

CAMPBELL ALAIN

NAZAROV SERGUEÏ

**Comportement d'une plaque élastique dont une petite  
région est rigide et animée d'un mouvement vibratoire.  
Étude asymptotique de la matrice d'impédance**

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6<sup>e</sup> série*, tome 4, n<sup>o</sup> 2  
(1995), p. 211-242

[http://www.numdam.org/item?id=AFST\\_1995\\_6\\_4\\_2\\_211\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AFST_1995_6_4_2_211_0)

© Université Paul Sabatier, 1995, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

**Comportement d'une plaque élastique  
dont une petite région est rigide et animée  
d'un mouvement vibratoire.  
Étude asymptotique de la matrice d'impédance<sup>(\*)</sup>**

CAMPBELL ALAIN<sup>(1)</sup> et NAZAROV SERGUEÏ<sup>(2)</sup>

**RÉSUMÉ.** — Dans cet article, on considère une plaque  $\mathcal{P}$  de modèle Love-Kirchhoff, de diamètre  $\delta$ , reliée à un support rigide vibrant suivant un petit domaine  $\omega_\varepsilon$ , de diamètre  $\varepsilon\delta$ , et on se propose d'étudier le comportement de la matrice d'impédance quand  $\varepsilon$  tend vers zéro. On écrit les développements asymptotiques au voisinage de zéro des solutions du problème extérieur obtenu en réduisant  $\omega_\varepsilon$  à un seul point, à l'aide de la solution fondamentale du problème biharmonique et de ses dérivées. On écrit ensuite les développements asymptotiques au voisinage de l'infini des solutions du problème intérieur obtenu après dilatation du domaine  $\omega_\varepsilon$ . Enfin, dans le cas d'un mouvement rigide imposé de  $\omega_\varepsilon$ , on raccorde les développements intérieur et extérieur correspondants et on obtient des équivalents des termes d'impédance sous forme de fractions rationnelles en  $\ln \varepsilon$ .

**ABSTRACT.** — This paper considers a Love-Kirchhoff plate  $\mathcal{P}$  which is fixed to a vibrating rigid support along a domain  $\omega_\varepsilon$ . The size of  $\omega_\varepsilon$  is small so that we set  $\text{diam } \omega_\varepsilon = \varepsilon \text{ diam } \mathcal{P}$ . We want to study the behaviour of the impedance matrix when  $\varepsilon$  vanishes. We give the asymptotic expansion of the solutions of the outer problem together with the fundamental solution of the biharmonic problem and its derivatives. Then we set the inner problem after a dilatation of the domain and we write also asymptotic expansions of its solutions. Finally, in the case of a given rigid motion of  $\omega_\varepsilon$ , we match the outer and inner expansions and we obtain rational equivalents in  $\ln \varepsilon$  for impedance terms.

(\*) Reçu le 9 mai 1993

(1) Laboratoire de Mécanique, Université de Caen, F-14032 Caen Cedex (France)  
Laboratoire de Modélisation et Mécanique des structures, C.N.R.S. URA 1776,  
Université Pierre et Marie-Curie, Paris.

(2) Mathematical Department of State Maritime Academy, Kosaya Liniya, 15-A,  
Saint-Petersbourg - 199026 (Russie).

### Introduction

$\mathcal{P}$  est une plaque mince d'épaisseur  $h$ , homogène, de masse spécifique  $\sigma$ . On suppose que  $\mathcal{P}$  est isotrope, de modèle "Love-Kirchhoff", et on note  $\nu$  le coefficient de Poisson.

On représente  $\mathcal{P}$  par une région  $\Omega$  du plan  $Ox_1x_2$ . Cette plaque est reliée à un support rigide  $\mathcal{R}$ , animé d'un mouvement vibratoire de fréquence  $\phi$ . On définit ainsi une inclusion rigide dans  $\Omega$ , notée  $\omega_\varepsilon$ . On désigne par  $\varepsilon$  le rapport entre les diamètres de  $\omega_\varepsilon$  et de  $\Omega$ ,

$$\varepsilon = \frac{\text{diam } \omega_\varepsilon}{\text{diam } \Omega}$$

On suppose en outre que l'épaisseur  $h$  de la plaque est très petite devant  $\varepsilon \text{ diam } \Omega$ . Enfin les contours  $\partial\omega_\varepsilon$  et  $\partial\Omega$  de  $\omega_\varepsilon$  et  $\Omega$  sont de classe  $C^1$  par morceaux.

Le mouvement de vibration rigide de  $\mathcal{R}$  est défini par une translation  $Ue^{2\pi i\phi t}$  suivant  $x_3$ , et deux rotations  $\Theta_1 e^{2\pi i\phi t}$  et  $\Theta_2 e^{2\pi i\phi t}$  autour de  $Ox_1$  et  $Ox_2$  respectivement. Les éléments de réduction en  $O$  du torseur résultant des actions de  $\mathcal{P}$  sur  $\mathcal{R}$  sont une résultante de  $\mathcal{R} e^{2\pi i\phi t} \vec{x}_3$  et un moment en  $O$ ,  $(M_1 \vec{x}_1 + M_2 \vec{x}_2) e^{2\pi i\phi t}$ . La matrice d'impédance  $\mathcal{J}$  est alors définie par (cf. [1]),

$$\begin{bmatrix} R \\ M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = \mathcal{J} \begin{bmatrix} U \\ \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{bmatrix}$$

On note,

$$\mathcal{J} = [I_{ij}]_{ij=0,1,2}$$

Dans le cas où  $\Omega$  et  $\omega_\varepsilon$  sont deux disques concentriques de centre  $O$ , le contour de  $\Omega$  étant libre d'effort, on calcule explicitement cette matrice à l'aide des fonctions de Bessel et on détermine les expressions asymptotiques des termes d'impédance quand  $\varepsilon$  est infiniment petit ([2] et [3]). Pour une plaque de contour  $\partial\Omega$  quelconque,  $\partial\omega_\varepsilon$  étant circulaire, on obtient par raccordement de développements asymptotiques, un équivalent de la matrice d'impédance sous la forme générale,

$$\begin{bmatrix} J_{00} & \frac{J_{01}}{\ln \varepsilon} & \frac{J_{02}}{\ln \varepsilon} \\ J_{01} & 4\pi N & J_{12} \\ \ln \varepsilon & \frac{J_{12}}{\ln \varepsilon} & \frac{4\pi N}{\ln \varepsilon} \\ J_{02} & \frac{J_{12}}{\ln \varepsilon} & \frac{4\pi N}{\ln \varepsilon} \\ \ln \varepsilon & \ln \varepsilon & \ln \varepsilon \end{bmatrix}$$

Comportement d'une plaque élastique dont une petite région est rigide

$N$  est le module de rigidité à la flexion de la plaque. Les coefficients  $J_{ij}$  sont inconnus mais indépendants de  $\varepsilon$  [1].

On se propose ici de donner une approximation plus précise des termes d'impédance, dans le cas où  $\Omega$  et  $\omega_\varepsilon$  sont de formes quelconques, en utilisant des raccordements de développements asymptotiques ([4], [5], [6] et [7]), il s'agit d'appliquer au problème biharmonique, des méthodes analogues à celles déjà développées par exemple pour des problèmes de laplacien ([5], [7], [8] et [9]).

Après une première partie destinée à poser le problème et à fixer les notations, on étudie le problème extérieur, dans lequel  $\omega_\varepsilon$  est réduit au seul point  $O$ , et avec des conditions aux limites quelconques sur  $\partial\Omega$ . La troisième partie est consacrée au problème intérieur obtenu après une dilatation de  $\Omega$  de rapport  $\varepsilon^{-1}$ . Enfin, dans la quatrième partie, on s'intéresse au cas particulier de la plaque libre d'effort sur  $\partial\Omega$  et au calcul de la matrice d'impédance. On y raccordera de manière formelle les développements asymptotiques obtenus précédemment, et on obtiendra des équivalents des termes d'impédance sous forme de fractions rationnelles en  $\ln \varepsilon$ . Ce calcul sera effectué sans toutes les justifications théoriques qui feront l'objet d'un travail ultérieur.

## 1. Position du problème et notations

$P$  désignant un point quelconque de la plaque, le déplacement de  $P$ ,  $w(x_1, x_2) e^{2i\pi\phi t}$ , vérifie l'équation

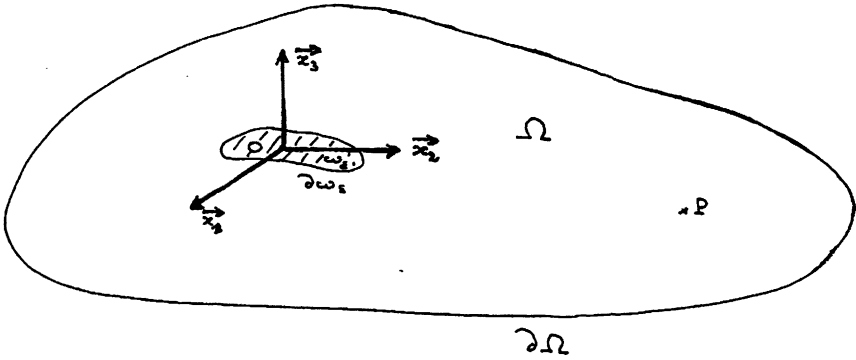
$$\Delta^2 w - \Lambda w = 0, \quad (1)$$

où on a posé

$$\Lambda = \frac{4\pi^2 \phi^2 \sigma h}{N}.$$

On suppose que la fréquence de vibration de la partie rigide  $\mathcal{R}$  n'est pas trop grande. Par exemple,  $\Lambda$  est un  $O(1)$  par rapport à l'infiniment petit  $\varepsilon$ . Le déplacement  $w$  est rigide suivant  $\omega_\varepsilon$  et donc :

$$\forall M \in \omega_\varepsilon, \quad w(M) = U + \Theta_1 x_2 - \Theta_2 x_1. \quad (2)$$



Rappelons que, d'après la formule de Green-Riemann, si \$u\$ et \$v\$ sont des fonctions de \$H^2(\Omega)\$ on a (cf.[10]),

$$\begin{aligned}
 (\Delta^2 u, v) &= \int_{\Omega} \Delta^2 u \cdot v \, dx \\
 &= a(u, v) + \int_{\partial\Omega} M(u) \cdot \frac{\partial v}{\partial n} \, d\Gamma - \int_{\partial\Omega} F(u) \cdot v \, d\Gamma,
 \end{aligned} \tag{3}$$

avec

$$\begin{aligned}
 a(u, v) &= \int_{\Omega} \left( 2(1-\nu) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \right) \right) dx \\
 M(u) &= -\Delta u - (1-\nu) \left( 2n_1 n_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} - n_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - n_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right)
 \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
 F(u) &= -\frac{\partial}{\partial n} (\Delta u) - (1-\nu) \times \\
 &\quad \times \frac{\partial}{\partial \tau} \left( n_1 n_2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right) + (n_1^2 - n_2^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \right)
 \end{aligned}$$

où \$\partial/\partial n\$ et \$\partial/\partial \tau\$ désignent les dérivées normale et tangentielle.

\$a\$ est la forme bilinéaire classique des plaques en flexion. \$NM\$ et \$NF\$ sont les densités de moment de flexion et d'effort tranchant. \$n\_1\$ et \$n\_2\$ sont les composantes du vecteur normal extérieur au contour \$\partial\Omega\$. On désigne par \$\mathcal{D}\$ l'opérateur

$$\mathcal{D}(u) = \begin{bmatrix} u \\ \frac{\partial u}{\partial n} \end{bmatrix} \tag{5}$$

et par  $\mathcal{N}$ ,

$$\mathcal{N}(u) = \begin{bmatrix} F(u) \\ M(u) \end{bmatrix} \quad (6)$$

On note alors (3) sous la forme,

$$(\Delta^2 u, v)_\Omega = a(u, v) + (\mathcal{N}(u), \mathcal{D}(v))_{\partial\Omega}. \quad (7)$$

Différents types de conditions aux limites homogènes sont envisageables sur le contour  $\partial\Omega$  de la plaque :

- conditions de Dirichlet sur une partie  $\partial_1\Omega$  (bord encastré) :

$$\mathcal{D}(u) = 0 \quad \text{sur } \partial_1\Omega ;$$

- conditions de Neumann sur une partie  $\partial_2\Omega$  (bord libre) :

$$\mathcal{N}(u) = 0 \quad \text{sur } \partial_2\Omega ;$$

- ou conditions de support simple suivant  $\partial_3\Omega$  ( $\partial\Omega = \partial_1\Omega \cup \partial_2\Omega \cup \partial_3\Omega$ ).

On notera de manière générale,

$$\mathcal{B}(u) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega ,$$

les conditions aux limites sur  $\partial\Omega$ .

Dans cette étude, on utilisera fréquemment les six polynômes  $V^j$  définis par,

$$\begin{aligned} V^0(x) &= V^0(x_1, x_2) = 1 \\ V^1(x) &= x_1, \quad V^2(x) = x_2 \\ V^3(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} x_1^2, \quad V^4(x) = x_1 x_2, \quad V^5(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} x_2^2. \end{aligned} \quad (8)$$

D'autre part  $h$  désignant une fonction de  $x$  admettant des dérivées partielles, on pose :

$$h^j(x) = V^j(-\nabla_x)h(x). \quad (9)$$

Soit

$$\begin{aligned} h^0(x) &= h(x_1, x_2) \\ h^1(x) &= -\frac{\partial h}{\partial x_1}(x), \quad h^2(x) = -\frac{\partial h}{\partial x_2}(x) \\ h^3(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2}(x), \quad h^4(x) = \frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_2}(x), \quad h^5(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial^2 h}{\partial x_2^2}(x). \end{aligned} \quad (10)$$

## 2. Problème extérieur

### 2.1. Solution fondamentale

Dans le plan  $Ox_1x_2$ , l'équation biharmonique

$$\Delta^2 u = \delta_0$$

où  $\delta_0$  désigne la distribution de Dirac en  $O$ , admet la solution fondamentale,

$$\Phi(x) = \frac{1}{8\pi} r^2 \ln r, \quad (11)$$

où  $r$  est la première coordonnée polaire [11]. Cette fonction est régulière en  $O$  et l'intégrale sur tout contour entourant l'origine de  $F(\Phi)$ , défini en (4), est égale à  $-1$ .

### 2.2. Problème de Sobolev

On note  $\mathcal{V}$  l'espace,

$$\mathcal{V} = \left\{ u \in H^2(\Omega) \text{ tels que } u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial_1\Omega, u = 0 \text{ sur } \partial_3\Omega \right\}$$

Soit  $\mathcal{V}_0$  le sous-espace de  $\mathcal{V}$ , ensemble des  $u$  tels que  $u(0)$  soit nul.  $\Omega$  est une partie de  $\mathbb{R}^2$  et par conséquent les fonctions de  $H^2(\Omega)$  sont continues sur  $\Omega$  et la condition sur  $u(0)$  a donc bien un sens.

Soit  $f$  une fonction de  $L^2(\Omega)$  et soit le problème suivant (problème de Sobolev) :

on cherche  $v$  dans  $\mathcal{V}_0$  tel que :

$$\begin{cases} \Delta^2 v - \Lambda v = f & \text{sur } \Omega \setminus O \\ \mathcal{B}(v) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ v(0) = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Si  $\Lambda$  n'est pas valeur propre du problème, celui-ci admet une solution unique dans  $\mathcal{V}_0$ . Dans ce cas, le seul élément  $u$  de  $\mathcal{V}_0$  tel que  $a(u, u) - \Lambda(u, u)_\Omega$  soit nul est la fonction nulle. Pour certains types de conditions aux limites, en particulier si le bord de la plaque est libre d'effort, il apparaît des modes rigides correspondant à la valeur propre zéro.

En outre, on a la propriété suivante : toute solution dans  $\mathcal{V}$  du problème (12) s'écrit sous la forme :

$$v(x) = A\Phi(x) + (\text{combinaison linéaire des } V^j(x))_{j=1\dots 5} + O(|x|^3) \quad (13)$$

au voisinage de  $O$ . Les  $V^j$  sont les cinq polynômes définis en (8) et  $A$  est une constante qui dépend de  $f$  et des conditions choisies sur  $\partial\Omega$ .

En outre, si  $\Lambda$  n'est pas valeur propre du problème (12) et n'est pas valeur propre du problème,

$$\begin{aligned} \Delta^2 u - \Lambda u &= f \quad \text{sur } \Omega \\ \mathcal{B}(u) &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{aligned}$$

alors ce problème admet une solution unique  $u(x)$  dans  $\mathcal{V}$ . En particulier, si  $f$  est la distribution de Dirac  $\delta_0$ , cette solution est la fonction de Green  $G(x)$  [11] et on a,

$$G(x) = \Phi(x) + G_0(x),$$

où  $G_0$  est de classe  $C^4$  sur  $\Omega$ , car  $\delta_0$  est élément du dual de  $\mathcal{V}$ .

On a alors la relation suivante,

$$A = -u(0)G(0)^{-1} = -G(0)^{-1}(f, G)_\Omega.$$

En effet, on remarque tout d'abord que  $G(0)$  n'est pas nul, car sinon  $G$  serait solution du problème homogène de Sobolev et donc serait la fonction nulle, ce qui est absurde. De plus, la fonction définie par

$$v(x) = u(x) - u(0)G(0)^{-1}G(x),$$

qui appartient à  $\mathcal{V}_0$ , est alors solution du problème (12).  $v(x)$  s'écrit sous la forme,

$$v(x) = A\Phi(x) + \text{fonction régulière en } O$$

au voisinage de  $O$ , avec,

$$A = -u(0)G(0)^{-1}.$$

De plus,

$$u(0) = (u, \delta_0)_\Omega = (u, \Delta^2 G - \Lambda G)_\Omega,$$

et d'après Green,

$$u(0) = (\Delta^2 u - \Lambda u, G)_\Omega = (f, G)_\Omega.$$



**2.3. Description asymptotique de la solution  $\eta^0$  vérifiant  $\eta^0(0) = 1$**

On considère maintenant le problème :

on cherche  $w$  tel que :

$$\begin{cases} \Delta^2 w - \Lambda w = 0 & \text{sur } \Omega \setminus O \\ \mathcal{B}(w) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ w(0) = 1. \end{cases} \quad (14)$$

Si  $\Lambda$  n'est pas valeur propre du problème (12), le problème (14) a une solution unique dans  $H^2(\Omega)$  notée  $\eta^0(x)$  et on a

$$\eta^0(x) = 1 + \Gamma_{00}\Phi(x) - \sum_{p=1}^5 \Gamma_{0p}V^p(x) + O(|x|^3). \quad (15)$$

Les six constantes  $\Gamma_{00}$  et  $\Gamma_{0p}$  dépendent du contour  $\partial\Omega$  et des conditions sur ce contour.

Pour montrer cette propriété, on introduit la fonction  $\chi_d$  définie de la façon suivante : soit  $d$  un nombre réel positif tel que le disque de centre  $O$  et de rayon  $d$  soit inclus dans  $\Omega$ ; on appelle  $\chi_d$  une fonction  $C^\infty$  sur  $\Omega$  telle que

$$\begin{cases} \chi_d(x) = 1 & \text{si } |x| \leq \frac{d}{2} \\ \chi_d(x) = 0 & \text{si } d \leq |x|. \end{cases} \quad (16)$$

On pose alors,

$$w = \chi_d + v,$$

$v$  est alors solution d'un problème de Sobolev, et on obtient le résultat d'après (13) .

**2.4. Exemple : plaque circulaire libre d'effort**

$\Omega$  est un disque de centre  $O$ , de rayon  $R$ , et le contour circulaire  $\partial\Omega$  est libre d'effort. Si  $\Lambda$  n'est pas valeur propre du problème de Sobolev correspondant, la solution en déplacement de (14) est alors (cf. [3]),

$$w(x) = \alpha_0 J_0(cr) + \lambda_0 I_0(cr) + \beta_0 \left( Y_0(cr) + \frac{2}{\pi} K_0(cr) \right),$$

$J_k$  et  $Y_k$  sont les fonctions de Bessel d'ordre  $k$ ,  $I_k$  et  $K_k$  les fonctions de Bessel modifiées, et le nombre  $c$  est défini par

$$c^4 = \Lambda.$$

## Équations aux limites

Comportement d'une plaque élastique dont une petite région est rigide

Les constantes  $\alpha_0$ ,  $\lambda_0$  et  $\beta_0$  sont les solutions du système linéaire,

$$\alpha_0 + \lambda_0 = 1$$

$$\alpha_0 \left( J_0(cR) + \frac{\nu-1}{cR} J_1(cR) \right) + \lambda_0 \left( I_0(cR) + \frac{\nu-1}{cR} I_1(cR) \right) +$$

$$- \beta_0 \left( Y_0(cR) - \frac{2}{\pi} K_0(cR) + \frac{\nu-1}{cR} \left( Y_1(cR) + \frac{2}{\pi} K_1(cR) \right) \right) = 0$$

$$\alpha_0 J_1(cR) + \lambda_0 I_1(cR) + \beta_0 \left( Y_1(cR) - \frac{2}{\pi} K_1(cR) \right) = 0,$$

qui admet une solution unique si  $\Lambda$  n'est pas une valeur propre. Les deux dernières équations de la forme,

$$C_1(\alpha_0, \lambda_0, \beta_0, cR) = 0$$

$$C_2(\alpha_0, \lambda_0, \beta_0, cR) = 0$$

traduisent les conditions sur le cercle de centre  $O$  et de rayon  $R$ . Un calcul simple montre que

$$\alpha_0 = \frac{-f_2(cR)}{\Delta(cR)} \beta_0$$

$$\lambda_0 = \frac{f_1(cR)}{\Delta(cR)} \beta_0,$$

où on a posé,

$$f_1(x) = J_1(x) \left[ Y_0(x) - \frac{2}{\pi} K_0(x) + \frac{4}{\pi} \frac{\nu-1}{x} K_1(x) \right] +$$

$$- J_0(x) \left( Y_1(x) - \frac{2}{\pi} K_1(x) \right)$$

$$f_2(x) = I_1(x) \left[ Y_0(x) - \frac{2}{\pi} K_0(x) + \frac{2}{\pi} \frac{\nu-1}{x} Y_1(x) \right] +$$

$$- I_0(x) \left( Y_1(x) - \frac{2}{\pi} K_1(x) \right)$$

et où,

$$\Delta(x) = I_0(x)J_1(x) + I_1(x)J_0(x) + 2 \frac{\nu-1}{x} I_1(x)J_1(x),$$

$\Delta(cR)$  est le déterminant du système qu'on suppose non nul si  $\Lambda$  n'est pas valeur propre. On en déduit

$$\beta_0 = \frac{\Delta(cR)}{f_1(cR) - f_2(cR)}.$$

En utilisant les expressions asymptotiques des fonctions de Bessel au voisinage de zéro [12], on a

$$\begin{aligned} \eta_0(x) = & 1 - \frac{1}{\pi} \beta_0 c^2 r^2 \ln r + \\ & + r^2 \left( \frac{-\beta_0}{\pi} c^2 \ln c + \frac{c^2}{4} (\lambda_0 - \alpha_0) + \frac{\beta_0}{\pi} c^2 (1 + \ln 2 - \gamma) \right) + \\ & + O(r^4 \ln r) \end{aligned}$$

où  $\gamma$  désigne la constante d'Euler.

On obtient donc ici,

$$\begin{aligned} \Gamma_{00} &= -8\beta_0 c^2 \\ \Gamma_{01} &= \Gamma_{02} = \Gamma_{04} = 0 \\ \Gamma_{03} &= \Gamma_{05} = -c^2 \sqrt{2} \left( \frac{\beta_0}{\pi} (1 + \ln 2 - \gamma - \ln c) + \frac{\lambda_0 - \alpha_0}{4} \right). \end{aligned}$$

D'autre part, dans cet exemple, la fonction de Green est de la forme

$$G(x) = \alpha J_0(cr) + \lambda I_0(cr) + \beta \left( Y_0(cr) + \frac{2}{\pi} K_0(cr) \right),$$

où  $\alpha, \beta$  et  $\lambda$  vérifient

$$\begin{aligned} C_1(\alpha, \lambda, \beta, cR) &= 0 \\ C_2(\alpha, \lambda, \beta, cR) &= 0. \end{aligned}$$

En écrivant que la distribution de Dirac est appliquée en  $O$ , on obtient

$$\beta = \frac{-1}{8c^2}$$

et

$$G(0) = \alpha + \lambda = \frac{f_1(cR) - f_2(cR)}{\Delta(cR)} \left( \frac{-1}{8c^2} \right).$$

La fonction  $\eta_0 - 1$  est solution du problème (12) avec  $f$  égale à la constante  $\Lambda$ . On a donc,

$$\begin{aligned} (f, G)_\Omega &= 2\pi\Lambda \int_0^R G(r)r dr \\ &= -2\pi c^3 \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta \left( Y_1(c\delta) - \frac{2}{\pi} K_1(c\delta) \right) = 8\beta c^2 = -1, \end{aligned}$$

et on retrouve ainsi

$$\Gamma_{00} = -G(0)^{-1}(f, G)_{\Omega} = \frac{-\Delta(cR)}{f_1(cR) - f_2(cR)} 8c^2.$$

## 2.5. Problème extérieur

On suppose que  $\Lambda$  n'est pas valeur propre du problème de Sobolev. Soit le problème (dit extérieur) :

trouver  $w$  tel que,

$$\begin{cases} \Delta^2 w - \Lambda w = 0 & \text{sur } \Omega \setminus O \\ \mathcal{B}(w) = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (17)$$

On peut énoncer le résultat suivant.

LEMME .— *En dehors de  $O$ , le problème (17) admet des solutions  $\eta^j$  qui pour  $r$  suffisamment petit s'écrivent sous la forme,*

$$\eta^j(x) = \Phi^j(x) + \eta_0^j(x), \quad (18)$$

et où  $\eta_0^j$  est une fonction de  $\mathcal{V}_0$  solution d'un problème de Sobolev.

$\Phi^j$  est défini comme en (9) et (10) par,

$$\Phi^j(x) = V^j(-\nabla_x)\Phi(x).$$

Notons que, pour  $j$  variant de 1 à 5, les fonctions  $\Phi^j$  sont dans  $L^2(\Omega)$ .

*Démonstration.*— On cherche une solution du problème (17) sous la forme :

$$\eta^j = \chi_d \Phi^j + \eta_0^j,$$

où  $\chi_d$  est la fonction définie en (16).

$\eta_0^j$  vérifie alors :

$$\Delta^2 \eta_0^j - \Lambda \eta_0^j = \Lambda \chi_d \Phi^j - \Delta^2(\chi_d \Phi^j).$$

$\Lambda \chi_d \Phi^j$  appartient à  $L^2(\Omega)$ .  $\Delta^2(\chi_d \Phi^j)$  est nulle partout sauf sur la couronne  $(d/2, d)$ , où elle est de classe  $C^\infty$ . Elle est donc dans  $L^2(\Omega)$ .

De plus  $\eta^j$  et  $\eta_0^j$  coïncident sur  $\partial\Omega$  et donc

$$\mathcal{B}(\eta^j) = \mathcal{B}(\eta_0^j) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

On impose

$$\eta_0^j(0) = 0.$$

La fonction  $\eta_0^j$  est alors solution d'un problème de Sobolev.

$\Delta$  n'étant pas valeur propre, ce problème admet une solution unique dans  $\mathcal{V}_0$ . Pour  $r$  suffisamment petit (inférieur à  $d/2$ ), on a donc la propriété (18).  $\square$

## 2.6. Description asymptotique des $\eta^j$

En utilisant les expressions des solutions des problèmes de Sobolev écrites en (13), on obtient

$$\eta^j(x) = \Phi^j(x) + \Gamma_{j0}\Phi(x) - \sum_{p=1}^5 \Gamma_{jp}V^p(x) + O(|x|^3), \quad (19)$$

où  $j$  varie de 1 à 5.

Les constantes  $\Gamma_{rs}$  dépendent de la géométrie de  $\Omega$ .

Le problème (17) admet donc la solution  $\eta^0(x)$  définie en (15), qui prend la valeur 1 en 0 et les cinq solutions  $\eta^j(x)$  définies en (19). On obtient une matrice,

$$[\Gamma_{pq}]_{p,q=0\dots 5}, \quad (20)$$

dont les coefficients dépendent du bord  $\partial\Omega$ . On se propose de montrer que cette matrice est symétrique.

$\Omega_\delta$  est le domaine  $\Omega$  privé du disque de centre  $O$  et de rayon  $\delta$ . On note  $C_\delta$  le cercle contour de ce disque.

Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions de  $H^2(\Omega_\delta)$ . On suppose que  $u$  et  $v$  vérifient les mêmes conditions sur  $\partial\Omega$  (par exemple  $\mathcal{B}(u) = \mathcal{B}(v) = 0$ ). D'après (7), on a :

$$(\Delta^2 u, v)_{\Omega_\delta} - (u, \Delta^2 v)_{\Omega_\delta} = (\mathcal{N}(u), \mathcal{D}(v))_{\partial\Omega_\delta} - (\mathcal{D}(u), \mathcal{N}(v))_{\partial\Omega_\delta}.$$

Compte tenu des conditions sur  $\partial\Omega$ , il reste

$$(\Delta^2 u, v)_{\Omega_\delta} - (u, \Delta^2 v)_{\Omega_\delta} = -(\mathcal{N}(u), \mathcal{D}(v))_{C_\delta} + (\mathcal{D}(u), \mathcal{N}(v))_{C_\delta},$$

où le cercle  $C_\delta$  est parcouru dans le sens positif.

Soit  $q$  la forme bilinéaire antisymétrique définie par

$$q(u, v) = (\mathcal{N}(u), \mathcal{D}(v))_{C_\delta} - (\mathcal{D}(u), \mathcal{N}(v))_{C_\delta}. \quad (21)$$

D'après la formule de Green, il est clair que  $q(u, v)$  ne dépend pas de  $\delta$  pour des fonctions  $u$  et  $v$  biharmoniques ou solutions de l'équation  $\Delta^2 u - \Lambda u = 0$  sur  $\Omega$  privé de  $O$ .

En outre, on a les propriétés suivantes.

LEMME. — Pour les fonctions  $V^j$  définies en (8) et les fonctions  $\Phi^j$  obtenues par (9) et (10), on a les relations suivantes :

$$q(V^j, V^k) = 0 \quad (22)$$

$$q(\Phi^j, \Phi^k) = 0 \quad (23)$$

$$q(\Phi^j, V^k) = \delta_{jk} \quad (24)$$

pour tout  $j$  et  $k$  variant de 0 à 5.

Démonstration. — En écrivant la formule de Green sur le disque de centre  $O$  et de rayon  $\delta$ , on a

$$q(V^j, V^k) = \int_{\{r < \delta\}} (\Delta^2 V^j \cdot V^k - V^j \cdot \Delta^2 V^k) dx = 0 ;$$

ce qui démontre (22).

Par antisymétrie de  $q$ , on voit immédiatement que  $q(\Phi^j, \Phi^j)$  est nul.  $q(\Phi^j, \Phi^k)$  peut se calculer directement :

- $\Phi^0, \partial\Phi^0/\partial n, M(\Phi^0)$  et  $F(\Phi^0)$  sont des fonctions de la seule variable  $r$ .
- $\Phi^1, \partial\Phi^1/\partial n, M(\Phi^1)$  et  $F(\Phi^1)$  (respectivement  $\Phi^2 \dots$ ) sont le produit d'une fonction de  $r$  et de  $\cos \theta$  (respectivement  $\sin \theta$ ),  $\theta$  désignant la seconde coordonnée polaire du plan  $(x_1, x_2)$ . Il en résulte par orthogonalité que

$$q(\Phi^j, \Phi^k) = 0 \quad \text{si } j, k = 0, 1, 2 ;$$

et un calcul simple montre en outre que

$$q(\Phi^j, \Phi^k) = O \left( \frac{1}{\delta^2} (1 + (\ln \delta)^2) \right) \quad \text{si } j, k = 3, 4, 5.$$

Et comme  $q(\Phi^j, \Phi^k)$  est indépendant de  $\delta$ , on voit qu'il est nul en faisant tendre  $\delta$  vers l'infini.

D'autre part,

$$q(\Phi^0, \Phi^4) = q\left(\chi_d \Phi^0, \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} (\chi_d \Phi^0)\right),$$

où  $\chi_d$  est la fonction définie en (16) et où  $d$  est supérieur à  $2\delta$ . D'après Green,

$$\begin{aligned} q(\Phi^0, \Phi^4) &= \left(\Delta^2(\chi_d \Phi^0), \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} (\chi_d \Phi^0)\right)_{\mathbb{R}^2} + \\ &\quad - \left(\chi_d \Phi^0, \Delta^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} (\chi_d \Phi^0)\right)\right)_{\mathbb{R}^2} \\ &= \left(\Delta^2 \left(\frac{\partial}{\partial x_1} (\chi_d \Phi^0)\right), \frac{\partial}{\partial x_2} (\chi_d \Phi^0)\right)_{\mathbb{R}^2} + \\ &\quad - \left(\frac{\partial}{\partial x_2} (\chi_d \Phi^0), \Delta^2 \left(\frac{\partial}{\partial x_1} (\chi_d \Phi^0)\right)\right)_{\mathbb{R}^2} = 0, \end{aligned}$$

car toutes les fonctions à intégrer sont à support compact sur  $\mathbb{R}^2$  privé de  $O$ . On montre de manière analogue que  $q(\Phi^0, \Phi^3)$  et  $q(\Phi^0, \Phi^5)$  sont nuls, et ainsi on obtient la propriété (23).

Enfin, pour démontrer (24), on remarque que

$$q(\Phi^j, V^k) = (\Delta^2 \Phi^j, V^k)_{\{r \leq \delta\}} - (\Phi^j, \Delta^2 V^k)_{\{r \leq \delta\}}.$$

Soit, en utilisant la dérivée au sens des distributions,

$$\begin{aligned} q(\Phi^j, V^k) &= (V^j(-\nabla_x) \delta_0, V^k)_{\{r \leq \delta\}} \\ &= (\delta_0, V^j(\nabla_x) V^k)_{\{r \leq \delta\}} \\ &= (V^j(\nabla_x) V^k)_{x=0} = \delta_{jk}; \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration du lemme.  $\square$

La symétrie de la matrice  $[\Gamma_{pq}]$  en résulte. En effet, les fonctions  $\eta^p$  définies en (19) vérifient (17) et donc, pour tout  $\delta$  :

$$(\Delta^2 \eta^p, \eta^q)_{\Omega_\delta} = \Lambda(\eta^p, \eta^q)_{\Omega_\delta} = (\eta^p, \Delta^2 \eta^q)_{\Omega_\delta}.$$

Soit

$$q(\eta^p, \eta^q) = 0.$$

En utilisant les expressions (15) et (19), et les propriétés (22), (23) et (24), il reste

$$q(\eta^p, \eta^q) = -\Gamma_{qp} + \Gamma_{pq} + o(\delta);$$

ce qui démontre la symétrie de la matrice.

### 2.7. Exemple du disque

Reprenons l'exemple traité au paragraphe 2.4. On peut donner la méthode de détermination des constantes  $\Gamma_{pq}$  sans entrer dans le détail des calculs. Par exemple, on cherche  $\eta^1$  par un développement en série de Fourier-Bessel. On impose les conditions limites sur le cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $O$  et de rayon  $R$ , et on veut en plus qu'au voisinage de zéro on ait une expression de la forme,

$$\eta^1(x) = \Phi^1(x) + \Gamma_{10}\Phi(x) - \sum_{p=1}^5 \Gamma_{1p}V^p(x) + O(|x|^3)$$

avec

$$\Phi^1(x) = -\frac{r}{8\pi}(1 + 2 \ln r) \cos \theta.$$

On est donc conduit à envisager dans le développement de  $\eta^1$  un terme de la forme

$$(\alpha_1 J_1(cr) + \beta_1 Y_1(cr) + \lambda_1 I_1(cr) + \mu_1 K_1(cr)) \cos \theta$$

pour identifier avec  $\Phi^1$  au voisinage de zéro. On obtient ainsi,

$$\mu_1 = \frac{2}{\pi} \beta_1 \quad \text{et} \quad 2\beta_1 \frac{c}{\pi} = \frac{-1}{4\pi}.$$

Par les conditions limites sur  $\mathcal{C}$ , on déduit de manière analogue au paragraphe 2.4 les constantes  $\alpha_1$  et  $\lambda_1$  et donc le coefficient  $\Gamma_{11}$ .

Par ailleurs,  $\Gamma_{12}$  est nul car sinon on aurait des termes en  $(r \ln r \sin \theta)$  dans  $\eta^1$ .

Le terme d'ordre 0 est de la forme

$$\alpha_0 J_0(cr) + \beta_0 Y_0(cr) + \lambda_0 I_0(cr) + \frac{2}{\pi} \beta_0 K_0(cr)$$



et sa valeur en 0,  $\alpha_0 + \lambda_0$ , est nulle. Les deux conditions sur  $C$  sont homogènes, et il en résulte que les coefficients  $\alpha_0$ ,  $\beta_0$  et  $\lambda_0$  sont nuls et donc que :

$$\Gamma_{13} + \Gamma_{15} = 0 \quad \text{et} \quad \Gamma_{10} = 0.$$

Compte tenu des comportements en zéro des fonctions de Bessel d'ordre 2,  $Y_2$  et  $K_2$ , le terme d'ordre 2 dans le développement de Fourier-Bessel de  $\eta^1$  s'écrit,

$$(\alpha_2 J_2(cr) + \lambda_2 I_2(cr)) \cos 2\theta \quad (\text{ou} \sin 2\theta)$$

Par les deux conditions limites homogènes sur  $C$ , on obtient

$$\alpha_2 = \lambda_2 = 0$$

et donc

$$\Gamma_{13} = \Gamma_{15} = \Gamma_{14} = 0.$$

On peut naturellement pratiquer de manière analogue pour déterminer les autres fonctions  $\eta^p$  et les constantes  $\Gamma_{pq}$ .

### 3. Problème intérieur

#### 3.1. Introduction

Dans la deuxième section, le domaine  $\omega_\varepsilon$  était assimilé au seul point  $O$ . Les solutions envisagées sont donc des approximations du problème posé pour des points éloignés de  $\omega_\varepsilon$  (solutions extérieures). Dans cette section, on s'intéresse aux solutions au voisinage de l'inclusion rigide  $\omega_\varepsilon$  (solutions intérieures).

On procède à une dilatation

$$y = \frac{x}{\varepsilon} \quad (\text{et} \quad \rho = r/\varepsilon)$$

Ainsi, si  $x$  appartient à  $\omega_\varepsilon$ , alors  $y$  est élément de  $\omega_1 = \varepsilon^{-1}\omega_\varepsilon$  qui est un domaine de taille fixée, indépendant de  $\varepsilon$ . L'origine  $O$  est à l'intérieur de  $\omega_1$ .

On considère alors le problème suivant, appelé problème intérieur.

On cherche  $w$  tel que :

$$\begin{cases} \Delta_y^2 w = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^2 \setminus \omega_1 \\ w(M) = U + \Theta_1 \varepsilon y_2 - \Theta_2 \varepsilon y_1 & \text{sur } \omega_1. \end{cases} \quad (25)$$

Notons que l'opérateur différentiel de l'équation (1), s'écrit sous la forme :

$$\Delta_x^2 - \Lambda = \varepsilon^{-4} \Delta_y^2 - \Lambda = \varepsilon^{-4} (\Delta_y^2 - \varepsilon^4 \Lambda),$$

mais on néglige le terme en  $\varepsilon^4 \Lambda$ . D'ailleurs dans les développements que nous allons construire, nous nous limiterons à des termes très grands devant  $\varepsilon^4$ .

### 3.2. Espace fonctionnel $\mathcal{H}$

L'application qui à  $u$  associe  $a(u, u)^{1/2}$  définie en (4), est une norme sur l'espace des fonctions deux fois dérivables sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \omega_1$  qui s'annulent sur le bord  $\partial\omega_1$ . Soit  $\mathcal{H}$  le complété au sens de cette norme de l'espace  $C_0^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \omega_1)$  des fonctions infiniment dérivables à support compact dans  $\mathbb{R}^2 \setminus \omega_1$ .

Soit  $v$  un élément de  $\mathcal{H}$ , on pose :

$$\|v\| = \left[ \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla^2 v|^2 dy + \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v|^2 \frac{|y|^{-2}}{(\ln |y|)^2} dy + \int_{\mathbb{R}^2} |v|^2 \frac{|y|^{-4}}{(\ln |y|)^2} dy \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (26)$$

où on a supposé pour simplifier que  $\omega_1$  contient le disque de centre  $O$  et de rayon 1, ce qui ne restreint pas le problème (si ce n'était pas le cas, on modifierait  $N(v)$  en remplaçant  $\ln |y|$  par  $1 + |\ln |y||$ ).

On a alors la propriété suivante.

LEMME . — Les normes  $\|\cdot\|$  et  $a(\cdot, \cdot)^{1/2}$  sont équivalentes.

Démonstration. — Il suffit de montrer que pour tout  $u$  de  $C_0^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \omega_1)$ , on a une inégalité de la forme,

$$c \|u\| \leq a(u, u)^{1/2} \leq C \|u\|,$$

où  $c$  et  $C$  sont des constantes positives, puis on conclut par complétion. La deuxième de ces inégalités est évidente car  $a$  est une forme bilinéaire continue. Comme on a l'inégalité (cf. [13]),

$$(1 - \nu) \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla^2 u|^2 dy \leq a(u, u),$$

il reste donc à montrer qu'il existe  $K$  telle que :

$$\|u\|^2 \leq K \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla^2 u|^2 dy = K \int_0^\infty \int_0^{2\pi} |\nabla^2 u|^2 \rho d\rho d\theta,$$

$\nabla$  désigne l'opérateur

$$\left( \frac{\partial}{\partial \rho}, \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \right).$$

On notera  $\partial_t$  la dérivée partielle  $\partial/\partial t$ .

On suppose ici que  $u$  est nul si  $\rho = |y|$  est inférieur à 1. On a l'inégalité de Hardy [14],

$$4 \int_1^\infty |\partial_\rho \nabla u|^2 \rho d\rho \geq \int_1^\infty |\rho \ln \rho|^{-2} |\nabla u|^2 \rho d\rho$$

qui permet d'estimer la deuxième intégrale de l'expression (26). Pour la troisième intégrale, on va montrer que :

$$\int_1^\infty |\rho \ln \rho|^{-2} |\partial_\rho u|^2 \rho d\rho \geq \int_1^\infty |\rho^2 \ln \rho|^{-2} |u|^2 \rho d\rho. \quad (27)$$

On a,

$$u(\rho)^2 = \int_1^\rho 2u(t)\partial_t u(t) dt$$

et donc

$$\begin{aligned} & \int_1^\infty |\rho^2 \ln \rho|^{-2} |u|^2 \rho d\rho \leq \\ & \leq 2 \int_1^\infty |\rho^2 \ln \rho|^{-2} \left( \int_1^\rho |u(t)| \cdot |\partial_t u(t)| dt \right) \rho d\rho \\ & \leq 2 \int_1^\infty |u(t)| \cdot |\partial_t u(t)| \left( \int_t^\infty \rho^{-3} |\ln \rho|^{-2} d\rho \right) dt \\ & \leq 2 \int_1^\infty |u(t)| \cdot |\partial_t u(t)| \cdot |\ln t|^{-2} \left( \int_t^\infty \rho^{-3} d\rho \right) dt \\ & \leq \int_1^\infty |u(t)| \cdot |\partial_t u(t)| \cdot |\ln t|^{-2} t^{-2} dt. \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Schwarz, cette dernière intégrale est inférieure à

$$\left( \int_1^\infty |u(t)|^2 t^{-3} |\ln t|^{-2} dt \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \int_1^\infty t^{-1} |\ln t|^{-2} |\partial_t u(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}};$$

ce qui achève de démontrer l'inégalité (27).  $\square$

### 3.3. Solution du problème intérieur

Soit le problème : trouver  $w$  tel que

$$\begin{cases} \Delta^2 w = f & \text{avec } |y|^2 |\ln |y|| f \in L^2(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\omega}_1) \\ w = 0, \quad \partial_n w = 0 & \text{sur } \partial\omega_1, \end{cases} \quad (28)$$

où on a supposé que  $\omega_1$  contient le disque de centre  $O$  et de rayon 1 comme pour (26). Ce problème admet une solution unique dans  $\mathcal{H}$ . Si de plus, la fonction  $f$  est d'ordre au moins 6 par rapport à l'infiniment petit  $|y|^{-1}$  quand  $|y|$  tend vers l'infini, alors cette solution a une expression asymptotique de la forme (cf. [15], [16] et [17]) :

$$w(y) = \alpha_0 + \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 \Phi^3(y) + \alpha_4 \Phi^4(y) + \alpha_5 \Phi^5(y) + O(|y|^{-1}).$$

### 3.4. Description asymptotique des solutions du problème homogène

Soit  $\psi$  une fonction biharmonique n'appartenant pas à  $\mathcal{H}$ , comme  $V^3$ ,  $V^4$ ,  $V^5$  ou  $\Phi^0$ ,  $\Phi^1$ ,  $\Phi^2$ . Le problème (28) admet des solutions  $\zeta$  qui, pour  $y$  suffisamment grand, s'écrivent sous la forme :

$$\zeta(y) = \psi(y) + \zeta_0(y)$$

où  $\zeta_0$  est une fonction de  $\mathcal{H}$ .

La démonstration de cette propriété est analogue à celle développée dans le paragraphe 2.5 en utilisant la fonction  $1 - \chi_d$ .

En particulier, pour la fonction  $f$  égale à zéro, le problème (28) admet les solutions :

$$\begin{aligned} \zeta^m(y) &= \Phi^m(y) - \sum_{i=0}^2 \gamma_{mi} V^i(y) + \\ &+ \sum_{h=3}^5 \gamma_{mh} \Phi^h(y) + O(|y|^{-1}), \quad \text{où } m = 0, 1, 2 \\ \zeta^n(y) &= V^n(y) - \sum_{i=0}^2 \gamma_{ni} V^i(y) + \\ &+ \sum_{h=3}^5 \gamma_{nh} \Phi^h(y) + O(|y|^{-1}), \quad \text{avec } n = 3, 4, 5, \end{aligned} \quad (29)$$

où les constantes  $\gamma_{pq}$  dépendent de la géométrie de  $\omega_1$ .

La matrice :

$$[\gamma_{pq}]_{p,q=0\dots 5} \tag{30}$$

définie par les expressions (29) est symétrique.

La démonstration est analogue à celle de la symétrie de la matrice des  $\Gamma_{pq}$  en utilisant la forme  $q$  définie en (21) sur un cercle de centre  $O$  extérieur à  $\omega_1$ .

### 3.5. Exemple du disque

De même que pour le problème extérieur (§ 2.7), on peut déterminer explicitement les coefficients  $\gamma_{pq}$  dans le cas particulier où  $\omega_1$  est le cercle de centre  $O$  et de rayon 1, en utilisant des développements en séries de Fourier des fonctions biharmoniques :

$$\begin{aligned} w(y) = & a_0 + b_0 \ln \rho + c_0 \rho^2 + d_0 \rho^2 \ln \rho + \\ & + (a_1 \rho + b_1 \rho^{-1} + c_1 \rho^3 + d_1 \rho \ln \rho) (\cos \theta + e_1 \sin \theta) + \\ & + \sum_{m \geq 2} (a_m \rho^m + b_m \rho^{-m} + c_m \rho^{m+2} + d_m \rho^{-m+2}) \times \\ & \times (\cos m\theta + e_m \sin m\theta). \end{aligned}$$

Les conditions sur le bord  $\partial\omega_1$  s'obtiennent en écrivant que  $w$  et sa dérivée par rapport à  $\rho$  s'annulent pour  $\rho$  égal à 1. On obtient ainsi des relations linéaires sur les coefficients  $a_m, b_m, c_m$  et  $d_m$ . Par exemple :

$$a_0 + b_0 = 0 \quad \text{et} \quad b_0 + 2c_0 + d_0 = 0.$$

La fonction  $\zeta^0$  définie par (29) vérifie les conditions précédentes. On peut faire apparaître les premiers termes de son développement de Fourier. Ainsi le terme indépendant de  $\theta$  nous donne :

$$\begin{aligned} a_0 = & -\gamma_{00} + \frac{1}{4\pi\sqrt{2}} (\gamma_{03} + \gamma_{05}), \\ b_0 = & \frac{1}{2} (\gamma_{03} + \gamma_{05}), \\ c_0 = & 0, \\ d_0 = & \frac{1}{8\pi}. \end{aligned}$$

Comportement d'une plaque élastique dont une petite région est rigide

Par les conditions aux limites, on obtient,

$$a_0 = c_0 = 0 \quad \text{et} \quad b_0 = -d_0 = \frac{-1}{8\pi}.$$

De même, l'identification des termes d'ordre 1 dans le développement de Fourier nous fournit

$$\gamma_{01} = \gamma_{02} = 0.$$

Et celle des termes d'ordre 2 :

$$\gamma_{03} = \gamma_{05} \quad \text{et} \quad \gamma_{04} = 0.$$

Et finalement, la première ligne de la matrice des  $\gamma_{pq}$  est donnée par :

$$\left[ \frac{-1}{8\pi} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{-\sqrt{2}}{4} \quad 0 \quad \frac{-\sqrt{2}}{4} \right]$$

On peut procéder de la même manière pour les cinq autres fonctions  $\zeta^m$  ou  $\zeta^n$  et déterminer tous les coefficients  $\gamma_{pq}$ . On obtient facilement :

$$\begin{aligned} \gamma_{11} = \gamma_{22} &= \frac{-1}{4\pi} \\ \gamma_{30} = \gamma_{50} &= \frac{-\sqrt{2}}{4}, \quad \gamma_{33} = \gamma_{55} = -6\pi, \quad \gamma_{35} = \gamma_{53} = 2\pi \\ \gamma_{44} &= -8\pi. \end{aligned}$$

Tous les autres termes sont nuls.

#### 4. Solution du problème (1) et

étude asymptotique de l'impédance lorsque  $\omega_\varepsilon$  est en translation

##### 4.1. Position du problème

On considère ici la plaque définie par le domaine  $\Omega$ , libre d'effort sur le contour  $\partial\Omega$ . L'inclusion rigide  $\omega_\varepsilon$  est animée d'un mouvement de translation parallèlement à  $x_3$ . Le problème (1) s'écrit donc sous la forme :

chercher  $W$  tel que :

$$\begin{cases} \Delta^2 w - \Lambda w = 0 \\ w = 1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\omega_\varepsilon \\ \mathcal{N}w = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (31)$$

où

$$\Lambda = \frac{4\pi^2\phi^2\sigma h}{N}.$$

On suppose que  $\Lambda$  n'est pas valeur propre du problème de Sobolev associé défini en (12).

#### 4.2. Développements extérieur, intérieur et raccordement

On se propose ici d'utiliser une méthode de développements asymptotiques raccordés ([4],[5],[6] et [7]). Dans une région éloignée de  $\omega_\varepsilon$ , on approxime la solution du problème (31) par la solution du problème extérieur associé. Au voisinage de  $\omega_\varepsilon$ , on approxime par la solution du problème intérieur obtenu après la dilatation de rapport  $\varepsilon^{-1}$ . Il reste alors à raccorder ces deux développements dans une région intermédiaire.

Soit  $w_\varepsilon(x)$  la solution du problème extérieur (14). Comme la fonction  $w$  est égale à 1 sur  $\omega_\varepsilon$ , on écrit la solution extérieure sous la forme

$$w_\varepsilon(x) = \eta^0(x) + \dots$$

car la fonction  $\eta^0$  prend la valeur 1 en 0. Or, d'après (15),

$$\eta^0(x) = 1 - \Gamma_{01}x_1 - \Gamma_{02}x_2 + \dots$$

Afin de préparer les conditions de raccordement, on choisit le développement intérieur sous la forme

$$w_i(y) = 1 + \varepsilon w_i^1(y) + \dots$$

Les termes prépondérants dans  $w_i^1$  seront alors linéaires en  $y_1$  et  $y_2$  ce qui conduit à poser d'après (29) :

$$w_i^1(y) = A_1\zeta^1(y) + A_2\zeta^2(y).$$

On obtient alors la forme :

$$w_i(y) = 1 + \varepsilon(-\gamma_{10}A_1 - \gamma_{20}A_2 + b_1y_1 + b_2y_2 + A_1\Phi^1(y) + A_2\Phi^2(y)) + \dots$$

ce qui amène à compléter le développement extérieur en

$$w_\varepsilon(x) = \eta^0(x) + A_1\eta^1(x) + A_2\eta^2(x) + \dots$$

où apparaît le terme

$$(\Gamma_{00} + A_1\Gamma_{10} + A_2\Gamma_{20})\Phi^0(x)$$

ce qui nécessite dans  $w_i$ , la présence de

$$\varepsilon^2(\Gamma_{00} + A_1\Gamma_{10} + A_2\Gamma_{20})\zeta^0(y).$$

Enfin les termes du types  $A_1\zeta^1$  dans  $w_i$  amènent des coefficients  $-\varepsilon A_1\gamma_{10}$  ce qui nécessite des termes en  $-\varepsilon A_1\gamma_{10}\eta^0(x)$  dans  $w_e$ . On posera donc :

$$w_e(x) = \eta^0(x) + A_1\eta^1(x) + A_2\eta^2(x) + \varepsilon(-\gamma_{10}A_1 - \gamma_{20}A_2)\eta^0(x) + \dots \quad (32)$$

et

$$w_i(y) = 1 + \varepsilon(A_1\zeta^1(y) + A_2\zeta^2(y)) + \varepsilon^2(\Gamma_{00} + A_1\Gamma_{10} + A_2\Gamma_{20})\zeta^0(y) + \dots \quad (33)$$

On raccorde en écrivant  $x = \varepsilon y$  et donc

$$\begin{aligned} \Phi^0(x) &= \frac{1}{8\pi} r^2 \ln r = \varepsilon^2 \Phi^0(y) + \frac{\varepsilon^2}{8\pi} \rho^2 \ln \varepsilon \\ \Phi^1(x) &= \frac{-1}{8\pi} (x_1 + 2x_1 \ln r) = \varepsilon \Phi^1(y) - \frac{\varepsilon y_1}{4\pi} \ln \varepsilon \end{aligned} \quad (34)$$

Ainsi les deux développements s'écrivent :

$$\begin{aligned} w_e(x) = 1 + \varepsilon \left\{ -\Gamma_{01}y_1 - \Gamma_{02}y_2 - A_1\Gamma_{11}y_1 - A_1\Gamma_{12}y_2 - A_2\Gamma_{21}y_1 + \right. \\ \left. - A_2\Gamma_{22}y_2 - \gamma_{10}A_1 - \gamma_{20}A_2 + \right. \\ \left. + A_1 \left( \Phi^1(y) - \frac{y_1}{4\pi} \ln \varepsilon \right) + A_2 \left( \Phi^2(y) - \frac{y_2}{4\pi} \ln \varepsilon \right) \right\} + \dots \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} w_i(y) = 1 + \varepsilon \left\{ A_1 [\Phi^1(y) - \gamma_{10} - \gamma_{11}y_1 - \gamma_{12}y_2] + \right. \\ \left. + A_2 [\Phi^2(y) - \gamma_{20} - \gamma_{21}y_1 - \gamma_{22}y_2] \right\} + \dots \end{aligned}$$

En comparant ces deux expressions, on voit que le raccordement est possible si les nombres  $A_1$  et  $A_2$  sont des fonctions de  $\varepsilon$ . On écrira donc les conditions

$$\begin{aligned} \Gamma_{01} + A_1\Gamma_{11} + A_2\Gamma_{21} + A_1 \left( \frac{1}{4\pi} \ln \varepsilon \right) &= A_1\gamma_{11} + A_2\gamma_{21} \\ \Gamma_{02} + A_1\Gamma_{12} + A_2\Gamma_{22} + A_2 \left( \frac{1}{4\pi} \ln \varepsilon \right) &= A_1\gamma_{12} + A_2\gamma_{22}. \end{aligned} \quad (35)$$



Le système linéaire ainsi obtenu peut s'écrire sous forme matricielle

$$\left\{ [\Gamma_{pq}]_{p,q=1,2} - [\gamma_{pq}]_{p,q=1,2} + \frac{1}{4\pi} \ln \varepsilon \mathbf{1} \right\} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \Gamma_{01} \\ \Gamma_{02} \end{bmatrix} \quad (36)$$

où  $\mathbf{1}$  désigne la matrice identité. La matrice entre accolades est inversible pour  $\varepsilon$  suffisamment petit. On pose :

$$\mathcal{M} = - [\Gamma_{pq}]_{p,q=1,2} + [\gamma_{pq}]_{p,q=1,2} - \frac{1}{4\pi} \ln \varepsilon \mathbf{1}. \quad (37)$$

Et on a donc :

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \mathcal{M}^{-1} \begin{bmatrix} \Gamma_{01} \\ \Gamma_{02} \end{bmatrix} \quad (38)$$

ce qui détermine la solution extérieure sous la forme :

$$w_\varepsilon(x) = \eta^0(x) + A_1 \eta^1(x) + A_2 \eta^2(x) + O(\varepsilon)$$

d'après (32).

### 4.3. Calcul des termes d'impédance

La matrice d'impédance définie dans l'introduction associe aux déplacements rigides de  $\omega_\varepsilon$ , les composantes de la résultante et du moment en  $O$  des efforts exercés par la plaque sur  $\omega_\varepsilon$  :

$$\begin{bmatrix} R \\ M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = [I_{ij}]_{i,j=0,1,2} \begin{bmatrix} U \\ \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{bmatrix} \quad (39)$$

Le calcul de ces efforts dans le cas de la translation de  $\omega_\varepsilon$  donne la première colonne de la matrice. La résultante est donnée par :

$$R = N \int_{\partial\omega_\varepsilon} F(w) d\Gamma = -Nq(w, 1) \quad (40)$$

d'après (3), (5) et (21). Donc, en utilisant les résultats (22), (23) et (24), on a :

$$\begin{aligned} R &= -Nq((\Gamma_{00} + A_1 \Gamma_{10} + A_2 \Gamma_{20}) \Phi^0, V^0) + O(\varepsilon) \\ &= -N(\Gamma_{00} + A_1 \Gamma_{10} + A_2 \Gamma_{20}) + O(\varepsilon) \end{aligned}$$

ou

$$\frac{-1}{N} R = \Gamma_{00} + [\Gamma_{10} \quad \Gamma_{20}] \mathcal{M}^{-1} \begin{bmatrix} \Gamma_{01} \\ \Gamma_{02} \end{bmatrix} + O(\varepsilon). \quad (41)$$

Comportement d'une plaque élastique dont une petite région est rigide

La matrice  $\mathcal{M}^{-1}$  peut s'écrire sous la forme :

$$\mathcal{M}^{-1} = \left\{ \frac{-1}{4\pi} \ln \varepsilon \mathbf{1} + \begin{bmatrix} \gamma_{22} - \Gamma_{22} & -\gamma_{12} + \Gamma_{12} \\ -\gamma_{12} + \Gamma_{12} & \gamma_{11} - \Gamma_{11} \end{bmatrix} \right\} \frac{1}{\det \mathcal{M}}, \quad (42)$$

avec :

$$\det \mathcal{M} = \left( \frac{1}{4\pi} \ln \varepsilon \right)^2 - (\gamma_{11} + \gamma_{22} - \Gamma_{11} - \Gamma_{22}) \frac{1}{4\pi} \ln \varepsilon + \det ([\gamma_{pq}] - [\Gamma_{pq}]). \quad (43)$$

Pour  $\varepsilon$  assez petit, la matrice  $\mathcal{M}$  est définie positive.

L'expression asymptotique du terme d'impédance  $I_{00}$  obtenue en (41) s'écrit à l'aide d'une fraction rationnelle en  $\ln \varepsilon$  :

$$\begin{aligned} \frac{-1}{N} I_{00} = & \Gamma_{00} + \frac{1}{\det \mathcal{M}} \left\{ \frac{-1}{4\pi} \ln \varepsilon (\Gamma_{10}^2 + \Gamma_{20}^2) + (\gamma_{22} - \Gamma_{22}) \Gamma_{10}^2 + \right. \\ & \left. + (\gamma_{11} - \Gamma_{11}) \Gamma_{20}^2 - 2(\gamma_{12} - \Gamma_{12}) \Gamma_{10} \Gamma_{20} \right\} + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (44)$$

Et on peut en écrire les premiers termes dans l'échelle des  $(\ln \varepsilon)^{-k}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} I_{00} = & -\Gamma_{00} + (\Gamma_{10}^2 + \Gamma_{20}^2) \frac{4\pi}{\ln \varepsilon} + ((\gamma_{11} - \Gamma_{11}) \Gamma_{10}^2 + \\ & + (\gamma_{22} - \Gamma_{22}) \Gamma_{20}^2 + 2(\gamma_{12} - \Gamma_{12}) \Gamma_{10} \Gamma_{20}) \left( \frac{4\pi}{\ln \varepsilon} \right)^2 + O\left( \frac{1}{(\ln \varepsilon)^3} \right). \end{aligned} \quad (45)$$

Il reste à faire le calcul des moments pour obtenir les autres termes de la première colonne de la matrice d'impédance. Ils sont donnés par :

$$\begin{aligned} M_1 \vec{x}_1 + M_2 \vec{x}_2 = & \\ = & N \left( \int_{\partial\omega_\varepsilon} -M(w) \vec{\tau} \, d\Gamma + \int_{\partial\omega_\varepsilon} (x_1 \vec{x}_1 + x_2 \vec{x}_2) \wedge F(w) \vec{x}_3 \, d\Gamma \right). \end{aligned}$$

D'où

$$M_1 = -Nq(w, x_2) \quad \text{et} \quad M_2 = Nq(w, x_1) \quad (46)$$

d'après (3), (5) et (21). On a donc :

$$\begin{aligned} M_1 = & -Nq(\eta^0(x) + A_1 \eta^1(x) + A_2 \eta^2(x), V^2) + O(\varepsilon) \\ = & -NA_2 + O(\varepsilon) \end{aligned}$$

en utilisant les expressions des  $\eta^j(x)$  et les relations (22), (23) et (24). De même,

$$M_2 = NA_1 + O(\varepsilon).$$

En remplaçant  $A_1$  et  $A_2$  comme précédemment, on obtient des équivalents rationnels en  $\ln \varepsilon$  des termes d'impédance  $I_{10}$  et  $I_{20}$ ,

$$\begin{aligned} I_{10} &= \frac{-N}{\det \mathcal{M}} \left( (\Gamma_{12} - \gamma_{12})\Gamma_{01} + \left( \frac{-1}{4\pi} \ln \varepsilon + \gamma_{11} - \Gamma_{11} \right) \Gamma_{02} \right) + O(\varepsilon) \\ I_{20} &= \frac{N}{\det \mathcal{M}} \left( \left( \frac{-1}{4\pi} \ln \varepsilon + \gamma_{22} - \Gamma_{22} \right) \Gamma_{01} + (\Gamma_{12} - \gamma_{12})\Gamma_{02} \right) + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (47)$$

On a aussi dans l'échelle des  $(\ln \varepsilon)^{-k}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} I_{10} &= \frac{4\pi}{\ln \varepsilon} \Gamma_{02} + \left( \frac{4\pi}{\ln \varepsilon} \right)^2 \times \\ &\quad \times [(\gamma_{12} - \Gamma_{12})\Gamma_{01} + (\gamma_{22} - \Gamma_{22})\Gamma_{02}] + O\left( \frac{1}{(\ln \varepsilon)^3} \right) \\ \frac{1}{N} I_{20} &= -\frac{4\pi}{\ln \varepsilon} \Gamma_{01} - \left( \frac{4\pi}{\ln \varepsilon} \right)^2 \times \\ &\quad \times ((\gamma_{11} - \Gamma_{11})\Gamma_{01} + (\gamma_{12} - \Gamma_{12})\Gamma_{02}) + O\left( \frac{1}{(\ln \varepsilon)^3} \right). \end{aligned} \quad (48)$$

#### 4.4. Exemple du disque

On considère une plaque circulaire de centre  $O$ , de rayon  $R$ . Le bord est libre d'effort et  $\omega_\varepsilon$  est le disque centré en  $O$  et de rayon  $\varepsilon$ . Les notations sont celles du paragraphe 2.4. Le calcul des termes d'impédance montre que  $I_{10}$  et  $I_{20}$  sont nuls par symétrie et que (cf. [3]) :

$$I_{00} = -4\pi N c^3 \varepsilon (\alpha_0 J_1(c\varepsilon) + \beta_0 Y_1(c\varepsilon)).$$

Une étude asymptotique montre que :

$$I_{00} = 8Nc^2 \frac{\Delta(cR)}{f_1(cR) - f_2(cR)} + O\left( \frac{1}{(\ln \varepsilon)^3} \right).$$

En appliquant les expressions (45) et (48) et compte tenu de

$$\Gamma_{10} = \Gamma_{20} = 0 \quad \text{et} \quad \Gamma_{00} = \frac{-8c^2 \Delta(cR)}{f_1(cR) - f_2(cR)},$$

on retrouve le résultat.

## 5. Solution du problème (1) et étude asymptotique de l'impédance lorsque $\omega_\varepsilon$ est en rotation

### 5.1. Position du problème

L'inclusion rigide  $\omega_\varepsilon$  est ici animée d'un mouvement de rotation autour de  $x_1$  et de  $x_2$ . Le problème (1) s'écrit sous la forme suivante :

chercher  $w$  tel que :

$$\begin{cases} \Delta^2 w - \Lambda w = 0 \\ w = \Theta_1 x_2 - \Theta_2 x_1 & \text{sur } \omega_\varepsilon \\ \mathcal{N}w = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (49)$$

d'après (2). On suppose que  $\Lambda$  n'est pas valeur propre du problème de Sobolev.

### 5.2. Construction des développements extérieur et intérieur. Raccordement

D'après (25), on doit avoir :

$$w_i(y) = \varepsilon(\Theta_1 y_2 - \Theta_2 y_1) + \dots$$

ce qui conduit à choisir le développement extérieur sous la forme :

$$w_e(x) = \mathcal{B}_1 \eta^1(x) + \mathcal{B}_2 \eta^2(x) + \dots$$

Les expressions (19) montrent qu'on fait ainsi apparaître  $\Phi^1$  et  $\Phi^2$  dans  $w_e$  ce qui amène à introduire  $\varepsilon\zeta^1(y)$  et  $\varepsilon\zeta^2(y)$  dans  $w_i$ . On pose donc :

$$\begin{aligned} w_e(x) &= \mathcal{B}_1 \eta^1(x) + \mathcal{B}_2 \eta^2(x) + \varepsilon(-\gamma_{10} \mathcal{B}_1 - \gamma_{20} \mathcal{B}_2) \eta^0(x) + \dots \\ w_i(y) &= \varepsilon(\Theta_1 y_2 - \Theta_2 y_1 + \mathcal{B}_1 \zeta^1(y) + \mathcal{B}_2 \zeta^2(y)) + \dots \end{aligned} \quad (50)$$

où on a tenu compte dans  $w_e$  d'une première condition de raccordement.

En écrivant que  $x = \varepsilon y$  et en utilisant (34), on a

$$\begin{aligned} w_e(x) &= \varepsilon \mathcal{B}_1 \left( \Phi^1(y) - \frac{y_1}{4\pi} \ln \varepsilon - \Gamma_{11} y_1 - \Gamma_{12} y_2 \right) + \\ &+ \varepsilon \mathcal{B}_2 \left( \Phi^2(y) - \frac{y_2}{4\pi} \ln \varepsilon - \Gamma_{21} y_1 - \Gamma_{22} y_2 \right) + \\ &+ \varepsilon(-\gamma_{10} \mathcal{B}_1 - \gamma_{20} \mathcal{B}_2) + \dots \end{aligned}$$

et

$$w_i(y) = \varepsilon \left( \Theta_1 y_2 - \Theta_2 y_1 + B_1 (\Phi^1(y) - \gamma_{10} - \gamma_{11} y_1 - \gamma_{12} y_2) + \right. \\ \left. + B_2 (\Phi^2(y) - \gamma_{20} - \gamma_{21} y_1 - \gamma_{22} y_2) \right) + \dots$$

Et on en déduit l'écriture des conditions de raccordement :

$$B_1 \Gamma_{11} + B_2 \Gamma_{21} + B_1 \left( \frac{1}{4\pi} \ln \varepsilon \right) = B_1 \gamma_{11} + B_2 \gamma_{21} + \Theta_2 \\ B_1 \Gamma_{12} + B_2 \Gamma_{22} + B_2 \left( \frac{1}{4\pi} \ln \varepsilon \right) = B_1 \gamma_{12} + B_2 \gamma_{22} - \Theta_1$$

qu'on peut aussi écrire sous la forme matricielle :

$$\left\{ [\Gamma_{pq}]_{p,q=1,2} - [\gamma_{pq}]_{p,q=1,2} + \frac{1}{4\pi} \ln \varepsilon \mathbf{1} \right\} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Theta_2 \\ -\Theta_1 \end{bmatrix}$$

où on retrouve la matrice  $\mathcal{M}$  définie en (37). On a

$$\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \mathcal{M}^{-1} \begin{bmatrix} -\Theta_2 \\ \Theta_1 \end{bmatrix} \quad (51)$$

et la solution s'écrit

$$w_\varepsilon(x) = B_1 \eta^1(x) + B_2 \eta^2(x) + O(\varepsilon).$$

### 5.3. Calcul des termes d'impédance

On calcule les termes d'impédance comme dans la section 4. D'après (40),

$$R = -Nq(w, 1).$$

On obtient

$$R = -N(B_1 \Gamma_{10} + B_2 \Gamma_{20}) + O(\varepsilon).$$

D'où

$$\frac{1}{N} R = -[\Gamma_{10} \quad \Gamma_{20}] \mathcal{M} \begin{bmatrix} -\Theta_2 \\ \Theta_1 \end{bmatrix} + O(\varepsilon).$$

Le calcul est analogue à celui effectué dans la section 4. On obtient les expressions des termes d'impédance  $I_{01}$  et  $I_{02}$  définis par

$$R = I_{01} \Theta_1 + I_{02} \Theta_2$$

sous la forme :

$$I_{01} = \frac{-N}{\det \mathcal{M}} \left\{ (\Gamma_{12} - \gamma_{12})\Gamma_{10} + \left( \frac{-1}{4\pi} \ln \varepsilon + \gamma_{11} - \Gamma_{11} \right) \Gamma_{20} \right\} + O(\varepsilon)$$

$$I_{02} = \frac{N}{\det \mathcal{M}} \left\{ \left( \frac{-1}{4\pi} \ln \varepsilon + \gamma_{22} - \Gamma_{22} \right) \Gamma_{10} + (\Gamma_{12} - \gamma_{12})\Gamma_{20} \right\} + O(\varepsilon),$$

qui sont les mêmes expressions que celles trouvées en (47) ce que permettait de prévoir la symétrie de la matrice d'impédance. On obtient donc les expressions asymptotiques écrites en (48).

Le calcul des moments fournit les derniers termes. D'après (46) :

$$M_1 = -Nq(w, x_2) \quad \text{et} \quad M_2 = Nq(w, x_1).$$

Donc

$$M_1 = -NB_2 + O(\varepsilon)$$

$$M_2 = NB_1 + O(\varepsilon).$$

On obtient

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} &= \\ &= \frac{N}{\det \mathcal{M}} \begin{bmatrix} \mathcal{T}_{11} & \Gamma_{12} - \gamma_{12} \\ \Gamma_{12} - \gamma_{12} & \mathcal{T}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{bmatrix} + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

avec

$$\mathcal{T}_{11} = \frac{1}{4\pi} \ln \varepsilon + (\Gamma_{11} - \gamma_{11}) \quad \text{et} \quad \mathcal{T}_{22} = \frac{1}{4\pi} \ln \varepsilon + (\Gamma_{22} - \gamma_{22})$$

On a donc des équivalents sous forme de fractions rationnelles en  $\ln \varepsilon$  :

$$\begin{aligned} I_{11} &= \frac{N}{\det \mathcal{M}} \left( \frac{1}{4\pi} \ln \varepsilon + \Gamma_{11} - \gamma_{11} \right) + O(\varepsilon) \\ I_{21} = I_{12} &= \frac{N}{\det \mathcal{M}} (\Gamma_{12} - \gamma_{12}) + O(\varepsilon) \\ I_{22} &= \frac{N}{\det \mathcal{M}} \left( \frac{1}{4\pi} \ln \varepsilon + \Gamma_{22} - \gamma_{22} \right) + O(\varepsilon). \end{aligned} \tag{52}$$

Et on en déduit alors les expressions

$$\begin{aligned} I_{11} &= \frac{4\pi N}{\ln \varepsilon} - N(\Gamma_{22} - \gamma_{22}) \left( \frac{4\pi}{\ln \varepsilon} \right)^2 + O\left( \frac{1}{(\ln \varepsilon)^3} \right) \\ I_{12} = I_{21} &= N(\Gamma_{12} - \gamma_{12}) \left( \frac{4\pi}{\ln \varepsilon} \right)^2 + O\left( \frac{1}{(\ln \varepsilon)^3} \right) \\ I_{22} &= \frac{4\pi N}{\ln \varepsilon} - N(\Gamma_{11} - \gamma_{11}) \left( \frac{4\pi}{\ln \varepsilon} \right)^2 + O\left( \frac{1}{(\ln \varepsilon)^3} \right). \end{aligned} \tag{53}$$

#### 5.4. Exemple du disque

Dans le cas du disque déjà envisagé précédemment, le terme d'impédance  $I_{12}$  est nul;  $I_{11}$  et  $I_{22}$  sont égaux et se calculent à l'aide des fonctions de Bessel  $J_2$  et  $Y_2$  [3]. L'étude asymptotique directe fournit l'équivalent en :

$$\frac{4\pi N}{\ln \varepsilon}.$$

### 6. Conclusion

Finalement, par des raccordements de développements extérieur et intérieur, on a construit une expression asymptotique de tous les termes d'impédance et on a obtenu pour chacun d'eux, un équivalent sous forme d'une expression rationnelle en  $\ln \varepsilon$ . Cette approximation des coefficients est à la précision  $O(\varepsilon)$ , et donc est bien meilleure que celle obtenue précédemment. Par exemple, pour  $\varepsilon$  prenant la valeur 0,01, on calcule une valeur approchée avec une erreur de l'ordre de  $10^{-2}$  des termes d'impédance, alors que l'approximation en  $(\ln \varepsilon)^{-1}$  est très médiocre, la valeur de  $\ln \varepsilon$  étant faible. En outre, on a vu que les résultats obtenus conviennent pour des inclusions rigides de forme quelconque.

Si  $\ln \varepsilon$  est grand, on peut alors faire un développement par rapport à l'infiniment petit  $4\pi/\ln \varepsilon$  sous la forme

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_0 + \frac{4\pi}{\ln \varepsilon} \mathcal{J}_1 + \left(\frac{4\pi}{\ln \varepsilon}\right)^2 \mathcal{J}_2 + O\left(\frac{1}{(\ln \varepsilon)^3}\right),$$

avec

$$\mathcal{J}_0 = N \begin{bmatrix} -\Gamma_{00} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{J}_1 = N \begin{bmatrix} \Gamma_{10}^2 + \Gamma_{20}^2 & \Gamma_{02} & -\Gamma_{01} \\ \Gamma_{02} & 1 & 0 \\ -\Gamma_{01} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et

$$\mathcal{J}_2 = N \begin{bmatrix} (\gamma_{\alpha\beta} - \Gamma_{\alpha\beta})\Gamma_{\alpha 0}\Gamma_{\beta 0} & (\gamma_{\alpha 2} - \Gamma_{\alpha 2})\Gamma_{0\alpha} & (\gamma_{\alpha 1} - \Gamma_{\alpha 1})\Gamma_{0\alpha} \\ (\gamma_{\alpha 2} - \Gamma_{\alpha 2})\Gamma_{0\alpha} & (\gamma_{22} - \Gamma_{22}) & -(\gamma_{12} - \Gamma_{12}) \\ (\gamma_{\alpha 1} - \Gamma_{\alpha 1})\Gamma_{0\alpha} & -(\gamma_{12} - \Gamma_{12}) & (\gamma_{11} - \Gamma_{11}) \end{bmatrix}$$

où on somme sur  $\alpha$  et  $\beta$  prenant les valeurs 1 et 2.

On retrouve ainsi en particulier l'équivalent de  $\mathcal{J}$  déjà connu et donné dans l'introduction (cf.[1]), dans lequel  $J_{12}$  est donc nul. On remarque en outre que les coefficients  $J_{ij}$  ne dépendent que des  $\Gamma_{pq}$  et donc sont indépendants du contour de l'inclusion rigide  $\omega_\varepsilon$ .

### Bibliographie

- [1] CAMPBELL (A.) .— *Impédance d'une plaque reliée à un bras rigide suivant un disque de rayon  $\varepsilon$  et comportement quand  $\varepsilon$  tend vers zéro*, C.R. Acad. Sci. Paris 314, série II (1992), pp. 743-748.
- [2] HAGEDORN (P.) et KELKEL (K.) .— *Study of plate impedance*, Rapport E.S.A. (avril 1985).
- [3] CAMPBELL (A.) .— *Matrices d'impédance dans les liaisons de plaques élastiques reliées à des bras rigides*, Thèse de Doctorat, Université Paris VI (mai 1989), pp. 1-190.
- [4] VAN DYKE (M. D.) .— *Perturbation methods in fluid mechanics*, Academic press, New-York (1964).
- [5] MAZ'YA (M. G.), NAZAROV (S. A.) et PLAMENEVSKII (B. A.) .— *The asymptotic behaviour of solutions of elliptic boundary value problems under singular perturbations of the domain*, Inst. Prikl. Tbilis. Univ., Tbilisi (1981), en russe; traduit largement en allemand dans "Asymptotische Theorie Elliptischer Randwertaufgaben in singular gestörten Gebieten" Bd 1 & 2, Berlin, Academic-Verlag (1990-1991).
- [6] LEGUILLON (D.) et SANCHEZ-PALENCIA (E.) .— *Computation of singular solutions in elliptic problems and elasticity*, Masson (1987).
- [7] IL'IN (A. M.) .— *Matching of asymptotic expansions of solutions of boundary value problems*, Nauka, Moskow (1989), en russe; traduit en anglais dans American Mathematical Society, Providence, U.S.A., 1992.
- [8] IL'IN (A. M.) .— *A boundary value problem for a second-order elliptic equation in a domain with a narrow slit, II : Domain with a small cavity*, Mat. Sb. 103, n° 145 (1977), pp. 265-284, en russe; traduit en anglais dans Math. USSR Sb. 32 (1977).
- [9] MAZ'YA (M. G.) NAZAROV (S. A.) ET PLAMENEVSKII (B.A.) .— *Asymptotic expansion of eigenvalues of boundary value problems for the Laplace operator in domains with small holes*, Izv. Akad. Nauk. SSSR. Ser. Mat. 48 (1984), pp. 347-371; traduit en anglais dans Math. USSR Izv 24 (1985).
- [10] DUVAUT (G.) et LIONS (J.-L.) .— *Les inéquations en mécanique et en physique*, Dunod (1972).
- [11] COURANT (R.) et HILBERT (D.) .— *Methods of mathematical physics*, Interscience (1937).
- [12] PETIAU (G.) .— *La théorie des fonctions de Bessel*, Ed. C.N.R.S. (1955).



- [13] REKTORYS (K.) .— *Variational methods in mathematical, science and engineering*, Reidel publishing company (1980).
- [14] HARDY (G. H.), LITTLEWOOD (J. E.) et POLYA (G.) .— *Inequalities*, Cambridge University Press (1951).
- [15] KONDRAT'EV (V. A.) .— *Boundary value problems for elliptic equations in domains with conical or angular points*, Trudy Moskov. Mat. Obshch. **16** (1967); pp. 209-292, en russe; traduit en anglais dans Trans. Moskow Math. Soc. **16** (1967).
- [16] PAZY (A.) .— *Asymptotic expansion of solutions of ordinary differential equations in Hilbert space*, Arch. Rat. Mech. Anal. **24**, n° 2 (1967), pp. 193-218.
- [17] NAZAROV (S. A.) et PLAMENEVSKII (B. A.) .— *Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries*, Nauka, Moskow (1991), en russe; traduit en anglais dans "Walter de Gruyter & Co", Berlin - New-York (1992).