ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

A. OULD ELMOUNIR

F. SIMONDON

Attracteurs compacts pour des problèmes d'évolution sans unicité

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6e série, tome 9, nº 4 (2000), p. 631-654

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_2000_6_9_4_631_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. IX, n° 4, 2000
pp. 631–654

Attracteurs compacts pour des problèmes d'évolution sans unicité (*)

A. OULD ELMOUNIR [1] ET F. SIMONDON [1]

RÉSUMÉ. — On généralise ici les notions de systèmes dynamiques et d'attracteurs compacts pour traiter des problèmes mal posés pour lesquels on a existence de solutions globales mais pas unicité. On montre alors l'existence d' attracteurs compacts pour des problèmes paraboliques dégénérés comportant des termes non linéaires en gradient.

ABSTRACT. — The asymptotic behaviour of solutions of ill-posed evolution problems (those which enjoy existence of solutions but not necessarily uniqueness) is studied by a global approach. We ask about existence of an attractor for the family of all the solutions as $t \to +\infty$. We generalize the notions of dynamical systems and compact attractors, usual in the scope of well-posed problems, providing a definition that permits to write the results on existence and characterization of global attractors under exactly the same form as for classical dynamical systems.

1. Introduction

Nous nous intéressons dans ce travail au comportement asymptotique des solutions de problèmes d'évolution mal posés pour lesquels on a existence de solutions globales mais pas forcément unicité. L'approche que nous faisons ici est globale : on analyse le comportement de l'ensemble des solutions quand t tend vers $+\infty$, plus particulièrement on se pose la question

(*) Reçu le 29 décembre 1999, accepté le 23 janvier 2001

(1) Équipe de Mathématique, CNRS UMR 6623, Université de Franche-Comté, Route de Gray, F-25030 Besançon cedex, France.
elmounir@math.univ-fcomte.fr
simondon@math.univ-fcomte.fr

de l'existence d'un sous-ensemble qui attire toutes les solutions lorsque le temps croît vers $+\infty$. Il s'agit donc pour nous d'introduire des notions qui généralisent celles de systèmes dynamiques et d'attracteurs compacts pour les problèmes bien posés. Notons que cette question a déjà été abordée par Ball dans [4], Mel'nik dans [13] et par Chepyzhov et Vishik dans [5] et [6]. Ces deux derniers articles étendent ces notions au cas des problèmes non autonomes. Ici nous donnons une définition qui permette d'écrire les théorèmes d'existence et de caractérisation d'attracteur global exactement comme pour un système dynamique classique, d'utilisation assez simple pour les problèmes régularisants, comme celui que nous étudions dans l'exemple.

Le plan de ce papier est le suivant :

• Dans la partie II nous définissons les notions de systèmes dynamiques généralisés et d'attracteurs pour ceux-ci. Nous donnons ensuite une condition suffisante d'existence de l'attracteur compact utile dans la pratique (Théorème 2.12). Puis nous caractérisons cet attracteur à l'aide des trajectoires complètes bornées.

• Dans la dernière partie, nous étudions un problème parabolique dégénéré de la forme :

$$\begin{cases} (b(u))_t = \Delta u + a(b(u), \nabla u) & \text{sur} \quad Q = \Omega \times (0, +\infty) \\ u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \times (0, +\infty) \end{cases}$$

Nous montrons l'existence de solutions globales dans $L^\infty(\Omega)$ pour ce problème, définies de telle façon qu'elles nous permettent de construire un système dynamique généralisé. A priori les solutions faibles qui sont construites ne sont pas uniques ([1],[9],[14]). De plus, on ne sait pas en général choisir une solution faible particulière pour avoir l'unicité si $b \neq id$ (en revanche si $b = id$ et pour certains a particuliers, la théorie des solutions de viscosité s'applique [7]). A l'aide du Théorème 2.12 nous montrons alors l'existence d'un attracteur compact pour ce système dynamique généralisé.

2. Système dynamique généralisé, notion d'attracteur

Nous commençons par définir une notion de système dynamique généralisé qui rend compte des propriétés des solutions de problèmes d'évolution, a priori sans unicité. Dans ce paragraphe, on désigne par X un espace métrique complet et $\mathcal{F}$ l'espace des applications de $[0, +\infty[$ dans X.

DÉFINITION 2.1.— *On dit que S, une application de X dans $\mathcal{P}(\mathcal{F})$, l'ensemble des parties de $\mathcal{F}$, est un système dynamique généralisé ssi elle vérifie :*

(i) $S(x) \neq \emptyset \quad \forall x \in X$.

(ii) $\forall x \in X, \quad \forall u \in S(x), \quad u(0) = x$.

(iii) $\forall u \in S(x), \quad \tau \geqslant 0, \quad u_\tau = u(\tau + .) \in S(u(\tau))$.

(iv) $u \in S(x), \quad \forall t > 0, \quad \forall v \in S(u(t))$, *on définit* $w : [0, +\infty[\longrightarrow X$ *par*

$$\begin{cases} w(s) = u(s) & \text{si } \ s \leqslant t \\ w(s) = v(s-t) & \text{si } \ s \geqslant t \end{cases}$$

Alors $w \in S(x)$

(v) *Si* $x_n \longrightarrow x$ *dans* X *et* $u^n \in S(x_n)$, *alors pour tout* $t > 0$, *il existe* $u \in S(x)$ *et* u^{n_k} *une sous-suite de* u^n *telle que* $u^{n_k}(t) \longrightarrow u(t)$ *dans* X.

L'hypothèse de raccordement (iv) qui est assez naturelle dans le cadre des solutions d'équations aux dérivées partielles ne figurait pas dans [4] ni dans [13]. Elle nous permettra de définir l'attracteur de façon classique, en particulier comme un ensemble invariant. Remarquons aussi que si à la place de (iv) on définit w avec un nombre fini de raccordements alors w est encore une trajectoire pour S. On appellera trajectoire issue de x tout élément $u \in S(x)$.

On notera pour $t \geqslant 0, x \in X$ et $A \subset X$

$$S_t(x) = \{u(t), \quad u \in S(x)\}$$

et

$$S_t(A) = \{u(t), \quad u \in S(A)\}.$$

On notera aussi que (iii) et (iv) remplacent la notion de semi-groupe du cadre classique en effet, on a la remarque suivante :

Remarque 2.2.— Si S est un système dynamique généralisé, il satisfait, pour tout $A \subset X$ et tous $t, s \geqslant 0$

$$S_t(S_s(A)) = S_{t+s}(A) \tag{2.1}$$

Preuve.— Soit $x \in A$ et $u \in S(x)$. Pour tout $t \geqslant 0$, $u(t+s) = u_s(t)$, or $u_s \in S(u(s))$ par (iii), donc

$$u_s(t) = S_t(u(s)) \subset S_t(S_s(A))$$

d'où la première inclusion

$$S_{t+s}(A) \subset S_t(S_s(A)).$$

L'inclusion dans l'autre sens est clairement donnée par l'hypothèse de raccordement (iv). $\square$

On notera aussi que (v) remplace la notion de continuité du semi-groupe par rapport à la condition initiale dans la théorie classique.

Nous généralisons maintenant quelques notions utiles à l'étude du comportement pour les grands temps qui sont bien connues dans le cas de systèmes dynamiques classiques (voir par exemple [10]).

DÉFINITION 2.3. — *$A \subset X$ est dit attractif pour S ssi pour tout B borné de X*

$$\sup_{u \in S(B)} d(u(t), A) \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad t \longrightarrow +\infty$$

où $S(B) = \bigcup_{x \in B} S(x)$

DÉFINITION 2.4. — *$A \subset X$ est dit invariant par S ssi*

$$S_t(A) = A \qquad \forall t \geqslant 0$$

DÉFINITION 2.5. — *Soit $A \subset X$. On dit que A est un attracteur compact de S ssi A est attractif invariant et compact.*

Remarque 2.6. — *Si A et B sont fermés, bornés, attractifs tels que $A \subset S_t(A)$ et $B \subset S_t(B)$ alors $A = B$.*

Preuve. — Soit $t_n \longrightarrow +\infty$ On a $A \subset S_{t_n}(A)$ donc $x \in A$ s'écrit $x = u^n(t_n)$ pour $u^n \in S(A)$ et comme B est attractif et A est borné on a alors $d(u^n(t_n), B) \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$ d'où $x \in B$ car B est fermé. Ainsi $A \subset B$, on démontre de même $B \subset A$. $\square$

On en déduit le corollaire suivant :

COROLLAIRE 2.7. — *Si S possède un attracteur compact, celui-ci est unique.*

DÉFINITION 2.8. — *Soit B un borné de X, on appelle ensemble w-limite de B*

$$w(B) = \bigcap_{\tau \geqslant 0} \overline{\bigcup_{t \geqslant \tau} S_t(B)}$$

DÉFINITION 2.9. — *Un borné $B_0 \subset X$ est dit absorbant pour S ssi pour tout borné B de X, il existe $t(B) > 0$ tel que*

$$S_t(B) \subset B_0 \quad \forall t \geqslant t(B)$$

DÉFINITION 2.10.— *S, un système dynamique généralisé, est dit compact ssi, pour tout borné B de X et pour tout $t > 0$, $S_t(B)$ est relativement compact dans X.*

Remarque 2.11.— Si S est compact et possède un borné absorbant B_0, alors S admet un attractif compact K.

Preuve.— Soit $t_0 > 0$, $\overline{S_{t_0}(B_0)} = K$ est compact car S est compact. Montrons qu'il est aussi attractif. Soit B un borné de X, il existe $t(B)$ tel que $S_t(B) \subset B_0$ pour tout $t \geqslant t(B)$.

Soit $t = t_0 + t'$ où $t' \geqslant t(B)$, alors d'après (2.1)

$$S_t(B) = S_{t_0+t'}(B) = S_{t_0}(S_{t'}(B)) \subset S_{t_0}(B_0) \subset K.$$

Donc pour tout $t \geqslant t_0 + t(B)$, on a

$$\sup_{u \in S(B)} d(u(t), K) = 0.$$

Nous allons maintenant établir le principal théorème d'existence de l'attracteur compact qui se formule comme dans la théorie classique (voir [10]).

THÉORÈME 2.12.— *Si S, un système dynamique généralisé, admet un ensemble attractif compact alors il admet un attracteur compact.*

Preuve du théorème 2.12.— La preuve de ce théorème se fait en deux étapes

Etape 1:
Soit K un compact attractif pour S. Soit B un borné de X, montrons que $w(B)$ est compact, non vide, attire B et est inclus dans K.

• Soit $x \in w(B)$. Il existe une suite $t_n \longrightarrow +\infty$, $x_n \in B$ et $u^n \in S(x_n)$ tels que

$$d(u^n(t_n), x) \longrightarrow 0 \text{ quand } n \longrightarrow +\infty.$$

D'autre part K étant attractif et B borné $d(u^n(t_n), K) \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$. Mais $d(u^n(t_n), K) = d(u^n(t_n), y_n)$ pour $y_n \in K$ car K est compact. On peut extraire de y_n une sous suite y_{n_k} qui converge vers $y \in K$. On a alors $d(u^{n_k}(t_{n_k}), y) \longrightarrow 0$ quand $k \longrightarrow +\infty$ et $y = x$ donc $w(B) \subset K$.

• $w(B)$ est un fermé inclus dans K compact donc $w(B)$ est compact.

• Montrons que $w(B)$ est non vide.
Soit $x \in B$ et $u \in S(x)$, $(u(n), K) \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$ car K est

attractif. K étant compact il existe $y \in K$ tel que pour une sous suite on ait $u(n_k) \longrightarrow y$ et $y \in w(B)$.

• Montrons que $w(B)$ attire B i.e.

$$\sup_{u \in S(B)} d(u(t), w(B)) \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad t \longrightarrow +\infty$$

Supposons le contraire :
Il existe $\delta > 0$, une sous suite $t_n \longrightarrow +\infty$ et $u^n \in S(B)$ tels que $d(u^n(t_n), w(B)) \geqslant \delta$. Or K est attractif et compact donc il existe $y \in K$ et n_k une sous suite de $\mathbb{N}$ tels que $u^{n_k}(t_{n_k}) \longrightarrow y \in w(B)$ donc $d(u^{n_k}(t_{n_k}), w(B)) \longrightarrow 0$ ce qui est impossible.

Etape 2 :
Soit $\epsilon > 0$, l'ensemble $K_\epsilon = \{x \in X \ ; \ d(x, K) \leqslant \epsilon\}$ est borné puisque K est compact. Il est aussi absorbant, en effet comme K est attractif, pour tout borné $B \subset X$, il existe $T(B, \epsilon) > 0$ tel que

$$\sup_{u \in S(B)} d(u(t), K) \leqslant \epsilon \quad \forall t \geqslant T(B, \epsilon)$$

et donc

$$S_t(B) \subset K_\epsilon, \quad \forall t \geqslant T(B, \epsilon).$$

Fixons $\epsilon > 0$ et montrons que $A = w(K_\epsilon)$ est l'attracteur compact. (Alors tous les $w(K_\epsilon)$ pour $\epsilon > 0$ seront égaux).

• Tout d'abord montrons que A est attractif :
Soit B un borné de X, il existe $T > 0$ tel que

$$S_t(B) \subset K_\epsilon, \quad \forall t \geqslant T. \tag{2.2}$$

D'autre part $w(K_\epsilon)$ attire K_ϵ, donc pour tout $\delta > 0$ il existe $T' > 0$ tel que

$$\sup_{u \in S(K_\epsilon)} d(u(t), w(K_\epsilon)) < \delta \quad \forall t \geqslant T'. \tag{2.3}$$

Soit $t \geqslant T + T'$ et $u \in S(B)$, $u(T) \in K_\epsilon$ d'après (2.2) et $u_T \in S(K_\epsilon)$. Comme $u(t) = u_T(t - T)$ avec $t - T > T'$ on a

$$d(u(t), w(K_\epsilon)) = d(u_T(t - T), w(K_\epsilon)) < \delta$$

d'après (2.3) et donc $\sup\limits_{u \in S(B)} d(u(t), w(K_\epsilon)) \longrightarrow 0$.

• Montrons l'invariance de A par S :
Montrons que $A \subset S_t(A)$ pour tout $t \geqslant 0$.

Soit $x \in A = w(K_\epsilon)$, il existe $t_n \longrightarrow +\infty$ et $u^n \in S(K_\epsilon)$ tels que $u^n(t_n) \longrightarrow x$ quand $n \longrightarrow +\infty$. Soit $\xi_n = t_n - t$, puisque $w(K_\epsilon)$ attire K_ϵ on a

$$d(u^n(\xi_n), w(K_\epsilon)) \longrightarrow 0 \text{ quand } n \longrightarrow +\infty$$

Par compacité de $w(K_\epsilon)$, on a

$$u^{n_k}(t_{n_k} - t) = u^{n_k}(\xi_{n_k}) \longrightarrow y \in w(K_\epsilon).$$

De la Définition 2.1(v), on déduit l'existence de $v \in S(y)$ tel que

$$u^{n_k}(t_{n_k}) = u^{n_k}_{t_{n_k}-t}(t) \longrightarrow v(t) = x.$$

Par conséquent $x \in S_t(A)$ et on a bien :

$$A \subset S_t(A). \tag{2.4}$$

Montrons maintenant que $S_t(A) \subset A$ pour tout $t \geqslant 0$:
A étant compact, supposons qu'il existe $t_0 > 0$ et $u \in S(A)$ tel que

$$d(u(t_0), A) = \alpha > 0. \tag{2.5}$$

D'autre part on déduit de (2.4) que pour tout $t > t_0$

$$S_{t_0}(A) \subset S_t(A)$$

Donc, soit $t_n \longrightarrow +\infty$, il existe $u^n \in S(A)$ telle que

$$u(t_0) = u^n(t_n).$$

Comme A est borné et attractif

$$d(u^n(t_n), A) \longrightarrow 0 \text{ quand } n \longrightarrow +\infty$$

ce qui contredit (2.5). □

Nous allons maintenant caractériser, comme dans la théorie classique (voir par exemple [10]), l'attracteur à l'aide des trajectoires complètes.

DÉFINITION 2.13.— *Soit* $u \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$, *u est une trajectoire complète ssi pour tout* $\tau \in \mathbb{R}$, $u_\tau : \mathbb{R}^+ \longrightarrow X$ *définie par* $u_\tau(t) = u(t+\tau)$ *appartient à* $S(u(\tau))$.

THÉORÈME 2.14.— *Soit A l'attracteur compact d'un système dynamique généralisé S. Alors A se caractérise par*

$$A = \{u(0) \ ; \ u \text{ trajectoire complète bornée}\}$$

Preuve du théorème 2.14. — On pose $B = \{u(0)\ u$ trajectoire complète bornée$\}$

• Montrons que $B \subset A$.
Soit $x \in B$, $x = v(0)$ pour v une trajectoire complète bornée de S, $v(\mathbb{R})$ est donc borné.
A étant attractif, on a

$$\sup_{u \in S(v(\mathbb{R}))} d(u(t), A) \longrightarrow 0 \text{ quand } t \longrightarrow +\infty. \tag{2.6}$$

Soit $\tau \geqslant 0$, $v_{-\tau} \in S(v(\mathbb{R}))$ donc

$$d(x, A) = d(v(0), A) = d(v_{-\tau}(\tau), A) \leqslant \sup_{u \in S(v(\mathbb{R}))} d(u(\tau), A).$$

Donc par (2.6) on obtient $d(x, A) = 0$ et $x \in A$.

• Montrons que $A \subset B$.
Soit $x \in A$, A étant invariant, il existe $u^1 \in S(A)$ tel que

$$\begin{cases} x & = u^1(1) \\ u^1(0) & = y_1 \in A \\ u^1(\mathbb{R}^+) & \subset A \end{cases}$$

Par récurrence, on construit une suite $u^n \in S(A)$ telle que

$$\begin{cases} u^n(0) & = u^{n+1}(1) \\ u^{n+1}(0) & = y_{n+1} \in A \\ u^{n+1}(\mathbb{R}^+) & \subset A \end{cases}$$

On pose alors

$$u(t) = \begin{cases} u^1(t+1) & \text{si } t \geqslant -1 \\ u^{n+1}(t+n+1) & \text{si } t \in [-n-1, -n] \text{ pour } n \geqslant 1 \end{cases}$$

Par construction $u(\mathbb{R}) \subset A$ donc bornée. Ils nous restent à montrer que u est une trajectoire complète :
Soit $\tau \in \mathbb{R}$ et $u_\tau : \mathbb{R}^+ \longrightarrow X$ définie par $u_\tau(t) = u(t+\tau)$. Montrons que $u_\tau \in S(u(\tau))$.
Si $\tau \geqslant -1$ $\quad u_\tau = u^1_{\tau+1} \in S(u^1(\tau+1)) = S(u(\tau))$
Si $-n-1 \leqslant \tau < -n$, $n \geqslant 1$

$$u_\tau = \begin{cases} u^1_{\tau+1} & \text{si } t \geqslant -1-\tau \\ u^{k+1}_{\tau+k+1} & \text{si } t \in [-k-1-\tau, -k-\tau] \text{ pour } k = 1, \ldots\ldots, n-1 \\ u^{n+1}_{\tau+n+1} & \text{si } t \in [0, -n-\tau] \end{cases}$$

On constate donc que $u_\tau \in S(u(\tau))$, la trajectoire étant construite par le raccordement d'un nombre fini de trajectoires (Définition 2.1 (iv)). $\square$

3. Exemple : Cas d'un problème parabolique dégénéré avec des termes gradient

Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$. On considère le problème suivant

$$\begin{cases} (|u|^{s-1}u)_t = \Delta u + a(|u|^{s-1}u, \nabla u) & \text{sur} \quad Q = \Omega \times (0, +\infty) \\ u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \times (0, +\infty) \\ u(0) = u_0 & \text{sur} \quad \Omega \end{cases} \tag{$\mathcal{P}$}$$

où $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, $s \in (0, 1]$ et a est une fonction continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ telle que

$$\begin{cases} \exists\, C \geqslant 0, \;\; 0 \leqslant \alpha < 1, \;\; 0 \leqslant \beta < 1, \;\; \gamma \geqslant 0, \;\; \beta + \gamma < 1 \\ a(|r|^{s-1}r, \zeta) \leqslant C(1 + |r|^\alpha + |r|^\beta |\zeta|^\gamma) \quad \forall (r, \zeta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \end{cases} \tag{3.1}$$

Un exemple de problème $(\mathcal{P})$ peut être obtenu en considérant l'équation :

$$V_t = \Delta(|V|^{m-1}V) + A|\nabla(|V|^{m-1}V)|^\gamma + B|V|^{p-1}V \tag{3.2}$$

avec $m \geqslant 1$, $0 \leqslant \gamma < 1$, $0 \leqslant p < m$ et $A, B \in \mathbb{R}$.
$u = |V|^{m-1}V$ vérifie alors l'équation de $(\mathcal{P})$ pour $s = \dfrac{1}{m}$ et $a(r, \zeta) = A|\zeta|^\gamma + B|r|^{p-1}r$.

Or (3.2) pour $A = 0$ a été étudiée par Aguirre et Escobedo [1] dans le cas $m = 1$, et de Pablo et Vazquez [14] dans le cas $m > 1$ pour des valeurs de p comprises entre 0 et 1 et par Dal Passo et Luckhaus [9] pour $m = 2, \gamma = 2$ et $A = -1$. Ces auteurs ont montré des résultats de non unicité des solutions pour le problème de Cauchy, ou le problème de Dirichlet.

On posera désormais $b(r) = |r|^{s-1}r$.

DÉFINITION 3.1.— *Soit $T > 0$, on note $Q_T = \Omega \times (0, T)$, on suppose (3.1) vérifiée et $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, on appelle alors u solution de (P) sur Q_T toute fonction qui satisfait*

$$u \in L^\infty(Q_T), \quad (bu)_t \in W' \;\; \text{où} \;\; W = L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^{\frac{2}{2-\gamma}}(Q_T). \tag{3.3}$$

$$\langle (bu)_t, \xi \rangle_{W', W} + \int_0^T \int_\Omega (b(u) - b(u_0))\xi_t = 0 \tag{3.4}$$

pour tout $\xi \in W \cap W^{1,1}(0, T; L^1(\Omega))$ avec $\xi(T) = 0$.

$$u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \;\; a(b(u), \nabla u) \in L^{\frac{2}{\gamma}}(Q_T). \tag{3.5}$$

$$\langle (bu)_t, \xi \rangle_{W', W} + \int_0^T \int_\Omega \nabla u . \nabla \xi = \int_0^T \int_\Omega a(b(u), \nabla u)\xi \quad \text{pour tout} \;\; \xi \in W. \tag{3.6}$$

On a alors le théorème d'existence suivant :

THÉORÈME 3.2. — *Il existe*

$$\mathcal{C} : I\!R^+ \times I\!R^+ \to I\!R^+, (\tau, c) \mapsto \mathcal{C}(\tau, c), \tag{3.7}$$

une fonction croissante par rapport à c et bornée en τ pour tout c et qui ne dépend que de a, s et Ω, et telle que
il existe $\mathcal{C}_0 > 0$ tel que $\lim sup_{\tau \to +\infty} \mathcal{C}(\tau, c) \leqslant \mathcal{C}_0, \quad \forall c \geqslant 0,$
et il existe

$$\omega : I\!R^{+*} \times I\!R^+ \times I\!R^+ \to I\!R^+ \quad (\tau, c, r) \mapsto \omega(\tau, c, r) \tag{3.8}$$

une fonction qui dépend de a, s et Ω telle que

- $\omega(\tau, c, 0) = 0 \quad \forall (\tau, c) \in I\!R^{+*} \times I\!R^+.$

- *ω est continue par rapport à r en* 0.

- *ω est croissante par rapport à c.*

Et pour tout $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, il existe $u \in L^\infty(Q)$ solution de (P) sur Q_T pour tout $T > 0$ et qui satisfait

$$|u(t)|_{L^\infty(Q)} \leqslant \mathcal{C}(t, |u_0|_{L^\infty(\Omega)}). \tag{3.9}$$

$$|u(X_1, t_1) - u(X_2, t_2)| \leqslant \omega(\tau, |u_0|_{L^\infty(\Omega)}, (|X_1 - X_2| + (t_1 - t_2)^{\frac{1}{2}})) \tag{3.10}$$

pour tous $X_1, X_2 \in \overline{\Omega}$ et $t_1, t_2 \geqslant \tau > 0$.

DÉFINITION 3.3. — *Toute fonction $u \in L^\infty(Q)$, solution de $(\mathcal{P})$ sur Q_T pour tout $T > 0$ et qui satisfait* (3.9) *et* (3.10) *pour les fonctions $\mathcal{C}$ et ω definies en* (3.7) *et* (3.8) *s'appelle une solution de type semi-flot.*

Notons que les propriétés des solutions de type semi-flot ne sont pas a priori suffisantes pour avoir l'unicité.

Preuve du Théorème 3.2. — Le Théorème 3.2 se démontre en approchant le problème $(\mathcal{P})$ par une suite de problèmes réguliers pour lesquels il existe une unique solution.

$$\left\{ \begin{array}{ll} (b_n(u))_t = \Delta u + a_n(b_n(u), \nabla u) & \text{sur } Q_T \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0, T) \\ u(., 0) = u_{0_n} & \text{sur } \Omega \end{array} \right. \tag{$\mathcal{P}_n$}$$

On prendra

- $u_{0_n} \in \mathcal{D}(\Omega)$, $|u_{0_n}|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant |u_0|_{L^\infty(\Omega)}$ et $u_{0_n} \to u_0$ dans L^1 (Ω).
-
$$\left\{ \begin{array}{l} b_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}), \;\; b_n(r) = |r|^{s-1}r \text{ si } r \notin (\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}) \\ b_n'(r) \leqslant \min(n, b'(r)) \text{ et } b_n(0) = 0. \end{array} \right. \tag{H_1}$$
- (H_2) $a_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$, $a_n \to a$ uniformément sur les bornés de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, a_n est constante en dehors d'une boule de rayon n de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ et

$$a_n(b_n(r), \zeta) \leqslant C(1 + |r|^\alpha + |r|^\beta |\zeta|^\gamma) \quad \forall (r, \zeta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N. \tag{3.11}$$

Dans ces conditions $(\mathcal{P}_n)$ admet une unique solution régulière et globale u_n [12, Théorème 6.1].
La démonstration du Théorème 3.2 repose alors sur plusieurs lemmes. Le premier donne une estimation L^∞ sur les u_n.

LEMME 3.4. — *Il existe $\mathcal{C}' : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ croissante qui ne dépend que de a, s et Ω telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la solution u_n de $(\mathcal{P}_n)$ satisfait*

$$|u_n|_{L^\infty(Q)} \leqslant \mathcal{C}'(|u_0|_{L^\infty(\Omega)}). \tag{3.12}$$

Preuve du Lemme 3.4

- **Etape 1** : Les estimations L^p

Montrons déjà que pour tout $1 \leqslant p < \infty$ il existe $\mathcal{C}_p : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction croissante telle que

$$|u_n|_{L^p(\Omega)} \leqslant \mathcal{C}_p(|u_0|_{L^\infty(\Omega)}) \quad \forall\, t \geqslant 0, \tag{3.13}$$

et il existe $C_p \geqslant 0$ et il existe $\tau_0 > 0$ dépendant seulement de p et $|u_0|_{L^\infty}$ tels que

$$|u_n(t)|_{L^p(\Omega)} \leqslant C_p \quad \forall t \geqslant \tau_0. \tag{3.14}$$

On multiplie l'équation $(\mathcal{P}_n)$ par $|u_n|^{p-1}u_n$, en utilisant (3.11) on trouve

$$\begin{aligned} &\int_\Omega (B_{n,p}(u))_t + \frac{4p}{(p+1)^2} \int_\Omega |\nabla(|u_n|^{\frac{p-1}{2}} u_n)|^2 \leqslant \\ &\qquad C(\int_\Omega |u_n|^p + |u_n|^{\alpha+p} + |u_n|^{\beta+p} |\nabla u_n|^\gamma) \end{aligned} \tag{3.15}$$

où $B_{n,p}$ est définie par

$$B_{n,p}(r) = \int_0^r b_n'(x)|x|^{p-1} x dx,$$

et on remarque en utilisant (H_1) que

$$\frac{s}{s+1}|r|^{p+s} - 1 \leqslant B_{n,p}(r) \leqslant \frac{s}{s+1}|r|^{p+s}. \tag{3.16}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, on a

$$\int_\Omega |u_n|^{\beta+p}|\nabla u_n|^\gamma) \leqslant \frac{4}{(p+1)^2}(\int_\Omega |\nabla(|u_n|^{\frac{p-1}{2}}u_n)|^2\ )^{\frac{\gamma}{2}}(\int_\Omega |u_n|^{\frac{\gamma+2\beta}{2-\gamma}+p}\ )^{\frac{2-\gamma}{2}}.$$

Et par l'inégalité de Young on obtient

$$\int_\Omega |u_n|^{\beta+p}|\nabla u_n|^\gamma) \leqslant \frac{2\gamma}{(p+1)^2}\int_\Omega |\nabla(|u_n|^{\frac{p-1}{2}}u_n)|^2 + c(\gamma)\int_\Omega |u_n|^{\frac{\gamma+2\beta}{2-\gamma}+p} \tag{3.17}$$

avec $(\dfrac{\gamma+2\beta}{2-\gamma}) < 1$

D'autre part, pour toute constante $0 \leqslant \delta < 1$, on a par l'inégalité de Poincaré

$$\int_\Omega |u_n|^{\delta+p} \leqslant c\int_\Omega (|u_n|^{p+1})^{\frac{\delta+p}{p+1}} \leqslant c(\int_\Omega |\nabla(|u_n|^{\frac{p-1}{2}}u_n)|^2\ )^{\frac{\delta+p}{p+1}}$$

et par l'inégalité de Young, on obtient

$$\int_\Omega |u_n|^{\delta+p} \leqslant \epsilon(p)\int_\Omega |\nabla(|u_n|^{\frac{p-1}{2}}u_n)|^2 + c(p). \tag{3.18}$$

Maintenant de $(3.15), (3.17)$ et (3.18) on déduit en choisissant $\epsilon(p)$ assez petit

$$\int_\Omega (B_{n,p}(u_n))_t + c(p)\int_\Omega |\nabla(|u_n|^{\frac{p-1}{2}}u_n)|^2 \leqslant C(p)$$

et donc par l'inégalité de Poincaré on trouve

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega (B_{n,p}(u_n)) + c(p)\int_\Omega |u_n|^{p+1} \leqslant C(p)$$

et donc

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega B_{n,p}(u_n) + c(p)(\int_\Omega |u_n|^{p+s})^{\frac{p+1}{p+s}} \leqslant C(p).$$

Compte tenu de (3.16) on a alors

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega B_{n,p}(u_n) + c(p)(\int_\Omega B_{n,p}(u_n))^{\frac{p+1}{p+s}} \leqslant C(p).$$

En utilisant alors le lemme 5.1 [15, p 164] si $s < 1$, on trouve

$$\int_\Omega B_{n,p}(u_n)(t) \leqslant C(p, |u_0|_{L^\infty(\Omega)})\ \ \forall t \geqslant 0 \tag{3.19}$$

et pour tout $\tau > 0$

$$\int_\Omega B_{n,p}(u_n)(t) \leqslant C(p,\tau) \quad \forall t \geqslant \tau. \tag{3.20}$$

Pour $s = 1$ le lemme de Gronwall nous donne

$$\int_\Omega B_{n,p}(u)(t) \leqslant C(p, |u_0|_{L^\infty(\Omega)})e^{-ct} + C(p) \quad \forall t \geqslant 0. \tag{3.21}$$

Maintenant, en utilisant (3.16) à nouveau, on déduit de (3.19), (3.20) et (3.21)

$$\int_\Omega |u_n|^{p+s}(t) \leqslant C(p, |u_0|_{L^\infty(\Omega)}) \tag{3.22}$$

pour $s < 1$, on a aussi

$$\int_\Omega |u_n|^{p+s}(t) \leqslant C(p,\tau) \quad \forall t \geqslant \tau. \tag{3.23}$$

et pour $s = 1$

$$\int_\Omega |u_n|^{p+s}(t) \leqslant C(p, |u_0|_{L^\infty(\Omega)})e^{-ct} + C(p) \quad \forall t \geqslant 0. \tag{3.24}$$

Ceci achève la preuve de (3.13) et (3.14).

- **Etape 2**

Montrons maintenant le Lemme 3.4. L'estimation L^∞ est démontrée par une méthode de Moser, ameliorée pour obtenir une constante indépendante de t.
En utilisant (3.15) et (3.17) on a

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega B_{n,p}(u_n) + \frac{2p}{(p+1)^2}\int_\Omega |\nabla |u_n|^{\frac{p-1}{2}} u_n|^2 \leqslant \int_\Omega |u_n|^p(1 + |u_n|^\alpha + |u_n|^{\frac{\gamma+2\beta}{2-\gamma}}) \tag{3.25}$$

Par simplicité, on omettra d'écrire les indices n dans la suite de la preuve du Lemme 3.4.
On pose

$$f(u) = C(1 + |u|^\alpha + |u|^{\frac{\gamma+2\beta}{2-\gamma}}).$$

On fixe d'abord $q > 1$ tel que

$$C_1\Big(\int_\Omega |u|^{q(p+1)}\Big)^{\frac{1}{q}} \leqslant \int_\Omega |\nabla(|u|^{\frac{p-1}{2}} u)|^2 \tag{3.26}$$

pour une constante C_1 indépendante de p. Maintenant, pour tout $r > 1$ il existe une constante $C_2 > 0$ qu'on peut prendre indépendante de p telle que

$$\int_\Omega |u|^p f(u) \leqslant C_2 |f(u)|_{L^r(\Omega)} (\int_\Omega |u|^{\frac{r(p+1)}{r-1}})^{\frac{p(r-1)}{r(p+1)}}) \tag{3.27}$$

Pour $\sigma > 1$ on a $\dfrac{r(p+1)}{r-1} = \dfrac{r(p+1)}{r-1}\dfrac{\sigma-1}{\sigma} + \dfrac{r(p+1)}{r-1}\dfrac{1}{\sigma}$.
On fixe $r > \frac{q}{q-1}$ et pour σ assez grand $\frac{q(r-1)\sigma}{r(\sigma-1)} > 1$. En appliquant l'inégalité de Hölder on obtient

$$\int_\Omega |u|^p f(u) \leqslant C_2 |f(u)|_{L^r(\Omega)} (\int_\Omega |u|^{q(p+1)})^{\frac{p(\sigma-1)}{q\sigma(p+1)}} \ (\int_\Omega |u|^{\frac{rq(p+1)}{(r-1)\sigma q - r(\sigma-1)}})^\xi$$

avec $\xi = \frac{(r-1)\sigma q - r(\sigma-1)}{r\sigma q}\frac{p}{p+1}$. On peut donc écrire

$$\int_\Omega |u|^p f(u) \leqslant C_2 |f(u)|_{L^r(\Omega)} [\frac{C_1\sigma}{(p+1)(\sigma-1)} (\int_\Omega |u|^{q(p+1)})^{\frac{1}{q}}]^{\frac{p(\sigma-1)}{\sigma(p+1)}} \tag{3.28}$$

$$\times\ (\frac{(p+1)(\sigma-1)}{C_1\sigma})^{\frac{p(\sigma-1)}{\sigma(p+1)}} (\int_\Omega |u|^{\frac{rq(p+1)}{(r-1)\sigma q - r(\sigma-1)}})^\xi$$

(3.26), (3.27), (3.28) et l'inégalité de Young donnent alors

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega B_{n,p}(u) + \frac{2p}{(p+1)^2} C_1 (\int_\Omega |u|^{q(p+1)})^{\frac{1}{q}} \leqslant$$

$$|f(u)|_{L^r(\Omega)}^{\frac{(p+1)\sigma}{p+\sigma}} \frac{p+\sigma}{(p+1)\sigma} (\frac{(p+1)(\sigma-1)}{C_1\sigma})^{\frac{p(\sigma-1)}{\sigma+p}} (1+C_2)^{\frac{(p+1)\sigma}{p+\sigma}}$$
$$(\max\{1, \int_\Omega |u|^{\frac{rq(p+1)}{(r-1)\sigma q - r(\sigma-1)}}\})^{\frac{(p+1)\sigma}{p+\sigma}\xi}.$$

Comme on peut toujours supposer $|f(u)|_{L^r(\Omega)} \geqslant 1$. Il existe une constante b_1 telle que

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega B_{n,p}(u) \leqslant |f(u)|^\sigma_{L^r(\Omega)} (p+1)^{\sigma-1} b_1^\sigma \max\{1, \int_\Omega |u|^{\frac{(p+1)}{\beta_\sigma}}\}^{\beta_\sigma} \tag{3.29}$$

où $\beta_\sigma = \frac{(r-1)\sigma q - r(\sigma-1)}{rq}$.
Intégrant (3.29) entre 0 et t et compte tenu de (3.16) on trouve

$$\frac{s}{p+s}\int_\Omega |u|^{p+s}(t) - \frac{s}{p+s}\int_\Omega |u_0|^{p+s} \leqslant$$

$$1 + (p+1)^{\sigma-1} b_1^\sigma \int_0^t |f(u)(\tau)|^\sigma_{L^r(\Omega)} d\tau \sup_{\tau\in[0,t]} (\max\{1, \int_\Omega |u|^{\frac{(p+1)}{\beta_\sigma}}\})^{\beta_\sigma}$$

et donc pour une constante $b_2 > 0$ qui dépend de $|u_0|_{L^\infty(\Omega)}$ on a

$$\int_\Omega |u|^{p+s}(t)$$
$$\leqslant b_2^{p+1} + (p+1)^{\sigma-1} b_1^\sigma \int_0^t |f(u)(\tau)|^\sigma_{L^r(\Omega)} d\tau \sup_{\tau\in[0,t]} (\max\{1, \int_\Omega |u|^{\frac{(p+1)}{\beta_\sigma}}\})^{\beta_\sigma}$$

comme $\beta_\sigma > 1$ pour σ assez grand on définit les suites

$$p_{k+1} = \beta_\sigma p_k - (1-s), \quad p_0 > 1$$

$$\gamma_k = \sup_{\tau\in[0,t]} (\max\{1, \int_\Omega |u|^{p_k}\})$$

on prend alors $p = p_{k+1} - s$ dans (3.30), on a alors

$$\gamma_{k+1} \leqslant (b_2^{\beta_\sigma})^{p_k} + b_1^\sigma (\beta_\sigma p_k)^{\sigma-1} (\int_0^t |f(u)(\tau)|^\sigma_{L^r(\Omega)} d\tau).\gamma_k^{\beta_\sigma}$$

$$\gamma_{k+1} \leqslant (b_2)^{p_{k+1}} (b_2)^{1-s} + b_1^\sigma (p_{k+1} + 1 - s)^{\sigma-1} (\int_0^t |f(u)(\tau)|^\sigma_{L^r(\Omega)} d\tau).\gamma_k^{\beta_\sigma}$$

$$\gamma_{k+1} \leqslant 2 b_3^\sigma \max(1, \int_0^t |f(u)(\tau)|^\sigma_{L^r(\Omega)} d\tau) p_{k+1}^\sigma \max(b_2^{p_{k+1}}, \gamma_k^{\beta_\sigma}).$$

Pour conclure on utilise le lemme suivant dû à Laurençot [11].

LEMME 3.5. — *Soit $a > 1$, $b \geqslant 0$, $c \in \mathbb{R}$, $c_0 \geqslant 1$, $c_1 \geqslant 1$, $p_0 = \frac{c}{a-1} > 0$, la suite p_k vérifiant*

$$p_{k+1} = a p_k + c.$$

$\gamma_0 \leqslant c_1^{p_0}$, la suite γ_k vérifiant

$$\gamma_{k+1} \leqslant c_0 p_{k+1}^b \max\{c_1^{p_{k+1}}, \gamma_k^a\}$$

alors $(\gamma_k)^{\frac{1}{p_k}}$ est bornée. On a plus précisément

$$(\gamma_k)^{\frac{1}{p_k}} \leqslant (C_0^{\frac{1}{a-1}} \mathcal{N}^{\frac{b}{a-1}})^{\frac{a^k - 1}{p_k}} a^{\delta_k} C_1^{\mathcal{N} \frac{a^k}{p_k}},$$

où

$$\mathcal{N} = 2(p_0 + |\frac{c}{a-1}|)$$

et

$$\delta_k = \frac{b}{a(a-1)^2} \frac{a^{k+1} - (k+1)a + k}{p_k}.$$

On pose alors

$$c_0 = 2b_3^\sigma \max(1, \int_0^t |f(u)(\tau)|^\sigma_{L^r(\Omega)} d\tau), \quad b=\sigma, \quad c_1 = b_2, \quad a=\beta_\sigma \text{ et } c = s-1$$

et on choisit p_0 assez grand pour que $p_0 - \dfrac{1-s}{\beta_\sigma - 1} > 0$ et

$$\gamma_0 = \sup_{\tau\in[0,t]} (\max\{1, \int_\Omega |u|^{p_0}(\tau)\}).$$

Notons que $\gamma_0 \leqslant c(p_0, |u_0|_{L^\infty(\Omega)})$ d'après la première étape, on peut alors choisir b_2 pour que $\gamma_0 \leqslant b_2^{p_0}$. On applique alors le lemme de Laurençot et on obtient

$$(\gamma_k)^{\frac{1}{p_k}} \leqslant M(\sigma, k)$$

On fait tendre k puis σ vers $+\infty$ et on trouve

$$|u|_{L^\infty(Q_t)} \leqslant \mathcal{C}(|u_0|_{L^\infty(\Omega)}) \max\{1, \sup_{\tau\in[0,t]} |f(u)(\tau)|_{L^r(\Omega)}\}^{\frac{rq}{p_0(r-1)q-r}}.$$

On majore maintenant $|f(u)(\tau)|_{L^r(\Omega)}$ en utilisant (3.13) pour ce r fixé on obtient

$$|u_n|_{L^\infty(\Omega\times(0,\infty))} \leqslant \mathcal{C}'(|u_0|_{L^\infty(\Omega)})$$

où $\mathcal{C}'$ est une fonction croissante de $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ qui ne dépend pas de n. □

Suite de la preuve du Théorème 3.2. — Convergence faible de u_n dans $L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$

Soit $T > 0$, on montre d'abord l'estimation d'énergie suivante

$$\int_\Omega B_n(u_n(T)) + \iint_{Q_T} |\nabla u_n|^2 \leqslant C(T, |u_0|_{L^\infty}) \tag{3.30}$$

où on note

$$B_n(r) = \int_0^r (b_n(r) - b_n(s))ds = B_{n,1}(r).$$

(3.25) et le Lemme 3.4 donnent

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega B_n(u_n) + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \leqslant C(|u_0|_{L^\infty}).$$

On intègre entre 0 et T, compte tenu de la définition de B_n on a

$$\int_\Omega B_n(u_n(T)) + \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \leqslant C(T, |u_0|_{L^\infty}) + \int_\Omega B_n(u_{0n}) \leqslant C(T, |u_0|_{L^\infty}).$$

La suite u_n est donc bornée dans $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ pour chaque T.

Soit $T_k \to +\infty$ quand $k \to +\infty$, on peut extraire pour tout $k > 0$ une sous suite u_n^k telle que

$$u_n^k \rightharpoonup u^k \text{ dans } L^2(0,T_k;H_0^1(\Omega)) \text{ faible}$$

et u_n^k est une suite extraite de u_n^{k-1}, alors $u^k_{|[0,T_{k-1}]} = u^{k-1}$.

Le procédé diagonal nous permet alors d'énoncer le lemme suivant

LEMME 3.6. — *Il existe $u \in L^2_{loc}(0,\infty;H_0^1(\Omega))$ et une sous suite de u_n, notée encore u_n telle que pour tout $T > 0$*

$$u_n \rightharpoonup u \text{ dans } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \text{ faible} \tag{3.31}$$

Suite de la preuve du Théorème 3.2. — Montrons que la suite u_n est relativement compacte dans $L^2(Q_T)$ pour chaque $T > 0$.

On remarque déjà que

$$|b_n(u_n)_t|_{W'} \leqslant C(T, |u_0|_{L^\infty}). \tag{3.32}$$

En effet, soit $\xi \in W$ tel que $\|\xi\|_W \leqslant 1$, multiplions l'équation de $(\mathcal{P}_n)$ par ξ et intégrons sur Q_T, on trouve alors

$$\begin{aligned}\langle (b_n(u_n))_t, \xi\rangle_{W',W} \leqslant{} & |\nabla u_n|_{L^2(Q_T)}|\nabla\xi|_{L^2(Q_T)} \\ & + |a_n(b_n(u_n),\nabla u_n)|_{L^{\frac{2}{\gamma}}(Q_T)}|\xi|_{L^{\frac{2}{2-\gamma}}(Q_T)}.\end{aligned}$$

Il découle de (3.11) et (3.12) et (3.30) l'estimation suivante :

$$|a_n(b_n(u_n),\nabla u_n)|_{L^{\frac{2}{\gamma}}(Q_T)} \leqslant C(T, |u_0|_\infty) \tag{3.33}$$

et donc

$$\langle (b_n(u_n))_t, \xi\rangle_{W',W} \leqslant C(|\nabla\xi|_{L^2(Q_T)} + |\xi|_{L^{\frac{2}{2-\gamma}}(Q_T)}) = C\|\xi\|_W$$

d'où (3.32). Sachant que u_n est bornée dans $L^\infty(Q_T)$, d'après le Lemme 1.8 de [2], (et aussi [3]), on a alors la compacité de u_n dans $L^2(Q_T)$ pour tout $T > 0$, et donc on a pour une sous suite

$$b_n(u_n) \longrightarrow b(u) \text{ dans } L^1(Q_T) \text{ et presque partout} \tag{3.34}$$

$$(b_n(u_n))_t \rightharpoonup (b(u))_t \text{ dans } \sigma(W', W) \tag{3.35}$$

$$B_n(u_n) \longrightarrow B(u) \text{ dans } L^1(Q_T), \tag{3.36}$$

où B est défini par

$$B(r) = \int_0^r (b(r) - b(s))ds.$$

De plus u satisfait (3.3) et (3.4).

Montrons maintenant la convergence forte de ∇u_n dans $L^2(Q_T)$:
Pour cela, multiplions l'équation de $(\mathcal{P}_n)$ par $u_n - u$ et intégrons sur Q_T, on obtient

$$\int_{Q_T} (b_n(u_n))_t(u_n - u) + \int_{Q_T} \nabla u_n . \nabla(u_n - u) - \int_{Q_T} a_n(b_n(u_n), \nabla u_n)(u_n - u) = 0$$

d'après (3.35) et parce que $(u_n - u) \longrightarrow 0$ dans $L^{\frac{2}{2-\gamma}}(Q_T)$, on a

$$\int_{Q_T} (b_n(u_n))_t u_n - \langle (b_n(u_n))_t, u \rangle_{W',W} + \int_{Q_T} |\nabla(u_n - u)|^2 \leqslant \int_{Q_T} \nabla u . \nabla(u_n - u) + \epsilon(n)$$

où $\epsilon(n)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et donc en utilisant (3.35) on trouve

$$\int_\Omega B_n(u_n)(T) - \int_\Omega B_n(u_{0_n}) - \langle (b(u))_t, u \rangle_{W',W} + \int_\Omega |\nabla(u_n - u)|^2 = \epsilon(n)$$

or u satisfait (3.3) et (3.4), d'après une adaptation simple du Lemme 1.5 de [2] on a

$$\langle bu_t, u \rangle_{W',W} = \int_\Omega B(u)(T) - \int_\Omega B(u_0)$$

et (3.36) donne

$$\int_\Omega |\nabla(u_n - u)|^2 \longrightarrow 0 \text{ quand } n \longrightarrow +\infty. \tag{3.37}$$

D'autre part d'après (3.33), (3.34), (3.37) et (H_2) on a

$$a_n(b_n(u_n), \nabla u_n) \rightharpoonup a(b(u), \nabla u) \text{ dans } L^{\frac{2}{\gamma}} \text{ faible}$$

u satisfait (3.5), et en passant à la limite on a (3.6), u est donc bien une solution de $(\mathcal{P})$ sur (Q_T) pour tout $T > 0$.

Maintenant le résultat de DiBenedetto [8] nous donne le module de continuité ω vérifiant (3.8) et il ne reste plus qu'à montrer l'existence de la fonction $\mathcal{C}$ vérifiant (3.7), ce qui est fait dans le Lemme 3.7. □

LEMME 3.7. — *Il existe $\mathcal{C} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ vérifiant* (3.7) *telle que pour tout n la solution u_n de $(\mathcal{P}_n)$ satisfait* (3.9)

Preuve du Lemme 3.7. — Considérons d'abord le problème en dimension $N = 1$, multiplions l'équation de $(\mathcal{P}_n)$ par u_n et intégrons sur Ω où τ_0, on obtient alors (3.19) pour $p = 1$. Intégrons cette inegalité sur $]\tau_0, \tau_0 + 1[$ où τ_0 est donné par (3.14), on a alors

$$\int_\Omega B_n(u_n)(\tau_0 + 1) + \int_{\tau_0}^{\tau_0+1}\int_\Omega |u_{n_x}|^2 \leqslant c + \int_\Omega B_n(u_n)(\tau_0) \tag{3.38}$$

$$\leqslant c(1 + |u_n(\tau_0)|_{L^{s+1}(\Omega)}) \leqslant C_{s+1}$$

où C_{s+1} est une constante indépendante de $|u_0|_{L^\infty(\Omega)}$. Par un calcul identique à (3.15), (3.17) et (3.18), on déduit de (3.38) qu'il existe $t_{0n} \in]\tau_0, \tau_0+1[$ tel que

$$|u_n(t_{0n})|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant c|u_{n_x}(t_{0n})|_{L^2(\Omega)} \leqslant C$$

pour une constante C indépendante de $|u_0|_{L^\infty}$. Alors d'après le Lemme 3.4

$$|u_n(t)|_\infty \leqslant C'(C) \quad \forall t \geqslant \tau_0 + 1 > t_{0n} \tag{3.39}$$

et donc (3.9) est démontré si $N = 1$.

Si maintenant $N > 1, x \in \mathbb{R}^N$ s'écrit $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, soit Ω_1 la projection de Ω sur la première composante et considérons le problème $(\mathcal{P}_{1,n})$

$$\begin{cases} (b_n(v))_t = v_{x_1x_1} + \bar{a}_n(b_n(v), v_{x_1}) - (\bar{a}_n(0,0))^+ & \text{sur } \Omega_1 \times (0,T) \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega_1 \times (0,T) \\ v(.,0) = v_0 & \text{sur } \Omega_1 \end{cases}$$

où $\bar{a}_n(r,\xi) = a_n(r,\xi,0,...,0), \ \forall (r,\xi) \in \mathbb{R}^2$.

Si $v_0 \geqslant 0, (\mathcal{P}_{1,n})$ admet une solution v_n qui est positive par principe de comparaison.

Remarquons alors que si on pose

$$L_n(w) = (b_n(w))_t - \Delta w - a_n(b_n(w), \nabla w)$$

alors $w_n(x,t) = w_n(x_1, x_2, ..., x_N, t) = v_n(x_1, t)$ satisfait
$L_n(w_n) = (b_n(v_n))_t - v_{n_{x_1x_1}} - \bar{a}_n(b_n(v_n), v_{n_{x_1}}) = -\bar{a}_n(0,0)^+ \leqslant 0$ dans $\Omega \times (0,T)$
or $L_n(u_n) = 0$ dans $\Omega \times (0,T)$ de plus

$$u_n = 0 \leqslant w_n \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0,T).$$

On pose $y = (x_2, ..., x_n)$, choisissons alors $v \in \mathcal{D}(\Omega_1)$ et telle que

$$u_{0n}(x) \leqslant \max_{\{y;(x_1,y)\in\Omega\}} \{|u_{0n}(x_1,y)|\} \leqslant v_{0n}(x_1) \leqslant 2 \max_{\{y;(x_1,y)\in\Omega\}} \{|u_{0n}(x_1,y)|\}.$$

On a alors $|v_{0n}|_{L^\infty(\Omega_1)} \leqslant 2|u_{0n}|_{L^\infty(\Omega)}$ et

$$u_{0n} \leqslant w_{0n} \quad \text{sur } \Omega.$$

Par principe de comparaison on a alors

$$u_n \leqslant w_n \quad \text{sur } \Omega.$$

Appliquant maintenant à v_n la première partie de la preuve du Lemme 3.7 car $\bar{a}_n$ satisfait bien (3.11), on a d'après (3.39)

$$u_n(x,t) \leqslant \mathcal{C}'(C) \quad \forall t \geqslant \tau_0 + 1 > t_{0n}, \quad \forall x \in \Omega.$$

Une démonstration analogue nous permet de minorer u_n de la même façon et le Lemme 3.7 est démontré pour tout $N \geqslant 1$. □

On peut remarquer dans la démonstration du Théorème 3.2 qu'en fait les fonctions $\mathcal{C}$ et ω peuvent être obtenues par des calculs formels sur l'équation de départ, il est alors légitime de considérer toutes les solutions faibles satisfaisant (3.9) et (3.10) indépendamment de leur mode de construction.

Montrons maintenant que ces solutions de type semi-flot déterminent un système dynamique généralisé.

On pose $X = L^\infty(\Omega)$, et pour tout $u_o \in X$,

$$S(u_0) = \{u, \text{ solution semi-flot de } (\mathcal{P}) \text{ telle que } u(0) = u_0\}.$$

THÉORÈME 3.8. — *S définit un système dynamique généralisé sur $X = L^\infty(\Omega)$.*

Preuve du Théorème 3.8. — Les conditions (i), (ii) et (iii) sont immédiates, montrons d'abord la condition de raccordement (iv) :

Soit $t > 0$, $u \in S(u_0)$ et $v \in S(u(t))$ montrons que la fonction w définie par

$$\begin{cases} w(s) = u(s) & \text{si } s \leqslant t \\ w(s) = v(s-t) & \text{si } s \geqslant t \end{cases}$$

appartient à $S(u_0)$.

Pour tout $\tau > 0$, on notera $W_\tau = L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^{\frac{2}{2-\gamma}}(Q_\tau)$ et W'_τ son dual.

Soit $\xi \in W_T, T > t$, on a par définition de w et $(3.5),(3.6)$

$$\int_{Q_T} \nabla w.\nabla\xi + \int_{Q_T} a(b(w),\nabla w)\xi = \tag{3.40}$$

$$\langle (b(u))_t, \xi_{/[0,T]}\rangle_{W'_t,W_t} + \langle (b(v))_t, \xi(.+t)_{/[0,T-t]}\rangle_{W'_{T-t},W_{T-t}}.$$

On remarque que si u satisfait (3.3) et (3.4) on a aussi pour tout $T > 0$

$$\langle (b(u))_t, \xi\rangle_{W'_T,W_T} + \int_{Q_T} b(u)\xi_t + \int_\Omega b(u)(T)\xi(T) - \int_\Omega b(u_0)\xi(0) = 0$$

$\forall \xi \in W \cap W^{1,1}(0,T;L^1(\Omega))$. Il suffit en effet de considérer $\rho_n\xi$ dans (3.4) comme fonction test, où ρ_n est une fonction continue, affine par morceaux telle que $\rho_n \equiv 1$ sur $[0, T - \frac{1}{n}]$, $\rho_n(T) = 0$ puis de passer à la limite. On a alors, pour tout $\xi \in W \cap W^{1,1}(0,T;L^1(\Omega))$., telle que $\xi(T) = 0$

$$\langle (b(u))_t, \xi_{/[0,t]}\rangle_{W'_t,W_t} = \int_{Q_T} b(u)\xi_t + \int_\Omega b(u)(t)\xi(t) - \int_\Omega b(u_0)\xi(0) \tag{3.41}$$

$$\langle (b(v))_t, \xi(.+t)_{/[0,T-t]}\rangle_{W'_{T-t},W_{T-t}} = \int_{Q_{T-t}} b(v)\xi_t(.+t) - \int_\Omega b(u)(t)\xi(t). \tag{3.42}$$

On a donc par $(3.40),(3.41)$ et (3.42)

$$\langle (b(u))_t, \xi_{/[0,t]}\rangle_{W'_t,W_t} + \langle (b(v))_t, \xi(.+t)_{/[0,T-t]}\rangle_{W'_{T-t},W_{T-t}}$$
$$= \int_{Q_T} (b(w) - b(u_0))\xi_t$$

ce qui indique que
$\eta \in W_T \longmapsto -\langle b(u)_t, \eta|_{[0,t]}\rangle_{W'_t,W_t} + \langle b(v)_t, \eta|_{[0,T-t]}(.+t)\rangle_{W'_{T-t},W_{T-t}}$ définit un élément de W'_T égal à $b(w)_t$. w satisfait donc (3.4) et (3.6) et $w \in S(u_0)$.

Reste à montrer la condition de compacité (v):

Soit $u_{0_n} \longrightarrow u_0$ dans $L^\infty(\Omega)$ et u_n une solution semi-flot de condition initiale u_{0_n} et soit $t_0 > 0$ fixé, montrons qu'on peut trouver u une solution semi-flot de $(\mathcal{P})$ de condition initiale u_0 et u_{n_k} une suite extraite de u_n telle que

$$u_{n_k(t_0)} \longrightarrow u(t_0) \quad \text{dans } L^\infty(\Omega).$$

pour cela nous allons utiliser d'une part les estimations d'énergie obtenues comme dans la démonstration du Théorème 3.2, et d'autre part les conditions (3.8) et (3.9) qui définissent une solution de type semi-flot.

Soit $T > 0$, prenons d'abord u_n comme fonction test dans (3.6), en utilisant (3.1) on obtient

$$\langle (b(u_n))_t, u_n\rangle_{W',W} + \int_0^T \int_\Omega |\nabla u_n|^2 \leqslant c\int_0^T \int_\Omega |u_n| + |u_n|^{\alpha+1} + |u_n|^{\beta+1}|\nabla u_n|^\gamma dxdt.$$

Le calcul fait en $(3.17), (3.18)$ avec $p = 1$ nous donne alors

$$\langle (b(u_n))_t, u_n\rangle_{W',W} + \int_0^T \int_\Omega |\nabla u_n|^2 \leqslant C(T).$$

Maintenant par une petite modification du Lemme 1.5 de [2] on obtient

$$\langle (b(u_n))_t, u_n\rangle_{W',W} = \int_\Omega B((u_n)(T)) - \int_\Omega B(u_{0n})$$

et donc comme $u_{0n} \longrightarrow u_0$ dans $L^\infty(\Omega)$ on a l'inégalité d'énergie suivante

$$\int_\Omega B((u_n)(T)) + \int_0^T \int_\Omega |\nabla (u_n)|^2 \leqslant C(T, |u_0|_{L^\infty(\Omega)}).$$

On en déduit alors qu'il existe $u \in L^2_{loc}(0,\infty; H^1_0(\Omega))$ et une sous suite de u_n telle que pour tout $T > 0$

$$u_n \rightharpoonup u \;\text{ dans }\; L^2_{loc}(0,T; H^1_0(\Omega)) \;\text{ faible.}$$

La même procédure que dans le Théorème 3.2 nous permet alors d'obtenir

$$b(u_n) \longrightarrow b(u) \;\text{ dans }\; L^1(Q_T) \;\text{ et pp.} \tag{3.43}$$

$$(b(u_n))_t \rightharpoonup (b(u))_t \;\text{ dans }\; \sigma(W', W) \tag{3.44}$$

$$u_n \longrightarrow u \;\text{ dans }\; L^2(0,T; H^1_0(\Omega)) \;\text{ fort.} \tag{3.45}$$

D'autre part par $(3.7), (3.8), (3.9), (3.10)$ et le théorème d'Ascoli, et pour $0 < \tau < t_0, u_n$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}([\tau, t_0], \overline{\Omega})$, donc on a pour une sous suite

$$u_n \longrightarrow u \;\text{ dans }\; \mathcal{C}([\tau, t_0], \overline{\Omega})$$

et donc u est continue sur $[\tau, t_0] \times \overline{\Omega}$ et

$$u_n(t_0) \longrightarrow u(t_0) \text{ dans } L^\infty(\Omega).$$

Par (3.43), (3.44) et (3.45), on peut passer à la limite dans les équations et u satisfait (3.4) et (3.6) donc u est bien solution de type semi-flot du problème de condition initiale u_0.

On a donc bien définit par S un système dynamique généralisé correspondant à des solutions faibles globales pas forcément uniques du problème $(\mathcal{P})$. □

Montrons maintenant que ce système dynamique généralisé possède un attracteur compact. D'après la Remarque 2.11 et le Théorème 2.12, il suffit de vérifier que S est compact et possède un borné absorbant.

LEMME 3.9. — *Le système dynamique généralisé S est compact.*

Preuve du lemme 3.9. — Soit B un borné de $L^\infty(\Omega)$ inclus dans une boule de rayon $R > 0$, et soit $t > 0$ et $S_t(B) = \{u(t) \ ; \ u \in S(B)\}$. Nous utilisons alors le module de continuité donné a priori pour définir nos solutions de type semi-flot pour conclure en utilisant (3.7) – (3.10) qu'on a pour tout $u \in S(B)$

$$|u|_{L^\infty(Q)} \leqslant C(R)$$

$$|u(x_1,t) - u(x_2,t)| \leqslant \omega(t, C(R), |x_1 - x_2|) \quad \forall x_1, x_2 \in \overline{\Omega}$$

donc par Ascoli $S_t(B)$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ et donc dans $L^\infty(\Omega)$. □

THÉORÈME 3.10. — *S admet un attracteur compact dans $X = L^\infty(\Omega)$.*

Preuve du Théorème 3.10. — S admet un borné absorbant donné par (3.7) et il est compact par le Lemme 3.9. □

Bibliographie

[1] AGUIRRE (J.), ESCOBEDO (M.). — A Cauchy problem for $u_t = \Delta u - u^p$ with $0 < p < 1$. Asymptotic behaviour solutions, *Ann. Fac. Toulouse*, Vol VIII, n° 2, (1987), p. 1986-1987.

[2] ALT (H.W.), LUCKHAUS (S.). — Quasilinear Elliptic-parabolic differential equations, *Math Z*, 183, (1983), p. 311-341.

[3] ANDREU (F.), MAZON (J.M.), SIMONDON (F.), TOLEDO (J.). — Global existence for a degenerate nonlinear diffusion problem with nonlinear gradient term and source, *Mathematische Annalen*, 314, (1999), p. 703-728.

[4] BALL (J.M.). — On the asymptotic behavior of generalized process with applications to Nonlinear evolution equations, *J. Differential Equations*, 27, (1978), p. 224-265.

[5] CHEPYZHOV (V.V.), VISHIK (M.I.). — Trajectory attractors for evolution equations, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 321, (1995), p. 1309-1314.

[6] CHEPYZHOV (V.V.), VISHIK (M.I.). — Evolution equations and their trajectory attractors, *J. math. pures et appl.*, 76, (1997), p. 913-964.

[7] CRANDALL (M.G.), ISHI (H.), LIONS (P.L.). — User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 27 (1), (1992), p. 1-67.

[8] DIBENEDETTO. — Continuity of weak solutions to a general porous medium equation, *Indiana Univ. Math. J.* 32, (1983), p. 88-118.

[9] DAL PASSO (R.), LUCKHAUS (S.). — A degenerate problem not in divergence form, J. D. E., 69, (1987), p. 1-14.

[10] HARAUX (A.). — Systèmes dynamiques dissipatifs et applications, RMA 17, Masson, Paris (1991).

[11] LAURENÇOT (Ph.). — Etude de quelques problèmes aux derivées partielles non linéaires, Thèse de l'Université de Franche-Comté; Besançon (1993).

[12] LADYZENSKAYA (O.A.), SOLONNIKOV (V.L.), URALTSEVA (N.N.). — Linear and quasilinear equations of parabolic type. *Trans. of Math. Monographs* 23, AMS (1968).

[13] MEL'NIK (V.S.). — Multivalued semiflows and their attractors, *Dokladi Mathematics*, Vol. 52, No 1, (1995), p. 36-39.

[14] DE PABLO (A.), VAZQUEZ (J.L.). — Travelling waves and Finite propagation in a reaction-diffusion equation, JDE, 93 (1991), p. 19-61.

[15] TEMAM (R.). — Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physique, *Appl. Math. Sc.* 68, Springer-Verlag, New York, 1988.