :

$$\phi(\check{x}, \check{u}) = (x, u)$$

(*) Reçu le 25 janvier 2005, accepté le 2 juin 2005

(1) Université de Provence, LATP, UMR 6632, CMI, 39 rue Joliot-Curie, 13453 Marseille cedex 13.
bieche@cmi.univ-mrs.fr

défini sur un voisinage ouvert de l'origine dans $\mathbb{C}^{n+1}$ tel que le système :

$$(\mathcal{S}_0) \ : \ \check{u}_{\check{x}^\alpha \check{x}^\beta} = 0, \ \alpha, \beta = 1, \ldots, n$$

exprimé dans les coordonnées (x, u) soit le système $(\mathcal{S})$.

Si un tel changement de coordonnées existe, $(\mathcal{S})$ et $(\mathcal{S}_0)$ sont dits équivalents. Les deux systèmes $(\mathcal{S})$ et $(\mathcal{S}_0)$ sont donc équivalents si et seulement s'il existe un changement de coordonnées $\phi(\check{x}, \check{u}) = (x, u)$ tel que son prolongement à l'espace des jets d'ordre 2 des fonctions holomorphes de n variables complexes $\phi^{(2)}$ applique les 2-graphes des solutions de $(\mathcal{S}_0)$ sur les 2-graphes des solutions de $(\mathcal{S})$.

Nous allons ici analyser ce problème à l'aide de la méthode d'équivalence d'Elie Cartan qui fournit un système de fonctions invariantes associé à $(\mathcal{S})$. L'annulation de certaines de ces fonctions invariantes, dites fondamentales, nous amène à une condition nécessaire et suffisante d'équivalence des systèmes $(\mathcal{S})$ et $(\mathcal{S}_0)$. Nous verrons que cette condition se traduit par un système d'équations aux dérivées partielles linéaires vérifé par les fonctions $F_{\alpha\beta}$ intervenant dans la définition de $(\mathcal{S})$.

De tels systèmes d'équations aux dérivées partielles $(\mathcal{S})$ apparaissent dans l'étude des hypersurfaces réelles analytiques Levi non dégénérées de $\mathbb{C}^{n+1}$. Au voisinage de l'origine, une telle hypersurface $\mathcal{H}$ est définie localement par une équation de la forme :

$$\mathfrak{Re} w = \sum_{j=1}^{n} \epsilon_j z_j \bar{z}_j + F(z, \bar{z}, \mathfrak{Im} w) \tag{1.1}$$

où $Z = (z_1, \ldots, z_n, w) \in \mathbb{C}^{n+1}$, $\epsilon_j \in \{-1, 1\}$ et F est une application réelle analytique au voisinage de 0 telle que $F(z, \bar{z}, \mathfrak{Im} w) = \mathrm{o}(|Z|^2)$.

De même que B. Segre dans [15], en considérant $\bar{z}$ et $\bar{w}$ comme des variables complexes indépendantes de z et w dans l'équation (1.1), nous associons à $\mathcal{H}$ une famille d'hypersurfaces complexes appelées variétés de Segre de l'hypersurface. Après application du théorème des fonctions implicites, les variétés de Segre de $\mathcal{H}$ ont donc pour équation :

$$\frac{1}{2}(w + \omega) = \sum_{j=1}^{n} \epsilon_j z_j \zeta_j + F(z, \zeta, \omega) \tag{1.2}$$

avec (ζ, ω) au voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}^{n+1}$ et F une application analytique. Nous considérons à présent w comme une fonction des variables $(z_1, \ldots, z_n)$ et nous dérivons (1.2) par rapport à chaque variable z_k. Le théorème des fonctions implicites nous permet dès lors d'exprimer les paramètres ζ et ω en fonction de z, w et w_{z_k}. Puis nous calculons les dérivées $w_{z_j z_k}$ dans lesquelles nous rempalçons ζ et ω par leurs expressions en fonction des variables z, w et w_{z_k}. Nous pouvons donc affirmer que ces variétés de Segre sont exactement les graphes des solutions d'un système $(\mathcal{S})$ complètement intégrable au voisinage de l'origine [17], [18]. Observons que $(\mathcal{S}_0)$ est le système d'équations différentielles associé aux variétés de Segre des quadriques de $\mathbb{C}^{n+1}$.

On appelle automorphisme local de $\mathcal{H}$ toute application biholomorphe définie au voisinage de l'origine et appliquant $\mathcal{H}$ sur elle même. Un tel automorphisme possède la propriété d'appliquer toute variété de Segre de $\mathcal{H}$ sur une variété de Segre de $\mathcal{H}$. Cette propriété d'invariance par biholomorphisme des variétés de Segre d'une hypersurface a été utilisée pour montrer de nombreux résultats, notamment des théorèmes d'extensions holomorphes d'applications au voisinage du bord de certains domaines [6]. Une symétrie du système $(\mathcal{S})$ est un difféomorphisme analytique $\phi(\check{x}, \check{u}) = (x, u)$ qui applique tout graphe d'une solution de $(\mathcal{S})$ sur le graphe d'une autre solution de $(\mathcal{S})$. Il apparait alors que tout automorphisme local de $\mathcal{H}$ est une symétrie du système $(\mathcal{S})$ complètement intégrable associé à ses variétés de Segre. Naturellement, la recherche des automorphismes locaux d'une hypersurface réelle analytique Levi non dégénérée conduit à étudier les symétries des systèmes d'équations aux dérivées partielles scalaires, complets et complètement intégrables. Dans cette direction, A. Sukhov a démontré que les symétries de Lie du système $(\mathcal{S})$ forment un groupe de Lie local complexe noté $Sym(\mathcal{S})$ [18]. Si $(\mathcal{S})$ est le système d'équations différentielles associé à l'hypersurface $\mathcal{H}$, le groupe des automorphismes de $\mathcal{H}$ est un sous-groupe de Lie réel de $Sym(\mathcal{S})$ dont la dimension réelle est majorée par la dimension complexe de ce dernier. De façon analogue, si on se donne une sous-variété de Cauchy-Riemann réelle analytique de $\mathbb{C}^N$ de codimension supérieure à 2, Levi non dégénérée au sens de Beloshapka [2], il est possible de lui associer un système d'équations aux dérivées partielles vectoriel, complet et complètement intégrable et d'étendre ainsi certains des résultats cités précédemment aux variétés de codimension supérieure à 2, [18].

De nombreux travaux ont déjà été menés dans cette direction. L'étude du cas $n = 1$ a permis à E. Cartan [3] d'obtenir à l'aide des travaux de A. Tresse [19] et S. Lie [1] une classification complète des hypersurfaces Levi non dégénérées de $\mathbb{C}^2$. Dans [5], S.S. Chern et J.K. Moser démontrent que toute hypersurface réelle analytique de $\mathbb{C}^{n+1}$ est déterminée par la donnée d'une connexion de Cartan sur un fibré principal réel au dessus de l'hypersurface. S.S Chern établit ensuite dans [4] une nouvelle version d'un résultat de M. Hachtroudi [10] : en reprenant les techniques développées dans [5], il donne une caractérisation du système $(\mathcal{S})$ par la donnée d'une connexion de Cartan sur un fibré projectif et explicite le lien entre cette nouvelle connexion et celle associée à l'hypersurface réelle analytique Levi non dégénérée correspondante [5]. Ces travaux sont repris et développés ultérieurement par J.J. Faran [7].

R. Gardner et P. Olver [9], [12] ont chacun travaillé à donner une version algorithmique des résultats d'E. Cartan. C'est sur leur approche du problème d'équivalence que nous nous basons pour donner une formulation algorithmique de la démonstration de S.S Chern dans [4] qui nous permet d'aboutir à une caractérisation des systèmes $(\mathcal{S})$ équivalents à $(\mathcal{S}_0)$ par la dimension de leurs groupes de symétrie. Nous montrons en effet à partir des travaux de A. Sukhov [17] que $(\mathcal{S}_0)$ est le seul système à équivalence près parmi les systèmes $(\mathcal{S})$ à avoir un groupe de symétrie de dimension maximale $n^2 + 4n + 3$. Ce résultat a été démontré par S. Lie [1] dans le cas $n = 1$. En particulier, nous retrouvons ici le fait que les seules hypersurfaces Levi non dégénérées de $\mathbb{C}^{n+1}$ qui possèdent un groupe d'automorphismes locaux de dimension maximale sont, à transformation biholomorphe près, les quadriques de $\mathbb{C}^{n+1}$, [5]. Notons que M.E. Fels [8] établit à l'aide de la méthode de Cartan un résultat analogue pour les systèmes d'équations différentielles analytiques d'ordre deux à une variable indépendante et m variables dépendantes. Toujours par la methode de Cartan, L. Hsu et N. Kamran [11] ont réalisé une classification complète des équations différentielles analytiques $u_{xx} = f(x, u, u_x)$ à transformation de contact près en calculant explicitement les invariants différentiels attachés à une telle équation. La mise au point de programmes informatiques permettant le calcul des symétries et des invariants différentiels d'un système d'équations différentielles [13], [14] grâce à l'approche algorithmique que nous utilisons ici permet d'espérer aboutir à de telles classifications pour d'autres classes de systèmes d'équations différentielles.

D'autre part, nous employons ici la formulation algorithmique de la méthode d'équivalence d'E. Cartan de R. Gardner et P. Olver pour donner des expressions explicites de certains invariants associés à $(\mathcal{S})$ qui sont dits fondamentaux en un sens que nous préciserons par la suite. Dans sa thèse [13], S. Neut à calculé ces expressions pour $n = 2$ avec une approche relevant du calcul formel. L'annulation de ces expressions nous fournit une condition nécessaire et suffisante d'équivalence des systèmes $(\mathcal{S})$ et $(\mathcal{S}_0)$. Plus précisément, nous démontrons le théorème suivant :

Théorème. — *Le système d'équations aux dérivées partielles complètement intégrable :*

$$(\mathcal{S})\ :\quad u_{x^\alpha x^\beta} = F_{\alpha\beta}(x,u,u_x),\quad F_{\alpha\beta}=F_{\beta\alpha},\quad \alpha,\beta=1\ldots n$$

est équivalent au système :

$$(\mathcal{S}_0)\ :\quad u_{x^\alpha x^\beta}=0,\quad \alpha,\beta=1\ldots n,$$

si et seulement si les fonctions $F_{\alpha\beta}$ vérifient les conditions :

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 F_{\alpha\rho}}{\partial u_\beta\partial u_\sigma}-\frac{1}{n+2}(\delta^\sigma_\rho\sum_\gamma\frac{\partial^2F_{\alpha\gamma}}{\partial u_\beta\partial u_\gamma}+\delta^\sigma_\alpha\sum_\gamma\frac{\partial^2F_{\rho\gamma}}{\partial u_\beta\partial u_\gamma}+\delta^\beta_\rho\sum_\gamma\frac{\partial^2F_{\alpha\gamma}}{\partial u_\sigma\partial u_\gamma}\\&+\delta^\alpha_\beta\sum_\gamma\frac{\partial^2F_{\rho\gamma}}{\partial u_\sigma\partial u_\gamma})+\frac{1}{(n+1)(n+2)}(\delta^\beta_\alpha\delta^\sigma_\rho+\delta^\beta_\rho\delta^\sigma_\alpha)\sum_{\gamma,\kappa}\frac{\partial^2F_{\kappa\gamma}}{\partial u_\kappa\partial u_\gamma}=0.\end{aligned}\tag{1.3}$$

pour tous les indices α, β, ρ, σ variant entre 1 et n.

Nous retrouvons en fait le résultat établi par M. Hachtroudi dans [10] par une méthode purement géométrique. Du fait de son caractère algorithmique, notre démonstration présente l'avantage d'être complètement explicite, il est ainsi possible d'en donner une traduction informatique.

Remarquons que les formules que nous obtenons pour les invariants fondamentaux attachés à $(\mathcal{S})$ sont tout à fait similaires à celles données par S. Webster dans [20] pour les invariants pseudo-conformes attachés à une hypersurface réelle analytique Levi non dégénérée de $\mathbb{C}^{n+1}$.

Nous commençons donc par exposer les grandes lignes de la méthode d'équivalence de Cartan sous forme algorithmique [9], [12]. Puis nous l'appliquons au problème d'équivalence des systèmes $(\mathcal{S})$ et $(\mathcal{S}_0)$. Comme S.S. Chern et J.K. Moser dans [5] et J.J. Faran dans [7], nous donnons ensuite une interprétation géométrique des résultats obtenus en termes de théorie des connexions. Enfin, en explicitant les invariants fondamentaux attachés à $(\mathcal{S})$ grâce aux propriétés géométriques des connexions de Cartan, nous caractérisons les systèmes d'équations aux dérivées partielles $(\mathcal{S})$ équivalents à $(\mathcal{S}_0)$.

2. Principes de la méthode d'équivalence de Cartan

L'étude du problème d'équivalence des systèmes $(\mathcal{S})$ et $(\mathcal{S}_0)$ nous amène à nous placer dans le cadre de la théorie des G-structures. Pour plus de clarté, nous donnons quelques définitions à ce sujet formulées dans le cadre analytique complexe. Elles sont également valables dans le cadre réel et lisse, à ce sujet on pourra consulter le livre de S. Sternberg [16].

Soit M une variété analytique complexe de dimension m. On note $\mathcal{F}(M) \xrightarrow{\pi} M$ le $GL_m(\mathbb{C})$-fibré principal complexe à droite des repères au dessus de M. On définit canoniquement une 1-forme différentielle ω sur $\mathcal{F}(M)$ à valeurs dans $\mathbb{C}^m$ de la façon suivante. Soit p un point de $\mathcal{F}(M)$ appartenant à la fibre au dessus de $x \in M$. Le point p définit un isomorphisme naturel $p : \mathbb{C}^m \longrightarrow T_xM$ qui applique la base canonique de $\mathbb{C}^m$ sur la base de T_xM fournie par p. On pose alors :

$$\omega(X) = p^{-1}(\pi_*(X)) \text{ pour } X \in T_p\mathcal{F}(M).$$

Un repère de référence sur M est donc canoniquement associé à une 1-forme différentielle ω qui fournit un isomorphisme de tout supplémentaire de l'espace tangent à la fibre de $\mathcal{F}(M)$ dans $T_p\mathcal{F}(M)$ sur $\mathbb{C}^m$. Un calcul simple montre que pour $g \in GL_m(\mathbb{C})$, si R_g désigne l'action à droite de g sur $\mathcal{F}(M)$, on a :

$$R^*_{g^{-1}}(\omega) = g.\omega \tag{2.1}$$

où le second membre est un produit de matrices.

Considérons un sous-groupe de Lie complexe G de $GL_m(\mathbb{C})$. Une G-structure sur M est une réduction P du fibré $\mathcal{F}(M)$ au groupe G. On dit que deux G-structures P et $\check{P}$ définies respectivement sur des variétés analytiques M et $\check{M}$ sont équivalentes s'il existe un difféomorphisme analytique $\phi : M \longrightarrow \check{M}$ tel que $\phi_*(P) = \check{P}$. Ainsi, les deux G-structures P et $\check{P}$ sont dites localement équivalentes en $(x, y) \in M \times \check{M}$ s'il existe des voisinages U de x et V de y, un difféomorphisme analytique $\phi : U \longrightarrow V$ avec $\phi(x) = y$ tels que les G-structures $P_{|U}$ et $\check{P}_{|V}$ sont équivalentes par ϕ. Comme (2.1) reste vraie sur P, ceci revient à dire que $\phi^*\check{\omega} = g.\omega$ où $g : U \subset M \longrightarrow G$ est une application holomorphe et ω et $\check{\omega}$ sont les formes différentielles canoniques associées respectivement à $P_{|U}$ et $\check{P}_{|V}$. La question de savoir si deux G-structures sont localement équivalentes constitue le problème de G-équivalence.

Nous allons nous intéresser ici à de tels problèmes et utiliser l'algorithme de Cartan que nous allons brièvement rappeler en suivant la présentation de P. Olver [12]. Sauf exception, on se servira des conventions de sommation d'Einstein.

On se donne une G-structures P sur M où G est un groupe de Lie complexe à s paramètres complexes. La méthode d'équivalence d'E. Cartan nous permet ici d'obtenir un système d'invariants locaux attachés à P en se ramenant à un problème d'équivalence de $\{e\}$-structure à l'aide du procédé algorithmique développé par R. Gardner et P. Olver.

Soit la 1-forme différentielle vectorielle θ définie sur P par $\theta = g.\omega$. La première étape de l'algorithme consiste à différencier la forme θ, puis à écrire cette différentielle sous une forme plus simple, en un sens que nous allons préciser, en modifiant la base de 1-formes différentielles dans laquelle nous décomposons $d\theta$ et enfin à attribuer des valeurs particulières aux coefficients intervenant dans l'écriture de $d\theta$ de façon à réduire le nombre de paramètres du groupe G.

En différenciant θ, on obtient les équations de structure du problème :

$$d\theta^i = \gamma^i_j \wedge \theta^j + \sum_{j<k} T^i_{jk}\theta^j \wedge \theta^k \quad i = 1, \ldots, m \tag{2.2}$$

avec

$$\gamma = dg.g^{-1}.$$

La matrice γ est une matrice de formes de Maurer-Cartan invariantes à droite du groupe de Lie G et les coefficients T^i_{jk} sont appelés coefficients de torsion. Si $\alpha^1, \ldots, \alpha^s$ est une base de formes de Maurer-Cartan de G donnée, les équations de structure (2.2) peuvent s'écrire sous la forme :

$$d\theta^i = A^i_{j\kappa}\alpha^\kappa \wedge \theta^j + \sum_{j<k} T^i_{jk}\theta^j \wedge \theta^k \quad i = 1, \ldots, m.$$

Considérons les équations dites équations d'absorption :

$$A^i_{j\kappa}z^\kappa_k - A^i_{k\kappa}z^\kappa_j = -T^i_{jk} \quad i, j, k = 1, \ldots, m.$$

Nous résolvons alors le plus grand nombre possible de ces équations et nous posons :

$$\tilde{\alpha}^\kappa = \alpha^\kappa + z^\kappa_j\theta^j \quad \kappa = 1, \ldots, s.$$

Les formes $\tilde{\alpha}^\kappa$ sont appelées formes de Maurer-Cartan modifiées. Nous avons ainsi :

$$d\theta^i = A^i_{j\kappa}\tilde{\alpha}^\kappa \wedge \theta^j + \sum_{j<k} U^i_{jk}\theta^j \wedge \theta^k \quad i = 1, \ldots, n.$$

Ce procédé est appelé absorption de la torsion car il consiste en fait à éliminer un maximum de coefficients de torsion T^i_{jk} dans l'expression de la 2-forme $d\theta^i$. L'importance de cette étape de la méthode de Cartan réside dans le fait que les coefficients de torsion restants U^i_{jk} sont des invariants associés à la forme vectorielle θ (c'est-à-dire : si $\phi^*\check{\theta} = \theta$, $\phi^*(\check{U}^i_{jk}) = U^i_{jk}$) et vont ainsi fournir des conditions nécessaires d'équivalence locale de P avec une G-structure donnée $\check{P}$.

Nous allons ensuite normaliser les coefficients U^i_{jk} (ou seulement certains d'entre eux, selon les cas étudiés), c'est à dire leur attribuer des valeurs judicieusement choisies et réduire le groupe G à un sous groupe de Lie H qui stabilise ces valeurs quand il agit sur le tenseur U^i_{jk} par l'action $g'.U^i_{jk}(x,g) = U^i_{jk}(x,g'g)$. Plus précisément, nous fixons des valeurs $u^i_{jk} = U^i_{jk}(x_0,g_0)$. Dans les cas étudiés par la suite, l'action du groupe G sur l'ensemble des valeurs U^i_{jk} est transitive, ce qui permet alors de construire une fonction analytique $g_0 : U \subset M \longrightarrow G$ telle que $U^i_{jk}(x, g_0(x)) = u^i_{jk}$. Nous définissons alors une nouvelle forme vectorielle $\eta = g_0 \cdot \omega$. E. Cartan a montré que le problème de G-équivalence considéré se ramène à un problème de H-équivalence et il s'agit ainsi de reprendre l'algorithme en calculant les équations de structure de la forme $\theta = h.\eta$ avec $h \in H$.

Les G-structures étudiées ici ont des groupes de symétries locales de dimension finie. Dès lors, si les valeurs U^i_{jk} sont constantes ou trop difficiles à normaliser, nous pouvons prolonger le problème en un problème équivalent de la manière suivante.

Nous commençons par résoudre les équations :

$$A^i_{j\kappa} r^\kappa_k - A^i_{k\kappa} r^\kappa_j = 0 \quad i,j,k = 1,\dots,m.$$

Ceci nous permet de savoir quelles combinaisons linéaires des formes θ^j nous pouvons ajouter à chaque composante de la 1-forme vectorielle (θ,α) tout en préservant les équations de structure obtenues après absorption au moment où nous décidons de prolonger le problème. Soit $G^{(1)}$ le sous-groupe abélien de $GL_{m+s}(\mathbb{C})$ constitué des matrices :

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ r^\kappa_j & I_s \end{pmatrix}.$$

E. Cartan a démontré que la G-structure P considérée comme une variété admet une $G^{(1)}$-structure et qu'on peut se ramener à un problème de $G^{(1)}$-équivalence sur P. Nous reprenons donc l'algorithme sur la variété P en calculant les équations de structure de la 1-forme différentielle Θ :

$$\Theta \quad = \quad \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ r^\kappa_j & I_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

L'algorithme s'arrête quand on s'est ramené à un problème de $\{e\}$-équivalence par des réductions et des prolongements successifs. Nous disposons alors de méthodes pour résoudre complètement ce type de problème [12].

3. Equivalence de systèmes d'équations aux dérivées partielles analytiques du second ordre et G-équivalence

Nous allons à présent appliquer les techniques exposées au paragraphe 2 à l'étude du problème d'équivalence des systèmes d'équations aux dérivées partielles $(\mathcal{S})$ et $(\mathcal{S}_0)$. Pour l'essentiel, nous suivons la démonstration de S.S. Chern dans [4], en l'adaptant en fait de manière à rester dans le cadre de l'algorithme exposé précédemment. Ceci nous permet, comme on le verra par la suite, d'obtenir des formules explicites pour certains des invariants associés à $(\mathcal{S})$.

Soit $J^2_{n,1}$ l'espace des jets d'ordre deux des fonctions holomorphes à n variables définies au voisinage de l'origine muni des coordonnées $(x, u, u^{(1)}, u^{(2)})$ avec $u^{(1)} = (u_1, \ldots, u_n)$ et $u^{(2)} = (u_{\alpha\beta})_{\alpha\leqslant\beta}$. Soit $\mathcal{M}_\mathcal{S}$ la sous-variété de $J^2_{n,1}$ associée à $(\mathcal{S})$ définie par les équations :

$$u_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta}(x, u, u^{(1)}) \quad \alpha, \beta = 1 \ldots n \quad \alpha \leqslant \beta.$$

Les variables $(x, u, u^{(1)})$ constituent un système de coordonnés holomorphes sur $\mathcal{M}_\mathcal{S}$. Nous considérons alors sur $\mathcal{M}_\mathcal{S}$ les formes de contact associées à $(\mathcal{S})$:

$$\begin{aligned} &\varpi = du - u_\beta dx^\beta \\ &\varpi_\alpha = du_\alpha - F_{\alpha\beta} dx^\beta \quad \alpha = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Nous notons également $\varpi^\alpha = dx^\alpha$. Les variétés intégrales de la distribution $(\varpi,\ \varpi_\alpha)$ sur lesquelles la n-forme $\varpi^1 \wedge \ldots \wedge \varpi^n$ ne s'annule pas sont exactement les 2-graphes des solutions de $(\mathcal{S})$. De plus, la complète intégrabilité du système $(\mathcal{S})$ implique que $\mathcal{M}_\mathcal{S}$ est feuilletée par de tels 2-graphes. La distribution $(\varpi,\ \varpi_\alpha)$ est donc complètement intégrable au sens de Frobenius sur $\mathcal{M}_\mathcal{S}$, que l'on appelle variété des solutions de $(\mathcal{S})$.

Nous définissons de même les 1-formes différentielles $\check{\varpi}$, $\check{\varpi}^\alpha$, $\check{\varpi}_\alpha$ associées à $(\mathcal{S}_0)$ dans les coordonnées $(\check{x}, \check{u}, \check{u}^{(1)})$ sur la variété des solutions $\mathcal{M}_0$ de $(\mathcal{S}_0)$.

Lemme 3.1. — *Soit $\phi(\check{x}, \check{u}) = (x, u)$ une application biholomorphe définie sur un ouvert de $\mathbb{C}^{n+1}$. Les deux systèmes $(\mathcal{S})$ et $(\mathcal{S}_0)$ sont équivalents par ϕ si et seulement si*

$$\phi^{(2)*} \begin{pmatrix} \varpi \\ \varpi^\alpha \\ \varpi_\alpha \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} \check{\varpi} \\ \check{\varpi}^\alpha \\ \check{\varpi}_\alpha \end{pmatrix}$$

où g est une application holomorphe de $\mathcal{M}_\mathcal{S}$ dans le sous-groupe de Lie *complexe G de $GL_{2n+1}(\mathbb{C})$ composé des matrices de la forme :*

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ a^\alpha & m^\alpha_\beta & 0 \\ b_\alpha & 0 & n^\beta_\alpha \end{pmatrix}$$

et $\phi^{(2)}$ désigne ici la restriction à $\mathcal{M}_0$ du prolongement de ϕ à l'espace de jets $J^2_{n,1}$.

Une telle application ϕ applique en effet chaque 2-graphe d'une solution de $(\mathcal{S}_0)$ sur le 2-graphe d'une solution de $(\mathcal{S})$. Les systèmes $(\mathcal{S}_0)$ et $(\mathcal{S})$ sont ainsi équivalents par ϕ.

Nous définissons la G-structure $P_{G,\mathcal{S}}$ au dessus de $\mathcal{M}_\mathcal{S}$ comme la réduction du fibré des corepères de $\mathcal{M}_\mathcal{S}$ compatible avec le feuilletage de $\mathcal{M}_\mathcal{S}$ donné par les 2-graphes des solutions de $(\mathcal{S})$. D'après le lemme 3.1, nous sommes amenés à considérer le problème d'équivalence locale des G-structures $P_{G,0}$ et $P_{G,\mathcal{S}}$ définies respectivement sur les variétés $\mathcal{M}_0$ et $\mathcal{M}_\mathcal{S}$. Nous choisissons des repères de référence sur $\mathcal{M}_0$ et $\mathcal{M}_\mathcal{S}$ de manière à ce que les corepères $(\varpi,\ \varpi^\alpha,\ \varpi_\alpha)$ et $(\breve{\varpi},\ \breve{\varpi}^\alpha,\ \breve{\varpi}_\alpha)$ soient les 1-formes vectorielles canoniquement associées à chacune des deux G-structures (cf paragraphe prédédent). Nous appliquons à présent l'algorithme de Cartan pour nous ramener à un problème d'équivalence de $\{e\}$-structure et en déduire un système d'invariants associé à la G-structure $P_{G,\mathcal{S}}$.

Soit le système de 1-formes différentielles défini sur $P_{G,\mathcal{S}}$ par :

$$\begin{pmatrix} \omega \\ \omega^\alpha \\ \omega_\alpha \end{pmatrix} = g.\begin{pmatrix} \varpi \\ \varpi^\alpha \\ \varpi_\alpha \end{pmatrix}.$$

Une première étape consiste à calculer les différentielles de ces 1-formes, nous écrivons donc :

$$\begin{aligned} d\omega &= \varphi\wedge\omega + a n'^{\gamma}_{\alpha} m'^{\alpha}_{\beta}\omega^\beta\wedge\omega_\gamma + \eta\wedge\omega \\ d\omega^\alpha &= \varphi^\alpha\wedge\omega + \varphi^\alpha_\beta\wedge\omega^\beta + \eta^\alpha\wedge\omega + \eta^\alpha_\beta\wedge\omega^\beta \\ d\omega_\alpha &= \varphi_\alpha\wedge\omega + \phi^\beta_\alpha\wedge\omega_\beta + \theta_\alpha\wedge\omega + \theta^\beta_\alpha\wedge\omega_\beta \end{aligned}$$

où

$$dg.g^{-1} = \begin{pmatrix} \varphi & 0 & 0 \\ \varphi^\alpha & \varphi^\alpha_\beta & 0 \\ \varphi_\alpha & 0 & \mu^\beta_\alpha \end{pmatrix}$$

est une matrice de formes de Maurer-Cartan de G. Les formes $\eta,\ \eta^\alpha,\ \theta_\alpha,\ \eta^\alpha_\beta,\ \theta^\alpha_\beta$ sont des 1-formes différentielles qui s'écrivent comme des combinaisons linéaires à coefficients holomorphes sur $P_{G,\mathcal{S}}$ des formes ω, ω^α, ω_α et on note $(m^\alpha_\beta)^{-1} = (m'^\alpha_\beta)$, $(n^\alpha_\beta)^{-1} = (n'^\alpha_\beta)$.

Nous procédons ensuite à l'absorption de la torsion dans les équations précédentes, les équations de structure du problème s'écrivent alors sous la forme :

$$\begin{aligned} d\omega &= \tilde{\varphi} \wedge \omega + a m'^\alpha_\beta n'^\gamma_\alpha \omega^\beta \wedge \omega_\gamma \\ d\omega^\alpha &= \tilde{\varphi}^\alpha \wedge \omega + \tilde{\varphi}^\alpha_\beta \wedge \omega^\beta \\ d\omega_\alpha &= \tilde{\varphi}_\alpha \wedge \omega + \tilde{\mu}^\beta_\alpha \wedge \omega_\beta \end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} &= \varphi + \eta \\ \tilde{\varphi}^\alpha &= \varphi^\alpha + \eta^\alpha \\ \tilde{\varphi}_\alpha &= \varphi_\alpha + \theta_\alpha \\ \tilde{\varphi}^\alpha_\beta &= \varphi^\alpha_\beta + \eta^\alpha_\beta \\ \tilde{\mu}^\beta_\alpha &= \mu^\beta_\alpha + \theta^\beta_\alpha \end{aligned}$$

sont des formes de Maurer-Cartan modifiées de G. Pour alléger les notations, nous noterons désormais de la même manière les formes de Maurer-Cartan et les formes de Maurer-Cartan modifiées lorsque cela ne porte pas à confusion.

Le procédé de normalisation de l'algorithme de Cartan appliqué à ces équations de structure permet d'effectuer une première réduction du problème :

Lemme 3.2. — *Le problème de G-équivalence considéré se ramène à un problème de H-équivalence où H est le sous-groupe de Lie de G des matrices :*

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ a^\alpha & m^\alpha_\beta & 0 \\ b_\alpha & 0 & n^\beta_\alpha \end{pmatrix}$$

vérifiant $n^\alpha_\beta = a m'^\alpha_\beta$ avec $(m^\alpha_\beta)^{-1} = (m'^\alpha_\beta)$.

Démonstration. — Suivant le procédé de normalisation exposé au paragraphe 2, nous attribuons aux coefficients $a n'^\beta_\alpha m'^\alpha_\gamma$ les valeurs δ^β_γ. H est le sous groupe de Lie de G qui stabilise ces valeurs normalisées. Selon la méthode de Cartan, nous pouvons définir une H-structure $P_{H,\mathcal{S}}$ sur $\mathcal{M}_\mathcal{S}$ et nous étudions à présent le problème de H-équivalence, voir [16], [12] et [9] pour plus de détails sur la démonstration du procédé de normalisation.

Les formes de Maurer-Cartan du groupe de Lie H sont données par la matrice :

$$\begin{pmatrix} \varphi & 0 & 0 \\ \varphi^\alpha & \varphi^\alpha_\beta & 0 \\ \varphi_\alpha & 0 & \delta^\beta_\alpha \varphi - \varphi^\beta_\alpha \end{pmatrix}.$$

Nous obtenons le résultat suivant :

Lemme 3.3. — *Après absorption de la torsion, les équations de structure du nouveau problème sont :*

$$\begin{aligned} d\omega &= \varphi \wedge \omega + \omega^\beta \wedge \omega_\beta \\ d\omega^\alpha &= \varphi^\alpha \wedge \omega + \varphi^\alpha_\beta \wedge \omega^\beta \\ d\omega_\alpha &= \varphi_\alpha \wedge \omega + \varphi \wedge \omega_\alpha - \varphi^\beta_\alpha \wedge \omega_\beta. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Démonstration. — Pour plus de cohérence, nous donnons ici la preuve de S.S. Chern [4].

Du fait que nous travaillons à présent avec le groupe H, nous avons :

$$d\omega = \varphi \wedge \omega + \omega^\beta \wedge \omega_\beta. \tag{3.2}$$

Nous pouvons également écrire $d\omega^\alpha$ sous la forme :

$$d\omega^\alpha = \varphi^\alpha \wedge \omega + \varphi^\alpha_\beta \wedge \omega^\beta \tag{3.3}$$

où φ^α et φ^α_β sont des formes de Maurer-Cartan modifiées du groupe H.

En différenciant (3.2), il vient :

$$(d\varphi - \varphi^\alpha \wedge \omega_\alpha) \wedge \omega + \omega^\alpha \wedge (-d\omega_\alpha + \varphi \wedge \omega_\alpha - \varphi^\beta_\alpha \wedge \omega_\beta) = 0.$$

Il s'en suit que :

$$-d\omega_\alpha + \varphi \wedge \omega_\alpha - \varphi^\beta_\alpha \wedge \omega_\beta \equiv 0 \ mod\ \omega,\ \omega^\beta.$$

Or le système

$$\omega = 0,\ \omega_\alpha = 0$$

est complètement intégrable, donc $d\omega_\alpha \equiv 0\ mod\ \omega,\ \omega_\beta$. Il en découle que :

$$-d\omega_\alpha + \varphi \wedge \omega_\alpha - \varphi^\beta_\alpha \wedge \omega_\beta = a^\gamma_{\alpha\beta}\omega^\beta \wedge \omega_\gamma,$$

avec :

$$a^\gamma_{\alpha\beta} = a^\gamma_{\beta\alpha}.$$

Dès lors, en remplaçant φ^β_α par $\varphi^\beta_\alpha - a^\beta_{\alpha\gamma}\omega^\gamma$, (3.3) demeure inchangée et nous obtenons ainsi les équations (3.1).

Nous constatons qu'il ne reste plus de coefficients de torsion à normaliser dans (3.1). Suivant l'algorithme de Cartan, nous prolongeons donc le problème, c'est-à-dire comme nous l'avons vu au deuxième paragraphe, nous nous intéressons au problème d'équivalence sur la variété $P_{H\mathcal{S}}$ que nous définissons comme il suit. Les formes $\omega,\ \omega^{\alpha}$ et ω_{α} sont intrinsèquement définies sur le fibré $P_{H\mathcal{S}}$ au dessus de $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}$. Nous cherchons les changements de coordonnées linéaires sur $P_{H\mathcal{S}}$ qui laissent stables ces formes ainsi que les équations (3.1). Les formes différentielles $\omega,\ \omega^{\alpha},\ \omega_{\alpha},\ \varphi,\ \varphi^{\alpha}_{\beta},\ \varphi^{\alpha},\ \varphi_{\alpha}$ sont ainsi déterminées à une transformation du groupe $G^{(1)}$ près, où $G^{(1)}$ est le sous-groupe de Lie complexe à $(n+1)^2$ paramètres de $GL_{n^2+4n+2}(\mathbb{C})$ composé des matrices définies par blocs :

$$\begin{pmatrix} I_{2n+1} & 0 \\ R & I_{(n+1)^2} \end{pmatrix}$$

où R est définie par :

$$\begin{pmatrix} I_{2n+1} & 0 \\ & \\ R & I_{(n+1)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ \omega^{\alpha} \\ \omega_{\alpha} \\ \varphi \\ \varphi^{\alpha}_{\beta} \\ \varphi^{\alpha} \\ \varphi_{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega \\ \omega^{\alpha} \\ \omega_{\alpha} \\ \varphi^{*} \\ \varphi^{*\alpha}_{\beta} \\ \varphi^{*\alpha} \\ \varphi^{*}_{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega \\ \omega^{\alpha} \\ \omega_{\alpha} \\ \varphi + t\omega \\ \varphi^{\alpha}_{\beta} + b^{\alpha}_{\beta}\omega \\ \varphi^{\alpha} + b^{\alpha}_{\beta}\omega^{\beta} + c^{\alpha}\omega \\ \varphi_{\alpha} - b^{\beta}_{\alpha}\omega_{\beta} + d_{\alpha}\omega + t\omega_{\alpha} \end{pmatrix}.$$

Nous considérons désormais un problème de $G^{(1)}$-équivalence sur la variété $P_{H,\mathcal{S}}$. Dans ce qui suit, nous continuons à utiliser les techniques de calcul de la démonstration de S.S. Chern dans [4].

Nous différencions les équations (3.1) pour obtenir les autres équations de structure du nouveau problème. Pour ne pas alourdir les notations, nous omettrons désormais les étoiles sauf quand nous voudrons faire ressortir l'action du groupe $G^{(1)}$ sur les valeurs des coefficients de torsion.

En différenciant la première équation de (3.1), nous obtenons :

$$d\varphi \equiv \varphi^{\beta} \wedge \omega_{\beta} + \omega^{\beta} \wedge \varphi_{\beta} \quad mod\ \omega,$$

et ainsi :

$$d\varphi = \psi \wedge \omega + \varphi^{\beta} \wedge \omega_{\beta} + \omega^{\beta} \wedge \varphi_{\beta} \tag{3.4}$$

où ψ est une forme de Maurer-Cartan modifiée de $G^{(1)}$. En différenciant les deux autres équations de (3.1), il vient :

$$\begin{aligned} d^2\omega^{\alpha} &= \Phi^{\alpha}_{\beta} \wedge \omega^{\beta} + \Phi^{\alpha} \wedge \omega = 0 \\ d^2\omega_{\alpha} &= -\Phi^{\beta}_{\alpha} \wedge \omega_{\beta} + \Phi_{\alpha} \wedge \omega = 0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

où nous posons :

$$
\begin{aligned}
\Phi^\alpha_\beta &= d\varphi^\alpha_\beta + \varphi^\alpha \wedge \omega_\beta + \varphi_\beta \wedge \omega^\alpha - \varphi^\alpha_\gamma \wedge \varphi^\gamma_\beta - \delta^\alpha_\beta \omega^\gamma \wedge \varphi_\gamma - \frac{1}{2}\delta^\alpha_\beta \psi \wedge \omega \\
\Phi^\alpha &= d\varphi^\alpha - \varphi^\alpha \wedge \varphi - \varphi^\alpha_\beta \wedge \varphi^\beta - \frac{1}{2}\psi \wedge \omega^\alpha \\
\Phi_\alpha &= d\varphi_\alpha + \varphi^\beta_\alpha \wedge \varphi_\beta - \frac{1}{2}\psi \wedge \omega_\alpha .
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

Des équations (3.5), on tire :

$$\Phi^\alpha_\beta \equiv S^{\alpha\sigma}_{\beta\rho} \omega^\rho \wedge \omega_\sigma \quad mod\ \omega. \tag{3.7}$$

Les fonctions $S^{\alpha\sigma}_{\beta\rho}$ vérifient les relations de symétrie :

$$S^{\alpha\sigma}_{\beta\rho} = S^{\sigma\alpha}_{\beta\rho} = S^{\alpha\sigma}_{\rho\beta}. \tag{3.8}$$

Toujours d'après (3.5), il s'en suit que :

$$
\begin{aligned}
&\Phi^\alpha_\beta = S^{\alpha\sigma}_{\beta\rho} \omega^\rho \wedge \omega_\sigma + \phi^\alpha_\beta \wedge \omega \\
&\Phi^\alpha \equiv \phi^\alpha_\beta \wedge \omega^\beta \quad mod\ \omega \\
&\Phi_\alpha \equiv -\phi^\beta_\alpha \wedge \omega_\beta \quad mod\ \omega
\end{aligned}
$$

où ϕ^β_α est une 1-forme différentielle sur $P_{H,\mathcal{S}}$. Après l'absorption de la torsion, les équations de structure sont donc les équations (3.1) auxquelles on ajoute les nouvelles équations :

$$
\begin{aligned}
d\varphi = &\quad \psi \wedge \omega + \varphi^\beta \wedge \omega_\beta + \omega^\beta \wedge \varphi_\beta \\
d\varphi^\alpha_\beta = &\quad \psi^\alpha_\beta \wedge \omega - \varphi^\gamma_\beta \wedge \varphi^\alpha_\gamma - \varphi_\beta \wedge \omega^\alpha - \varphi^\alpha \wedge \omega_\beta + \delta^\alpha_\beta \omega^\gamma \wedge \varphi_\gamma \\
&\quad + S^{\alpha\sigma}_{\beta\rho} \omega^\rho \wedge \omega_\sigma \\
d\varphi^\alpha = &\quad \psi^\alpha_\beta \wedge \omega^\beta + \lambda^\alpha \wedge \omega + \varphi^\alpha \wedge \varphi + \varphi^\alpha_\beta \wedge \varphi^\beta \\
d\varphi_\alpha = &\quad -\psi^\beta_\alpha \wedge \omega_\beta + \mu_\alpha \wedge \omega + \psi \wedge \omega_\alpha - \varphi^\beta_\alpha \wedge \varphi_\beta
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

où $\psi,\ \psi^\alpha_\beta,\ \lambda^\alpha,\ \mu_\alpha$ sont des formes de Maurer-Cartan modifiées de $G^{(1)}$. Il en découle une première réduction du groupe $G^{(1)}$:

Lemme 3.4. — *Nous imposons :*

$$S^{\alpha\sigma}_{\beta\sigma} = 0. \tag{3.10}$$

Le nouveau groupe correspondant à cette normalisation est le sous-groupe de Lie de $G^{(1)}$ formé des matrices telles que les coefficients b^α_β de la matrice R sont égaux à $\delta^\alpha_\beta \frac{t}{2}$.

Démonstation. — Les coefficients $S^{\alpha\sigma}_{\beta\rho}$ sont des fonctions de $x,\ u,\ u^{(1)}$ et des paramètres respectifs h et $g^{(1)}$ des groupes H et $G^{(1)}$. En calculant $S^{*\alpha\sigma}_{\beta\sigma} = S^{\alpha\sigma}_{\beta\sigma}(x,\ u,\ u^{(1)},\ h,\ g'^{(1)}g^{(1)})$, c'est-à-dire en faisant agir l'élément $g'^{(1)}$ de $G^{(1)}$ sur l'ensemble des valeurs prises par les coefficients de torsion des équations de structure précédentes, nous pouvons savoir comment les fonctions $S^{\alpha\sigma}_{\beta\sigma}$ varient sous l'action de $G^{(1)}$. Nous avons :

$$S^{*\alpha\sigma}_{\beta\rho} = S^{\alpha\sigma}_{\beta\rho} + \delta^\sigma_\rho b^\alpha_\beta + \delta^\sigma_\beta b^\alpha_\rho + \delta^\alpha_\rho b^\sigma_\beta + \delta^\alpha_\beta b^\sigma_\rho - \delta^\alpha_\beta \delta^\sigma_\rho t - \delta^\alpha_\rho \delta^\sigma_\beta t. \tag{3.11}$$

En prenant la trace sur σ et ρ dans (3.11), c'est-à-dire en sommant les relations (3.11) quand les indices σ et ρ sont égaux, nous obtenons :

$$S^{*\alpha\sigma}_{\beta\sigma} = S^{\alpha\sigma}_{\beta\sigma} + (n+2)b^\alpha_\beta - (n+1)\delta^\alpha_\beta t + \delta^\alpha_\beta b^\sigma_\sigma. \tag{3.12}$$

Nous pouvons donc choisir b^α_β en fonction des variables $x,\ u,\ u^{(1)}$, des paramètres h du groupe H et de t de manière à avoir $S^{\alpha\sigma}_{\beta\sigma} = 0$. Nous déterminons ensuite le sous-groupe de $G^{(1)}$ dont l'action sur l'ensemble des valeurs des coefficients de torsion laisse inchangées ces valeurs normalisées. La relation (3.12) impose la condition $b^\alpha_\beta = \delta^\alpha_\beta \frac{t}{2}$ dans la matrice R pour que la somme $S^{*\alpha\sigma}_{\beta\sigma}$ reste nulle.

Nous commençons donc une deuxième boucle de l'algorithme de Cartan avec le groupe et la nouvelle 1-forme différentielle vectorielle définis grâce au lemme.

Nous différencions les 2-formes différentielles Φ^β_α et nous obtenons :

$$d\Phi^\beta_\alpha = \varphi^\beta_\gamma \wedge \Phi^\gamma_\alpha - \varphi^\gamma_\alpha \wedge \Phi^\beta_\gamma + \Phi_\alpha \wedge \omega^\beta + \Phi^\beta \wedge \omega_\alpha + \delta^\beta_\alpha \omega^\gamma \wedge \Phi_\gamma - \frac{1}{2}\delta^\beta_\alpha \Psi \wedge \omega \tag{3.13}$$

avec

$$\Psi = d\psi - \psi \wedge \varphi - 2\varphi^\alpha \wedge \varphi_\alpha. \tag{3.14}$$

Or, grâce à la normalisation (3.10), il vient :

$$\Phi^\alpha_\alpha = \phi^\alpha_\alpha \wedge \omega.$$

En différenciant cette identité, et en comparant avec (3.13) dans laquelle on remplace Φ^α et Φ_α par les valeurs données dans (3.6), nous avons :

$$\phi^\alpha_\beta \equiv 0 \quad mod\ \omega,\ \omega^\rho,\ \omega_\sigma.$$

Nous pouvons donc écrire :

$$\phi^\alpha_\beta \equiv R^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\gamma + T^{\alpha\gamma}_\beta \omega_\gamma \quad mod\ \omega,$$

et finalement :

$$\begin{array}{l}\Phi^\alpha_\beta = S^{\alpha\sigma}_{\beta\rho}\omega^\rho\wedge\omega_\sigma + R^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\gamma\wedge\omega + T^{\alpha\gamma}_\beta\omega_\gamma\wedge\omega\\ \Phi^\alpha \equiv R^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\gamma\wedge\omega^\beta + T^{\alpha\gamma}_\beta\omega_\gamma\wedge\omega^\beta \quad mod\ \omega\\ \Phi_\alpha \equiv -R^\beta_{\alpha\gamma}\omega^\gamma\wedge\omega_\beta - T^{\beta\gamma}_\alpha\omega_\gamma\wedge\omega_\beta \quad mod\ \omega.\end{array} \tag{3.15}$$

Nous en déduisons l'expression des équations de structure correspondant à la boucle de l'algorithme que nous venons d'effectuer. Il s'agit des équations (3.1) auxquelles viennent se joindre les équations :

$$\begin{array}{ll} d\varphi = & \psi\wedge\omega + \omega^\beta\wedge\varphi_\beta + \varphi^\beta\wedge\omega_\beta\\ d\varphi^\alpha_\beta = & \frac{1}{2}\delta^\alpha_\beta\psi\wedge\omega - \varphi^\gamma_\beta\wedge\varphi^\alpha_\gamma - \varphi_\beta\wedge\omega^\alpha - \varphi^\alpha\wedge\omega_\beta + \delta^\alpha_\beta\omega^\gamma\wedge\varphi_\gamma\\ & +S^{\alpha\sigma}_{\beta\rho}\omega^\rho\wedge\omega_\sigma + R^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\gamma\wedge\omega + T^{\alpha\gamma}_\beta\omega_\gamma\wedge\omega\\ d\varphi^\alpha = & \frac{1}{2}\psi\wedge\omega^\alpha + \lambda^\alpha\wedge\omega + \varphi^\alpha\wedge\varphi + \varphi^\alpha_\beta\wedge\varphi^\beta\\ & +R^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\gamma\wedge\omega^\beta + T^{\alpha\gamma}_\beta\omega_\gamma\wedge\omega^\beta\\ d\varphi_\alpha = & \frac{1}{2}\psi\wedge\omega_\alpha + \mu_\alpha\wedge\omega - \varphi^\beta_\alpha\wedge\varphi_\beta\\ & -R^\beta_{\alpha\gamma}\omega^\gamma\wedge\omega_\beta - T^{\beta\gamma}_\alpha\omega_\gamma\wedge\omega_\beta\end{array} \tag{3.16}$$

où $\psi,\ \lambda^\alpha,\ \mu_\alpha$ sont ici aussi des formes de Maurer-Cartan modifiées.

De la même manière qu'au lemme 3.4, nous établissons comment les fonctions $R^\beta_{\alpha\gamma}$ et $T^{\beta\gamma}_\alpha$ sont transformées sous l'action du sous-groupe de $G^{(1)}$ avec lequel nous travaillons :

$$\begin{array}{l} R^{*\beta}_{\alpha\gamma} = R^\beta_{\alpha\gamma} - \delta^\beta_\gamma d_\alpha - \frac{1}{2}\delta^\beta_\alpha d_\gamma\\ T^{*\beta\gamma}_\alpha = T^{\beta\gamma}_\alpha - \delta^\gamma_\gamma c^\beta - \frac{1}{2}\delta^\beta_\alpha c^\gamma.\end{array} \tag{3.17}$$

Lemme 3.5. — *Nous pouvons imposer :*

$$R^\alpha_{\alpha\gamma} = T^{\alpha\gamma}_\alpha = 0. \tag{3.18}$$

Cette nouvelle normalisation conduit à reprendre l'algorithme avec le groupe de Lie $H^{(1)}$ composé des matrices

$$\begin{pmatrix} I_{2n+1} & 0\\ R & I_{(n+1)^2}\end{pmatrix}$$

où R est définie par :

$$\begin{pmatrix} I_{2n+1} & 0\\ & \\ R & I_{(n+1)^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega\\ \omega^\alpha\\ \omega_\alpha\\ \varphi\\ \varphi^\alpha_\beta\\ \varphi^\alpha\\ \varphi_\alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\omega\\ \omega^\alpha\\ \omega_\alpha\\ \varphi + t\omega\\ \varphi^\alpha_\beta + \delta^\alpha_\beta\frac{t}{2}\omega\\ \varphi^\alpha + \frac{t}{2}\omega^\alpha\\ \varphi_\alpha + \frac{t}{2}\omega_\alpha\end{pmatrix}.$$

La preuve de ce résultat provient directement du calcul mené ci-dessus, en appliquant un raisonnement identique à celui du lemme 3.4. En prenant la trace sur α et β dans les équations (3.17), nous exprimons les paramètres c^α et d_α en fonction des variables x, u, $u^{(1)}$ et des paramètres du groupe H de façon à ce que les conditions (3.18) soient vérifiées. Puis nous cherchons le stabilisateur de ces nouvelles valeurs et nous obtenons ainsi le groupe $H^{(1)}$.

Nous définissons une $H^{(1)}$-structure $P^{(1)}_{\mathcal{S}}$ sur $P_{H,\mathcal{S}}$ et nous commençons donc une nouvelle boucle de l'algorithme avec le groupe de Lie à un paramètre $H^{(1)}$.

Nous différencions l'équation (3.4), ce qui nous donne :

$$d^2\varphi = \Phi^\alpha \wedge \omega_\alpha - \omega^\alpha \wedge \Phi_\alpha + \Psi \wedge \omega = 0. \tag{3.19}$$

D'autre part, les normalisations (3.10) et (3.18) des boucles précédentes permettent d'écrire la trace de (3.13) sous la forme :

$$d\Phi^\alpha_\alpha = (n+1)\omega^\alpha \wedge \Phi_\alpha + \Phi^\alpha \wedge \omega_\alpha - \frac{n}{2}\Psi \wedge \omega = 0. \tag{3.20}$$

De (3.19) et (3.20), nous tirons :

$$\begin{aligned} \Phi^\alpha \wedge \omega_\alpha + \tfrac{1}{2}\Psi \wedge \omega = 0 \\ \Phi_\alpha \wedge \omega^\alpha - \tfrac{1}{2}\Psi \wedge \omega = 0 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Nous déduisons de (3.21) :

$$\Psi \equiv Q^\beta_\alpha \omega^\alpha \wedge \omega_\beta \quad mod\ \omega.$$

En utilisant à nouveau (3.21) ainsi que les expressions (3.15) des 2-formes Φ^α et Φ_α nous obtenons les relations de symétrie :

$$R^\beta_{\alpha\gamma} = R^\beta_{\gamma\alpha},\ T^{\beta\gamma}_\alpha = T^{\gamma\beta}_\alpha. \tag{3.22}$$

De (3.15), (3.21) et (3.22), nous tirons les expressions finales des formes Φ^α et Φ_α :

$$\begin{aligned} \Phi^\alpha &= T^{\alpha\gamma}_\beta \omega_\gamma \wedge \omega^\beta + \frac{1}{2}Q^\alpha_\beta \omega^\beta \wedge \omega + L^{\alpha\beta}\omega_\beta \wedge \omega \\ \Phi_\alpha &= R^\beta_{\alpha\gamma}\omega_\beta \wedge \omega^\gamma + \frac{1}{2}Q^\beta_\alpha \omega_\beta \wedge \omega + P_{\alpha\beta}\omega^\beta \wedge \omega. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Les coefficients $L^{\alpha\beta}$ et $P_{\alpha\beta}$ vérifient les relations de symétrie :

$$\begin{aligned} L^{\alpha\beta} &= L^{\beta\alpha} \\ P_{\alpha\beta} &= P_{\beta\alpha}. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Avec (3.23), nous établissons les nouvelles équations de structure du problème :

$$
\begin{aligned}
d\varphi = \ & \psi \wedge \omega + \omega^\beta \wedge \varphi_\beta + \varphi^\beta \wedge \omega_\beta \\
d\varphi^\alpha_\beta = \ & \frac{1}{2}\delta^\alpha_\beta \psi \wedge \omega - \varphi^\gamma_\beta \wedge \varphi^\alpha_\gamma - \varphi_\beta \wedge \omega^\alpha - \varphi^\alpha \wedge \omega_\beta + \delta^\alpha_\beta \omega^\gamma \wedge \varphi_\gamma \\
& + S^{\alpha\sigma}_{\beta\rho}\omega^\rho \wedge \omega_\sigma + R^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\gamma \wedge \omega + T^{\alpha\gamma}_\beta \omega_\gamma \wedge \omega \\
d\varphi^\alpha = \ & \frac{1}{2}\psi \wedge \omega^\alpha + \varphi^\alpha \wedge \varphi + \varphi^\alpha_\beta \wedge \varphi^\beta \\
& + T^{\alpha\gamma}_\beta \omega_\gamma \wedge \omega^\beta + \frac{1}{2} Q^\alpha_\beta \omega^\beta \wedge \omega + L^{\alpha\beta}\omega_\beta \wedge \omega \\
d\varphi_\alpha = \ & \tfrac{1}{2}\psi \wedge \omega_\alpha - \varphi^\beta_\alpha \wedge \varphi_\beta \\
& + R^\beta_{\alpha\gamma}\omega_\beta \wedge \omega^\gamma + \frac{1}{2} Q^\beta_\alpha \omega_\beta \wedge \omega + P_{\alpha\beta}\omega^\beta \wedge \omega.
\end{aligned}
\tag{3.25}
$$

Il s'agit ensuite procéder à l'absorption de la torsion dans ces équations.

Lemme 3.6. — *Nous pouvons imposer :*

$$Q^\alpha_\alpha = 0 \tag{3.26}$$

en remplaçant ψ par $\psi - \frac{1}{n}Q^\gamma_\gamma\omega$ dans (3.25).

Remplacer ψ par $\psi - \frac{1}{n}Q^\gamma_\gamma\omega$ ne modifie pas la forme des expressions (3.25), simplement les nouveaux coefficients Q^α_β vérifient la condition de trace (3.26).

À ce stade, nous décidons de prolonger à nouveau le problème. Il apparait que nous ne disposons d'aucun degré de liberté sur la forme de Maurer-Cartan modifiée ψ, c'est-à-dire que nous ne pouvons lui ajouter aucune combinaison linéaire des formes ω, ω^α, ω_α, φ, φ^α_β, φ^α, φ_α sans modifier ni les équations de structures du problème (3.25) ni les conditions de trace (3.26), (3.10), (3.18). Le groupe intervenant dans ce prolongement est donc trivial et nous sommes ramenés à un problème de $\{e\}$-équivalence sur la variété $P^{(1)}_S$. Il ne reste plus maintenant qu'à calculer $d\psi$. Nous avons :

$$d\Psi = -\Psi \wedge \varphi + 2\varphi^\alpha \wedge \Phi_\alpha - 2\Phi^\alpha \wedge \varphi_\alpha. \tag{3.27}$$

D'autre part :

$$\Psi = Q^\beta_\alpha \omega^\alpha \wedge \omega_\beta + \omega \wedge \nu$$

où ν est une 1-forme différentielle. En calculant la différentielle de cette dernière expression et en utilisant (3.23), il vient :

$$(dQ^\beta_\alpha + Q^\beta_\gamma \varphi^\gamma_\alpha + 2Q^\beta_\alpha \varphi - Q^\gamma_\alpha \varphi^\beta_\gamma + 2R^\beta_{\gamma\alpha}\varphi^\gamma - 2T^{\gamma\beta}_\alpha \varphi_\gamma + \delta^\beta_\alpha \nu) \wedge \omega^\alpha \wedge \omega_\beta \equiv 0 \quad mod\, \omega. \tag{3.28}$$

Grâce aux conditions $Q_\alpha^\alpha = 0$, $R_{\gamma\alpha}^\alpha = 0$ et $T_\alpha^{\gamma\alpha} = 0$, nous obtenons finalement :

$$\nu \equiv 0 \quad mod\, \omega,\ \omega^\alpha,\ \omega_\beta,$$

et donc :

$$d\psi = \psi \wedge \varphi + 2\varphi^\alpha \wedge \varphi_\alpha + Q_\alpha^\beta \omega^\alpha \wedge \omega_\beta + K^\alpha \omega_\alpha \wedge \omega + H_\alpha \omega^\alpha \wedge \omega. \tag{3.29}$$

Arrivé à ce stade, l'algorithme de Cartan s'arrête. À l'aide de réductions et de prolongements successifs du problème de G-équivalence initial, nous avons associé au système d'équations aux dérivées partielles $(\mathcal{S})$ un corepère $(\omega,\ \omega^\alpha,\ \omega_\alpha, \varphi,\ \varphi_\beta^\alpha,\ \varphi^\alpha,\ \varphi_\alpha,\ \psi)$ défini localement sur la variété $P_{\mathcal{S}}^{(1)}$ et entièrement déterminé par les équations de structure et les conditions (3.8), (3.10), (3.18), (3.22), (3.24) et (3.26). Nous avons donc établi le théorème donné par S.S. Chern dans [4] :

Théorème 3.7. — *Soit un système d'équations aux dérivées partielles complètement intégrable* $(\mathcal{S})$*. Il existe un unique système de 1-formes différentielles linéairement indépendantes*

$$\omega,\ \omega^\alpha,\ \omega_\alpha, \varphi,\ \varphi_\beta^\alpha,\ \varphi^\alpha,\ \varphi_\alpha,\ \psi$$

définies sur l'espace des variables $(x,\ u,\ ,u^{(1)},\ a,\ a^\alpha,\ b_\alpha, m_\beta^\alpha,\ t)$ *qui est entièrement déterminé par les équations de structure :*

$$\begin{array}{ll}
d\omega = & \varphi \wedge \omega + \omega^\beta \wedge \omega_\beta \\
d\omega^\alpha = & \varphi^\alpha \wedge \omega + \varphi_\beta^\alpha \wedge \omega^\beta \\
d\omega_\alpha = & \varphi_\alpha \wedge \omega + \varphi \wedge \omega_\alpha - \varphi_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta \\
d\varphi = & \psi \wedge \omega + \omega^\beta \wedge \varphi_\beta + \varphi^\beta \wedge \omega_\beta \\
d\varphi_\beta^\alpha = & \dfrac{1}{2}\delta_\beta^\alpha \psi \wedge \omega - \varphi_\beta^\gamma \wedge \varphi_\gamma^\alpha - \varphi_\beta \wedge \omega^\alpha - \varphi^\alpha \wedge \omega_\beta + \delta_\beta^\alpha \omega^\gamma \wedge \varphi_\gamma \\
 & +S_{\beta\rho}^{\alpha\sigma} \omega^\rho \wedge \omega_\sigma + R_{\beta\gamma}^\alpha \omega^\gamma \wedge \omega + T_\beta^{\alpha\gamma} \omega_\gamma \wedge \omega \\
d\varphi^\alpha = & \dfrac{1}{2}\psi \wedge \omega^\alpha + \varphi^\alpha \wedge \varphi + \varphi_\beta^\alpha \wedge \varphi^\beta \\
 & +T_\beta^{\alpha\gamma} \omega_\gamma \wedge \omega^\beta + \frac{1}{2} Q_\beta^\alpha \omega^\beta \wedge \omega + L^{\alpha\beta} \omega_\beta \wedge \omega \\
d\varphi_\alpha = & \dfrac{1}{2}\psi \wedge \omega_\alpha - \varphi_\alpha^\beta \wedge \varphi_\beta \\
 & +R_{\alpha\gamma}^\beta \omega_\beta \wedge \omega^\gamma + \frac{1}{2} Q_\alpha^\beta \omega_\beta \wedge \omega + P_{\alpha\beta} \omega^\beta \wedge \omega \\
d\psi = & \psi \wedge \varphi + 2\varphi^\alpha \wedge \varphi_\alpha \\
 & +Q_\alpha^\beta \omega^\alpha \wedge \omega_\beta + K^\alpha \omega_\alpha \wedge \omega + H_\alpha \omega^\alpha \wedge \omega,
\end{array} \tag{3.30}$$

et les conditions de trace :

$$\begin{array}{l}
S_{\beta\sigma}^{\alpha\sigma} = 0 \\
R_{\alpha\gamma}^\alpha = T_\alpha^{\alpha\gamma} = 0 \\
Q_\alpha^\alpha = 0,
\end{array} \tag{3.31}$$

De plus, les coefficients intervenant dans (3.30) vérifient les relations de symétrie :

$$\begin{array}{l} S^{\alpha\sigma}_{\beta\rho} = S^{\sigma\alpha}_{\beta\rho} = S^{\alpha\sigma}_{\rho\beta} \\ R^{\beta}_{\alpha\gamma} = R^{\beta}_{\gamma\alpha} \\ T^{\beta\gamma}_{\alpha} = T^{\gamma\beta}_{\alpha} \\ L^{\alpha\beta} = L^{\beta\alpha} \\ P_{\alpha\beta} = P_{\beta\alpha}. \end{array} \tag{3.32}$$

Nous avons donc ramené le problème d'équivalence des systèmes d'équations aux dérivées partielles $(\mathcal{S}_0)$ et $(\mathcal{S})$ à un problème de $\{e\}$-équivalence sur les variétés $P_0^{(1)}$ et $P_{\mathcal{S}}^{(1)}$ correspondantes.

4. Interprétation géométrique

Nous reprenons les notations de J.J. Faran [7] et nous appellons $\mathcal{E}$ le sous-fibré de $T^*\mathcal{M}$ formé des multiples $a\varpi$ avec $a \neq 0$ de la forme de contact ϖ. La forme $\omega = a\varpi$ est ainsi intrinsèquement définie sur $\mathcal{E}$ et nous avons :

$$d\omega = \varphi \wedge \omega + \omega^{\beta} \wedge \omega_{\beta}, \tag{4.1}$$

avec $\omega^{\alpha} = \dfrac{1}{b}\varpi^{\alpha}$, $\omega^{\alpha} = \dfrac{1}{b}\varpi^{\alpha}$ et $b^2 = a$.

Les formes ω, ω^{α}, ω_{α}, φ constituent une base du fibré cotangent de $\mathcal{E}$. Soit G_1 le groupe des matrices de la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a^{\alpha} & m^{\alpha}_{\beta} & 0 & 0 \\ b_{\alpha} & 0 & n^{\beta}_{\alpha} & 0 \\ t & -m^{\gamma}_{\beta} b_{\gamma} & n^{\beta}_{\gamma} a^{\gamma} & 1 \end{pmatrix}$$

où (a^{α}) et (b_{α}) sont des vecteurs de $\mathbb{C}^n$, $t \in \mathbb{C}$, $(m^{\alpha}_{\beta}) \in GL_n(\mathbb{C})$ et $n^{\alpha}_{\gamma} m^{\gamma}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta}$.

L'équation (4.1) et la forme ω sont invariantes sous l'action des transformations de G_1, c'est-à-dire que les 1-formes différentielles :

$$\begin{array}{lcl} \omega^* & = & \omega \\ \omega^{*\alpha} & = & a^{\alpha}\omega + m^{\alpha}_{\beta}\omega^{\beta} \\ \omega^*_{\alpha} & = & b_{\alpha}\omega + n^{\beta}_{\alpha}\omega_{\beta} \\ \varphi^* & = & \varphi + t\omega - m^{\gamma}_{\beta} b_{\gamma}\omega^{\beta} + n^{\beta}_{\gamma} a^{\gamma}\omega_{\beta} \end{array}$$

vérifient l'équation (4.1).

Le fibré $\mathcal{E}$ possède donc une G_1-structure notée $\mathcal{Y}$ qui est la réduction du fibré des corepères au dessus de $\mathcal{E}$ laissant ω et (4.1) inchangées. De la propriété d'unicité du théorème 3.7, il découle que nous pouvons voir les formes ω, ω^α, ω_α, φ, φ^α_β, φ^α, φ_α, ψ associées au système $(\mathcal{S})$ comme des formes sur la variété $\mathcal{Y}$. Leurs expressions en coordonnées locales ainsi que celles de leurs différentielles restent donc les mêmes.

À présent grâce à ce système de 1-formes différentielles, nous construisons une connexion de Cartan sur le G_1-fibré $\mathcal{Y}$. Pour cela, rappelons quelques définitions et notations. Pour un vecteur A de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_1$ de G_1, on note A^* le champ de vecteur vertical sur $\mathcal{Y}$ induit par l'action de G_1 sur $\mathcal{Y}$. L'action à gauche de $g \in G_1$ sur $\mathcal{Y}$ est notée L_g Une connexion de Cartan sur $\mathcal{Y}$ est la donnée d'une 1-forme différentielle π sur $\mathcal{Y}$ à valeurs dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_{n+2}(\mathbb{C})$ qui vérifie :

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & \pi(A^*) = A \\ \text{(ii)} & L^*_{g^{-1}}(\pi) = \mathrm{ad}_g \pi \\ \text{(iii)} & \pi(X) = 0 \Leftrightarrow X = 0 \text{ pour tout } X \in \mathcal{Y} \end{array} \tag{4.2}$$

où $\mathrm{ad}_g(\pi) = g.\pi.g^{-1}$.

Pour commencer, nous examinons ce qui se passe dans le cas du système $(\mathcal{S}_0)$.

4.1. Le cas plat

Soit $(\mathcal{S}_0)$ le système d'équations différentielles :

$$(\mathcal{S}_0) \ : \ u_{x^\alpha x^\beta} = 0, \quad \alpha,\ \beta = 1, \dots, n.$$

On lui associe la sous-variété de l'espace de jets $J^2_{n,1}$:

$$\mathcal{M}_0 = \{(x, u, u^{(1)}, u^{(2)}) \in J^2_{n,1} \mid u^{(2)} = 0\}.$$

Remarquons que nous pouvons considérer $\mathcal{M}_0$ comme une hypersurface complexe de l'espace $\mathbb{C}^{n+1}_{(x,u)} \times \mathbb{C}^{n+1}_{(\zeta,\omega)}$ grâce à l'application biholomorphe :

$$\begin{array}{rlcl} \phi \ : & \mathcal{M}_0 & \longrightarrow & \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^{n+1} \\ & (x, u, u^{(1)}, 0) & \longrightarrow & (x, u, u^{(1)}, u - u_\gamma x^\gamma) \end{array}$$

En tant qu'hypersurface complexe de $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^{n+1}$, $\mathcal{M}_0$ est ainsi l'ensemble des points de coordonnées (x, u, ζ, ω) tels que : $u = \omega + x^\gamma \zeta_\gamma$.

D'autre part, on peut voir l'espace vectoriel complexe $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^{n+1}$ comme une partie de l'espace $\mathbb{P}^{n+1} \times \mathbb{P}^{n+1}$ en ajoutant à chaque $\mathbb{C}^{n+1}$

un hyperplan à l'infini. En fait, si nous munissons l'espace $\mathbb{P}^{n+1} \times \mathbb{P}^{n+1}$ d'un système de coordonnées homogènes noté $([x^0, x^1, \ldots, x^n, u], [\zeta^0, \zeta^1, \ldots, \zeta^n, \omega])$, les points de $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^{n+1}$ sont ceux admettant pour coordonnées homogènes $([1, x^1, \ldots, x^n, u], [1, \zeta^1, \ldots, \zeta^n, \omega])$. Nous notons également $\mathcal{M}_0$ la sous-variété algébrique de $\mathbb{P}^{n+1} \times \mathbb{P}^{n+1}$ des points dont les coordonnées homogènes vérifient l'équation :

$$u\zeta_0 = \omega x^0 + x^\gamma \zeta_\gamma.$$

Nous posons : $\langle (x^0, x^1, \ldots, x^n, u), (\zeta^0, \zeta^1, \ldots, \zeta^n, \omega) \rangle = \omega x^0 - u\zeta_0 + x^\gamma \zeta_\gamma$.

Nous introduisons à présent la notion de $\mathcal{M}_0$-repère [7] :

Définition 4.1. — *Un $\mathcal{M}_0$-repère est un ensemble de vecteurs $(Z^0, \ldots, Z^{n+1}, Z_0, \ldots, Z_{n+1})$ de $\mathbb{C}^{n+2}$ vérifiant $\langle Z^A, Z_B \rangle = h^A_B$ avec :*

$$\begin{array}{l} h^0_{n+1} = \langle Z^0, Z_{n+1} \rangle = 1 \\ h^{n+1}_0 = \langle Z^{n+1}, Z_0 \rangle = -1 \\ h^\alpha_\beta = \langle Z^\alpha, Z_\beta \rangle = \delta^\alpha_\beta, \quad \alpha,\ \beta\ =\ 1, \ldots, n \\ h^A_B = \langle Z^A, Z_B \rangle = 0 \,\text{sinon.} \end{array} \tag{4.3}$$

et $\det(Z^0, \ldots, Z^{n+1}) = \det(Z_0, \ldots, Z_{n+1}) = 1.$

Le groupe $SL_{n+2}(\mathbb{C})$ agit sur l'ensemble des $\mathcal{M}_0$-repères de la manière suivante : si $g = (g^A_B)$ est une matrice de $SL_{n+2}(\mathbb{C})$ et $(Z^A,\ Z_A)$ est un $\mathcal{M}_0$-repère, nous posons :

$$\begin{array}{l} Z^{*A} = g^A_B Z^B \\ Z^*_A = k^B_A Z_B \text{ avec } k^B_A = h'^B_C g'^C_D h^D_A,\ g^{-1} = (g'^A_B) \text{ et } h^{-1} = (h'^A_B). \end{array} \tag{4.4}$$

Autrement dit, Z^{*A} est la A-ième ligne du produit matriciel $g.Z$, où Z est la matrice dont les lignes sont les Z^A et Z^*_A est la A-ième ligne du produit ${}^tk.Z'$ où Z' est la matrice dont les lignes sont les Z_A.

Nous vérifions facilement que $(Z^{*A},\ Z^*_A)$ est un $\mathcal{M}_0$-repère. De plus, en se donnant un $\mathcal{M}_0$-repère de référence $(E^A,\ E_A)$, l'ensemble des $\mathcal{M}_0$-repères peut être indentifié au groupe $SL_{n+2}(\mathbb{C})$ grâce à (4.4).

Observons que si (Z^A, Z_A) est un $\mathcal{M}_0$-repère, le point de coordonnées homogènes $([Z^0], [Z_0])$ appartient à $\mathcal{M}_0$. Nous en déduisons que $SL_{n+2}(\mathbb{C})$ agit sur $\mathcal{M}_0$ en considérant :

$$([Z^0], [Z_0]) \longrightarrow ([Z^{*0}], [Z^*_0]).$$

Le sous-groupe K de $SL_{n+2}(\mathbb{C})$ des matrices laissant $\mathcal{M}_0$ fixe point par point pour l'action que l'on vient de définir est composé des matrices de la forme $(\varepsilon\delta_B^A)$ avec $\varepsilon^{n+2}=1$. Le groupe $SL_{n+2}(\mathbb{C})/K = PSL_{n+2}(\mathbb{C})$ agit donc de manière effective sur $\mathcal{M}_0$.

Nous appelons $\mathcal{F}_0$ le quotient de l'ensemble des $\mathcal{M}_0$-repères par la relation d'équivalence :

$$(Z^A,\ Z_A)\ \equiv\ (Z'^A,\ Z'_A)\ \Leftrightarrow\ \exists\ \varepsilon \text{ avec } \varepsilon^{n+2} \text{ et } Z'^A = \varepsilon Z^A,\ Z'_A = \varepsilon^{-1} Z_A.$$

Le groupe $PSL_{n+2}(\mathbb{C})$ agit sur $\mathcal{F}_0$ de la même manière qu'en (4.4). Nous identifions donc $\mathcal{F}_0$ avec le groupe $PSL_{n+2}(\mathbb{C})$.

Le stabilisateur H du point $([Z^0],[Z_0])$ pour l'action de $SL_{n+2}(\mathbb{C})$ sur l'ensemble des $\mathcal{M}_0$-repères est le groupe H des matrices :

$$\begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ t^\alpha & t^\alpha_\beta & 0 \\ \tau & \tau_\beta & \sigma \end{pmatrix}$$

avec $s\sigma\det(t^\alpha_\beta)=1$.

Explicitement, il s'agit des transformations :

$$\begin{array}{lcl} Z^{*0} & = & sZ^0 \\ Z^{*\alpha} & = & t^\alpha Z^0 + t^\alpha_\beta Z^\beta, \quad \alpha = 1,\ldots,n \\ Z^{*n+1} & = & \tau Z^0 + \tau_\beta Z^\beta + \sigma Z^{n+1} \\ Z^*_0 & = & s' Z_0 \\ Z^*_\alpha & = & -\tau'_\alpha Z_0 + t'^\beta_\alpha Z_\beta, \quad \alpha = 1,\ldots,n \\ Z^*_{n+1} & = & -\tau' Z^0 + t'^\beta Z_\beta + \sigma' Z_{n+1} \end{array} \tag{4.5}$$

où on emploie la notation $(g^A_B)^{-1} = (g'^A_B)$.

Soit $H_0 = H/K$. Nous avons alors :

$$\mathcal{M}_0\ \cong\ PSL_{n+2}(\mathbb{C})/H_0.$$

Soit à présent $(Z^A,\ Z_A)$ un $\mathcal{M}_0$-repère, on note Z la matrice de $SL_{n+2}(\mathbb{C})$ dont les lignes sont les Z^A. Comme on l'a déja vu, les formes de Maurer-Cartan du groupe $SL_{n+2}(\mathbb{C})$ sont données par la matrice de 1-formes différentielles $\pi = dZ.Z^{-1}$ à valeurs dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_{n+2}(\mathbb{C})$ de $SL_{n+2}(\mathbb{C})$. Notons que les groupes $SL_{n+2}(\mathbb{C})$ et $PSL_{n+2}(\mathbb{C})$ ont la même algèbre de Lie et les mêmes formes de Maurer-Cartan car le groupe K est discret.

Des relations :

$$dZ^A = \pi^A_B Z^B, \tag{4.6}$$

nous déduisons les équations de structure du groupe $SL_{n+2}(\mathbb{C})$:

$$d\pi^A_B = \pi^A_C \wedge \pi^C_B \tag{4.7}$$

Nous pouvons maintenant expliciter le lien entre $PSL_{n+2}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{M}_0$ et $\mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{M}_0$. Soit le $\mathcal{M}_0$-repère $(E^A,\ E_A)$ défini par :

$$\begin{array}{lcl} E^0 & = & (1, x^1, \ldots, x^n) \\ E^\alpha & = & (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0, \zeta_\alpha) \\ E^{n+1} & = & (0, \ldots, 0, 1) \\ E_0 & = & (1, \zeta_1, \ldots, \zeta_n) \\ E_\alpha & = & (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0, -x^\alpha) \\ E_{n+1} & = & (0, \ldots, 0, 1). \end{array}$$

Un calcul direct donne :

$$\begin{array}{lcl} \langle dE^0, E_0 \rangle & = & -\varpi \\ \langle dE^\alpha, E_0 \rangle & = & -\varpi_\alpha \\ \langle dE^0, E_\alpha \rangle & = & \varpi^\alpha. \end{array}$$

Maintenant, si $(Z^A,\ Z_A)$ est un $\mathcal{M}_0$-repère issu de $(E^A,\ E_A)$ par une transformation du groupe H, les équations (4.5) nous donnent :

$$\begin{array}{lcl} \langle dZ^0, Z_0 \rangle & = & -s\sigma' \varpi \\ \langle dZ^\alpha, Z_0 \rangle & = & -\sigma' t^\alpha \varpi - \displaystyle\sum_\beta \sigma' t^\alpha_\beta \varpi_\beta \\ \langle dZ^0, Z_\alpha \rangle & = & s\tau'_\alpha \varpi + \displaystyle\sum_\beta s t'^\beta_\alpha \varpi^\beta. \end{array} \tag{4.8}$$

Posons :

$$\begin{array}{l} a = s\sigma' \\ a^\alpha = s\tau'_\alpha \\ b_\alpha = \sigma' t^\alpha \\ m^\alpha_\beta = s t'^\beta_\alpha \\ n^\beta_\alpha = \sigma' t^\alpha_\beta. \end{array} \tag{4.9}$$

On a ainsi d'après (4.6) :

$$\begin{array}{l} \langle dZ^0, Z_0 \rangle = -\pi^0_{n+1} = -\omega \\ \langle dZ^\alpha, Z_0 \rangle = -\pi^\alpha_{n+1} = -\omega_\alpha \\ \langle dZ^0, Z_\alpha \rangle = \pi^0_\alpha = \omega^\alpha. \end{array}$$

Les équations de structure (4.7) du groupe $SL_{n+2}(\mathbb{C})$ et les équations (3.30) associées au système $(\mathcal{S}_0)$ nous permettent de conclure que :

$$\pi = \begin{pmatrix} \pi^0_0 & \omega^\beta & \omega \\ \varphi_\alpha & \delta^\beta_\alpha \pi^0_0 - \varphi^\beta_\alpha & \omega_\alpha \\ -\frac{1}{2}\psi & -\varphi^\beta & \pi^0_0 - \varphi \end{pmatrix} \tag{4.10}$$

avec $(n+2)\pi_0^0 = \varphi_\alpha^\alpha + \varphi$ de façon à avoir une matrice de 1-formes à valeurs dans $\mathfrak{sl}_{n+2}(\mathbb{C})$. Nous vérifions de plus que sous l'action d'un changement de $\mathcal{M}_0$-repère issu de H, la forme $\varphi = \pi_0^0 - \pi_{n+1}^{n+1}$ devient :

$$\varphi^* = (s\tau' - \tau\sigma')\omega + \sum_\beta \tau_\beta \sigma' \omega_\beta - \sum_\beta t'^\beta s\omega^\beta. \tag{4.11}$$

Nous nous intéressons au G_1-fibré $\mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{E}$, nous considérons donc les transformations de H telles que $a = \sigma^{-1}s = 1$ et on notera H_1 le groupe de ces matrices. Grâce aux relations (4.9) et aux équations (4.8) et (4.11), nous obtenons :

$$G_1 \cong H_1/K \tag{4.12}$$

Soit $Z \in SL_{n+2}(\mathbb{C})$, l'équation (4.6) s'écrit matriciellement :

$$dZ = \pi.Z \tag{4.13}$$

Si nous effectuons le changement de $\mathcal{M}_0$-repère $Z^* = g.Z$ avec $g \in H_1$, nous avons :

$$dZ^* = \pi^*.Z^*$$

et (4.13) nous permet de conclure que :

$$\pi^* = \mathrm{ad}_g(\pi).$$

La propriété (i) de (4.2) est satifaite du fait que π est une matrice de formes de Maurer-Cartan de $SL_{n+2}(\mathbb{C})$; quant à la propriété (iii), elle est vraie car les formes du théorème 3.7 forment un corepère sur la variété $\mathcal{Y}$.

Nous avons donc défini une connexion de Cartan sur le G_1-fibré $\mathcal{Y}$. Cette construction va nous servir de modèle pour le cas général.

4.2. Cas général

Nous considérons à présent la matrice de 1-formes λ définie par :

$$\lambda \quad = \quad \begin{pmatrix} \pi_0^0 & \omega^\beta & \omega \\ \varphi_\alpha & \delta_\alpha^\beta \pi_0^0 - \varphi_\alpha^\beta & \omega_\alpha \\ -\dfrac{1}{2}\psi & -\varphi^\beta & \pi_0^0 - \varphi \end{pmatrix}$$

où cette fois $(\omega,\ \omega^\alpha,\ \omega_\alpha, \varphi,\ \varphi_\beta^\alpha,\ \varphi^\alpha,\ \varphi_\alpha,\ \psi)$ est le corepère associé au système $(\mathcal{S})$ par le théorème 3.7. Les équations (3.30) peuvent s'écrire sous la forme :

$$d\lambda = \lambda \wedge \lambda + \Lambda \tag{4.14}$$

avec, en reprenant les notations du paragraphe précédent :

$$\Lambda \quad = \quad \begin{pmatrix} \dfrac{1}{n+2}\Phi^{\gamma}_{\gamma} & 0 & 0 \\ \Phi_{\alpha} & \delta^{\beta}_{\alpha}\frac{1}{n+2}\Phi^{\gamma}_{\gamma} - \Phi^{\beta}_{\alpha} & 0 \\ -\dfrac{1}{2}\Psi & -\Phi^{\beta} & \frac{1}{n+2}\Phi^{\gamma}_{\gamma} \end{pmatrix}$$

Pour une 2-forme $\Theta = \theta^{\gamma}_{\beta}\omega^{\beta} \wedge \omega_{\gamma}$, posons :

$$Tr(\Theta) = \theta^{\gamma}_{\gamma}.$$

Les conditions (3.31) peuvent se synthétiser en :

$$Tr(\Lambda) = 0. \tag{4.15}$$

Pour $g \in G_1$, soit $\tilde{\lambda} = L^*_g(\lambda)$ et soit $\lambda^* = \mathrm{ad}_g\lambda$. Grâce aux relations (4.9), nous obtenons le fait que $\omega^* = \tilde{\omega}$, $,\omega^{*\alpha} = \tilde{\omega}^{\alpha}$, $\omega^*_{\alpha} = \tilde{\omega}_{\alpha}$ et $\phi^* = \tilde{\phi}$. Les matrices de 1-formes différentielles λ^* et $\tilde{\lambda}$ vérifient ainsi les équations de structure (3.30), (3.32) et (3.31) du fait que (4.15) est invariante sous la transformation adjointe par un élément de H_1. La condition d'unicité du théorème 3.7 donne alors :

$$L^*_{g^{-1}}(\lambda) = \mathrm{ad}_g(\lambda). \tag{4.16}$$

Comme $\Lambda = 0$ quand on se restreint à la fibre de $\mathcal{Y}$, le théorème de Frobenius nous assure de l'existence d'une application analytique de G_1 sur la fibre de $\mathcal{Y}$ fibre qui ramène λ sur la matrice de formes de Maurer-Cartan π définie plus haut. Grâce à (4.16), on montre que cette application est G_1-équivariante et la propriété (i) de (4.2) découle alors des propriétés des formes de Maurer-Cartan. Nous avons donc démontré :

Théorème 4.2. — *À tout système d'équations différentielles :*

$$(\mathcal{S}) \ : \ u_{x^{\alpha}x^{\beta}} = F_{\alpha\beta}(x, u, u_x), \ F_{\alpha\beta} = F_{\beta\alpha}, \ \alpha, \beta = 1 \ldots n,$$

est associée une unique connexion de Cartan de groupe $SL_{n+2}(\mathbb{C})$ sur le fibré principal $\mathcal{Y}$ de groupe G_1. Cette connexion est caractérisée par l'équation (4.14) et la condition (4.15).

5. Équivalence des systèmes $(\mathcal{S})$ et $(\mathcal{S}_0)$

Dans ce paragraphe, nous donnons une condition nécessaire et suffisante d'équivalence des systèmes $(\mathcal{S})$ et $(\mathcal{S}_0)$. Pour cela nous utilisons le résultat suivant dû à E. Cartan [12] :

Théorème 5.1. — *Soit θ un corepère sur une variété analytique complexe de dimension m. Le groupe de symétrie de θ est un groupe de Lie complexe à m paramètres (c'est-à-dire de dimension maximale en tant que variété complexe) si et seulement si les coefficients de torsion des équations de structure obtenues en différentiant θ sont constants.*

Nous savons d'après les travaux de A. Sukhov [17], [18] que le système $(\mathcal{S}_0)$ a un groupe de symétrie de dimension maximale n^2+4n+3. Les coefficients de torsion $S^{\alpha\sigma}_{\beta\rho}$, $R^{\beta}_{\alpha\gamma}$, $T^{\alpha\gamma}_{\beta}$, Q^{α}_{β}, $L^{\alpha\beta}$, $P_{\alpha\beta}$, K^{α}, H_{α} apparaissant dans les équations de structure du corepère associé au système $(\mathcal{S}_0)$ par le théorème 3.7 sont donc tous constants.

Pour déterminer les systèmes $(\mathcal{S})$ qui possèdent un groupe de symétries ponctuelles de dimension maximale, il s'agit donc d'après le théorème 5.1 de savoir à quelles conditions les coefficients de torsion correspondant au corepère associé à $(\mathcal{S})$ sont tous constants. Or, nous avons :

Lemme 5.2. — *Si les coefficients de torsion $S^{\alpha\sigma}_{\beta\rho}$, $R^{\beta}_{\alpha\gamma}$, $T^{\alpha\gamma}_{\beta}$, Q^{α}_{β}, $L^{\alpha\beta}$, $P_{\alpha\beta}$, K^{α}, H_{α} d'un corepère $(\omega,\ \omega^{\alpha},\omega_{\alpha},\varphi,\ \varphi^{\alpha}_{\beta},\ \varphi^{\alpha},\ \varphi_{\alpha},\ \psi)$ associé à un système d'équations aux dérivées partielles $(\mathcal{S})$ sont constants, ils sont nuls.*

Démonstration. — Les équations de structure (3.30) nous permettent d'écrire la relation $d^2\psi=0$ sous la forme :

$$\begin{gathered}(dQ^{\sigma}_{\rho}+2Q^{\sigma}_{\rho}\varphi+2R^{\sigma}_{\gamma\rho}\varphi^{\gamma}-2T^{\gamma\sigma}_{\rho}\varphi_{\gamma}-Q^{\gamma}_{\rho}\varphi^{\sigma}_{\gamma}+Q^{\sigma}_{\gamma}\varphi^{\gamma}_{\rho}+\delta^{\gamma}_{\rho}K^{\sigma}\omega_{\gamma}+\delta^{\sigma}_{\gamma}H_{\rho}\omega^{\gamma})\\ \wedge\omega^{\rho}\wedge\omega_{\sigma}\\ +(dH_{\rho}+2Q^{\gamma}_{\rho}\varphi_{\gamma}+H_{\gamma}\varphi^{\gamma}_{\rho}+H_{\rho}\varphi-2P_{\gamma\rho}\varphi^{\gamma})\wedge\omega^{\rho}\wedge\omega\\ +(dK^{\sigma}-K^{\gamma}\varphi^{\sigma}_{\gamma}+3K^{\sigma}\varphi+2L^{\gamma\sigma}\varphi_{\gamma})\wedge\omega_{\sigma}\wedge\omega=0\end{gathered}\tag{5.1}$$

Ainsi, si les formes dQ^{σ}_{ρ}, dH_{ρ} et dK^{σ} sont nulles, les fonctions Q^{β}_{α}, $R^{\beta}_{\alpha\gamma}$, $T^{\beta\gamma}_{\alpha}$, H_{α}, K^{α}, $L^{\beta\alpha}$ et $P_{\beta\alpha}$ le sont aussi.

En calculant la différentielle de $\Phi^{\beta}_{\alpha}=S^{\beta\rho}_{\alpha\sigma}\omega^{\sigma}\wedge\omega_{\rho}$ et en comparant l'expression obtenue avec (3.13), nous obtenons de façon analogue le fait que si $S^{\beta\rho}_{\alpha\sigma}$ est constant, il est nul.

Finalement, si les équations de structure du corepère $(\omega,\ \omega^{\alpha},\ \omega_{\alpha},\varphi,\ \varphi^{\alpha}_{\beta},$ $\varphi^{\alpha},\ \varphi_{\alpha},\ \psi)$ défini sur $P^{(1)}_{\mathcal{S}}$ associé à $(\mathcal{S})$ sont à coefficients constants, ce sont en fait les équations de structure du corepère associé au système $(\mathcal{S}_0)$. Le résultat suivant découle alors du théorème 3.7 :

Théorème 5.3. — *Un système d'équations aux dérivées partielles du second ordre complètement intégrable* $(\mathcal{S})$ *est équivalent au système* $(\mathcal{S}_0)$ *si et seulement si les coefficients de torsion du corepère associé à* $(\mathcal{S})$ *sont nuls ou de manière équivalente si son groupe de symétrie est un groupe de Lie complexe de dimension* $n^2 + 4n + 3$.

Le groupe de symétrie d'un système d'équations aux dérivées partielles $(\mathcal{S})$ est un groupe de Lie complexe de dimension inférieure ou égale à $n^2 + 4n + 3$. Dans le cas où le système $(\mathcal{S})$ provient d'une hypersurface réelle analytique Levi non dégénérée $\mathcal{H}$ de $\mathbb{C}^{n+1}$, A. Sukhov a démontré dans [17], [18] que le groupe des automorphismes locaux $Aut(\mathcal{H})$ de $\mathcal{H}$ est un sous groupe de Lie réel du groupe de symétrie de $(\mathcal{S})$. Toujours d'après [17], [18], la dimension réelle du groupe de Lie $Aut(\mathcal{H})$ est inférieure ou égale à la dimension complexe du groupe de symétrie de $(\mathcal{S})$. A l'aide du théorème 5.1, nous retrouvons donc le fait établi dans [5] que les seules hypersurfaces réelles analytiques Levi non dégénérées qui admettent un groupe d'automorphismes de dimension $n^2 + 4n + 3$ sont celles auxquelles on peut associer le système $(\mathcal{S}_0)$, c'est à dire à biholomorphisme près, les quadriques de $\mathbb{C}^{n+1}$.

Nous recherchons à présent à avoir des expressions explicites des coefficients de torsion des équations de structure du corepère associé au système $(\mathcal{S})$. Cela nous fournira des conditions sur les fonctions $F_{\alpha\beta}$ intervenant dans la définition du système $(\mathcal{S})$ pour que $(\mathcal{S})$ et $(\mathcal{S}_0)$ soient équivalents. Nous procédons en trois étapes. Nous montrons dans un premier temps que l'annulation de certains des invariants obtenus dans le théorème 3.7 (et que nous qualifions désormais de fondamentaux) suffit à garantir celle des autres. Puis nous calculons les expressions de ces invariants pour certaines valeurs des paramètres des groupes intervenant dans la construction du deuxième paragraphe. Enfin, nous utilisons les propriétés des connexions de Cartan pour obtenir l'expression générale des invariants fondamentaux.

Commençons donc par démontrer le résultat suivant :

Théorème 5.4. — *Les invariants* Q^{β}_{α}, $R^{\beta}_{\alpha\gamma}$, $T^{\beta\gamma}_{\alpha}$, H_{α}, K^{α}, $L^{\beta\alpha}$ *et* $P_{\beta\alpha}$ *peuvent s'exprimer en fonction des dérivées covariantes des invariants* $S^{\alpha\sigma}_{\beta\rho}$ *par rapport aux 1-formes* ω^{α} *et* ω_{α}.

Démonstration. — Nous allons utiliser les relations de Poincaré $d^2\varphi^{\alpha}_{\beta} = 0$, $d^2\varphi^{\alpha} = 0$, $d^2\varphi_{\alpha} = 0$ et $d^2\psi = 0$ que nous calculons à l'aide des expressions (3.30). Nous en déduisons des relations entre les fonctions mises en jeu.

Avant de commencer le calcul proprement dit, fixons quelques notations. Pour une 1-forme ϕ sur la variété $P_{\mathcal{S}}^{(1)}$, nous notons :

$$\phi_{(\omega^\alpha)} = X^\alpha \lrcorner \phi \quad \phi_{(\omega_\alpha)} = X_\alpha \lrcorner \phi$$

où X^α et X_α sont les champs de vecteurs duaux des 1-formes ω^α et ω_α.

En recherchant le coefficient de $\omega^\gamma \wedge \omega^\rho \wedge \omega_\sigma$ dans la 3-forme $d^2\varphi^\alpha_\beta$, nous obtenons l'identité suivante :

$$dS^{\alpha\sigma}_{\beta\rho_{(\omega^\gamma)}} + \delta^\alpha_\rho R^\sigma_{\beta\gamma} - \delta^\sigma_\gamma R^\alpha_{\beta\rho} = 0. \tag{5.2}$$

En prenant la trace sur σ et γ de (5.2), il vient :

$$R^\alpha_{\beta\rho} = -\frac{1}{n}\sum_\sigma dS^{\alpha\sigma}_{\beta\rho_{(\omega^\sigma)}}. \tag{5.3}$$

De même, en considérant cette fois le coefficient de $\omega_\gamma \wedge \omega^\rho \wedge \omega_\sigma$ dans l'expression $d^2\varphi^\alpha_\beta$, nous avons :

$$dS^{\alpha\sigma}_{\beta\rho_{(\omega_\gamma)}} - \delta^\sigma_\beta T^{\alpha\gamma}_\rho + \delta^\gamma_\rho T^{\alpha\sigma}_\beta = 0 \tag{5.4}$$

et en prenant la trace sur ρ et γ dans (5.4) :

$$T^{\alpha\sigma}_\beta = -\frac{1}{n}\sum_\rho dS^{\alpha\sigma}_{\beta\rho_{(\omega_\rho)}}. \tag{5.5}$$

Nous isolons maintenant les coefficients des produits exterieurs $\omega^\gamma \wedge \omega^\rho \wedge \omega_\sigma$ et $\omega_\gamma \wedge \omega^\rho \wedge \omega_\sigma$ dans l'expression $d^2\varphi^\alpha$, nous obtenons alors les égalités :

$$-dT^{\alpha\sigma}_{\rho_{(\omega^\gamma)}} - \frac{1}{2}\delta^\alpha_\rho Q^\sigma_\gamma + \frac{1}{2}\delta^\sigma_\gamma Q^\alpha_\rho = 0 \tag{5.6}$$

$$-dT^{\alpha\sigma}_{\rho_{(\omega_\gamma)}} + \delta^\gamma_\rho L^{\alpha\sigma} = 0. \tag{5.7}$$

Le calcul de la trace sur σ et γ dans (5.6) et la trace sur γ et ρ dans (5.7) nous donne les relations suivantes :

$$Q^\alpha_\rho = \frac{2}{n}\sum_\sigma dT^{\alpha\sigma}_{\rho_{(\omega^\sigma)}} \tag{5.8}$$

et

$$L^{\alpha\sigma} = \frac{1}{n}\sum_\rho dT^{\alpha\sigma}_{\rho_{(\omega_\rho)}} \tag{5.9}$$

En explicitant à présent les coefficients des produits extérieurs $\omega^\gamma \wedge \omega^\rho \wedge \omega_\sigma$ dans l'expression de la 3-forme différentielle $d^2\varphi_\alpha$ desquels nous calculons la trace, nous obtenons :

$$P_{\alpha\rho} = \frac{1}{n}\sum_{\gamma} dR^{\sigma}_{\alpha_{(\omega^\gamma)}} \tag{5.10}$$

Enfin, il découle de (5.1) :

$$\delta^\sigma_\gamma H_\rho + dQ^\sigma_{\rho_{(\omega^\gamma)}} = 0 \tag{5.11}$$

et

$$\delta^\gamma_\rho K^\sigma + dQ^\sigma_{\rho_{(\omega_\gamma)}} = 0. \tag{5.12}$$

En prenant la trace sur σ et γ dans (5.11) et sur γ et ρ dans (5.12), il vient :

$$H_\rho = -\frac{1}{n}\sum_{\sigma} dQ^\sigma_{\rho_{(\omega^\sigma)}} \tag{5.13}$$

$$K^\sigma = -\frac{1}{n}\sum_{\rho} dQ^\sigma_{\rho_{(\omega_\rho)}}, \tag{5.14}$$

Les relations (5.3), (5.5), (5.8), (5.9), (5.10), (5.13) et (5.14) permettent de conclure la démonstration du théorème.

En conséquence, nous avons directement le résultat suivant :

Corollaire 5.5. — *Si les fonctions $S^{\alpha\sigma}_{\beta\rho}$, sont nulles, il en est de même pour les fonctions Q^β_α, $R^\beta_{\alpha\gamma}$, $T^{\beta\gamma}_\alpha$, H_α, K^α, $L^{\beta\alpha}$ et $P_{\beta\alpha}$.*

Ainsi, d'après le théorème 5.1 et le lemme 5.2, pour que le système $(\mathcal{S})$ soit équivalent à $(\mathcal{S}_0)$ il faut et il suffit que les fonctions $S^{\alpha\sigma}_{\beta\rho}$ soient nulles.

Plaçons nous à présent sur une trivialisation locale $U \times H \times H^{(1)}$ du fibré $P^{(1)}_{\mathcal{S}}$ où U est un ouvert de $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}$. Nous calculons les expressions explicites des invariants fondamentaux $S^{\alpha\sigma}_{\beta\rho}$ en l'élément $Id_{H\times H^{(1)}}$ du groupe $H \times H^{(1)}$.

Pour une k-forme ϕ sur $U \times H \times H^{(1)}$, on note $\phi|_{Id}$ les valeurs de ϕ en l'identité du groupe $H \times H^{(1)}$.

Proposition 5.6. — *Pour tous les indices α, β, ρ, σ variant entre* 1 *et* n, *nous avons les expressions :*

$$\begin{aligned} S^{\beta\sigma}_{\alpha\rho}|_{Id} = \;& \frac{\partial^2 F_{\alpha\rho}}{\partial u_\beta \partial u_\sigma} - \frac{1}{n+2}\Bigg(\delta^\sigma_\rho \sum_\gamma \frac{\partial^2 F_{\alpha\gamma}}{\partial u_\beta \partial u_\gamma} + \delta^\sigma_\alpha \sum_\gamma \frac{\partial^2 F_{\rho\gamma}}{\partial u_\beta \partial u_\gamma} \\ & + \delta^\beta_\rho \sum_\gamma \frac{\partial^2 F_{\alpha\gamma}}{\partial u_\sigma \partial u_\gamma} + \delta^\alpha_\beta \sum_\gamma \frac{\partial^2 F_{\rho\gamma}}{\partial u_\sigma \partial u_\gamma}\Bigg) \\ & + \frac{1}{(n+1)(n+2)}(\delta^\beta_\alpha \delta^\sigma_\rho + \delta^\beta_\rho \delta^\sigma_\alpha) \sum_{\gamma,\kappa} \frac{\partial^2 F_{\kappa\gamma}}{\partial u_\kappa \partial u_\gamma} \end{aligned} \tag{5.15}$$

des invariants $S^{\alpha\sigma}_{\beta\rho}|_{Id}$ en fonction des variables $(x,\ u,\ u^{(1)})$.

Démonstration. — Nous commençons par établir les expressions explicites des formes de Maurer-Cartan modifiées intervenant dans le lemme 3.3. Nous savons que H est le groupe des matrices $(2n+1)\times(2n+1)$ inversibles s'écrivant :

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ a^\alpha & m^\alpha_\beta & 0 \\ b_\alpha & 0 & n^\beta_\alpha \end{pmatrix}.$$

avec $m^\alpha_\gamma n^\gamma_\beta = a\delta^\alpha_\beta$.

Pour plus de clarté, les formes de Maurer-Cartan modifiées de H utilisées dans le lemme 3.3 sont désormais notées $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\varphi}^\alpha_\beta$, $\tilde{\varphi}^\alpha$ et $\tilde{\varphi}_\alpha$, et nous cessons d'utiliser les conventions de sommation d'Einstein.

Pour une fonction $f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{C}$, nous définissons l'opérateur de dérivée totale restreint à $\mathcal{M}$ de la façon suivante :

$$\hat{D}_{x^\gamma}(f) = \frac{\partial f}{\partial x^\gamma} + u_\gamma \frac{\partial f}{\partial u} + \sum_\lambda F_{\lambda\gamma} \frac{\partial f}{\partial u_\lambda}$$

Le système d'équations aux dérivées partielles $(\mathcal{S})$ étant supposé complètement intégrable, les fonctions $F_{\alpha\beta}$ intervenant dans sa définition vérifient donc les identités suivantes :

$$\hat{D}_{x^\gamma}(F_{\alpha\beta}) = \hat{D}_{x^\alpha}(F_{\gamma\beta}) = \hat{D}_{x^\beta}(F_{\alpha\gamma}), \tag{5.16}$$

Un calcul direct explicite effectué au moment de la détermination des équations de structure données dans le lemme 3.3 montre que :

$$
\begin{aligned}
\tilde{\varphi} = &\quad \varphi + \sum_{\sigma} \frac{a^{\sigma}}{a}\omega_{\sigma} - \sum_{\rho} \frac{b_{\rho}}{a}\omega^{\rho} \\
\tilde{\varphi}^{\alpha} = &\quad \varphi^{\alpha} + \sum_{\sigma} \frac{a^{\alpha}a^{\sigma}}{a^2}\omega_{\sigma} - \sum_{\rho} \frac{a^{\alpha}b_{\rho}}{a^2}\omega^{\rho} \\
\tilde{\varphi}_{\alpha} = &\quad \varphi_{\alpha} + \sum_{\sigma} \frac{b_{\alpha}a^{\sigma}}{a^2}\omega_{\sigma} - \sum_{\rho} \frac{b_{\alpha}b_{\rho}}{a^2}\omega^{\rho} \\
&-\frac{1}{a} \sum_{\beta,\gamma,\lambda,\rho,\sigma} \frac{\partial F_{\beta\lambda}}{\partial u_{\gamma}} m'^{\beta}_{\alpha} m'^{\lambda}_{\rho} m^{\sigma}_{\gamma} a^{\rho}\omega_{\sigma} \\
&+\frac{1}{a} \sum_{\beta,\gamma,\lambda,\rho,\sigma} \frac{\partial F_{\beta\lambda}}{\partial u_{\gamma}} m'^{\beta}_{\alpha} m'^{\lambda}_{\rho} m^{\sigma}_{\gamma} b_{\sigma}\omega^{\rho} \\
&+ \sum_{\beta,\lambda,\rho} \frac{\partial F_{\beta\lambda}}{\partial u} m'^{\beta}_{\alpha} m'^{\lambda}_{\rho}\omega^{\rho} \\
\tilde{\varphi}^{\beta}_{\alpha} = &\quad \varphi^{\beta}_{\alpha} - \frac{a^{\beta}}{a}\omega_{\alpha} - \sum_{\rho}(\delta^{\beta}_{\alpha}\frac{b_{\rho}}{a} + \delta^{\beta}_{\rho}\frac{b_{\alpha}}{a})\omega^{\rho} \\
&- \sum_{\gamma,\lambda,\rho,\sigma} \frac{\partial F_{\sigma\lambda}}{\partial u_{\gamma}} m'^{\sigma}_{\alpha} m'^{\lambda}_{\rho} m^{\beta}_{\gamma}\omega^{\rho}
\end{aligned}
\tag{5.17}
$$

À l'aide des expressions (5.17), nous calculons $d\tilde{\varphi}^{\beta}_{\alpha}|_{Id}$:

$$
\begin{aligned}
d\tilde{\varphi}^{\beta}_{\alpha}|_{Id} &= d\varphi^{\beta}_{\alpha}|_{Id} - d(\frac{a^{\beta}}{a})|_{Id} \wedge \varpi_{\alpha} - \sum_{\rho} \delta^{\beta}_{\alpha} d(\frac{b_{\rho}}{a})|_{Id} \wedge \varpi^{\rho} \\
&\quad - \sum_{\rho} \delta^{\beta}_{\rho} d(\frac{b_{\alpha}}{a})|_{Id} \wedge \varpi^{\rho} - (d \sum_{\gamma,\lambda,\rho,\sigma} \frac{\partial F_{\sigma\lambda}}{\partial u_{\gamma}} m'^{\sigma}_{\alpha} m'^{\lambda}_{\rho} m^{\beta}_{\gamma}\omega^{\rho})|_{Id} \\
&= \varphi^{\beta}_{\gamma}|_{Id} \wedge \varphi^{\gamma}_{\alpha}|_{Id} - \tilde{\varphi}^{\beta}|_{Id} \wedge \varpi_{\alpha} - \delta^{\beta}_{\alpha} \sum_{\gamma} \tilde{\varphi}_{\gamma}|_{Id} \wedge \varpi^{\gamma} - \varphi_{\alpha}|_{Id} \wedge \varpi^{\beta} \\
&\quad -(d \sum_{\gamma,\lambda,\rho,\sigma} \frac{\partial F_{\sigma\lambda}}{\partial u_{\gamma}} m'^{\sigma}_{\alpha} m'^{\lambda}_{\rho} m^{\beta}_{\gamma}\omega^{\rho})|_{Id}
\end{aligned}
\tag{5.18}
$$

Nous voulons maintenant expliciter le terme $(d \sum_{\gamma,\lambda,\rho,\sigma} \frac{\partial F_{\sigma\lambda}}{\partial u_{\gamma}} m'^{\sigma}_{\alpha} m'^{\lambda}_{\rho} m^{\beta}_{\gamma}\omega^{\rho})|_{Id}$ intervenant dans (5.18). Pour cela nous avons besoin du lemme calculatoire suivant :

LEMME 5.7. — *Soit une application analytique $F : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{C}$. La différentielle de F peut s'écrire sous la forme :*

$$dF = \sum_\gamma \hat{D}_{x^\gamma}(F)\varpi^\gamma + \frac{\partial F}{\partial u}\varpi + \sum_\gamma \frac{\partial F}{\partial u_\gamma}\varpi_\gamma.$$

D'autre part, nous avons pour tout $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \lambda$:

$$\frac{\partial}{\partial u_\lambda}(\hat{D}_{x^\gamma}(F_{\alpha\beta})) = \hat{D}_{x^\gamma}(\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial u_\lambda}) + \delta_\gamma^\lambda \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial u} + \sum_\kappa \frac{\partial F_{\gamma\kappa}}{\partial u_\lambda}\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial u_\kappa}. \tag{5.19}$$

Ces résultats proviennent directement des conditions d'intégrabilité (5.16) du système $(\mathcal{S})$.

Grâce au lemme 5.7, il vient :

$$\begin{aligned}(d \sum_{\gamma,\lambda,\rho,\sigma} &\frac{\partial F_{\sigma\lambda}}{\partial u_\gamma} m'^\sigma_\alpha m'^\lambda_\rho m^\beta_\gamma \omega^\rho)|_{Id} = \\ &- \sum_{\gamma,\rho} \frac{\partial F_{\gamma\rho}}{\partial u_\beta}\varphi^\gamma_\alpha|_{Id} \wedge \varpi^\rho + \sum_{\gamma,\rho} \frac{\partial F_{\alpha\rho}}{\partial u_\gamma}\varphi^\beta_\gamma|_{Id} \wedge \varpi^\rho \\ &+ \sum_\rho \frac{\partial F_{\alpha\rho}}{\partial u_\beta}\tilde{\varphi}^\rho|_{Id} \wedge \varpi - \sum_{\gamma,\kappa,\rho} \frac{\partial F_{\gamma\kappa}}{\partial u_\beta}\frac{\partial F_{\alpha\rho}}{\partial u_\kappa}\varpi^\gamma \wedge \varpi^\rho \\ &- \sum_\rho \frac{\partial F_{\alpha\rho}}{\partial u}\varpi^\beta \wedge \varpi^\rho + \sum_\rho \frac{\partial^2 F_{\alpha\rho}}{\partial u \partial u_\beta}\varpi \wedge \varpi^\rho \\ &+ \sum_{\gamma,\rho} \frac{\partial^2 F_{\alpha\rho}}{\partial u_\beta \partial u_\gamma}\varpi_\gamma \wedge \varpi^\rho.\end{aligned} \tag{5.20}$$

Nous obtenons ainsi l'expression de la différentielle extérieure de la forme $\tilde{\varphi}^\beta_\alpha$ calculée en $Id_{H\times H^{(1)}}$:

$$\begin{aligned}d\tilde{\varphi}^\beta_\alpha|_{Id} = &\sum_\gamma \tilde{\varphi}^\beta_\gamma|_{Id} \wedge \tilde{\varphi}^\alpha_\alpha|_{Id} - \tilde{\varphi}^\beta|_{Id} \wedge \varpi_\alpha - \tilde{\varphi}_\alpha|_{Id} \wedge \varpi^\beta + \delta^\beta_\alpha \sum_\gamma \varpi^\gamma \wedge \tilde{\varphi}_\gamma|_{Id} \\ &+ \sum_{\gamma,\rho} \frac{\partial^2 F_{\alpha\rho}}{\partial u_\beta \partial u_\gamma}\varpi_\gamma \wedge \varpi^\rho + \Omega^\beta_\alpha|_{Id} \wedge \varpi\end{aligned} \tag{5.21}$$

où Ω^β_α est une 1-forme sur $U \times H \times H^{(1)}$.

Notons :

$$\tilde{S}^{\beta\sigma}_{\alpha\rho}|_{Id} = \frac{\partial^2 F_{\alpha\rho}}{\partial u_\beta \partial u_\sigma}. \tag{5.22}$$

Lors de la première boucle de l'algorithme de Cartan que nous avons effectuée après le premier prolongement (voir lemme 3.4), nous avons déterminé certains paramètres du groupe $G^{(1)}$ de façon à ce que la condition de trace (3.10) soit vérifiée. D'après (3.11) et (3.12), nous disposons des valeurs attribuées à ces paramètres :

$$b_\alpha^\beta = -\frac{1}{n+2}\sum_\gamma \tilde{S}_{\alpha\gamma}^{\beta\gamma} + \delta_\alpha^\beta \frac{1}{2(n+1)(n+2)}\sum_{\gamma,\sigma} \tilde{S}_{\sigma\gamma}^{\sigma\gamma} + \delta_\alpha^\beta \frac{t}{2}. \tag{5.23}$$

Or en utilisant (3.11), nous obtenons l'expression des coefficients $S_{\beta\rho}^{\alpha\sigma}$ intervenant dans les équations de structure (3.9) après la normalisation (3.12) du lemme 3.4 :

$$S_{\beta\rho}^{\alpha\sigma}|_{Id} = \tilde{S}_{\beta\rho}^{\alpha\sigma}|_{Id} + \delta_\rho^\sigma b_\beta^\alpha|_{Id} + \delta_\beta^\sigma b_\rho^\alpha|_{Id} + \delta_\rho^\alpha b_\beta^\sigma|_{Id} + \delta_\beta^\alpha b_\rho^\sigma|_{Id}. \tag{5.24}$$

En remplaçant dans (5.24) les coefficients $b_\beta^\alpha|_{Id}$, $b_\rho^\alpha|_{Id}$, $b_\beta^\sigma|_{Id}$ et $b_\rho^\sigma|_{Id}$ par les expressions (5.23) correspondantes calulées en $Id_{H\times H^{(1)}}$, il vient finalement :

$$\begin{aligned} S_{\alpha\rho}^{\beta\sigma}|_{Id} = \quad & \frac{\partial^2 F_{\alpha\rho}}{\partial u_\beta \partial u_\sigma} - \frac{1}{n+2}\Bigg(\delta_\rho^\sigma \sum_\gamma \frac{\partial^2 F_{\alpha\gamma}}{\partial u_\beta \partial u_\gamma} \\ & + \delta_\alpha^\sigma \sum_\gamma \frac{\partial^2 F_{\rho\gamma}}{\partial u_\beta \partial u_\gamma} + \delta_\rho^\beta \sum_\gamma \frac{\partial^2 F_{\alpha\gamma}}{\partial u_\sigma \partial u_\gamma} + \delta_\beta^\alpha \sum_\gamma \frac{\partial^2 F_{\rho\gamma}}{\partial u_\sigma \partial u_\gamma}\Bigg) \quad . \\ & + \frac{1}{(n+1)(n+2)}(\delta_\alpha^\beta \delta_\rho^\sigma + \delta_\rho^\beta \delta_\alpha^\sigma)\sum_{\gamma,\kappa} \frac{\partial^2 F_{\kappa\gamma}}{\partial u_\kappa \partial u_\gamma} \end{aligned}$$

Les groupes de Lie intervenant dans la suite de l'algorithme sont choisis pour ne pas agir sur l'ensemble des valeurs des fonctions $S_{\alpha\rho}^{\beta\sigma}$. Nous avons ainsi démontré la proposition 5.6.

D'autre part, dans le quatrième paragraphe, nous avons construit à l'aide des 1-formes différentielles ω, ω^α, ω_α, φ, φ_β^α, φ^α, φ_α, ψ définies sur l'espace des variables $(x,\ u,\ ,u^{(1)},\ a,\ a^\alpha,\ b_\alpha, m_\beta^\alpha,\ t)$ une connexion de Cartan sur le G_1-fibré $\mathcal{Y}$ au dessus de $\mathcal{E}$. Grâce à la propriété (ii) de (4.2), nous savons comment les fonctions $S_{\alpha\rho}^{\beta\sigma}$ sont transformées quand on fait agir le groupe G_1 sur $\mathcal{Y}$. Nous avons en fait les expressions :

$$S_{\alpha\rho}^{\beta\sigma} = \frac{1}{a} n_\alpha^\gamma n_\lambda^\sigma m_\mu^\beta m_\rho^\kappa S_{\gamma\kappa}^{\mu\lambda}|_{Id}. \tag{5.25}$$

De (5.25), il découle que l'annulation des fonctions $S_{\alpha\rho}^{\beta\sigma}|_{Id}$ est suffisante pour que les fonctions $S_{\alpha\rho}^{\beta\sigma}$ soient nulles partout.

Le système d'équation aux dérivées partielles $(\mathcal{S})$ est donc équivalent au système $(\mathcal{S}_0)$ si et seulement si les fonctions $S_{\alpha\rho}^{\beta\sigma}|_{Id}$ sont toutes nulles. À l'aide des expression (5.15) de la proposition 5.6, nous aboutissons donc au théorème suivant :

THÉORÈME 5.8. — *Le système d'équations aux dérivées partielles complètement intégrable :*

$$(\mathcal{S}) \quad : \quad u_{x^\alpha x^\beta} = F_{\alpha\beta}(x, u, u_x), \quad F_{\alpha\beta} = F_{\beta\alpha}, \quad \alpha, \beta = 1 \dots n$$

est équivalent au système :

$$(\mathcal{S}_0) \quad : \quad u_{x^\alpha x^\beta} = 0, \quad \alpha, \beta = 1 \dots n,$$

si et seulement si les fonctions $F_{\alpha\beta}$ vérifient les conditions :

$$\frac{\partial^2 F_{\alpha\rho}}{\partial u_\beta \partial u_\sigma} - \frac{1}{n+2}\left(\delta_\rho^\sigma \sum_\gamma \frac{\partial^2 F_{\alpha\gamma}}{\partial u_\beta \partial u_\gamma} + \delta_\alpha^\sigma \sum_\gamma \frac{\partial^2 F_{\rho\gamma}}{\partial u_\beta \partial u_\gamma} + \delta_\rho^\beta \sum_\gamma \frac{\partial^2 F_{\alpha\gamma}}{\partial u_\sigma \partial u_\gamma} + \delta_\beta^\alpha \sum_\gamma \frac{\partial^2 F_{\rho\gamma}}{\partial u_\sigma \partial u_\gamma}\right) + \frac{1}{(n+1)(n+2)}(\delta_\alpha^\beta \delta_\rho^\sigma + \delta_\rho^\beta \delta_\alpha^\sigma) \sum_{\gamma,\kappa} \frac{\partial^2 F_{\kappa\gamma}}{\partial u_\kappa \partial u_\gamma} = 0. \tag{5.26}$$

pour tous les indices α, β, ρ, σ variant entre 1 et n.

En resolvant le système (5.26), nous retrouvons les formules démontrées par M. Hachtroudi dans [10] pour les fonctions $F_{\alpha\beta}$ intervenant dans la définition d'un système $(\mathcal{S})$ équivalent à $(\mathcal{S}_0)$:

$$F_{\alpha\beta}(x, u, u_x) = A^\kappa u_{x\alpha} u_{x_\beta} u_{x_\kappa} + (B_\beta^\kappa u_{x_\alpha} + B_\alpha^\kappa u_{x_\beta}) u_{x_\kappa} + C_{\alpha\beta}^\kappa u_{x_\kappa} + D_{\alpha\beta}^k \tag{5.27}$$

où A, B, C et D sont des fonctions holomorphes en les variables x et u avec $A_{\alpha\beta}^\kappa = A_{\beta\alpha}^\kappa$ et $D_{\alpha\beta}^\kappa = D_{\beta\alpha}^\kappa$ et où nous utilisons les conventions de sommation d'Einstein.

Pour $n = 2$, les relations (5.26) s'écrivent :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 F_{11}}{\partial u_2 \partial u_2} = 0 \\
&\frac{\partial^2 F_{22}}{\partial u_1 \partial u_1} = 0 \\
&\frac{\partial^2 F_{12}}{\partial u_1 \partial u_1} - \frac{\partial^2 F_{22}}{\partial u_1 \partial u_2} = 0 \\
&\frac{\partial^2 F_{11}}{\partial u_1 \partial u_1} - 4\frac{\partial^2 F_{12}}{\partial u_1 \partial u_2} + \frac{\partial^2 F_{22}}{\partial u_2 \partial u_2} = 0 \\
&\frac{\partial^2 F_{11}}{\partial u_1 \partial u_2} - \frac{\partial^2 F_{12}}{\partial u_2 \partial u_2} = 0.
\end{aligned} \tag{5.28}$$

Dans sa thèse [13], S. Neut a programmé l'algorithme de Cartan avec MAPLE. Il montre que les conditions (5.28) sont nécessaires et suffisantes pour que les systèmes $(\mathcal{S})$ et $(\mathcal{S}_0)$ soient équivalents dans le cas $n = 2$.

Bibliographie

[1] Ackerman (M.). — Sophus Lie's 1884 differential invariant paper. In part a translation of "On differential invariants" [ber Differentialinvarianten] by S. Lie [Math. Ann. 24 (1884), 537-578]. Translated from the German by M. Ackerman. Comments and additional material by Robert Hermann. Lie Groups: History, Frontiers and Applications, Vol. III. Math Sci Press, Brookline, Mass. (1976).

[2] Beloshapka (V. K.). — Construction of the normal form of an equation of a surface of high codimension, (Russian) Mat. Zametki 48 (1990), no. 2, 3-9 ; translation in Math. Notes 48 (1990), no. 1-2, p. 721-725 (1991).

[3] Cartan (E.). — Œuvres complètes. Partie II. (French) Algèbre, systèmes différentiels et problèmes d'équivalence. Second edition. Éditions du Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS), Paris (1984).

[4] Chern (S. S.). — On the projective structure of a real hypersurface in $\mathbb{C}^{n+1}$, Math. Scand. 36, p. 74-82 (1975).

[5] Chern (S. S.), Moser (J. K.). — Real hypersurfaces in complex manifolds, Acta Math. 133, p. 219-271 (1974).

[6] Diedrich (K.), Pinchuk (S.). — Regularity of continuous CR maps in arbitrary dimension, Michigan Math. J. 51 no. 1, p. 111-140 (2003).

[7] Faran (J. J.). — Segre families and real hypersurfaces, Invent. Math. 60, p. 135-172 (1980).

[8] Fels (M. E.). — The equivalence problem for systems of second-order ordinary differential equations, Proc. London Math. Soc. (3) 71, no. 1, p. 221-240 (1995).

[9] Gardner (R. B.). — The method of equivalence and its applications, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, 58. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA (1989).

[10] Hachtroudi (M.). — Les espaces d'éléments à connexion projective, Actualités scientifiques et industrielles, 565, Hermann Editeurs (1937).

[11] Hsu (L.), Kamran (N.). — Classification of second-order ordinary differential equations admitting Lie groups of fibre-preserving point symmetries, Proc. London Math. Soc. 58, no. 2, p. 387-416 (1980).

[12] Olver (P. J.). — Equivalence, invariants, and symmetry. Cambridge University Press, Cambridge (1995).

[13] Neut (S.). — Implémentation et nouvelles applications de la méthode d'équivalence d'Elie Cartan, Thèse, Université de Lille 1, Octobre (2003).

[14] Neut (S.), Petitot (M.). — La géométrie de l'équation $y''' = f(x, y, y', y'')$, C.R. Math. Acad. Sci. Paris, 335, no 6, p. 515-518 (2002).

[15] Segre (B.). — Intorno al problemo di Poincaré della representazione pseucocoform, Rend. Acc. Lincei., 13, p. 676-683 (1931).

[16] Sternberg (S.). — Lectures on differential geometry. Second edition. With an appendix by Sternberg and Victor W. Guillemin, Chelsea Publishing Co., New York (1983).

[17] Sukhov (A.). — Segre varieties and Lie symmetries, Math. Z. 238 no. 3, p. 483-492 (2001).

[18] Sukhov (A.). — CR maps and point Lie transformations, Michigan Math. J. 50 no. 2, p. 369-379 (2002).

[19] Tresse (A.). — Détermination des invariants ponctuels de l'équation différentielle du second ordre $y'' = \omega(x, y, y')$, Hirzel, Leiptzig (1896).

[20] Webster (S. M.). — Pseudo-Hermitian structures on a real hypersurface, J. Differential Geom. 13 no. 1, p. 25-41 (1978).