

ÉRIC BENOÎT

AUGUSTIN FRUCHARD

REINHARD SCHÄFKE

GUY WALLET

**Solutions surstables des équations différentielles  
complexes lentes-rapides à point tournant**

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6<sup>e</sup> série*, tome 7, n<sup>o</sup> 4  
(1998), p. 627-658

[http://www.numdam.org/item?id=AFST\\_1998\\_6\\_7\\_4\\_627\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AFST_1998_6_7_4_627_0)

© Université Paul Sabatier, 1998, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## Solutions surstables des équations différentielles complexes lentes-rapides à point tournant<sup>(\*)</sup>

ÉRIC BENOÎT<sup>(1)</sup>, AUGUSTIN FRUCHARD<sup>(1)</sup>,  
REINHARD SCHÄPFKE<sup>(2)</sup> et GUY WALLET<sup>(1)</sup>

---

**RÉSUMÉ.** — On considère des équations différentielles complexes  $\varepsilon u' = \Psi(x, u, a, \varepsilon)$ , d'ordre un, singulièrement perturbées et à point tournant d'ordre  $p$ , munies d'un paramètre de contrôle  $a$  de dimension  $p$ . On démontre l'existence et l'exponentielle proximité de solutions définies et bornées uniformément par rapport au petit paramètre de perturbation  $\varepsilon$  dans des domaines macroscopiques sous des hypothèses géométriques sur le domaine et une hypothèse de transversalité sur le paramètre de contrôle. L'idée principale — la résolution d'un problème aux limites puis l'application du théorème du point fixe — est une généralisation d'une technique établie dans un précédent article [9].

**ABSTRACT.** — We consider singularly perturbed complex differential equations of the form  $\varepsilon u' = \Psi(x, u, a, \varepsilon)$  which have a turning point of order  $p$  and a  $p$ -dimensional control parameter  $a$ . We state conditions of geometric nature, and of transversality in the parameter  $a$ , and prove that under these assumptions there exist solutions which are uniformly bounded with respect to the small perturbation parameter  $\varepsilon$  on some macroscopic domain, and which are exponentially close to each other. The approach — based on the solution of a boundary value problem, and an application of the fix-point theorem — generalizes a technique elaborated in a previous article [9].

---

(\*) Reçu le 25 septembre 1997, accepté le 20 janvier 1998

(1) Laboratoire de Mathématiques, Université de La Rochelle, Pôle Sciences et Techniques, Avenue Marillac, F-17042 La Rochelle Cedex (France)

e-mail : ebenoit@math.univ-lr.fr

e-mail : afruchar@math.univ-lr.fr

e-mail : gwallet@math.univ-lr.fr

(2) Département de Mathématiques, Université Louis-Pasteur, 7 rue René-Descartes, F-67084 Strasbourg Cedex (France)

e-mail : schaeffe@math.u-strasbg.fr

**MOTS-CLÉS** : équation différentielle complexe, point tournant, perturbation singulière, solution surstable, canard.

**KEY-WORDS** : complex differential equation, turning point, singular perturbation, overstable solution, french duck.

**AMS Classification** : 34C, 34D, 34E, 40.

---

## 1. Introduction

Nous présentons ici une étude générale des équations différentielles dites lentes-rapides dans le champ complexe. Il s'agit d'équations de la forme

$$\varepsilon u' = \Psi(x, u, a, \varepsilon) \tag{1}$$

où  $\varepsilon > 0$  est un petit paramètre,  $x$  et  $u$  sont complexes, et  $a$  est un paramètre de contrôle appartenant à  $\mathbb{C}^p$ , où  $p$  est précisé plus bas. Le problème principal est l'étude du comportement asymptotique des solutions lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro. Pour une valeur fixée  $a_0$  du paramètre de contrôle et pour  $\varepsilon$  petit, le champ est structuré par les *courbes lentes*  $u = u_0(x)$ , définies par  $\Psi(x, u_0(x), a_0, 0) = 0$ . Pour déterminer des régions où des solutions longent une courbe lente, il suffit en général d'étudier l'attractivité de cette courbe au moyen de la fonction

$$f(x) = \frac{\partial \Psi}{\partial u}(x, u_0(x), a_0, 0).$$

On introduit pour cela la *fonction relief*  $R(x) = \operatorname{Re} F(x)$  où  $F$  est une primitive de  $f$ . Sur des régions où  $f$  ne s'annule pas, le comportement des solutions se décrit ainsi. Une solution de (1) de condition initiale  $u(x_0)$  assez proche de la courbe lente a généralement une couche limite sur la ligne de niveau passant par  $x_0$  de la fonction relief et longe la courbe lente dans la région des points  $x$  qui sont accessibles par un chemin partant de  $x_0$  sur lequel la fonction  $R$  est décroissante. De plus, en dehors des couches limites, les solutions ont un développement asymptotique en puissance de  $\varepsilon$  qui s'obtient en recherchant des solutions formelles ([15], [3]).

On s'intéresse ici aux équations présentant un point tournant, c'est-à-dire au cas où la fonction  $f$  a un zéro en un point  $x_0$ . L'entier  $p$  ci-dessus est l'ordre de ce zéro. Dans cette situation, pour une valeur donnée du

paramètre de contrôle, l'existence d'une solution longeant la courbe lente dans tout un voisinage de  $x_0$  a un caractère exceptionnel. Ce sont les solutions surstables, qui généralisent les canards.

En France, l'étude des équations différentielles lentes-rapides a démarré sous l'impulsion de Georges Reeb. Les canards ont été découverts pour la première fois sur l'équation de van der Pol [2]. Il a été montré dans un cadre réel assez général pour des familles à un paramètre et sous certaines conditions de transversalité les résultats suivants.

- 1) L'existence de solutions canards pour certaines valeurs du paramètre est inéluctable.
- 2) Les valeurs à canard et les solutions canards sont exponentiellement proches les unes des autres.
- 3) Ces valeurs et solutions ont un développement en puissances de  $\varepsilon$  [8].

Dans le champ complexe, Guy Wallet introduit la notion de surstabilité et démontre l'existence de solutions surstables en dimension 1 [13], puis dans un cas très général [14]. Dans [14], il conjecture aussi l'exponentielle proximité des valeurs de surstabilité.

Jean-Pierre Ramis le premier conjecturait que les développements asymptotiques sont Gevrey d'ordre 1. Ceci a été démontré par Mireille Canalis-Durand, d'abord pour le cas de l'équation de van der Pol [5], puis dans un cas général [6] pour un col simple ( $p = 1$ ). Ce travail a été généralisé par Mireille Canalis-Durand, Jean-Pierre Ramis, Reinhard Schäfke et Yasutaka Sibuya [7], également pour des systèmes différentiels. L'intérêt du caractère Gevrey des développements est qu'une resommation de Borel-Laplace tronquée fournit une valeur  $\tilde{a}$  et une solution  $\tilde{y}$  qui satisfait l'équation différentielle excepté un terme exponentiellement petit. Le lemme de Gronwall montre alors l'existence d'une solution limitée dans un voisinage du point tournant. Il s'agit donc d'une approche alternative de la surstabilité.

Il convient aussi de mentionner, parmi les derniers travaux de Jean-Louis Callot, une recherche de solutions surstables dans des familles à un paramètre d'équations différentielles par des méthodes topologiques [4].

Sans chercher à être exhaustifs, mentionnons pour finir le problème de la résonance au sens de Ackerberg-O'Malley pour des équations différentielles linéaires du deuxième ordre [1]. Dans [10], Nancy Kopell introduit un paramètre de contrôle dans l'équation et prouve l'existence de solutions résonnantes pour certains choix du paramètre, en utilisant des outils em-

pruntés à la géométrie (théorème de la variété centrale). En considérant l'équation de Riccati associée à l'équation de [1], on peut établir un lien entre les résultats de Nancy Kopell et ceux de [14], avec la différence que dans [10] le cadre est réel, alors qu'il est complexe dans [14].

Dans cet article nous présentons une nouvelle méthode d'étude des solutions surstables. En bref, la méthode consiste à examiner en premier lieu les équations linéaires avec second membre. La méthode de la variation de la constante permet d'explicitier  $p + 1$  solutions (où  $p$  est l'ordre du zéro  $x_0$  de  $f$ ), qui ont le comportement asymptotique attendu sur des parties de chacune des  $p + 1$  montagnes associées à  $R$ . Généralisant la technique mise au point dans [9], on écrit le système de  $p$  équations pour le paramètre  $a$  correspondant au fait que ces  $p + 1$  solutions coïncident. L'hypothèse de transversalité correspond exactement au fait que ce système est inversible. Dans le cas non linéaire, étant donné un domaine  $D$  contenant  $x_0$  et satisfaisant une condition géométrique relative à la fonction  $R$ , on construit ainsi un opérateur contractant au voisinage de la courbe lente  $u_0$  dans l'espace de fonctions analytiques sur  $D$ . L'unique point fixe proche de  $u_0$  de cet opérateur est une solution surstable. On étudie ensuite l'exponentielle proximité des solutions surstables, en donnant des résultats quantitatifs sur le coefficient qui intervient dans l'exponentielle. Par exemple, en ce qui concerne les valeurs de surstabilité, ce coefficient est donné par la plus petite altitude de chacune des  $p + 1$  parties de montagnes considérées. Pour des raisons de simplicité, nous avons fait des hypothèses d'analyticité pour les quatre arguments. Si cette analyticité est indispensable pour les variables  $x$  et  $u$ , cette hypothèse peut être beaucoup affaiblie pour  $\varepsilon$  et  $a$ . L'existence d'un développement limité à l'ordre 3 suffit pour démontrer l'existence et l'exponentielle proximité des solutions.

En résumé, par comparaison aux résultats précédents de [14] et [6] qui ont un caractère local, nos résultats peuvent être qualifiés de *macrolocaux* : les domaines considérés se calculent à partir des coefficients de l'équation de façon naturelle par l'intermédiaire de la fonction  $R$ . En revanche, rien n'est dit sur leur éventuelle optimalité. Ainsi apparaissent des questions de nature plus globale, actuellement à l'étude dans le cadre présenté ici.

L'article a été rédigé dans le cadre de l'analyse non standard, dans la version IST de E. Nelson [11]. En effet, d'une part les questions ici résolues ont été formulées à l'origine dans ce cadre, d'autre part ce langage permet de simplifier les énoncés. Néanmoins on pourra constater que le noyau des preuves est essentiellement classique.

## 2. Hypothèses et résultats

### 2.1 Hypothèses et notations

Soit  $\varepsilon > 0$  un nombre infiniment petit et  $D$  un domaine (c.-à-d. ouvert connexe) standard simplement connexe de  $\mathbb{C}$ . On considère l'équation différentielle (1)

$$\varepsilon u' = \Psi(x, u, a, \varepsilon)$$

où  $\Psi$  est une fonction analytique standard dans un domaine  $\mathcal{D}_\Psi$  de  $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}$  (le lien entre  $\mathcal{D}_\Psi$  et  $D$  est précisé un peu plus bas).

On note  $S\text{-int}(D)$  le S-intérieur de  $D$ , c'est-à-dire l'ensemble externe des  $x$  limités de  $D$  tels qu'il existe un disque de rayon standard centré en  $x$  et inclus dans  $D$ . L'intérêt de la notion de S-intérieur est qu'une fonction analytique limitée dans le S-intérieur d'un domaine  $D$  a une dérivée limitée dans ce même S-intérieur.

**DÉFINITION 2.1.** — *On appelle solution surstable de (1) dans  $D$  un couple  $(a, u)$  tel que  $a$  est limité et  $u$  est une fonction définie et à valeurs limitées dans le S-intérieur de  $D$ , solution de (1) pour la valeur  $a$  du paramètre.*

*Remarque.* — D'après le théorème de Robinson-Callot [3], une solution surstable a une ombre  $(a_0, u_0)$ , avec  $a_0$  dans  $\mathbb{C}^p$  et  $u_0$  analytique dans  $D$ , qui vérifie l'équation

$$\Psi(x, u_0(x), a_0, 0) = 0.$$

Le couple  $(a_0, u_0)$  est appelé *courbe lente* et on dira aussi que la solution surstable  $(a, u)$  *longe* la courbe lente. On fait donc l'hypothèse suivante.

**HYPOTHÈSE 1.** — *Il existe  $a_0$  standard dans  $\mathbb{C}^p$  et une fonction standard  $u_0$  analytique dans  $D$  tels que pour tout  $x$  dans  $D$ ,  $\Psi(x, u_0(x), a_0, 0) = 0$ .*

En particulier pour tout  $x$  dans  $D$  le point  $(x, u_0(x), a_0, 0)$  est dans  $\mathcal{D}_\Psi$ . On note

$$f(x) = \frac{\partial \Psi}{\partial u}(x, u_0(x), a_0, 0).$$

On suppose de plus que l'équation a un unique point tournant dans le domaine  $D$ .

**HYPOTHÈSE 2.** — La fonction  $f$  a un unique zéro  $x_0$  dans  $D$  qui est d'ordre  $p$ .

On note

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(z) dz$$

et on appelle *relief* la fonction  $R(x) = \operatorname{Re}(F(x))$ .

Sous l'hypothèse 2, la fonction  $F$  admet une racine  $(p+1)$ -ième dans un voisinage  $U$  de  $x_0$  qui est un difféomorphisme local (on fixe une détermination de la racine). On note  $h$  l'inverse de  $F^{1/(p+1)}$ . En notant  $h'(0) = c^{-1}$ , on a ainsi localement

$$F(x) = (h^{-1}(x))^{p+1} = (c(x - x_0)(1 + g(x)))^{p+1}. \quad (2)$$

avec  $g(x_0) = 0$ . La région  $\{x \in U \mid R(x) > 0\}$  se décompose en  $p+1$  *montagnes locales*

$$M_j = U \cap h\left(S\left(\frac{2\pi j}{p+1}, \frac{2\pi}{4(p+1)}, \infty\right)\right)$$

où  $S(\alpha, \delta, r) = \{t \in \mathbb{C} \mid 0 < |t| < r, |\arg(t) - \alpha| < \delta\}$ , c'est-à-dire

$$M_j = \left\{x \in U \mid \frac{j-1/4}{p+1} < \frac{1}{2\pi} \arg h^{-1}(x) < \frac{j+1/4}{p+1}\right\}.$$

Enfin, on désigne par  $\omega$  la racine primitive  $(p+1)$ -ième de l'unité :

$$\omega = \exp\left(\frac{2\pi i}{p+1}\right). \quad (3)$$

La troisième hypothèse concerne la géométrie globale du domaine  $D$ , en relation avec le relief  $R$ . Il s'agit de prolonger la structure locale du relief en décomposant  $D$  en  $p+1$  régions, chacune correspondant à une montagne et ses deux vallées adjacentes. Pour cela on introduit la relation suivante.

Pour  $X$  une partie de  $D$ , on dira que  $z$  est *au-dessus de  $x$*  relativement à  $X$  si il existe un chemin  $\gamma$  dans  $X$  descendant de  $z$  à  $x$ , c'est-à-dire :  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  tel que  $\gamma(0) = z$ ,  $\gamma(1) = x$  et  $(d/d\tau) R(\gamma(\tau)) \leq 0$  pour tout  $\tau$  dans  $[0, 1]$ . On notera  $z \succ_X x$ .

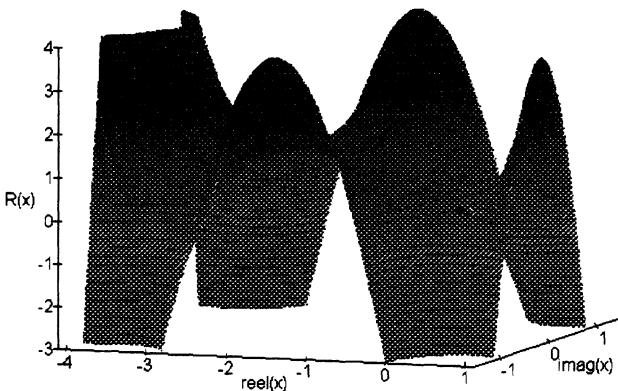
Par souci de clarté, dans tout l'article nous entendons par *chemins* des chemins de classe  $C^1$  par morceaux. Sauf mention du contraire ces chemins seront paramétrés sur  $[0, 1]$ .

On peut visualiser de deux manières différentes un chemin descendant : soit dans le plan des  $x$  en le comparant aux courbes de niveau du relief, soit dans le plan  $F(x)$ , qu'il est bon d'orienter avec  $\mathbb{R}^+$  sur la verticale ascendante.

**HYPOTHÈSE 3.** — *Le domaine  $D \setminus \{x_0\}$  est réunion de  $p + 1$  domaines simplement connexes  $D_j$  (éventuellement non bornés) qui satisfont la propriété suivante : étant donnés deux points de  $D_j$  il en existe un troisième au-dessus des deux premiers relativement à  $D_j$ .*

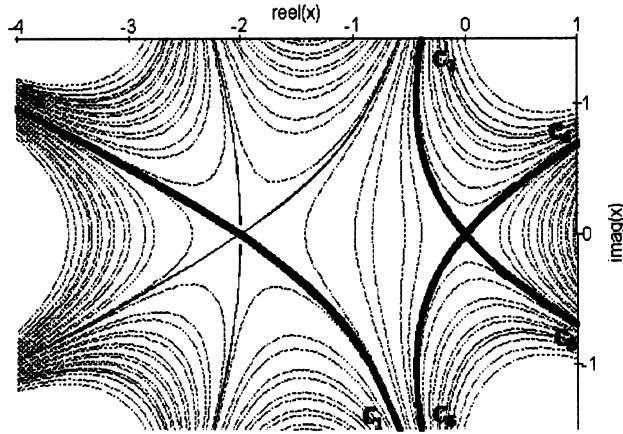
*Exemple.* — Dans [9], où il s'agit de l'équation de van der Pol forcée, la fonction  $f$  est donnée par  $f(x) = x(x + 2)^2$  et le point tournant considéré est  $x = 0$ . Deux domaines ont été considérés : l'un  $\mathcal{D}^+$  contenant 0 et bordé par les courbes de niveau  $C_1$  et  $C_2$ , et l'autre  $\mathcal{D}^-$  symétrique du précédent par rapport à l'axe réel. Si l'on considère  $D = \mathcal{D}^+$ , on choisira par exemple  $D_1$  bordé par les courbes  $C_3, C_6$  contenant  $C_4$  et  $C_5$ , et  $D_2$  bordé par les courbes  $C_1, C_2$  et  $C_4, C_5$  (fig. 1(a) et (b)).

Deux points sur deux montagnes locales différentes appartiennent à deux sous-domaines  $D_j$  différents. En effet, dans le cas contraire, ces points seraient accessibles depuis un même point par deux chemins sur lesquels  $R$  est décroissante. On pourrait alors construire une courbe de Jordan contenant ces deux points sur laquelle la fonction  $R$  serait positive, mais



(a)





(b)

Fig. 1 Le relief de l'équation de van der Pol.

dont l'intérieur contiendrait des points où  $R$  prend des valeurs négatives, ce qui contredit le principe du maximum. Par conséquent, à chaque domaine  $D_j$  est associée une montagne locale. Quitte à renuméroter les  $D_j$  on supposera que les indices correspondent à ceux des montagnes locales.

La dernière hypothèse est une hypothèse de transversalité sur le multiparamètre  $a$ , déjà formulée dans [14]. Elle exprime le fait que l'application  $J$  qui au paramètre  $a$  fait correspondre le jet d'ordre  $p-1$  en  $x_0$  de l'application  $\psi_a : D \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto \Psi(x, u_0(x), a, 0)$ ,

$$J : \mathbb{C}^p \rightarrow \mathbb{C}^p, \quad a \mapsto \left( \psi_a(x_0), \psi'_a(x_0), \dots, \frac{1}{(p-1)!} \psi_a^{(p-1)}(x_0) \right)$$

est un difféomorphisme local au point  $a_0$ . On a noté dans cet énoncé  $\psi_a(x)$  comme fonction des deux variables  $a$  et  $x$ .

**HYPOTHÈSE 4.** — La matrice  $M = (p_{i,j})_{1 \leq i,j \leq p}$  donnée par

$$p_{i,j} = \frac{1}{(i-1)!} \frac{\partial^i \psi}{\partial \alpha_j \partial^{i-1} x}(x_0, a_0)$$

est inversible, où  $\alpha_1, \dots, \alpha_p$  sont les composantes de  $a$  et où  $\psi$  est donnée par  $\psi(x, a) = \Psi(x, u_0(x), a, 0)$ .

## 2.2 Les résultats

Dans toute cette partie les hypothèses précédentes sont supposées satisfaites. Le premier résultat concerne l'existence des solutions surstables. La preuve se trouve dans la section 4. Insistons sur le caractère *macrolocal* de ce résultat : on démontre qu'il existe des solutions surstables non seulement au voisinage du point tournant, mais aussi dans tout le domaine  $D$ .

**THÉORÈME 2.2.** — *Il existe une solution surstable de (1) dans  $D$  pour une valeur  $a$  du paramètre infiniment proche de  $a_0$ .*

La proposition suivante est une traduction dans les termes du présent article du théorème 2 de [3].

**PROPOSITION 2.3.** — *Soit  $D_1, D_2 \subset D$  tels que pour tout  $x$  dans  $D_2$  il existe  $y$  dans  $D_1$  avec  $y \succ_D x$ . Si  $(a, u)$  est une solution surstable de (1) dans  $D_1$ , alors  $(a, u)$  se prolonge en une solution surstable dans  $D_2$ .*

*Preuve.* — Le seul argument à ajouter pour pouvoir utiliser le théorème précité est que tout point du S-intérieur de  $D_2$  est accessible à partir d'un point du S-intérieur de  $D_1$  par un chemin appréciablement descendant. C'est démontré en substance dans la section 3.2.  $\square$

Il est connu que les valeurs de surstabilité du paramètre  $a$  résistent à des perturbations exponentiellement petites (utiliser le lemme de Gronwall). L'énoncé suivant est lui aussi macrolocal : on précise un domaine d'existence de la solution perturbée.

Soit  $U$  un domaine inclus dans  $D$ ,  $x_1, x_2$  deux points de  $U$  et  $\gamma$  un chemin allant de  $x_1$  à  $x_2$  en restant dans  $U$ . On note  $r(t) = R(\gamma(t))$ .

Étant donnés deux nombres  $k, \ell > 0$ , on définit la *fonction de surstabilité accumulée*  $\varphi$  associée à  $k, \ell$  et  $\gamma$  par :

$$\varphi : [1, 0] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(0) = \min(k, \ell)$$

et

$$\varphi'(t) = \begin{cases} -r'(t) & \text{si } \varphi(t) < k \text{ ou si } r'(t) < 0, \\ 0 & \text{si } \varphi(t) = k \text{ et si } r'(t) \geq 0. \end{cases}$$

En particulier, pour  $k = \ell$ , on a

$$\varphi(t) = \min_{\tau \in [0, t]} \left( R(\gamma(\tau)) - R(\gamma(t)) + k \right).$$

**PROPOSITION 2.4.** — Soit  $k, \ell > 0$  standard,  $U$  un ouvert standard de  $D$  et  $(a, u)$  une solution surstable de (1) dans  $U$ . On suppose qu'il existe  $x_1$  dans  $U$  tel que pour tout  $x$  dans  $U$  il existe un chemin  $\gamma$  allant de  $x_1$  à  $x$  dans  $U$  tel que la fonction de surstabilité accumulée associée à  $k, \ell$  et  $\gamma$  est strictement positive sur  $\gamma \setminus \{x_1\}$ .

Soit  $(\tilde{a}, \tilde{u})$  une solution de (1) de condition initiale  $\tilde{u}(x_1)$  infiniment proche de  $u(x_1)$  et satisfaisant

$$\tilde{a} - a = \mathcal{L} \exp\left(-\frac{k}{\varepsilon}\right), \quad \tilde{u}(x_1) - u(x_1) = \mathcal{L} \exp\left(-\frac{\ell}{\varepsilon}\right).$$

Alors la solution  $(\tilde{a}, \tilde{u})$  est surstable dans  $U$ .

La preuve de cet énoncé se trouve à la fin de l'article. Noter que lorsque  $a = \tilde{a}$ , on retrouve la relation entrée-sortie : si  $(a, u)$  est surstable dans  $D$  et  $\tilde{u}(x_1) \simeq u(x_1)$ ,  $x_1 \in D$ , alors  $\tilde{u}$  est définie et infiniment proche de  $u$  en tout point du S-intérieur de  $D$  appréciablement en dessous de  $x_1$  pour le relief.

Le théorème suivant est une réciproque de la proposition 2.4.

Soit  $m_j = \sup_{x \in D_j} R(x) \in ]0, +\infty]$ , où  $D_j$  est donné par l'hypothèse 3, et  $m = \min_{1 \leq j \leq \tilde{m}} m_j$ .

**THÉORÈME 2.5.** — Soit  $\tilde{m}_j < m_j$  des nombres standard arbitraires et  $\tilde{m} = \min_{1 \leq j \leq p+1} \tilde{m}_j$ . Si  $(a_1, u_1)$  et  $(a_2, u_2)$  sont deux solutions surstables de (1) dans  $D$  longeant la même courbe lente, alors on a

$$a_1 - a_2 = \mathcal{L} \exp\left(\frac{-\tilde{m}}{\varepsilon}\right), \quad (4)$$

et pour tout  $x$  dans le S-intérieur de  $D$

$$u_1(x) - u_2(x) = \mathcal{L} \exp\left(\frac{-\tilde{m}}{\varepsilon}\right) + \mathcal{L} \exp\left(-\frac{\tilde{m}_{j(x)} - R(x)}{\varepsilon}\right), \quad (5)$$

où  $j(x)$  est un des  $j$  tels que  $x \in D_{j(x)}$ .

### 3. Préliminaires

On effectue dans cette partie un travail préparatoire en vue des preuves de la section 4. C'est dans cette section 4 que se trouvent les techniques les plus intéressantes. En revanche les preuves des résultats de cette section 3 ne sont pas indispensables à la compréhension globale de notre travail. C'est pourquoi certaines de ces preuves ont été reportées à la fin de l'article.

#### 3.1 Réduction au cas préparé

Un premier travail consiste à ramener, par un changement de paramètre et d'inconnue, le cas général de l'équation (1) à un cas plus simple appelé *préparé*, où l'équation s'écrit

$$\varepsilon \tilde{u}' = f(x)\tilde{u} + X \cdot \tilde{a} + \varepsilon P(x, \tilde{u}, \tilde{a}, \varepsilon) \quad (6)$$

où on a adopté les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \tilde{a} &= {}^t(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \\ X &= (1, x - x_0, \dots, (x - x_0)^{p-1}) \\ X \cdot \tilde{a} &= \sum_{k=1}^p (x - x_0)^{k-1} \alpha_k. \end{aligned}$$

La fonction  $P$  est analytique limitée pour  $x$  dans le S-intérieur de  $D$ ,  $\tilde{u}$  et  $\tilde{a}$  limités, et  $\varepsilon$  infiniment petit. De plus, cette fonction se calcule explicitement à partir de  $\Psi$  et de ses dérivées.

LEMME 3.1. — *Il existe une constante standard  $c \in \mathbb{C}^p$  et deux fonctions analytiques standard  $B : D \rightarrow \mathbb{C}$  et  $C : D \rightarrow \mathbb{C}^p$  telles que le changement de paramètre et d'inconnue*

$$\begin{cases} a = a_0 + \varepsilon M^{-1} \cdot (\tilde{a} - c) \\ u = u_0(x) + \varepsilon (\tilde{u} - B(x) - C(x) \cdot \tilde{a}) \end{cases} \quad (7)$$

*transforme l'équation générale (1) en l'équation préparée (6), où  $M$  est donnée par l'hypothèse 4.*

La démonstration est donnée à la fin de l'article. Elle repose essentiellement sur la formule de Taylor.

LEMME 3.2. — Soit  $(a, u)$  une solution surstable sur  $D$  de l'équation (1) longeant la courbe lente  $u_0(x)$ . Le changement de paramètre et d'inconnue (7) ci-dessus la transforme en une solution  $(\tilde{a}, \tilde{u})$  surstable sur  $D$  de l'équation préparée (6) longeant la courbe lente  $\tilde{u}_0(x) = 0$ .

La démonstration est aussi reportée en fin d'article. Il s'agit de montrer que  $a - a_0$  et  $(u - u_0)(x)$ , qu'on a supposés infinitésimaux, sont en fait de l'ordre de  $\varepsilon$  au plus.

PROPOSITION 3.3. — Si les théorèmes 2.2 et 2.5 sont vrais dans le cas préparé, ils le sont aussi dans le cas général.

Preuve. — Pour le théorème 2.2, cette proposition est équivalente au lemme 3.2.

Supposons le théorème 2.5 (proximité exponentielle) démontré dans le cas préparé. Notons  $(\tilde{a}_1, \tilde{u}_1)$  et  $(\tilde{a}_2, \tilde{u}_2)$  les solutions surstables étudiées. Pour tout standard  $\tilde{m} < m$ , on a

$$\tilde{a}_1 - \tilde{a}_2 = \mathcal{L} \exp\left(-\frac{\tilde{m}}{\varepsilon}\right).$$

On obtient une estimation de  $a_1 - a_2$ :

$$a_1 - a_2 = \varepsilon M^{-1} \cdot (\tilde{a}_1 - \tilde{a}_2) = \varepsilon \mathcal{L} \exp\left(-\frac{\tilde{m}}{\varepsilon}\right) = \mathcal{L} \exp\left(-\frac{\tilde{m}}{\varepsilon}\right).$$

Pour l'estimation de  $u_1 - u_2$ , un calcul identique donne le résultat voulu.

### 3.2 Réduction à un domaine $\mu$ -accessible

Une deuxième étape consiste à se ramener au cas où le domaine  $D$  satisfait des hypothèses un peu plus fortes que l'hypothèse 4. Dans la suite de l'article, nous aurons en effet à évaluer des intégrales sur des chemins "appréciablement" descendants.

DÉFINITION 3.4. — Étant donnée une partie  $X$  de  $D$  et  $\mu > 0$  (standard), un chemin  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  est dit  $\mu$ -descendant dans  $X$  s'il satisfait la propriété suivante :

$$\forall (\sigma, \tau) \in [0, 1]^2, \quad (\sigma < \tau) \implies \left( \left| \arg\left(F(\gamma(\sigma)) - F(\gamma(\tau))\right) \right| < \frac{\pi}{2} - \mu \right).$$

Un domaine  $D_\mu$  contenant  $x_0$  est dit  $\mu$ -accessible s'il existe  $p + 1$  points  $x_1, \dots, x_{p+1}$  dits points base, avec  $x_j \in D_j$  où  $D_j$  est donné par l'hypo-

thèse 3, tels que, pour tout  $x$  dans  $D_\mu$ , il existe  $j \in \{1, \dots, p+1\}$  et un chemin  $\gamma_x$   $\mu$ -descendant dans  $\text{Cl}(D_\mu)$  avec  $\gamma_x(0) = x_j$  et  $\gamma_x(1) = x$ . On dira dans ces conditions que  $x_j$   $\mu$ -domine  $x$  dans  $D_\mu$  et on notera  $x_j \succ_{D_\mu}^\mu x$ .

Les trois résultats qui seront utilisés dans la suite sont les suivants.

**PROPOSITION 3.5.** — *Si, pour tout  $\mu > 0$  standard et tout domaine  $\mu$ -accessible standard  $D_\mu \subset \text{Cl}(D_\mu) \subset D$ , il existe une solution surstable  $(a_\mu, u_\mu)$  de l'équation préparée (6) sur  $D_\mu$ , telle que  $a_\mu$  est infinitésimal et  $u_\mu$  est à valeurs infinitésimales sur tout  $D_\mu$ , alors il existe une solution surstable  $(a, u)$  de (6) sur  $D$ . De plus,  $a$  est infinitésimal et  $u$  est à valeurs infinitésimales sur le S-intérieur de  $D$ .*

**PROPOSITION 3.6.** — *Pour tout  $\tilde{x} \in \text{S-int}(D)$  et tout  $\tilde{m}_j < m_j$  standard ( $1 \leq j \leq p+1$ ), il existe  $\mu > 0$  standard et un domaine  $\mu$ -accessible standard  $D_\mu \subset \text{Cl}(D_\mu) \subset D$  contenant  $\tilde{x}$  tel que ses points base  $x_1, \dots, x_{p+1}$  satisfont  $R(x_j) > \tilde{m}_j$ .*

**PROPOSITION 3.7.** — *Pour tout domaine  $\mu$ -accessible standard contenant  $x_0$ ,  $D_\mu \subset \text{Cl}(D_\mu) \subset D$  avec  $\mu$  standard, il existe deux constantes standard  $r, c > 0$  telles que le disque fermé  $B = \text{Cl}(D(x_0, r))$  est inclus dans  $D_\mu$  et pour tout  $x$  dans  $D_\mu \setminus B$  il existe un point base  $x_{j(x)}$  de  $D_\mu$  et un chemin  $\gamma_x$  de  $x_{j(x)}$  à  $x$  paramétré par son abscisse curviligne  $s \in [0, \text{long}(\gamma_x)]$ , tel que  $(d/d\tau)R(\gamma_x(\tau)) \leq -c$ .*

Les preuves de ces trois propositions se trouvent dans le paragraphe 6.3.

### 3.3 Lemmes d'estimation d'intégrale

Le lemme démontré ci-dessous n'a rien d'original. Cependant, c'est la clef des estimations utilisées dans les preuves principales. L'estimation d'intégrale donnée est le résultat de l'application de la *méthode du col* à notre situation. Bien que le lemme et sa preuve soient déjà donnés dans des ouvrages d'asymptotique complexe [12], nous rappelons ici comment se ramener, dans le cas complexe, à une intégrale de Laplace réelle.

**LEMME 3.8.** — *Soit  $D_\mu$  un domaine  $\mu$ -accessible standard, muni de ses points base  $x_j$  (définition 3.4). Soit  $q$  une fonction analytique bornée standard*

sur  $D_\mu$ , avec  $q(x_0) \neq 0$ . On a alors l'estimation suivante, pour tout entier standard  $k \geq 1$  :

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_j} q(\xi)(\xi - x_0)^{k-1} \exp\left(-\frac{F(\xi)}{\varepsilon}\right) d\xi &= \\ &= \omega^{jk} q(x_0)(p+1)^{-1} c^{-k} \Gamma\left(\frac{k}{p+1}\right) \varepsilon^{k/p+1} (1 + \mathcal{O}) \end{aligned}$$

où  $c$  et  $\omega$  sont donnés par (2) et (3) du paragraphe 2.1.

*Preuve.* — Soit  $y_j$  un point standard situé sur la  $j$ -ième montagne locale avec  $F(y_j)$  réel positif ( $F(y_j) < R(x_j)$ ). On peut choisir comme chemin d'intégration de  $x_j$  à  $x_0$  un chemin standard descendant, passant par  $y_j$ . Pour la partie de chemin entre  $x_j$  et  $y_j$ , on a, par une majoration naturelle,

$$\int_{y_j}^{x_j} q(\xi)(\xi - x_0)^{k-1} \exp\left(-\frac{F(\xi)}{\varepsilon}\right) d\xi = \mathcal{L} \exp\left(-\frac{F(y_j)}{\varepsilon}\right).$$

Comme chemin d'intégration de  $y_j$  à  $x_0$ , on choisit le chemin où  $F$  est réelle décroissante. On fait alors le changement de variable dans l'intégrale précédente

$$\xi = h(\omega^j \eta)$$

où  $h^{-1}$  est la racine  $(p+1)$ -ième de  $F$ , définie après l'hypothèse 2 (§ 2.1). Ce changement de variable est choisi de sorte que  $\eta$  reste réel positif tout le long du chemin d'intégration. Ceci donne

$$\int_{x_0}^{y_j} q(\xi)(\xi - x_0)^{k-1} \exp\left(-\frac{F(\xi)}{\varepsilon}\right) d\xi = \int_0^T Q(\eta) \exp\left(-\frac{\eta^{p+1}}{\varepsilon}\right) d\eta.$$

avec

$$T = R(y_j)^{1/(p+1)} \quad \text{et} \quad Q(\eta) = q(\xi) h'(\omega^j \eta)(\xi - x_0)^{k-1} \omega^j.$$

La fonction  $Q$  est analytique et s'écrit (rappelons que  $h'(0) = 1/c$ ) :

$$Q(\eta) = \omega^{jk} q(x_0) c^{-k} \eta^{k-1} + \mathcal{O}(\eta^k).$$

La formule de l'intégrale de Laplace ([12, p. 80]) donne exactement le résultat énoncé dans le lemme.  $\square$

Nous aurons besoin aussi d'un lemme de majoration d'intégrales, valable même si  $q$  dépend de  $\varepsilon$ .

LEMME 3.9. — Soit  $D_\mu$  un domaine  $\mu$ -accessible standard, muni de ses points base (définition 3.4). Soit  $q(x)$  une fonction analytique bornée pour  $x$  dans  $D_\mu$ , éventuellement non standard (c.-à-d. dépendant de  $\varepsilon$ ). On note  $\|q\|$  la norme du sup de  $q$  sur  $D_\mu$ . On a alors la majoration suivante :

$$\int_{x_0}^{x_j} q(\xi)(\xi - x_0)^{k-1} \exp\left(-\frac{F(\xi)}{\varepsilon}\right) d\xi = \|q\| \varepsilon^{k/(p+1)} \mathcal{L}.$$

*Preuve.* — En multipliant  $q$  par un nombre réel positif, on peut supposer, sans nuire à la généralité que  $\|q\|$  est un nombre limité non infinitésimal. On fait ensuite les mêmes calculs que dans la démonstration du lemme 3.8. On majore alors  $Q(\eta)$  par  $\|q\| \eta^{k-1} \mathcal{L}$ , ce qui donne la majoration voulue par le même calcul d'intégrale de Laplace que précédemment.  $\square$

### 3.4 Théorème du point fixe

Dans ce paragraphe, on énonce une variante du théorème classique de point fixe d'une application contractante. L'avantage de l'énoncé ici est dû à la manière de traiter les problèmes liés au domaine de définition de l'opérateur.

PROPOSITION 3.10. — Soit  $E$  un espace métrique complet. Soit  $f$  une fonction de  $E$  dans  $E$  telle que :

- (i) le domaine de définition de  $f$  contient tous les limités de  $E$  et l'image par  $f$  de tout limité est limitée;
- (ii) l'application  $f$  est contractante sur les limités, avec un coefficient de contraction  $K$  non infiniment proche de un; en d'autres termes,

$$\exists K, 0 \leq K \ll 1 \mid \forall \text{limité } x, y \in E, d(f(x), f(y)) \leq Kd(x, y).$$

Alors  $f$  admet un unique point fixe limité. Celui-ci est attractant, et son bassin d'attraction contient tous les limités de  $E$ .

*Preuve.* — Soit  $x$  un point limité. Notons  $y$  son image par  $f$ . Elle est limitée. Posons

$$\rho = \frac{d(x, y)}{1 - K}, \quad A = \{\xi \mid d(x, \xi) \leq \rho\}.$$

Il est immédiat que  $A$  est limité et que la restriction de  $f$  à  $A$  envoie  $A$  sur  $A$ . On peut alors appliquer le théorème classique du point fixe.  $\square$



#### 4. Existence des solutions surstables

Cette partie, qui constitue le cœur de l'article, est consacrée à la preuve du théorème 2.2. Sans perte de généralité (prop. 3.3), on peut supposer que l'équation est sous la forme préparée (6). Grâce à la proposition 3.5, on peut aussi restreindre l'étude à un sous-domaine  $\mu$ -accessible standard  $D_\mu$  (avec ses points base  $x_j$ ). La proposition 4.3 démontrée ci-dessous concerne en fait la résolution du problème aux limites par une méthode de point fixe. De plus, il s'avère que cette solution est une solution surstable sur  $D_\mu$ .

##### 4.1 Le cas linéaire

On commence par le cas particulier où la fonction  $P$  ne dépend ni de  $a$  ni de  $u$ . Pour des raisons de commodité qui apparaîtront dans la suite, on la notera ici  $Q(x)$  (la dépendance par rapport à  $\varepsilon$  n'est pas notée, car dans ce paragraphe,  $\varepsilon$  peut être considéré comme fixé).

PROPOSITION 4.1. — *Soit  $Q$  une fonction continue bornée sur  $D_\mu$ . Alors il existe une unique valeur du paramètre  $a = (\alpha_k)_{k \in \{1, \dots, p\}}$  dans  $\mathbb{C}^p$  telle que le problème aux limites (8) ait une solution.*

$$\begin{cases} \varepsilon u' = f(x)u + X \cdot a + \varepsilon Q(x) \\ u(x_j) = 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, p+1\}. \end{cases} \quad (8)$$

*Preuve.* — On écrit d'abord la solution générale de l'équation (8) :

$$u(x) = \frac{1}{\varepsilon} \exp\left(\frac{F(x)}{\varepsilon}\right) \left( K + \int_{x_0}^x (\Xi \cdot a + \varepsilon Q(\xi)) \exp\left(-\frac{F(\xi)}{\varepsilon}\right) d\xi \right)$$

avec  $\Xi = (1, \xi - x_0, \dots, (\xi - x_0)^{p-1})$ . Les  $p+1$  conditions aux limites  $u(x_j) = 0$  forment alors un système de  $p+1$  équations linéaires des  $p+1$  inconnues  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p, K$ . Pour des raisons de calcul et d'estimations, il est préférable de multiplier ces inconnues par des coefficients ad hoc, et de considérer plutôt

$$\left( \varepsilon^{k/(p+1)} \Gamma\left(\frac{k}{p+1}\right) (p+1)^{-1} c^{-k} \alpha_k \right)_{k=1, \dots, p}, K$$

comme inconnues. Avec ces inconnues, la matrice  $\mathcal{M}$  du système linéaire est la matrice  $[m_{jk}]_{j=1, \dots, p+1}^{k=1, \dots, p+1}$  donnée par

$$m_{j(p+1)} = 1,$$

$$m_{jk} = \varepsilon^{-k/(p+1)} \frac{(p+1)c^k}{\Gamma(k/(p+1))} \int_{x_0}^{x_j} (\xi - x_0)^{k-1} \exp\left(-\frac{F(\xi)}{\varepsilon}\right) d\xi.$$

Le lemme d'estimation d'intégrale 3.8 donne un équivalent de  $m_{jk}$  :

$$\forall j, k \in \{1, \dots, p+1\}, \quad m_{jk} = \omega^{jk}(1 + \vartheta).$$

La matrice  $\mathcal{M}$  est donc infiniment voisine de la matrice standard inversible  $[\omega^{jk}]$ . Le système linéaire aux inconnues  $K$  et  $\alpha_k$  admet donc une solution unique. La fonction  $u$ , unique elle aussi, est donnée par la formule générale.  $\square$

## 4.2 Norme de l'opérateur linéaire

Soit  $\mathcal{F}$  l'opérateur qui à une fonction  $Q$  associe le couple  $(a, u)$  obtenu comme solution du problème linéaire (8). C'est un opérateur linéaire, défini sur  $\mathcal{E}$ , à valeurs dans  $\mathbb{C}^p \times \mathcal{E}$ , où  $\mathcal{E} = \overline{\mathcal{H}}(D_\mu)$  désigne l'espace vectoriel des fonctions analytiques bornées sur  $D_\mu$ . On munit  $\mathcal{E}$  de la norme du sup sur  $D_\mu$ .

**PROPOSITION 4.2.** — *L'opérateur  $\mathcal{F}$  qui à tout élément  $Q$  de  $\mathcal{E}$  associe l'unique couple  $(a, u)$  solution du problème linéaire (8) a une norme infinitésimale, de l'ordre de  $\varepsilon^{2/(p+1)}$  au plus.*

*Remarque.* — En fait, cet opérateur  $\mathcal{F}$  a une norme de l'ordre de  $\varepsilon$ , mais nous ne démontrerons pas ici cette meilleure majoration, la proposition étant suffisante pour la suite de l'article.

*Preuve.* — Il suffit de montrer que pour tout  $Q$  dans  $\mathcal{E}$ , standard ou non,

$$\|a\| = \varepsilon^{2/(p+1)} \mathcal{L}\|Q\| \quad \text{et} \quad \|u\| = \varepsilon^{2/(p+1)} \mathcal{L}\|Q\|,$$

où  $(a, u)$  est l'image de  $Q$  par  $\mathcal{F}$ . Soit donc  $Q$  un élément quelconque de  $\mathcal{E}$ .

- Nous allons commencer par estimer l'ordre de grandeur de  $a$ . Reprenons pour cela les arguments et notations de la démonstration de la proposition 4.. La résolution du système linéaire donnant  $K$  et les  $\alpha_k$  donne

$$\begin{aligned} \left( \left( (p+1)^{-1} c^{-k} \Gamma\left(\frac{k}{p+1}\right) \varepsilon^{k/(p+1)} \alpha_k \right)_{k=1, \dots, p} \right) &= \\ K & \\ &= -\mathcal{M}^{-1} \left( \int_{x_0}^{x_j} \varepsilon Q(\xi) \exp\left(-\frac{F(\xi)}{\varepsilon}\right) d\xi \right)_{j=1, \dots, p+1} \end{aligned}$$

où la matrice  $\mathcal{M}$  est infiniment proche de la matrice standard inversible  $[\omega^{jk}]$ . Son inverse est donc infiniment proche de la matrice standard  $[\omega^{jk}]^{-1} = (1/(p+1))[\omega^{-jk}]$ . Le lemme 3.9 donne la majoration suivante :

$$\left| \left( \int_{x_0}^{x_j} Q(\xi) \exp\left(-\frac{F(\xi)}{\varepsilon}\right) d\xi \right)_{j=1, \dots, p+1} \right| = \varepsilon^{1/(p+1)} \mathcal{L} \|Q\|.$$

Ceci permet d'obtenir une majoration de  $K$  et des  $\alpha_k$  :

$$\alpha_k = \varepsilon^{(p-k+2)/(p+1)} \mathcal{L} \|Q\|, \quad K = \varepsilon^{(p+2)/(p+1)} \mathcal{L} \|Q\|.$$

- Estimons maintenant  $|u(x)|$  pour tout point  $x$  de  $D_\mu$ . Supposons tout d'abord que  $|x| > r$ , de sorte qu'il existe (lemme 3.7) un chemin descendant joignant  $x_j$  à  $x$ , le long duquel

$$\frac{d}{dt} R(\gamma(t)) \leq -c < 0 \quad \text{et} \quad |\dot{\gamma}(t)| = 1.$$

La formule générale donne  $u(x)$  en intégrant le long de ce chemin :

$$u(x) = \frac{1}{\varepsilon} \exp\left(\frac{F(x)}{\varepsilon}\right) \int_{x_j}^x (\Xi \cdot a + \varepsilon Q(\xi)) \exp\left(-\frac{F(\xi)}{\varepsilon}\right) d\xi.$$

On majore alors la parenthèse par

$$|(\Xi \cdot a + \varepsilon Q(\xi))| = \varepsilon^{2/(p+1)} \mathcal{L} \|Q\|,$$

d'où

$$|u(x)| \leq \varepsilon^{2/(p+1)-1} \mathcal{L} \|Q\| \int_{x_j}^x \left| \exp\left(\frac{F(x) - F(\xi)}{\varepsilon}\right) \right| |d\xi|.$$

Le long du chemin considéré, on a

$$\begin{aligned} \int_{x_j}^x \left| \exp \left( \frac{F(x) - F(\xi)}{\varepsilon} \right) \right| |d\xi| &= \int_0^T \left| \exp \left( \frac{F(\gamma(T)) - F(\gamma(t))}{\varepsilon} \right) \dot{\gamma}(t) \right| dt \\ &= \int_0^T \exp \left( \frac{R(\gamma(T)) - R(\gamma(t))}{\varepsilon} \right) dt \leq \\ &\leq \int_0^T \exp \left( \frac{-c(T-t)}{\varepsilon} \right) dt \leq \frac{\varepsilon}{c}. \end{aligned}$$

On en déduit la majoration suivante, valable pour tout  $x$  dans  $D_\mu$ , de module supérieur à  $r$ ,

$$|u(x)| \leq \varepsilon^{2/(p+1)} \mathcal{L} \|Q\|.$$

Le principe du maximum étend cette majoration à tous les  $x$  de  $D_\mu$ , y compris ceux de module inférieur à  $r$ .  $\square$

### 4.3 Application du théorème du point fixe

**PROPOSITION 4.3.** — *Il existe une unique valeur limitée du paramètre  $a = (\alpha_k)_{k \in \{1, \dots, p\}}$  dans  $\mathbb{C}^p$  telle que le problème aux limites (9) ait une solution.*

$$\begin{cases} \varepsilon u' = f(x)u + X \cdot a + \varepsilon P(x, u, a, \varepsilon) \\ u(x_j) = 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, p+1\}. \end{cases} \quad (9)$$

*De plus, cette valeur  $a$  est infiniment petite et la solution de ce problème aux limites est infinitésimale sur  $D_\mu$ . Ainsi  $(a, u)$  est une solution surstable.*

*Preuve.* — L'argument principal de la preuve est le théorème 3.10 du point fixe appliqué à un opérateur  $\mathcal{G}$  qu'on va définir.

Si  $(b, v)$  est un élément limité de  $\mathbb{C}^p \times \mathcal{E}$ , le problème aux limites

$$\begin{cases} \varepsilon u' = f(x)u + X \cdot a + \varepsilon P(x, v(x), b, \varepsilon) \\ u(x_j) = 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, p+1\} \end{cases}$$

a une unique solution (résultat de la proposition 4.1). On note  $\mathcal{G}(b, v)$  cette solution. C'est un élément de  $\mathbb{C}^p \times \mathcal{E}$  (où  $\mathcal{E}$  est l'ensemble des fonctions analytiques bornées sur  $D_\mu$ , muni de la norme uniforme). Le domaine de

définition de  $\mathcal{G}$  est le sous-ensemble de  $\mathbb{C}^p \times \mathcal{E}$  où ce problème aux limites admet une unique solution. Il contient tous les limites de  $\mathbb{C}^p \times \mathcal{E}$ .

Il est évident, par construction, que les solutions limitées du problème (9) sont exactement les points fixes de l'opérateur  $\mathcal{G}$ .

Montrons maintenant que  $\mathcal{G}$  vérifie les hypothèses du théorème 3.10 du point fixe.

- $\mathbb{C}^p \times \mathcal{E}$  est métrique complet.
- Si  $(a, u)$  est limité dans  $\mathbb{C}^p \times \mathcal{E}$ , alors  $P(x, u(x), a, \varepsilon)$  est limité pour tout  $x$  dans  $D_\mu$ . La proposition 4.2 montre alors que  $\mathcal{G}(a, u)$  est bien défini et est limité.
- Soient  $(a_1, u_1)$  et  $(a_2, u_2)$  deux points limités de  $\mathbb{C}^p \times \mathcal{E}$ . On a  $\mathcal{G}(a_1, u_1) - \mathcal{G}(a_2, u_2) = \mathcal{F}Q$  où

$$Q(x) = P(x, u_1(x), a_1, \varepsilon) - P(x, u_2(x), a_2, \varepsilon).$$

Le calcul de la norme de l'opérateur  $\mathcal{F}$  (prop. 4.2) donne

$$\|\mathcal{G}(a_1, u_1) - \mathcal{G}(a_2, u_2)\| = \mathcal{L}\varepsilon^{2/(p+1)}\|Q\|.$$

Le théorème des accroissements finis appliqué à  $P$  donne quant à lui

$$\|Q\| = \mathcal{L}\|(b_1, v_1) - (b_2, v_2)\|.$$

Donc  $\mathcal{G}$  est contractante sur les limites, avec un coefficient de contraction au plus égal à  $\mathcal{L}\varepsilon^{2/(p+1)}$ .  $\square$

## 5. Proximité exponentielle des solutions surstables

Dans ce paragraphe, on démontre le théorème 2.5 de proximité exponentielle des solutions surstables.

- Soient donc  $(a_1, u_1(x))$  et  $(a_2, u_2(x))$  deux solutions de l'équation (1), surstables sur  $D$ , le long de la même courbe lente  $u = u_0(x)$ . Grâce à la proposition 3.3, on peut supposer, sans perte de généralité que l'équation est sous la forme préparée (6). Soient  $\tilde{m}$  et  $\tilde{m}_j$  standard satisfaisant les hypothèses du théorème. Soit  $\tilde{x}$  un point de  $S\text{-int}(D)$ . On va majorer

$\|a_1 - a_2\|$  et  $|u_1(\tilde{x}) - u_2(\tilde{x})|$ . Soit  $D_\mu$  le domaine  $\mu$ -accessible standard donné par la proposition 3.6. On restreindra l'étude à ce domaine.

• Remarquons tout d'abord que la formule de Taylor appliquée à la fonction  $P$  permet de définir deux fonctions  $g$  et  $h$  limitées dans le S-intérieur de  $D$ , à valeurs respectivement dans  $\mathbb{C}$  et  $\mathbb{C}^p$  telles que

$$\begin{aligned} P(x, u_1, a_1, \varepsilon) - P(x, u_2, a_2, \varepsilon) &= \\ &= (u_1 - u_2)g(x, u_1, u_2, a_1, a_2, \varepsilon) + h(x, u_1, u_2, a_1, a_2, \varepsilon) \cdot (a_1 - a_2). \end{aligned}$$

Comme  $u_1$  et  $u_2$  sont en fait des fonctions de  $x$ , et comme  $a_1, a_2$  et  $\varepsilon$  sont des nombres complexes donnés, on peut écrire

$$P(x, u_1(x), a_1, \varepsilon) - P(x, u_2(x), a_2, \varepsilon) = (u_1(x) - u_2(x))g(x) + h(x) \cdot (a_1 - a_2).$$

Posons

$$d(x) = u_1(x) - u_2(x), \quad \delta = a_1 - a_2.$$

On a alors l'égalité différentielle suivante :

$$\varepsilon d' = (f(x) + \varepsilon g(x))d + (X + \varepsilon h(x)) \cdot \delta. \quad (10)$$

avec les conditions aux limites

$$d(x_j) = d_j \quad (\simeq 0). \quad (11)$$

On considère maintenant les propriétés des solutions de l'équation différentielle linéaire (10). On reprend les méthodes du paragraphe 4.1. La solution générale de (10) s'écrit

$$\begin{aligned} d(x) &= \frac{1}{\varepsilon} \exp\left(\frac{F(x)}{\varepsilon} + G(x)\right) \left( K + \right. \\ &\quad \left. + \int_{x_0}^x \sum_{k=1}^p \left( (\xi - x_0)^{k-1} + \varepsilon h_k(\xi) \right) \delta_k \exp\left(-\frac{F(\xi)}{\varepsilon} - G(\xi)\right) d\xi \right) \end{aligned} \quad (12)$$

où  $h_1, \dots, h_p$  sont les coordonnées de  $h$  et où  $G$  est la primitive de  $g$  s'annulant en  $x_0$ . Comme le problème aux limites (10)-(11) admet la fonction  $d = u_2 - u_1$  comme solution, on a pour tout  $j$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^p \delta_k \int_{x_0}^{x_j} \exp(-G(\xi)) \left( (\xi - x_0)^{k-1} + \varepsilon h_k(\xi) \right) \exp\left(-\frac{F(\xi)}{\varepsilon}\right) d\xi + K &= \\ &= \varepsilon d_j \exp(-G(x_j)) \exp\left(-\frac{F(x_j)}{\varepsilon}\right). \end{aligned} \quad (13)$$

Les paramètres  $(\delta_k, K)$  sont solutions du système d'équations algébriques (13). Comme dans le paragraphe 4.1, on prend plutôt

$$\left( \left( \varepsilon^{k/(p+1)} \Gamma\left(\frac{k}{p+1}\right) (p+1)^{-1} c^{-k} \delta_k \right)_{k=1, \dots, p}, K \right)$$

comme paramètres inconnus. La matrice  $\mathcal{M}$  du système linéaire est la matrice  $[m_{jk}]_{j=1, \dots, p+1}^{k=1, \dots, p+1}$  donnée par

$$\begin{aligned} m_{j(p+1)} &= 1 \\ m_{jk} &= \varepsilon^{-k/(p+1)} \frac{(p+1)c^k}{\Gamma(k/(p+1))} \times \\ &\times \int_{x_0}^{x_j} \exp(-G(\xi)) \left( (\xi - x_0)^{k-1} + \varepsilon h_k(\xi) \right) \exp\left(-\frac{F(\xi)}{\varepsilon}\right) d\xi. \end{aligned}$$

Les lemmes d'estimation 3.8 et 3.9 donnent

$$\forall j \in \{1, \dots, p+1\}, \quad m_{jk} = \omega^{jk}(1 + \mathcal{O}).$$

La matrice  $\mathcal{M}$  est donc inversible, d'inverse limité. Sachant que

$$\exp\left(-\frac{F(x_j)}{\varepsilon}\right) = \mathcal{L} \exp\left(-\frac{\tilde{m}}{\varepsilon}\right),$$

le deuxième membre de l'égalité (13) s'écrit  $\varepsilon \mathcal{O} \exp(-\tilde{m}/\varepsilon)$ . L'écriture de la solution du système algébrique (13) donne alors

$$\begin{aligned} \varepsilon^{k/(p+1)} \delta_k &= \varepsilon \mathcal{O} \exp\left(\frac{-\tilde{m}}{\varepsilon}\right), \quad K = \varepsilon \mathcal{O} \exp\left(-\frac{\tilde{m}}{\varepsilon}\right) \\ \delta_k &= \mathcal{O} \exp\left(-\frac{\tilde{m}}{\varepsilon}\right), \quad K = \varepsilon \mathcal{O} \exp\left(-\frac{\tilde{m}}{\varepsilon}\right). \end{aligned}$$

• Pour majorer  $|u_1(x) - u_2(x)|$ , on revient à la formule générale d'une solution de (10) :

$$\begin{aligned} d(x) &= \frac{1}{\varepsilon} \exp\left(\frac{F(x)}{\varepsilon} + G(x)\right) \left( \varepsilon d_j \exp\left(-\frac{F(x_j)}{\varepsilon} - G(x_j)\right) + \right. \\ &\left. + \int_{x_j}^x \sum_{k=1}^p \left( (\xi - x_0)^{k-1} + \varepsilon h_k(\xi) \right) \delta_k \exp\left(-\frac{F(\xi)}{\varepsilon} - G(\xi)\right) d\xi \right). \end{aligned}$$

En ne conservant que les ordres de grandeur, on a

$$d(x) = \frac{\mathcal{L}}{\varepsilon} \exp\left(\frac{F(x)}{\varepsilon}\right) \left( \varepsilon \emptyset \exp\left(-\frac{F(x_j)}{\varepsilon}\right) + \int_{x_j}^x \emptyset \exp\left(-\frac{\tilde{m}}{\varepsilon}\right) \exp\left(-\frac{F(\xi)}{\varepsilon}\right) d\xi \right).$$

Or le chemin de  $x_j$  à  $x$  est descendant. Donc

$$\exp\left(-\frac{F(\xi)}{\varepsilon}\right) = \exp\left(\frac{-R(x)}{\varepsilon}\right) \mathcal{L},$$

et on a

$$d(x) = \emptyset \exp\left(\frac{R(x) - R(x_j)}{\varepsilon}\right) + \frac{\emptyset}{\varepsilon} \exp\left(-\frac{\tilde{m}}{\varepsilon}\right).$$

Dans le paragraphe 4.2, on avait utilisé des chemins mieux que descendants, donnés par le lemme 3.7 dans un domaine  $\mu$ -accessible, puis on avait utilisé le principe du maximum pour compléter la majoration près de  $x_0$ . Ici, le principe du maximum serait plus délicat à employer, et, heureusement nous disposons d'une marge de manœuvre : l'estimation ci-dessus est valable pour tout standard  $\tilde{m}$  inférieur à  $m$ . Elle est donc valable pour  $(m + \tilde{m})/2$ . On a alors

$$\begin{aligned} d(x) &= \emptyset \exp\left(\frac{R(x) - R(x_j)}{\varepsilon}\right) + \frac{\emptyset}{\varepsilon} \exp\left(-\frac{m + \tilde{m}}{2\varepsilon}\right) \\ &= \emptyset \exp\left(\frac{R(x) - R(x_j)}{\varepsilon}\right) + \emptyset \exp\left(-\frac{\tilde{m}}{\varepsilon}\right). \end{aligned}$$

## 6. Compléments de démonstrations

### 6.1 Preuve de la proposition 2.4

D'après l'hypothèse, pour tout  $x$  dans le S-intérieur de  $U$  il existe un chemin  $\gamma$  de  $x_1$  à  $x$  sur lequel la fonction de surstabilité accumulée  $\varphi$  est appréciablement positive.

Posons  $\delta = \tilde{a} - a \in \mathbb{C}^p$ ,  $d = \tilde{u} - u$  et  $I \subset [0, 1]$  l'intervalle maximal de définition de  $d \circ \gamma$ .



On considère les deux ensembles éventuellement externes :

$$G = \{t \in I \mid \forall \tau \in [0, t], d(\gamma(\tau)) = \varepsilon \mathcal{L}\}$$

$$H = \{t \in I \mid \forall \tau \in [0, t], d(\gamma(\tau)) = \emptyset\}.$$

On a bien sûr  $G \subset H$ . Montrons que  $G = H$ . Considérons pour cela la fonction numérique continue sur  $I$  :

$$W(t) = \max \{ \varepsilon \log |d(\gamma(t))|, -k \}.$$

Soit  $t_0$  dans  $H$ , alors  $d$  est définie en tout point de  $\gamma([0, t_0])$  et, de même que dans la section 5,  $d$  satisfait une équation différentielle de la forme

$$\varepsilon d'(x) = (f(x) + \varepsilon g(x))d(x) + (X + \varepsilon h(x)) \cdot \delta.$$

On en déduit pour  $\tau \in [0, t_0]$  : si  $W(\tau)$  est appréciablement supérieur à  $-k$  alors  $W'(\tau) = r'(\tau) + \emptyset$ . En tenant compte du fait que  $W(0) \leq \varphi(0)$  on en déduit  $W(t)$  est inférieur ou infiniment proche de  $-\varphi(t)$ , donc appréciablement négatif. On a donc  $G = H$ . Ainsi ces deux ensembles sont internes et, puisque  $\varphi$  est continue sur  $I$ , on a  $H = I$  et par conséquent  $H = [0, 1]$ .

## 6.2 Preuves des résultats du paragraphe 3.1

*Preuve du lemme 3.1*

Étudions l'effet d'un changement de paramètre et d'inconnue du type indiqué sur l'équation générale (1). Celle-ci devient

$$\varepsilon \tilde{u}' = \frac{1}{\varepsilon} \Psi_1(x, \tilde{u}, \tilde{a}, \varepsilon) - u_0'(x) + \varepsilon B'(x) + \varepsilon C'(x) \cdot \tilde{a}$$

avec

$$\Psi_1(x, \tilde{u}, \tilde{a}, \varepsilon) = \Psi(x, u_0(x) + \varepsilon \tilde{u} - \varepsilon B(x) - \varepsilon C(x) \cdot \tilde{a}, a_0 + \varepsilon M^{-1} \cdot (\tilde{a} - c), \varepsilon).$$

On développe ensuite  $\Psi_1$  par une formule de Taylor en  $\varepsilon$  :

$$\Psi_1(x, \tilde{u}, \tilde{a}, \varepsilon) = \Psi_2(x, \tilde{u}, \tilde{a}) + \varepsilon \Psi_3(x, \tilde{u}, \tilde{a}) + \varepsilon^2 \Psi_4(x, \tilde{u}, \tilde{a}, \varepsilon).$$

Remarquons tout de suite que

$$\Psi_2(x, \tilde{u}, \tilde{a}) = \Psi_1(x, \tilde{u}, \tilde{a}, 0) = \Psi(x, u_0(x), a_0, 0) = 0.$$

L'équation devient donc

$$\varepsilon \tilde{u}' = \Psi_3(x, \tilde{u}, \tilde{a}) - u'_0(x) + \varepsilon P(x, \tilde{u}, \tilde{a}, \varepsilon)$$

avec

$$P(x, \tilde{u}, \tilde{a}, \varepsilon) = B'(x) + C'(x) \cdot \tilde{a} + \Psi_4(x, \tilde{u}, \tilde{a}, \varepsilon).$$

Détaillons à présent les autres termes :

$$\Psi_3(x, \tilde{u}, \tilde{a}) = \left. \frac{\partial \Psi_1}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial \Psi}{\partial u} (\tilde{u} - B(x) - C(x) \cdot \tilde{a}) + \nabla_a \Psi \cdot M^{-1} \cdot (\tilde{a} - c) + \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon}$$

où les dérivées sont calculées au point  $(x, u_0(x), a_0, 0)$ . Détaillons chacun des termes.

- Par définition on a  $\partial \Psi / \partial u = f$ .
- Avec les notations de l'hypothèse 4, la formule de Taylor s'écrit

$$\nabla_a \Psi = X \cdot M + (x - x_0)^p \Psi_5(x)$$

où  $X = (1, x - x_0, \dots, (x - x_0)^{p-1})$ .

- On extrait des fonctions  $u'_0$  et  $\partial \Psi / \partial \varepsilon$  leur jet d'ordre  $p - 1$  :

$$u'_0(x) = X \cdot c_1 + (x - x_0)^p \Psi_6(x)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon} (x, u_0(x), a_0, 0) = X \cdot c_2 + (x - x_0)^p \Psi_7(x).$$

Avec ces écritures l'équation devient

$$\begin{aligned} \varepsilon \tilde{u}' &= f(x) \tilde{u} + X \cdot (\tilde{a} - c - c_1 + c_2) - f(x) (B(x) + C(x) \cdot \tilde{a}) + \\ &+ (x - x_0)^p (\Psi_5(x) \cdot M^{-1} \cdot (\tilde{a} - c) + \Psi_7(x) - \Psi_6(x)) + \\ &+ \varepsilon (B'(x) + C'(x) \cdot \tilde{a} + \Psi_4(x, \tilde{u}, \tilde{a}, \varepsilon)). \end{aligned}$$

En choisissant

$$c = c_2 - c_1$$

$$B(x) = \frac{(x - x_0)^p}{f(x)} (-\Psi_5(x) \cdot M^{-1} \cdot c + \Psi_7(x) - \Psi_6(x))$$

$$C(x) = \frac{(x - x_0)^p}{f(x)} \Psi_5(x) \cdot M^{-1},$$

on obtient bien l'équation sous forme préparée. La fonction  $f$  ne s'annulant qu'au point  $x_0$ , et ceci avec la multiplicité  $p$ , il est immédiat que les fonctions  $P$ ,  $B$  et  $C$  ont les propriétés de régularité demandées.

*Preuve du lemme 3.2*

Soit  $(a, u)$  une solution surstable de l'équation (1).

Posons  $\hat{a} = a - a_0$ ,  $\hat{u} = u - u_0$  et écrivons l'équation satisfaite par  $\hat{u}$  en regroupant les termes comme indiqué :

$$\begin{aligned} \varepsilon \hat{u}' &= \Psi_8(x) + \Psi_9(x)\hat{u} + \Psi_{10}(x) \cdot \hat{a} + \Psi_{11}(x, \hat{u}, \hat{a})\hat{u}^2 + \\ &\quad + \hat{u}\Psi_{12}(x, \hat{u}, \hat{a}) \cdot \hat{a} + {}^t\hat{a} \cdot \Psi_{13}(x, \hat{a}) \cdot \hat{a} + \varepsilon\Psi_{14}(x, \hat{u}, \hat{a}, \varepsilon). \end{aligned}$$

Seuls les trois premiers termes de cette somme doivent être évalués plus précisément :

- $\Psi_8(x) = \Psi(x, u_0(x), a_0, 0) = 0$ ;
- $\Psi_9(x) = \frac{\partial \Psi}{\partial u}(x, u_0(x), a_0, 0) = f(x)$ ;
- $\Psi_{10}(x) = \nabla_a \Psi(x, u_0(x), a_0, 0) = X \cdot M + (x - x_0)^p \Psi_5(x)$ .

Toutes ces fonctions  $\Psi_i$  sont analytiques et à valeurs limitées pour  $x$  dans le S-intérieur de  $D$  et  $\hat{u}$ ,  $\hat{a}$  et  $\varepsilon$  infinitésimaux. De plus, puisque  $\hat{u}$  et  $\hat{a}$  proviennent d'une solution surstable longeant la courbe lente  $(a_0, u_0)$ , ils sont infinitésimaux pour  $x$  dans le S-intérieur de  $D$ . Par majoration de la dérivée d'une fonction analytique,  $\hat{u}'$  est aussi infinitésimal dans le S-intérieur de  $D$ . On a donc, pour tout  $x$  dans le S-intérieur de  $D$  :

$$\varepsilon \hat{u}' = f(x)\hat{u}(x) + X \cdot M \cdot \hat{a} + (x - x_0)^p \mathcal{L} \cdot \hat{a} + \mathcal{O}\hat{u}(x) + \mathcal{O}\hat{a} + \mathcal{L}\varepsilon. \quad (14)$$

Dans cette formule, les symboles  $\mathcal{O}$  (resp.  $\mathcal{L}$ ) désignent des fonctions analytiques de  $x$ , infinitésimales (resp. limitées) dans le S-intérieur de  $D$ .

Soit  $D_1$  un domaine standard contenant  $x_0$  et inclus dans le S-intérieur de  $D$ . Soit  $k = \sup_{x \in D_1} |\hat{u}(x)|$ . Pour tout  $x$  dans  $D_1$ , la relation (14) donne

$$X \cdot M \cdot \hat{a} = k\mathcal{O} + \varepsilon\mathcal{L} + \mathcal{O}\hat{a} + (x - x_0)^p \mathcal{O}. \quad (15)$$

En dérivant et en diminuant  $p - 1$  fois le domaine  $D_1$ , on en déduit qu'il existe un domaine  $D_2$  inclus dans le S-intérieur de  $D_1$  et contenant  $x_0$  tel que pour  $i \in \{0, \dots, p - 1\}$ ,

$$X^{(i)} \cdot M \cdot \hat{a} = k\mathcal{O} + \varepsilon\mathcal{L} + \mathcal{O}\hat{a} + (x - x_0)^{p-i} \mathcal{O}.$$

Cette relation est valable en particulier pour  $x = x_0$ . On obtient

$$(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \cdot M \cdot \hat{a} = k\emptyset + \varepsilon\mathcal{L} + \emptyset\hat{a}.$$

En regroupant ces  $p$  équations sous forme matricielle, on a ainsi

$$M \cdot \hat{a} = k\emptyset + \varepsilon\mathcal{L} + \emptyset\hat{a}.$$

L'inversibilité de  $M$  donne alors

$$\hat{a} = k\emptyset + \varepsilon\mathcal{L}.$$

Reprenons à présent l'équation aux ordres de grandeur (14), valide sur tout  $\text{Cl}(D_1)$ . En substituant  $k\emptyset + \varepsilon\mathcal{L}$  à  $\hat{a}$ , on obtient après simplification  $\hat{u}(x)f(x) = k\emptyset + \varepsilon\mathcal{L}$ . Choisissons  $x_1$  sur le bord de  $D_1$  tel que  $|\hat{u}(x_1)| = k$ . On a  $f(x_1)$  appréciable, donc  $k\emptyset = k\emptyset + \varepsilon\mathcal{L}$ , donc  $k = \varepsilon\mathcal{L}$ .

Ce raisonnement est valable pour tout domaine standard inclus dans le S-intérieur de  $D$ , donc on a bien  $\hat{u} = \varepsilon\mathcal{L}$  sur tout le S-intérieur de  $D$ .

### 6.3 Preuves des résultats du paragraphe 3.2

Avant de démontrer les propositions 3.5, 3.6 et 3.7, nous commençons par quelques lemmes. Ces résultats ont été énoncés et démontrés en termes classiques. Les propositions 3.5, 3.6 et 3.7 ont aussi leurs équivalents classiques. Il suffit en général de supprimer le mot "standard" dans les énoncés et les preuves.

#### LEMME 6.1

- 1) Pour tout point  $y$  de  $D$  excepté le point tournant  $x_0$ , on peut trouver  $\mu > 0$  et un petit disque centré en  $y$ ,  $B(y, r)$ , qui est  $\mu$ -dominé par un même point  $x$  dans  $D$  :

$$\forall z \in D, \quad |z - y| < r \implies x \succ_D^\mu z.$$

- 2) En revanche pour  $y = x_0$ , il faut  $p + 1$  points pour dominer un disque centré en  $x_0$  :  $\exists r, \mu > 0, \exists x_1, \dots, x_{p+1} \in D$ ,

$$\forall z \in D, \quad (|z - x_0| < r \implies \exists j \in \{1, \dots, p + 1\}, x_j \succ_D^\mu z).$$

*Preuve.* — Pour  $y \neq x_0$  la fonction  $f$  est non nulle en  $y$  donc  $F$  est un difféomorphisme local, donc sa restriction à un voisinage assez petit  $\mathcal{V}$  de  $y$  est un difféomorphisme, noté  $\tilde{F}$ , de  $\mathcal{V}$  sur son image  $V$ , voisinage de  $F(y)$ .

Il existe  $\alpha > 0$  tel que l'enveloppe convexe du disque  $B$  de centre  $F(y)$  et de rayon  $\alpha/2$  et du point  $F(y) + \alpha$  est inclus dans  $V$ . La préimage du disque  $B$  contient un disque de centre  $y$  et de rayon  $r$  si  $r$  est assez petit, et le point  $x = \tilde{F}_{-1}(F(y) + \alpha)$  et  $\mu = \pi/3$  conviennent.

Pour  $y = x_0$  nous avons vu dans l'introduction que pour  $t > 0$  suffisamment proche de 0, d'une part la fonction  $F$  a une racine  $(p+1)$ -ième qui est un difféomorphisme d'un voisinage de  $x_0$  sur le disque de centre 0 et de rayon  $t^{1/(p+1)}$ , et d'autre part il existe  $p+1$  points distincts  $x_1, \dots, x_{p+1}$  au voisinage de  $x_0$  tels que  $F(x_j) = t$ , et  $p+1$  chemins  $\gamma_j = \gamma_j^t$  dans  $D$  joignant  $x_j$  à  $x_0$  sur lesquels  $\arg F(\gamma_j^t(\tau)) = 0$ . La préimage par  $F$  du disque de centre 0 et de rayon  $t/2$  contient un disque de rayon  $r$  centré en  $x_0$ , et tout point de ce disque est accessible depuis un des points  $x_j$  par un chemin de  $D$  qui est  $\mu$ -descendant avec, ici encore,  $\mu = \pi/3$ .  $\square$

LEMME 6.2. — Pour tout  $x, y \in D_j$ , il existe  $\mu > 0$  et  $z \in D_j$  tels que  $z \succ_{D_j}^\mu x$  et  $z \succ_{D_j}^\mu y$ .

*Preuve.* — D'après l'hypothèse 3, il existe  $z$  au-dessus de  $x$  et de  $y$  dans  $D_j$ . On désigne par  $\gamma_x$  (resp.  $\gamma_y$ ) un chemin dans  $D_j$  de  $z$  à  $x$  (resp. de  $z$  à  $y$ ) sur lequel la fonction relief  $R = \operatorname{Re}(F)$  est décroissante.

On appelle *arc vertical descendant* un chemin plongé dans  $D$  sur lequel  $\operatorname{Im}(F)$  est constante et la fonction relief décroissante. De manière analogue, un *arc horizontal* est un chemin plongé dans  $D$  sur lequel la fonction relief est constante.

Puisque  $F$  est un isomorphisme analytique local en chaque point de  $D_j$  (le point  $x_0$  n'est pas dans  $D_j$ ), une homotopie laissant les extrémités fixes permet de se ramener au cas où chacun des deux chemins est une juxtaposition finie d'arcs verticaux descendants et d'arcs horizontaux dans  $D_j$ . Quitte à déplacer un peu le point  $z$  "vers le haut", on peut supposer que  $\gamma_x$  et  $\gamma_y$  débutent par un arc vertical descendant commun. Lorsque plusieurs arcs successifs sont horizontaux, on peut les regrouper en un chemin plongé car la fonction  $\operatorname{Im}(F)$  est strictement monotone sur chaque arc horizontal dans  $D_j$ . On peut donc supposer que chaque arc horizontal  $\gamma_k$  est précédé d'un arc vertical  $\gamma_{k-1}$ .

Soit  $\gamma_k$  l'un des arcs horizontaux sur lequel la fonction relief  $R$  prend la valeur  $c$ . On voit aisément que  $\gamma_k$  possède un voisinage ouvert  $\mathcal{U}$  dans  $D_j$  sur lequel  $F$  est un isomorphisme analytique et tel que  $F(\mathcal{U})$  est un pavé du plan complexe bissecté par la droite  $\{\operatorname{Re}(z) = c\}$ . Ainsi, une homotopie laissant fixe le point initial de  $\gamma_{k-1}$  et le point final de  $\gamma_k$  permet de remplacer la

juxtaposition de  $\gamma_{k-1}$  et  $\gamma_k$  par la juxtaposition d'un arc vertical descendant  $\delta_{k-1}$  plus court que  $\gamma_{k-1}$  et d'un chemin  $\delta_k$  descendant transverse aux courbes de niveau du relief avec un angle constant de mesure  $\mu_k \in ]0, \pi[$ .

En procédant ainsi pour tous les arcs horizontaux, on se ramène au cas où  $\gamma_x$  et  $\gamma_y$  sont  $\mu$ -descendant dans  $D_j$  avec  $\mu$  le minimum de l'ensemble des  $\mu_k$  et  $\pi - \mu_k$ .  $\square$

LEMME 6.3. — *Pour toute partie  $\Omega$  relativement compacte dans  $D$ , il existe  $\mu > 0$  et  $D_\mu$  un domaine  $\mu$ -accessible avec  $\Omega \subset D_\mu \subset D$ .*

*Pour tout  $\Omega$  standard relativement compact dans  $D$ , il existe  $\mu > 0$  standard et  $D_\mu$   $\mu$ -accessible standard tels que  $\Omega \subset D_\mu \subset D$ .*

*Preuve.* — Soit  $K$  compact tel que  $\Omega \subset K \subset D$  et  $\{B(y, r(y)) \mid y \in K\}$  le recouvrement d'ouverts de  $K$  donné par le lemme 6.1. De ce recouvrement on peut extraire un recouvrement fini, c'est-à-dire

des points  $(y_i)_{1 \leq i \leq n}$ ,  $y_1 = x_0$ , des constantes  $(r_i, \mu_i)_{1 \leq i \leq n}$  et

des points  $(x_i)_{1 \leq i \leq n+p}$  avec  $x_1, \dots, x_{p+1}$

satisfaisant le point 2) du lemme 6.1 et

$x_{p+i} \succ_D^{\mu_i} B(y_i, r_i)$  pour  $i = 2, \dots, n$ .

Rangeons les points  $x_i$  dans chacun des  $D_j$  de la façon suivante : soit

$$S_j = \{i \in \{1, \dots, n+p\} \mid x_i \in D_j \text{ et } \forall \ell < j, x_i \notin D_\ell\}.$$

D'après le lemme 6.2 et par récurrence, il existe  $\tilde{\mu}_j > 0$  et  $z_j \in D_j$  tels que pour tout  $k$  dans  $S_j$ ,  $z_j \succ_{D_j}^{\tilde{\mu}_j} x_k$ . Soit alors

$$\mu < \min\{\mu_i, \tilde{\mu}_j \mid 1 \leq i \leq n+p, 1 \leq j \leq p+1\}$$

et  $D_\mu$  l'intérieur de l'ensemble des points de  $D$  qui sont  $\mu$ -accessibles à partir de l'un des  $z_j$ .

Concernant la deuxième partie de l'énoncé, elle découle du principe du transfert.  $\square$

*Preuve de la proposition 3.6*

Par définition de  $m_j$ , pour tout standard  $\tilde{m}_j < m_j$ , il existe  $y_j$  standard dans  $D_j$  avec  $R(y_j) > \tilde{m}_j$ . De plus,  $\tilde{x}$  est supposé dans  $S\text{-int}(D)$  donc il existe une boule standard de centre  ${}^\circ\tilde{x}$  et de rayon  $r > 0$  incluse dans  $D$ .

On applique alors la deuxième partie du lemme précédent à  $\Omega = B(\circ\tilde{x}, r) \cup \{y_1, \dots, y_{p+1}\}$ , et les points  $x_j$  obtenus satisfont  $R(x_j) \geq R(y_j) > \tilde{m}_j$ .

*Preuve de la proposition 3.5*

Remarquons que le S-intérieur de  $D$  est la réunion sur les  $\mu$  standard de domaines  $\mu$ -accessibles standard. On conclut alors par idéalisation : soit  $X$  l'ensemble des couples  $(\Omega, \eta)$  où  $\Omega$  est relativement compact dans  $D$  et  $\eta > 0$ . Soit  $E = \{(\Omega_1, \eta_1), \dots, (\Omega_n, \eta_n)\}$  standard fini inclus dans  $X$ . D'après le lemme 6.3 précédent appliqué à la réunion des  $\Omega_i$ , il existe  $\mu > 0$  standard et un domaine  $\mu$ -accessible  $D_\mu \subset \text{Cl}(D_\mu) \subset D$  tel que pour tout  $(\Omega, \eta)$  dans  $E$  on ait  $\Omega \subset D_\mu$ . D'après l'hypothèse, il existe donc une fonction  $(u, a)$  solution de (6) telle que pour tout  $(\Omega, \eta)$  dans  $E$ ,  $a$  est infinitésimal, et  $u$  est définie sur  $\Omega$  et à valeurs infinitésimales, donc  $\sup_{x \in \Omega} |u(x)| < \eta$  et  $\|a\| < \eta$ . Le principe d'idéalisation entraîne alors qu'il existe  $(u, a)$  tel que pour tout  $(\Omega, \eta)$  standard dans  $X$ ,  $u$  est définie sur  $\Omega$ ,  $\sup_{x \in \Omega} |u(x)| < \eta$  et  $\|a\| < \eta$ , ce qui signifie bien que  $(u, a)$  est surstable sur le S-intérieur de  $D$ , avec  $a$  infinitésimal et  $u$  à valeurs infinitésimales sur le S-intérieur de  $D$ .

*Preuve de la proposition 3.7*

Tout d'abord il est clair qu'il existe  $r > 0$  standard tel que le disque  $B = \text{Cl}(D(x_0, r)) \subset D_\mu$ . Montrons à présent qu'il est possible de choisir un chemin  $\gamma_x$  qui passe suffisamment loin de  $x_0$ .

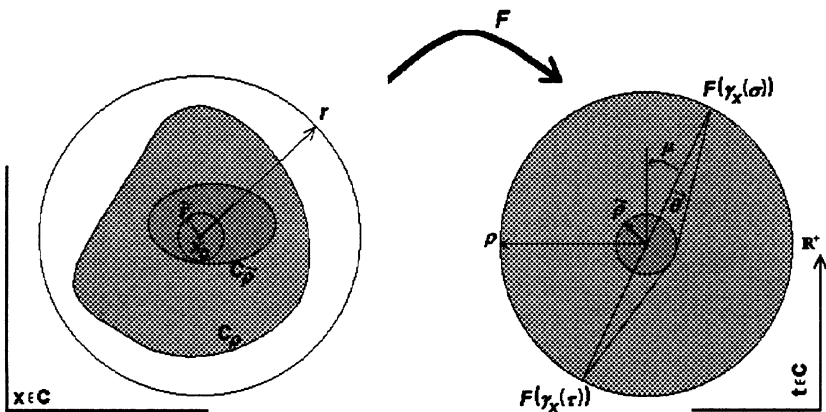


Fig. 2 Les régions de  $C_\rho$  et  $C_{\bar{r}}$  comprises entre les disques de rayon  $r$  et  $\bar{r}$  et leurs images par  $F$ .

Il existe  $\rho > 0$  tel que le disque  $B$  contient la composante connexe  $C_\rho$  contenant  $x_0$  de  $\{x \in D \mid |F(x)| < \rho\}$ . Soit  $x \in D_\mu \setminus B$ ; supposons que le chemin  $\gamma_x$  entre dans  $C_\rho$  à un premier instant  $\sigma$  et en sort à un dernier instant  $\tau$ . Un schéma montre qu'on peut toujours modifier le chemin  $\gamma_x$  sur l'intervalle  $[\sigma, \tau]$  de façon à lui faire éviter le domaine  $C_{\tilde{\rho}}$  et qui soit  $\tilde{\mu}$ -descendant de  $x_{j(x)}$  à  $x$ , avec  $\tilde{\rho} = (\rho/2) \sin \mu > 0$  et  $\tilde{\mu} = \mu - \theta > 0$  où  $\theta$  satisfait  $\sin \theta = (1/2) \sin \mu$ .

Enfin, il existe  $\tilde{r} = 0$  standard tel que le disque  $\tilde{B} = \text{Cl}(D(x_0, \tilde{r}))$  est inclus dans  $C_{\tilde{\rho}}$ . Pour  $x \in D_\mu \setminus B$ , il est donc possible de trouver un chemin  $\gamma_x \tilde{\mu}$  descendant de  $x_{j(x)}$  à  $x$  qui évite le disque  $\tilde{B}$ .

Sur  $D_\mu \setminus \tilde{B}$ , la fonction  $f$  est minorée par une constante standard  $\delta > 0$ . On choisit alors  $c = \delta \sin \tilde{\mu}$ .  $\square$

## Remerciements

Les auteurs remercient le referee pour ses remarques judicieuses.

## Références

- [1] ACKERBERG (R. C.) et O'MALLEY (R. E.) . — *Boundary layer Problems Exhibiting Resonance*, Studies in Appl. Math. **49**, n° 3 (1970), pp. 277-295.
- [2] BENOÎT (E.), CALLOT (J.-L.), DIENER (J.) et DIENER (M.) . — *Chasse au canard*, Collect. Math. **31**, n° 1-3 (1981), pp. 37-119.
- [3] CALLOT (J.-L.) . — *Champs lents-rapides complexes à une dimension lente*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., Série 4, **26** (1993), pp. 149-173.
- [4] CALLOT (J.-L.) . — *Sur la piste des canards imaginaires*, Colloque trajectorien, A. Fruchard et A. Troesch éd., prépublication IRMA, Strasbourg (1995), pp. 191-204.
- [5] CANALIS-DURAND (M.) . — *Formal expansions of van der Pol equation canard solutions are Gevrey*, Dynamic bifurcations, E. Benoît éd., Lecture Notes in Math. **1493** (1991), pp. 29-39; C. R. Acad. Sci., Série I, **311** (1990), pp. 27-30.
- [6] CANALIS-DURAND (M.) . — *Solution formelle Gevrey d'une équation singulièrement perturbée : le cas multidimensionnel*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **43**, n° 2 (1993), pp. 469-483.
- [7] CANALIS-DURAND (M.), RAMIS (J.-P.), SCHÄFKE (R.) et SIBUYA (Y.) . — *Gevrey solutions of singularly perturbed differential equations*, Prépublication (1997), soumis.
- [8] DIENER (F.) . — *Développements en  $\varepsilon$ -ombres*, in : Outils et Modèles Mathématiques, Éditions du CNRS, Paris **3** (1983), pp. 315-328.
- [9] FRUCHARD (A.) et SCHÄFKE (R.) . — *Exceptional complex solutions of the forced van der Pol equation*, Prépublication IRMA, Strasbourg (1996).



- [10] KOPELL (N.) . — *A geometric approach to boundary layer problems exhibiting resonance*, SIAM. J. Appl. Math. **37**, n° 2 (1979), pp. 436-458.
- [11] NELSON (E.) . — *Internal Set theory*, Bull. Amer. Math. Soc. **83** (1977), pp. 1165-1198.
- [12] OLVER (F. W. J.) . — *Introduction to Asymptotics and Special Functions*, Academic Press, New-York (1974).
- [13] WALLET (G.) . — *Surstabilité pour une équation différentielle analytique en dimension 1*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **3** (1990).
- [14] WALLET (G.) . — *Singularité analytique et perturbation singulière en dimension 2*, Bull. Soc. Math. France, **122** (1994), pp. 185-208.
- [15] WASOW (W) . — *Asymptotic expansions for ordinary differential equations*, Interscience, New-York (1965).