ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

RÉMY DESPLANCHES

K^{ime} diamètre de classes d'espaces de Sobolev sur IR^n associés à des opérateurs de type « Schrödinger »

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 7, nº 3-4 (1985), p. 205-228

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1985_5_7_3-4_205_0>

Annales Faculté des Sciences Toulouse
Vol VII. 1985, P 205 à 228

$K^{ième}$ DIAMETRE DE CLASSES D'ESPACES DE SOBOLEV SUR IR^n ASSOCIES A DES OPERATEURS DE TYPE «SCHRÖDINGER»

Rémy Desplanches (1)

(1) U.E.R. de Mathématiques, Université de Nantes 2, rue de la Houssinière 44072 Nantes Cédex.

Résumé : On étudie ici les propriétés du spectre de l'opérateur de Schrödinger $A_U = -\Delta + U$. Lorsque $U(x) \geqslant 1$, $\lim_{|x| \to +\infty} U(x) = +\infty$, on sait que le spectre de A_U est discret. Soit $N(\lambda)$ le nombre de valeurs propres inférieures ou égales à λ. On connaît le comportement asymptotique de $N(\lambda)$ [8,10]. Nous donnons, dans une première partie, une généralisation de ce résultat sous des conditions plus faibles sur U.

Dans une seconde partie, nous étudions le cas de potentiels qui ne tendent pas vers l'infini dans toutes les directions et nous donnons un encadrement de la suite des $k^{ième}$ diamètres de la boule unité d'espaces de Sobolev associés dans L^2.

Summary : In the paper, we study the spectral properties of Schrödinger operators $A_U = -\Delta + U$. If we assume $U(x) \geqslant 1$, $\lim_{|x| \to +\infty} U(x) = +\infty$ the spectrum of A_U is discrete. Let $N(\lambda)$ the number of eigenvalues less than λ, the asymptotic of $N(\lambda)$ is known [8,10]. We first generalize this result under weaker assumptions on U.

In a second part, we examine cases where the potentials do wo tend to infinity everywhere as $|x| \to +\infty$. We give an estimate of the sequence of nth width of associated Sobolev spaces in L^2.

0. - INTRODUCTION

Considérons l'opérateur de Schrödinger sur IR^n, $A_U = -\Delta + U$, où Δ est l'opérateur de Laplace $\Delta = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ et U un potentiel, fonction définie sur IR^n, que nous supposerons à valeurs réelles, appartenant à $L^2_{loc}(IR^n)$ et bornée inférieurement. L'opérateur A_U est alors essentiellement auto-adjoint sur $C_0^\infty(IR^n)$ (Kato [6]). Notons $\mathscr{A}_U$ le prolongement auto-adjoint de A_U, $D(\mathscr{A}_U)$ le domaine de $\mathscr{A}_U$ muni de la norme du graphe. Dans le cas où $\lim_{|x|\to+\infty} U(x) = +\infty [(\alpha)]$ on sait que l'injection de $D(\mathscr{A}_U)$ dans $L^2(IR^n)$ est compacte et que le spectre de $\mathscr{A}_U$ est alors constitué d'une suite croissante $(\lambda_j)_{j\geqslant 0}$ de valeurs propres, de multiplicité finie, admettant $+\infty$, comme seul point d'accumulation. Avec des conditions supplémentaires de régularité sur U, on peut donner le comportement asumptotique de la suite des valeurs propres (Cf [4], [10], [13]). Soit $N(\lambda) = \sum_{\lambda_j \leqslant \lambda} 1$, la fonction de répartition de la suite $(\lambda_j)_{j\geqslant 0}$. Dans [10], par exemple, G.V. Rozenbljum avec des conditions assez faibles sur U, montre que :

$$(\beta) \qquad N(\lambda) \sim \gamma_n \int (\lambda - U(x))_+^{n/2}\, dx \quad \text{où} \quad \gamma_n = (2\sqrt{\pi})^{-n}\, \Gamma(\frac{n}{2}+1)^{-1}.$$

Ce résultat a été généralisé par Pham The Laï dans [8] a des opérateurs $\mathscr{A} = \mathscr{A}_0 + U$ où $\mathscr{A}_0$ est un opérateur elliptique à coefficients constants d'ordre 2m. Ce cas sera l'objet du paragraphe II, où nous donnons (avec des conditions plus faibles sur U) une autre généralisation de (β).

Mais la condition (α) n'est pas nécessaire pour que l'injection de $D(\mathscr{A}_U)$ dans $L^2(IR^n)$ soit compacte (Cf [3]). Citons comme exemple [1], où la compacité de l'injection est établie avec la condition $\int_{|x-y|<1} \frac{1}{U(y)}\, dy \to 0$ pour $|x| \to +\infty$. Comme autre exemple, on verra que, pour $U(x,y) = |x|^{2\sigma} |y|^{2\sigma'}$, $x \in IR^p$, $y \in IR^q$ avec $n = p+q$, $\sigma > 0$, $\sigma' > 0$, l'injection de l'espace associé $\{u \in H^1(IR^n),\ U^{1/2} u \in L^2(IR^n)\}$ dans $L^2(IR^n)$ est compacte. D'autre part il est clair que, pour un tel potentiel la formule (β) n'a plus de sens. L'objet du § III est l'étude de ce type de potentiel. Nous donnerons le comportement de la suite des $k^{\text{ième}}$ diamètres, au sens de Kolmogorov, de la boule unité de l'espace associé dans $L^2(IR^n)$.

Notons que parallèlement, Robert [9] a étudié le cas où le potentiel U s'écrit $U(x,y) = |x|^{2l}\ (1+y^2)^k$, $(x,y) \in IR^2$, k et l entiers > 0. Par la méthode du noyau. Nous retrouvons ici, en particulier ses résultats, ainsi que ceux de Simon [12].

Enfin nous terminons par un autre exemple de potentiel s'annulant sur une variété non bornée. Il s'agit du potentiel [11]

$$U(x,y) = [\sum_{i<j} (x_i\, y_j - x_j\, y_i)^2]^{1/2}, \quad x \in IR^q,\ y \in IR^q.$$

Nous donnons ici une autre démonstration du résultat de Simon que nous complétons par une étude des $K^{\text{ième}}$ diamètres de la boule unité de l'espace associé dans $L^2(\mathbb{R}^{2q})$.

A notre connaissance c'est le premier exemple de l'estimation de $k^{\text{ième}}$ diamètre d'espace de Sobolev associé à un potentiel U ne tendant pas vers $+\infty$ dans toutes les directions. Nous espérons pouvoir étendre ces résultats à une classe plus large de potentiels, pouvant s'annuler sur une variété non bornée, contenant en particulier des potentiels polynomiaux.

I. - DEFINITIONS

1.1. $K^{\text{ième}}$ diamètre dans un espace vectoriel normé.

Soit A une partie d'un espace normé E, on appelle $k^{\text{ième}}$ diamètre de A dans E le nombre

$$d_k(A,E) = \inf_{E_k \in \mathcal{G}_k} \; \sup_{x \in A} \; \inf_{y \in E_k} \| x-y \|_E$$

où $\mathcal{G}_k$ désigne l'ensemble des sous-espaces de dimension k de E. On a les propriétés suivantes :

(i) $d_0(A,E)$ est le rayon de la plus petite boule centrée à l'origine contenant A.

(ii) $d_k(\alpha A,E) = \alpha\, d_k(A,E) \quad (\alpha \geq 0)$

(iii) $A \subset B \Rightarrow d_k(A,E) \leq d_k(B,E)$

(iv) La suite d_k est décroissante. De plus, pour que $d_k \to 0$ lorsque $k \to +\infty$, il faut et il suffit que A soit précompact.

Un résultat important est le théorème de Krein ([7] par exemple).

Soit E_{k+1} un sous-espace de dimension k+1 de E et SE_{k+1} la boule unité de E_{k+1}. Alors

$$d_k(SE_{k+1},E) = 1.$$

Nous renvoyons à C. Goulaouic [5] pour une étude complète.

1.2. Formule du mini-max.

Le lien entre la notion de $n^{\text{ième}}$ diamètre et la théorie spectrale est donnée par la formule du mini-max de Courant-Fischer.

Considérons la situation variationnelle (G,H,a), où G et H sont deux espaces de Hilbert séparables, G étant un sous-espace dense dans H, l'injection de G dans H étant compacte, et, a est une forme sesquilinéaire hermitienne, positive, continue et coercive sur G.

On note A, l'opérateur non borné, de domaine D(A), dans H, associé à (G,H,a) par le lemme de Lax-Milgram. A est auto-adjoint positif. Son spectre est constitué d'une suite de valeurs propres $(\lambda_j)_{j\geqslant 0}$, réelles positives, de multiplicité finie, tendant vers $+\infty$. Il existe alors une base hilbertienne $(\varphi_j)_{j\geqslant 0}$ de H, constituée de valeurs propres de A et formant un système orthogonal dans G pour a telle que

$$G=\left\{u=\sum_{j=0}^{\infty} u_j\,\varphi_j\ ;\ \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j\,|u_j|^2=a(u,u)<+\infty\right\}$$

Si $S_a\,G=\{u\in G\ ;\ a(u,u)\leqslant 1\}$,

On montre que

$$d_k(S_a\,G,H)=\lambda_k^{-1/2}.$$

II. - UNE CLASSE D'ESPACES DE SOBOLEV A POIDS SUR $\mathbb{R}^n$

Rappelons d'abord les résultats obtenus dans [8] sur le comportement asymptotique des valeurs propres de l'opérateur :

$$\mathscr{A}=\mathscr{A}_0+U$$

dans $\mathbb{R}^n$, où $\mathscr{A}_0$ est un opérateur différentiel d'ordre 2m, à coefficients constants, formellement auto-adjoint et où U est un potentiel tel que

$$(1)\qquad U(x)\geqslant 1 \qquad \lim_{|x|\to+\infty} U(x)=+\infty \qquad U\in L^\infty_{loc}$$

Posons $\mathscr{A}_0(D)=\sum\limits_{\substack{|\alpha|\leqslant m\\|\beta|\leqslant m}} a_{\alpha\beta}\,D^{\alpha+\beta}$.

On suppose que les coefficients vérifient $a_{\alpha\beta}=\overline{a_{\alpha\beta}}$ pour tout α,β et que $\mathscr{A}_0(D)$ vérifie la condition d'ellipticité suivante.

(2) Il existe une constante $E > 0$ telle que, pour tout système de nombres complexes $\tau = (\tau_\alpha)$, $|\alpha| = m$ nous avons

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}\tau_\alpha\bar{\tau}_\beta \geqslant E \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} |\tau_\alpha|$$

$H^m = H^m(\mathbb{R}^n)$ désignant l'espace de Sobolev usuel et posant $V = U^{1/2}$ notons :

$$H_V^m = \{u \in H^m \,;\, V u \in L^2\}$$

H_V^m est un espace de Hilbert muni de la norme naturelle

$$\| u \|^2_{H_V^m} = \| u \|^2_{H^m} + \| V u \|^2_{L^2}$$

Considérons alors la forme intégro-différentielle

$$a_V(u,v) = a_0(u,v) + \int V^2\, u\, \bar{v}\, dx$$

où

$$a_0(u,v) = \sum_{\substack{|\alpha|\leqslant m\\ |\beta|\leqslant m}} \int a_{\alpha\beta}\, D^\alpha u \overline{D^\beta v}\, dx \quad \text{est une forme hermitienne sur } H^m.$$

$a_V(u,v)$ est continue sur $H_V^m \times H_V^m$ et puisque V est réel $a_V(u,v)$ est hermitienne sur H_V^m. Elle est de plus coercive.

Soit A l'opérateur non borné dans L_2, auto-adjoint, engendré par le triplet (a_V, H_V^m, L^2). A est une réalisation auto-adjointe de l'opérateur différentiel

$$\mathcal{A}(\,.\,, D) = \mathcal{A}_0(D) + U(\,.\,)$$

Le spectre de A est réel. Soit (λ_j) la suite des valeurs propres de A, rangées dans l'ordre croissant, répétées suivant la multiplicité. Notons

$$N(\lambda, A) = \sum_{j\,,\ \lambda_j \leqslant \lambda} 1$$

le nombre de valeurs propres λ_j de A inférieures ou égales à λ. Alors, avec les hypothèses supplémentaires sur $U(x)$, (voir [10]).

(3) Il existe une constante $C > 0$ telle que :
$\sigma(2\lambda, U) \leqslant C\ \sigma(\lambda, U)$ pour λ suffisamment grand où $\sigma(\lambda, U) = \text{mes}\ \{x \,;\, U(x) < \lambda\}$,

(4) Il existe une constante $C > 0$ telle que :
$U(y) \leqslant C\, U(x)$ presque partout, lorsque $|x-y| \leqslant 1$,

(5) Il existe une fonction continue $\eta(t) \geqslant 0$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $\eta(0) = 0$ et un réel $\beta \in [0,1[$ tels que

$$\int_{\substack{|x-y|\leqslant 1\\ |\alpha+z-y|\leqslant 1}} |U(x+z) - U(x)|\,dx \leqslant \eta(|z|)\ |z|^{\beta}\, U(y)^{1+\frac{\beta}{2m}}$$

pour tout $y, z \in \mathbb{R}^n$, $|z| \leqslant 1$, on a

$$N(\lambda,A) \sim \ell\, \phi(\lambda,U) \qquad \lambda \to +\infty$$

où $\phi(\lambda,U)$ est la fonction

$$\phi(\lambda,U) = \int (\lambda - U(x))_+^{\frac{m}{2m}}\, dx \quad (f_+ \text{ désignant la partie positive de } f)$$

et ℓ une constante qui dépend du symbole principal $\mathscr{A}'(\xi)$ de $\mathscr{A}$.

Nous allons dans ce paragraphe étudier le comportement asymptotique des $k^{\text{ième}}$ diamètres d'une classe plus générale d'espaces du type ci-dessus.

2.1. Les espaces $W_V^{m,p}(\mathbb{R}^n)$. Enoncé du résultat

Soit $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ vérifiant

(1) $$V(x) \geqslant 1, \quad V(x) \in L^{\infty}_{loc}, \quad \lim_{|x|\to\infty} V(x) = +\infty$$

On suppose de plus que V vérifie seulement les hypothèses (3) et (4) ci-dessus

(3) $\sigma(2\lambda,V) \leqslant C\, \sigma(\lambda,V)$ pour λ suffisamment grand

(4) $V(y) \leqslant C\, V(x)$ presque partout, lorsque $|x-y| \leqslant 1$.

Soit m entier $\geqslant 1$, p réel > 1, on pose

$$W_V^{m,p}(\mathbb{R}) = W_V^{m,p} = \left\{u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n),\ V^{1-\frac{|\alpha|}{m}} D^{\alpha}u \in L^p(\mathbb{R}^n),\ |\alpha| \leqslant m\right\}$$

$W_V^{m,p}$ est un espace de Banach muni de la norme

$$\| u \|^p_{W_V^{m,p}} = \sum_{|\alpha|\leqslant m} \| V^{1-\frac{|\alpha|}{m}} D^{\alpha} u \|^p_{L^p}$$

PROPOSITION 2.1.1. *L'injection* $W_V^{m,p} \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$ *est compacte.*

Démonstration. On vérifie d'abord que $W_V^{m,p}$ est réflexif. Puis on montre comme dans [8], lemme 1.1., que l'image de toute suite bornée de $W_V^{m,p}$ contient une sous-suite qui converge fortement dans L^p.

On pose

$$N(\lambda) = \sum_{k\,:\,d_k^{-1} \leqslant \lambda} 1 \quad , \lambda > 1,$$

où

$$d_k = d_k(S\, W_V^{m,p}, L^p)$$

$S\, W_V^{m,p}$ désignant la boule unité de $W_V^{m,p}$.

$N(\lambda)$ est donc le nombre de $k^{ième}$ diamètres supérieurs ou égaux à $\frac{1}{\lambda}$. Puis

$$\phi(\lambda,V) = \int (\lambda - V(x))_+^{n/m}\, dx.$$

Alors, on a le

THEOREME 2.1.2. *Sous les hypothèses (1), (3), (4) sur le potentiel* V, *on a :*

$$N(\lambda) \approx \phi(\lambda,V)$$

($\approx$ *signifiant qu'il existe des constantes* C_1 *et* $C_2 > 0$ *telles que*

$$C_2\, \phi(\lambda,V) \leqslant N(\lambda) \leqslant C_1\, \phi(\lambda,V) \quad \textit{(pour } \lambda \textit{ suffisamment grand)).}$$

Note : Dans la suite les constantes issues des majorations seront souvent notées par la lettre générale C ; par conséquent différentes C se suivent sans être nécessairement égales.

2.2. Approximation polynomiale

On considère un réseau laticiel Ξ de cubes Q (de $\mathbb{R}^n$), de coté $\epsilon^{1/m}$, $0 < \epsilon < 1$. Pour un cube arbitraire Q, de centre x_Q, nous notons

$$V_Q^+ = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in Q} V(x)\,, \quad V_Q^- = \operatorname*{ess\,inf}_{x \in Q} V(x)$$

Soit $D_\epsilon = \{Q\,;\, V_Q^- \geqslant \frac{1}{\epsilon}\}$. On a :

LEMME 2.2.1. *Pour* $u \in W_V^{m,p}$, *il existe* $P_\Xi u$, *fonction de* $L^p(\mathbb{R}^n)$, *polynomiale dans chaque cube* Q, *de degré* $< m$ *telle que*

$$\| u - P_\Xi u \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\, \epsilon \, \| u \|_{W_V^{m,p}}$$

C *étant une constante* > 0, *indépendante de* ϵ *et de* u.

Démonstration. Soit D le sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$, constitué par les cubes Q de D_ϵ. Sur D, on approche u par 0. On a

$$\int_D |u|^p \, dx \leqslant \int_D \epsilon^p V^p |u|^p \, dx = \epsilon^p \int_D V^p |u|^p \, dx.$$

Sur chaque cube $Q \notin D_\epsilon$, on approche $u \in W_V^{m,p}$ par un polynome $P_Q u$ de degré $\leqslant m-1$ tel que :

$$\int_Q D^\alpha (u - P_Q u) dx = 0 \qquad 0 \leqslant |\alpha| \leqslant m-1$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré (généralisé) [Cf [2] par exemple] on obtient :

$$\int_Q |u - P_Q u|^p \, dx \leqslant C^p \epsilon^p \sum_{|\alpha|=m} \int_Q |D^\alpha u|^p \, dx$$

où C est une constante qui ne dépend que de m et de n.

Alors si on note P_Ξ l'opération qui à $u \in W_V^{m,p}$ associe 0 sur D et $P_Q u$ sur chaque cube $Q \notin D_\epsilon$ on obtient bien une fonction $P_\Xi u$, polynomiale dans chaque cube telle que

$$\| u - P_\Xi u \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant C \, \epsilon \, \| u \|_{W_V^{m,p}}$$

Doù le lemme.

On approche ainsi, à ϵ près. Tout élément de la boule unité de $W_V^{m,p}$, par un élément d'un sous-espace vectoriel dont la dimension $k(\epsilon)$ est une fonction de ϵ, n, m, V. Considérons maintenant $E = \{Q : \bar{V}_Q < \frac{1}{\epsilon}\}$.

Soit $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, à support dans le cube $\delta = ([-1,1])^n$. Soit T_Q la composée d'une translation et d'un homothétie de telle manière que T_Q applique Q sur δ. Notons $\varphi_Q = \varphi \circ T_Q$. On a donc $\varphi_Q(x) = \varphi\left(\frac{1}{\epsilon^{1/m}}(x - x_Q)\right)$ où x_Q est le centre de Q.

Soit E_Ξ l'espace vectoriel engendré par les fonction φ_Q, $Q \in E$. Il est clair que :

$$E_\Xi \subset W_V^{m,p} \quad \text{et} \quad \dim E_\Xi = k(\epsilon).$$

On munit E_Ξ de la norme induite par $L^p(\mathbb{R}^n)$.

LEMME 2.2.2. *Soit* $S\,E_{\Xi}$ *la boule unité de* E_{Ξ}. *Alors*

$$S\,E_{\Xi} \subset B\,\epsilon^{-1}\,S\,W_V^{m,p}$$

avec $B > 0$, *indépendante de* ϵ.

Démonstration. Il suffit de prouver que, si $f_\gamma = \sum_{Q \in E} \gamma_Q \varphi_Q$

$$\| f_\gamma \|_{W_V^{m,p}} \leqslant B\,\epsilon^{-1}\,\| f_\gamma \|_{L^p(\mathrm{IR}^n)}$$

où B est une constante > 0 indépendante de ϵ.

Or

$$\| f_\gamma \|^p_{L^p(\mathrm{IR}^n)} = \int_{\mathrm{IR}^n} |\sum_Q \gamma_Q \varphi_Q(x)|^p\,dx = \sum_Q |\gamma_Q|^p \int_Q |\varphi_Q(x)|^p\,dx$$

$$= \sum_Q |\gamma_Q|^p\,\epsilon^{n/m} \int_\delta |\varphi(y)|^p\,dx = C_1 \sum_Q |\gamma_Q|^p\,\epsilon^{n/m}$$

D'autre part :

$$\| f_\gamma \|^p_{W_V^{m,p}} = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \int_{\mathrm{IR}^n} V^{(1-\frac{|\alpha|}{m})p}(x)\;|\sum_Q \gamma_Q\,D^\alpha \varphi_Q(x)|^p\,dx$$

$$= \sum_{|\alpha| \leqslant m} \sum_Q |\gamma_Q|^p \int_Q V^{(1-\frac{|\alpha|}{m})p}(x)\;|D^\alpha \varphi_Q(x)|^p\,dx$$

Mais sur chaque cube Q de E, $\bar{V}_q < \frac{1}{\epsilon}$, et donc compte tenu de l'hypothèse (4) sur V, on a $V(x) < \frac{c}{\epsilon}$ presque partout sur Q. Alors :

$$\| f_\gamma \|^p_{W_V^{m,p}} \leqslant C \sum_{|\alpha| \leqslant m} \sum_Q |\gamma_Q|^p \frac{1}{\epsilon^{(1-\frac{|\alpha|}{m})p}} \int_Q |D^\alpha \varphi_Q(x)|^p\,dx$$

$$\leqslant C \sum_{|\alpha| \leqslant m} \sum_Q |\gamma_Q|^p \frac{1}{\epsilon^{(1-\frac{|\alpha|}{m})p}} \int_Q \frac{1}{\epsilon^{\frac{|\alpha|}{m}p}}\;|(D^\alpha \varphi)_Q(x)|^p\,dx$$

$$\leqslant C \sum_{|\alpha| \leqslant m} \sum_Q |\gamma_Q|^p \frac{1}{\epsilon^p} \int_\Delta \epsilon^{n/m}\,|D^\alpha \varphi|^p\,dx$$

$$\leqslant C \sum_Q |\gamma_Q|^p\,\epsilon^{n/m}\,\epsilon^{-p} \sum_{|\alpha| \leqslant m} \int_\Delta |D^\alpha \varphi|^p\,dx$$

Finalement, il existe $B^p > 0$ telle que :

$$\| f_\gamma \|^p_{W^{m,p}_V} \leqslant B^p \, \epsilon^{-p} \, \| f_\gamma \|^p_{L^p(IR^1)} .$$

D'où le résultat.

$k(\epsilon)$ étant le nombre des cubes de E, nous donnons maintenant une estimation de $k(\epsilon)$ en fonction de ϵ, puis de $\phi(\frac{1}{\epsilon}, V)$. Nous établissons auparavant une propriété de la fonction $\phi(\lambda,V)$.

LEMME 2.2. *Soit* $a > 0$, *alors il existe une constante* $b = b(a) > 0$ telle que :

$$\phi(a\lambda,V) \leqslant b\, \phi(\lambda,V)$$

pour λ *suffisamment grand.*

Démonstration. Tout d'abord, il est clair que la condition (3) entraîne :

$$\sigma(a\lambda,V) \leqslant d\, \sigma(\frac{\lambda}{2},V)$$

la constante d étant obtenue par itération de la condition (3). De l'inégalité $a\lambda - V \leqslant a\lambda$, on déduit $(a\lambda - V)_+ \leqslant a\lambda\, I_{[V<a\lambda]}$ où $I_{[V<a\lambda]}$ est la fonction caractéristique de $\{x : V(x) < a\lambda\}$. D'où :

$$\int (a\lambda - V)_+^{n/m}\, dx \leqslant a^{n/m}\, \lambda^{n/m}\, \sigma(a\lambda,V) \leqslant d\, 2^{n/m}\, a^{n/m}\, (\frac{\lambda}{2})^{n/m}\, \sigma(\frac{\lambda}{2},V)$$

Or, pour $V \leqslant \frac{\lambda}{2}$, on a $\lambda - V \geqslant \frac{\lambda}{2}$ et donc

$$(\frac{\lambda}{2})^{n/m}\, \sigma(\frac{\lambda}{2},V) \leqslant \int (\lambda - V(x))_+^{n/m}\, dx.$$

D'où le résultat.

LEMME 2.2.3.

$$k(\epsilon) \approx \frac{1}{\epsilon^{n/m}} \int_{V(x) < \frac{1}{\epsilon}} dx.$$

Démonstration. Soit $E' = \{Q \in E \,;\, V_Q^+ \geqslant \frac{1}{\epsilon}\}$. V vérifiant l'hypothèse (4), on en déduit pour chaque $Q \in E'$, $\frac{1}{C\epsilon} \leqslant V(x)$ presque partout, $\forall\, x \in Q$.

Alors, si $h(\epsilon)$ est le nombre de cubes de E', on a :

$$h(\epsilon)\epsilon^{n/m} \leqslant k(\epsilon)\, \epsilon^{n/m} - \sigma(\frac{1}{C\epsilon}, V)$$

soit $\dfrac{h(\epsilon)}{k(\epsilon)} \leqslant 1 - \dfrac{\sigma(\frac{1}{C\epsilon}, V)}{k(\epsilon)\epsilon^{n/m}}$.

Mais, pour tout $Q \in E$, $V_Q^+ < \dfrac{C}{\epsilon}$, puisque $V_Q^- < \dfrac{1}{\epsilon}$, et donc

$$k(\epsilon)\,\epsilon^{n/m} \leqslant \sigma(\frac{C}{\epsilon}, V)$$

De plus, utilisant l'hypothèse (3), on peut trouver des constantes a_1, a_2 telles que

$$\frac{1}{a_2}\,\sigma(\frac{1}{\epsilon}, V) \leqslant \sigma(\frac{1}{C\epsilon}, V),\quad \sigma(\frac{C}{\epsilon}, V) \leqslant a_2\,\sigma(\frac{1}{\epsilon}, V)$$

et donc

$$\frac{1}{a_1\,a_2} \leqslant \frac{\sigma(\frac{1}{C\epsilon}, V)}{\sigma(\frac{C}{\epsilon}, V)}$$

On en déduit

$$\frac{1}{a_1\,a_2} \leqslant 1 - \frac{h(\epsilon)}{k(\epsilon)}$$

D'autre part il est clair que :

$$\epsilon^{n/m}(k(\epsilon) - h(\epsilon)) \leqslant \int_{V(x) < \frac{1}{\epsilon}} dx \leqslant \epsilon^{n/m}\,k(\epsilon)$$

Ce qui donne

$$1 \leqslant \frac{n(\epsilon)}{\frac{1}{\epsilon^{n/m}}\int_{V(x)<\frac{1}{\epsilon}} dx} \leqslant \frac{1}{1 - \frac{h(\epsilon)}{k(\epsilon)}} \leqslant a_1\,a_2\,.$$

LEMME 2.2.4.

$$\frac{1}{\epsilon^{n/m}}\int_{V(x) < \frac{1}{\epsilon}} dx \approx \phi(\frac{1}{\epsilon}, V)$$

Démonstration. Notons $I_{[V<\frac{1}{\epsilon}]}$ la fonction caractéristique de $\{x\ ;\ V(x) < \frac{1}{\epsilon}\}$. On a :

$$\frac{1}{\epsilon} I_{[V<\frac{1}{\epsilon}]} \leqslant (\frac{2}{\epsilon} - V)_+$$

D'où

$$\frac{1}{\epsilon^{n/m}}\int_{V(x) < \frac{1}{\epsilon}} dx \leqslant \int (\frac{2}{\epsilon} - V)_+^{n/m}\,dx$$

Ce qui donne en utilisant le lemme 2.2.2.

$$\frac{1}{\epsilon^{n/m}} \int_{V(x)<\frac{1}{\epsilon}} dx \leqslant C\,\phi(\frac{1}{\epsilon}, V)$$

Inversement l'inégalité

$$(\frac{1}{\epsilon} - V(x))_+ \leqslant \frac{1}{\epsilon} I_{[V<\frac{1}{\epsilon}]}$$

entraîne

$$\phi(\frac{1}{\epsilon}, V) \leqslant \frac{1}{\epsilon^{n/m}} \int_{V(x)<\frac{1}{\epsilon}} dx.$$

2.3. Démonstration du théorème 2.1.2.

Posons $k(\epsilon) = l(\epsilon) + 1$, $d_{k(\epsilon)}(S\, W_V^{m,p}, L^p(\mathrm{IR})) = d_{k(\epsilon)}$.

D'après le lemme 2.2.1., il existe une constante C telle que :

$$d_{k(\epsilon)} \leqslant C\epsilon,$$

d'où

$$d_k(\frac{\epsilon}{C}) \leqslant \epsilon$$

Prenons $\epsilon = \frac{1}{\lambda}$, alors les lemmes 2.2.3. et 2.2.4. donnent :

$$N(\lambda) \leqslant k(\frac{\epsilon}{C}) \leqslant A \int (\frac{C}{\epsilon} - V)_+^{n/m} dx.$$

Et, en utilisant le lemme 2.2.2.

$$N(\lambda) \leqslant C_1 \int (\frac{1}{\epsilon} - V)_+^{n/m} dx = C_1\, \phi(\lambda, V).$$

La minoration de $d_{l(\epsilon)}$ s'obtient en utilisant le théorème de Krein, les propriétés des $k^{\text{ièmes}}$ diamètres [Cf. § 1.1] et le lemme 2.2. Ce qui donne $d_{l(\epsilon)} \geqslant B\,\epsilon$, d'où $d_{l(\frac{\epsilon}{B})} \geqslant \epsilon$.

Et pour $\epsilon = \frac{1}{\lambda}$, d'après les lemmes 2.2.3 et 2.2.4., on a donc

$$N(\lambda) \geqslant l(\frac{\epsilon}{B}) \geqslant C \int (\frac{B}{\epsilon} - V)_+^{n/m} dx$$

D'où en utilisant le lemme 2.2.

$$N(\lambda) \geqslant C_2 \int (\frac{1}{\epsilon} - V)_+^{n/m} dx = C_2\, \phi(\lambda, V).$$

Ceci termine la preuve du théorème.

III. - OPERATEURS DE SCHRODINGER A POTENTIEL «DEGENERE»

Dans ce paragraphe nous abordons le cas de potentiels qui ne tendent pas vers l'infini dans toutes les directions.

Nous considérons les potentiels définis sur IR^n par :

$$U(x,y) = |x|^{2\sigma} |y|^{2\sigma'}, \quad x \in IR^p \; y \in IR^q, \quad p+q=n \quad (p,q \geqslant 1)$$

avec σ, σ' réels > 0.

Nous traiterons d'abord le cas n = 2. Puis nous terminerons par l'exemple d'un potentiel proposé par Feynman

$$U(x,y) = |x \wedge y|, \quad x \in IR^p, \quad y \in IR^p, \quad p \geqslant 2.$$

On considère donc, comme dans le § II, pour chacun de ces potentiels, l'espace de Hilbert :

$$H^1_V = H^1_V(IR^n) = \{ u \in H^1(IR^n), V\,u \in L^2(IR^n) \} \text{ où } V = U^{1/2}$$

et on étudie le $k^{ième}$ diamètre de la boule unité de H^1_V dans L. On établit d'abord une propriété des espaces H^1_V.

PROPOSITION 3.0. *$\mathscr{D}(IR^n)$ est dense dans* H^1_V.

Démonstration. Par troncature et régularisation. Soit $\Psi \in \mathscr{D}(IR^n)$ telle que $\Psi(x) = 1$ si $|x| \leqslant 1$, $\Psi(x) = 0$ si $|x| \geqslant 2$. Posons $\Psi_j(x) = \Psi(\frac{x}{j})$, $j \in IN^*$. Si $u \in H^1(IR^n)$, on sait que $\Psi_j\, u \to u$ $(j \to +\infty)$ dans $H^1(IR^n)$. De plus $V\,\Psi_j\, u \to V\,u$ (simplement) et par hypothèse $V\,u \in L^2$ avec $|V\,\Psi_j\, u| \leqslant |Vu|$ D'après le théorème de la convergence dominée, $V\,\Psi_j\, u \to V\,u$ dans $L^2(IR^n)$. On en déduit que $\Psi_j\, u$ converge vers u dans H^1_V. Donc l'ensemble des fonctions à support compact est dense dans H^1_V. Soit alors $u \in H^1_V$ à support compact. Par régularisation, on obtient une suite $(u_i)_{i \in N}$. $u_i \in \mathscr{D}(IR^n)$ qui converge vers u pour la topologie de $H^1(IR^n)$. Soit $B(0,1)$ la boule unité fermée de IR^n.

On a, $\text{supp } |u_i - u| \subset \text{supp } u + B(0,1) = K$, avec K compact. Alors, il existe une constante $C > 0$, $C = \sup_{x \in K} V_{(x)}$, (V continue) telle que

$$\int_{IR^n} |V\,u_i - V\,u|^2\, dx \leqslant C \int_{IR^n} |u_i - u|^2\, dx.$$

D'où $(u_i)_{i \in IN}$ converge vers u dans H^1_V.

3.1. Espace $H^1_{\sigma,\sigma'}$

Soit $V(x,y) = |x|^\sigma \, |y|^{\sigma'}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. $\sigma > 0$, $\sigma' > 0$. L'espace H^1_V sera noté $H^1_{\sigma,\sigma'}$.
On a le :

THEOREME 3.1.

a) L'injection $H^1_{\sigma,\sigma'} \hookrightarrow L^2$ *est compacte*

b) Soit $S\,H^1_{\sigma,\sigma'}$ *la boule unité de* $H^1_{\sigma,\sigma'}$, $d_k = d_k(S\,H^1_{\sigma,\sigma'}, L^2)$.

Alors

1) si $\sigma' < \sigma$ $\quad d_k \approx (\frac{1}{k})^{\sigma'/(1+\sigma+\sigma')}$

2) si $\sigma = \sigma'$ $\quad d_k \approx (\frac{\log k}{k})^{\sigma/(1+2\sigma)}$

3) si $\sigma' > \sigma$ $\quad d_k \approx (\frac{1}{k})^{\sigma/(1+\sigma+\sigma')}$.

3.1.1. Démonstration de la partie a) du théorème.

Elle est basée sur la proposition suivante :

PROPOSITION 3.1.1. *Il existe une constante* $C > 0$ *telle que pour tout* $u \in H^1_{\sigma,\sigma'}$

$$\int_{\mathbb{R}^2} |x|^{2\sigma/(1+\sigma')} \, |u|^2 \, dx\,dy \leqslant C \, \|u\|^2_{H^1_{\sigma,\sigma'}}$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} |y|^{2\sigma'/(1+\sigma)} \, |u|^2 \, dx\,dy \leqslant C \, \|u\|^2_{H^1_{\sigma,\sigma'}} .$$

Démonstration. A cause des symétries évidentes, il suffit de montrer que pour $x > 0$, $y > 0$, il existe $C > 0$ telle que :

$$I = \int_{\mathbb{R}^2_+} x^{2\sigma/(1+\sigma')} \, |u|^2 \, dx\,dy \leqslant C \, \|u\|^2_{H^1_{\sigma,\sigma'}}$$

pour tout $u \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$ (Proposition 3.0).
Soit

$$A_1 = \{(x,y),\ x^{\sigma/(1+\sigma')}\, y \leqslant 1\},\quad A_2 = \{(x,y),\ x^{\sigma/(1+\sigma')} > 1\}$$

. Pour $\sigma' \leqslant 1$, écrivons

$$I = \int_{A_1} x^{2\sigma/(1+\sigma')} \, |u|^2 \, dx\,dy + \int_{A_2} x^{2\sigma/(1+\sigma')} \, |u|^2 \, dx\,dy = I_1 + I_2 .$$

On a

$$I_1 = \int_{A_1} x^{2\sigma/(1+\sigma')-\sigma} x^{\sigma} y^{1-\sigma'} y^{\sigma'-1} |u|^2 \, dx\, dy$$

$$\leqslant \int_{\mathbb{R}^2_+} x^{\sigma} y^{\sigma'-1} |u|^2 \, dx\, dy, \text{ car } \sigma' \leqslant 1.$$

D'où

$$I_1 \leqslant C \int_{\mathbb{R}^2_+} x^{\sigma} y^{\sigma'} |u| \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| dx\, dy \quad \text{(en intégrant par parties).}$$

$$\leqslant C \, \| u \|^2_{H^1_{\sigma,\sigma'}}$$

De même

$$I_2 = \int_{A_2} x^{2\sigma/(1+\sigma')-2\sigma} x^{2\sigma} y^{2\sigma'} y^{-2\sigma'} |u|^2 \, dx\, dy$$

$$\leqslant \int_{A_2} x^{2\sigma} y^{2\sigma'} |u|^2 \, dx\, dy \leqslant C \, \| u \|^2_{H^1_{\sigma,\sigma'}} \quad (\text{car } \sigma' > 0)$$

. Pour $2^n - 1 < \sigma' \leqslant 2^{n+1} - 1$ $(n \geqslant 1)$, on a par itération :

$$I \leqslant C \left(\int_{\mathbb{R}^2_+} x^{2^{n+1}\sigma/(1+\sigma')} y^{2^{n+1}-2} |u|^2 \, dx\, dy + \int_{\mathbb{R}^2_+} \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^2 dx\, dy \right).$$

En appliquant la méthode précédente à la première intégrale du second membre, on obtient le résultat.

On montre de même que :

$$\int_{\mathbb{R}^2_+} y^{2\sigma'/(1+\sigma)} |u|^2 \, dx\, dy \leqslant C \, \| u \|^2_{H^1_{\sigma,\sigma'}}$$

D'où la proposition.

Si $W(x,y)$ est un potentiel tel que $W(x,y) \to +\infty$ lorsque $|(x,y)| \to +\infty$ on sait que dans ce cas l'injection de $H^1_W = \{ u \in H^1, \ W^{1/2} u \in L \}$ dans L^2 est compacte. Prenons $W(x,y) = |x|^{2\sigma/(1+\sigma')} + |y|^{2\sigma'/(1+\sigma)}$. D'après la proposition 3.1.1., l'injection de $H^1_{\sigma,\sigma'}$ dans H^1_W est continue. Donc l'injection de $H^1_{\sigma,\sigma'}$ dans L^2 est compacte.

3.1.2. Subdivision de $\mathbb{R}^2_+$

A cause des symétries, on se limite encore ici à $x > 0$, $y > 0$.

Soit $\epsilon > 0$, $0 < \epsilon < 1$. On considère un réseau Ξ de carrés Q, de côté ϵ, les côtés étant parallèles aux axes. Pour un carré Q, de centre $\xi_Q = (x_Q, y_Q)$ nous notons

$$V_Q^+ = \sup_{(x,y)\in Q} V(x,y), \quad V_Q^- = \inf_{(x,y)\in Q} V(x,y)$$

Soit E le domaine constitué par les carrés tels que $V_Q^- < \epsilon^{-1}$

Soit D le domaine constitué par les carrés tels que $V_Q^+ \geqslant \epsilon^{-1}$

On partage E en trois domaines D_1, D_2, D_3 : D_2 étant constitué par les carrés Q tels que $0 < y < \epsilon$, $x > \epsilon^{-\frac{1+\sigma'}{\sigma}}$, D_3 par les carrés tels que $0 < x < \epsilon$, $y > \epsilon^{-\frac{1+\sigma}{\sigma'}}$.

LEMME 3.1.2. *Pour* $u \in H^1_{\sigma,\sigma'}$, *il existe* $P_\Xi u$, *fonction de* $L^2(IR^2)$, *polynomiale dans chaque carré* Q, *telle que :*

$$\| u - P_\Xi u \|_{L^2} \leqslant C \epsilon \| u \|_{H^1_{\sigma,\sigma'}}$$

C *étant une constante* > 0, *indépendante de* ϵ *et de* u.

Démonstration.

a) Dans chaque carré Q de D, on définit $P_Q u = 0$ puisque :

$$\int_D |u|^2 \, dx\, dy \leqslant \int_D \epsilon^2 V^2 |u|^2 \, dx\, dy \leqslant \epsilon^2 \| u \|^2_{H^1_{\sigma,\sigma}},$$

b) Dans chaque carré de D_2, D_3, on prend $P_Q u = 0$ compte-tenu de la proposition 3.1.1., puisque l'on a $\epsilon^2 x^{2\sigma/(1+\sigma')} > 1$ ou $\epsilon^2 y^{2\sigma'/(1+\sigma)} > 1$ sur chaque carré de D_2, D_3.

c) Dans chaque carré de D_1, on définit $P_Q u$ comme le polynôme (de degré 0) tel que $\int_Q (u - P_Q u) \, dx\, dy = 0$.

En utilisant l'inégalité de Poincaré, on obtient :

$$\int_Q |u - P_Q u|^2 \, dx\, dy \leqslant C \epsilon^2 \sum_{|\alpha|=1} \int_Q |D^\alpha u|^2 \, dx\, dy$$

$$\leqslant C \epsilon^2 \| u \|^2_{H^1_{\sigma,\sigma'}}$$

D'où le lemme.

On a ainsi approché à ϵ près tout élément de la boule unité de $H^1_{\sigma,\sigma'}$ par un élément d'un sous-espace vectoriel de $L^2(IR^2)$ dont la dimension $k(\epsilon) = k$ est une fonction de ϵ et de V.

On considère maintenant comme dans 2.2. une fonction $\varphi \subset \mathscr{D}(IR^2)$ à support dans le carré $\mathcal{J} = ([-1,1])^2$ et les fonctions $\varphi_Q = \varphi \circ T_Q$. Soit E_k, l'espace vectoriel engendré par les fonctions φ_Q, $Q \in D_1$, muni de la norme L^2. Il est clair que

(1) $$E_k \subset H^1_{\sigma,\sigma'}, \quad \text{et} \quad \dim E_k = k.$$

On obtient le

LEMME 3.1.3. *Soit* $S\,E_k$ *la boule unité de* E_k. *Alors il existe une constante* B *indépendante de* ϵ *telle que*

$$S\,E_k \subset B\,\epsilon^{-1}\,S\,H^1_{\sigma,\sigma'}.$$

Démonstration. On reprend la démonstration du lemme 2.2.2.

Il suffit de remarquer que, pour les carrés traversés par la frontière de D_1, c'est-à-dire les carrés de D_1 tels que $V_Q^+ \geqslant \epsilon^{-1}$, il existe une constante $A > 0$, indépendante de ϵ et de Q telle que

(2) $$V_Q^+ \leqslant \frac{A}{\epsilon} \quad Q \in D_1.$$

Ceci se démontre en utilisant, par exemple, le théorème des accroissements finis.

3.1.3. Estimation de $k = k(\epsilon)$

Des comparaisons sur les aires (en utilisant (2) par exemple) donnent

$$k(\epsilon) \approx \frac{1}{\epsilon^2} \int_{\substack{0 \leqslant V \leqslant \epsilon^{-\frac{1+\sigma'}{\sigma}} \\ 0 \leqslant y \leqslant \epsilon^{-\frac{1+\sigma}{\sigma'}} \\ V(x,y) \leqslant \epsilon^{-1}}} dx\,dy$$

D'où

(3) $$\begin{cases} k \approx \epsilon^{-\frac{1+\sigma+\sigma'}{\sigma'}} + \epsilon^{-\frac{1+\sigma+\sigma'}{\sigma}} & \text{si } \sigma \neq \sigma' \\ k \approx \epsilon^{-\frac{1+2\sigma}{\sigma}} \operatorname{Log}\frac{1}{\epsilon} & \text{si } \sigma = \sigma' \end{cases}$$

3.1.4. Démonstration du théorème 3.1.b)

La majoration de d_k est immédiate en utilisant (3) et le lemme 3.1.2. La minoration de d_k s'obtient en utilisant (3), (1), le lemme 3.1.3. et le théorème de Krein [§ 1.1].

3.2. Généralisation

On considère $n = p + q$, $x \in \mathbb{R}^p$, $y \in \mathbb{R}^q$, $\sigma > 0$, $\sigma' > 0$

$$V(x,y) = |x|^{\sigma} |y|^{\sigma'} \qquad |x| = |x_1| + \dots + |x_p|,\ |y| = |y_1| + \dots + |y_q|$$

Soit

$$H^{1,n}_{\sigma,\sigma'} = \{u \in H^1(\mathbb{R}^n)\ ;\ V u \in L^2(\mathbb{R}^n)\}.$$

On obtient alors :

THEOREME 3.2.

a) L'injection $H^{1,n}_{\sigma,\sigma'} \hookrightarrow L^2$ *est compacte.*

b) Soit $S\,H^{1,n}_{\sigma,\sigma'}$, *la boule unité de* $H^{1,n}_{\sigma,\sigma'}$. *Notons* $d_n = d_n(S\,H^{1,n}_{\sigma,\sigma'}, L^2)$ *alors*

1) si $q\sigma < p\sigma'$, $d_k \approx (\frac{1}{k})^{\sigma/(p(1+\sigma+\sigma'))}$

2) si $q\sigma = p\sigma'$, $d_k \approx (\frac{\operatorname{Log} k}{k})^{\sigma/(p(1+\sigma+\sigma'))}$

3) si $q\sigma > p\sigma'$, $d_k \approx (\frac{1}{k})^{\sigma'/(q(1+\sigma+\sigma'))}$.

Démonstration. La proposition 3.1.1. donne pour $i = 1,\dots,p$.

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} x_i^{2\sigma/(1+\sigma')} |u|^2\, d\xi \leqslant C \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} x_i^{2\sigma} y_1^{2\sigma'} |u|^2\, d\xi + \int_{\mathbb{R}^n_+} \left|\frac{\partial u}{\partial y_1}\right|^2 d\xi \right)$$

$$\leqslant C\, \|u\|^2_{H^{1,n}_{\sigma,\sigma'}}$$

De même pour $i = 1,2,\dots,q$

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} y_i^{2\sigma'/(1+\sigma)} |u|^2\, d\xi \leqslant C\, \|u\|^2_{H^{1,n}_{\sigma,\sigma'}}$$

On en déduit la compacité de l'injection de $H^{1,n}_{\sigma,\sigma'}$ dans L^2 comme dans 3.1.1. Puis on considère de même dans $\mathbb{R}^n_+$ un réseau de cubes Q de côté ϵ et les domaines E et D constitués par les cubes tels que $\bar{V}_Q < \epsilon^{-1}$ et $\bar{V}_Q \geqslant \epsilon^{-1}$, puis les domaines pour lesquels $x_i > \epsilon^{-\frac{1+\sigma'}{\sigma}}$, $y_i > \epsilon^{-\frac{1+\sigma}{\sigma'}}$.

Les lemmes 3.1.2. et 3.1.3. s'écrivent immédiatement.

Estimons $k(\epsilon)$. On a :

$$k(\epsilon) \approx \frac{1}{\epsilon^{p+q}} \int_{\substack{0 \leqslant x_i \leqslant \epsilon^{-\frac{1+\sigma'}{\sigma}} \quad i=1,\dots,p \\ 0 \leqslant y_i \leqslant \epsilon^{-\frac{1+\sigma}{\sigma'}} \quad i=1,\dots,q \\ V(x,y) \leqslant \epsilon^{-1}}} d\xi$$

En procédant par exemple par minoration et majoration, on obtient :

si $\qquad q\sigma \neq p\sigma' \qquad k(\epsilon) \approx \epsilon^{-\frac{1+\sigma+\sigma'}{\sigma} p} + \epsilon^{-\frac{1+\sigma+\sigma'}{\sigma'} q}$

$\qquad q\sigma = p\sigma' \qquad k(\epsilon) \approx \epsilon^{-\frac{1+\sigma+\sigma'}{\sigma'} q} \operatorname{Log} \epsilon^{-\frac{1+\sigma'}{\sigma}}$

En raisonnant comme dans 3.1.4., on obtient le théorème.

3.3. Le «modèle» de Feynmam

Soit $q \geqslant 2$, $x \in \mathbb{R}^q$, $y \in \mathbb{R}^q$, $(x,y) \in \mathbb{R}^{2q}$

$$W(x,y) = |x \wedge y| = [\sum_{i<j} (x_i y_j - x_j y_i)^2]^{1/2}$$

Dans [11], B. Simon montre que l'opérateur

$$-\Delta x - \Delta y + W$$

a un spectre purement discret. Nous donnons ici une autre démonstration de ce résultat que nous complétons par une estimation du $k^{ième}$ diamètre de la boule unité de l'espace associé dans L^2. Pour des commodités d'écriture, nous considérons le potentiel

$$U(x,y) = \sum_{i<j} |x_i y_j - x_j y_i|$$

et l'espace $H^1_V = \{u \in H^1, \ V u \in L^2\}$. oùu $V = U^{1/2}$.

PROPOSITION 3.3.1. *Il existe une constante* $C > 0$, *telle que, pour tout* $u \in H^1_V$

$$\int_{\mathbb{R}^{2q}} \sum_i (|x_i|^{2/3} + |y_i|^{2/3}) |u|^2 \, dx \, dy \leqslant C \, \|u\|^2_{H^1_V} . \tag{4}$$

Démonstration. En vertu de la proposition 3.0. il suffit de considérer $u \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{2q})$. D'autre part, les x_i, y_i jouant des rôles symétriques, il vous suffit de démontrer par exemple, pour i,j quelconques, $i \neq j$, que :

$$(5)\quad \int_{\mathrm{IR}^{2q}} |x_i|^{2/3}\, |u|^2\, dx\, dy \leqslant C\left(\int_{\mathrm{IR}^{2q}} |x_i\, y_j - x_j\, x_i|\, |u|^2\, dx\, dy + \int_{\mathrm{IR}^{2q}} \left|\frac{\partial u}{\partial y_i}\right|^2 dx\, dy\right)$$

On en déduit immédiatement (4).

Posons

$$B_1 = \{(x,y) \in \mathrm{IR}^{2q}\ |x_i\, y_j - x_j\, y_i|\, |x_i|^{-2/3} \leqslant 1\},\ B_2 = \mathrm{IR}^{2q} - B_1\,.$$

Ecrivons

$$I = \int_{\mathrm{IR}^{2q}} |x_i|^{2/3}\, |u|^2\, dx\, dy = \int_{B_1} |x_i|^{2/3}\, |u|^2\, dx\, dy + \int_{B_2} |x_i|^{2/3}\, |u|^2\, dx\, dy$$

$$= \int_{B_1} |x_i|\, |x_i\, y_j - x_j\, y_i|^{-1/2}\, |x_i|^{-1/3} |x_i\, y_j - x_j\, y_i|^{1/2}\, |u|^2\, dx\, dy$$

$$+ \int_{B_2} |x_i|^{2/3}\, |x_i\, y_j - x_j\, y_i|^{-1}\, |x_i\, y_j - x_j\, y_i|\, |u|^2\, dx\, dy$$

Alors

$$I \leqslant \int_{\mathrm{IR}^{2q}} |x_i|\, |x_i\, y_j - x_j\, y_i|^{-1/2}\, |u|^2\, dx\, dy + \int_{\mathrm{IR}^{2q}} |x_i\, y_j - x_j\, y_i|\, |u|^2\, dx\, dy$$

$$\leqslant C\left(\int_{\mathrm{IR}^{2q}} |x_i\, y_j - x_j\, y_i|^{1/2}\, |u| \left|\frac{\partial u}{\partial y_j}\right| dx\, dy + \int_{\mathrm{IR}^{2q}} |x_i\, y_j - x_j\, y_i|\, |u|^2\, dx\, dy\right)$$

D'où l'inégalité cherchée en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On obtient alors le :

THEOREME 3.3.2.

a) L'injection de H^1_V *dans* L^2 *est compacte.*

b) Soit $S\, H^1_V$ *la boule unité de* H^1_V, $d_k = d_k(S\, H^1_V, L^2)$ *alors*

$$d_k \approx \left(\frac{1}{K}\right)^{1/(4(q+1))}.$$

Démonstration. On procède comme dans 3.1.1. et 3.1.2 . La compacité de l'injection est immédiate (corollaire de 3.3.1.). On considère le réseau laticiel Ξ de cubes Q (de IR^{2q}) de côté ϵ, les domaines $D = \{Q\,;\, V_Q^- \geqslant \epsilon^{-1}\}$, $E = \{Q\,;\, V_Q^- < \epsilon^{-1}\}$ et les sous-domaines D_i de E pour lesquels $x_i > \epsilon^{-3}$, et D_i' pour lesquels $y_i > \epsilon^{-3}$. Soit $F = \{Q \in E\,;\, |x_i| \leqslant \epsilon^{-3}$ et $|y_i| \leqslant \epsilon^{-3}$ pour $i = 1,2,\ldots,q\}$. On approche u par 0 dans D, D_i, D_i', et par un polynôme de degré 0 dans chaque cube de F. Le lemme 3.1.2. s'écrit immédiatement.

De même pour établir le lemme 3.1.3., il suffit de démontrer qu'il existe une constante $A > 0$, telle que

$$(6)\qquad V_Q^+ \leqslant \frac{A}{\epsilon},\quad \forall\, Q \in F, \text{ ou encore } V_Q^{+2} \leqslant \frac{A}{\epsilon^2}\,.$$

Or si $Q \in F$, il existe (x_0,y_0) tel que $V_Q^2(x_0,y_0) \leqslant \frac{1}{\epsilon^2}$. Alors pour

$$(x,y) \in Q\,, \quad |V_Q^2(x,y) - V_Q^2(x_0,y_0)| \leqslant C\,\epsilon\, M$$

où

$$M = \sup_{i,j\,,\,(x,y)\in Q} \left\{ \left|\frac{\partial V^2}{\partial x_i}\right| ; \left|\frac{\partial V^2}{\partial y_j}\right| \right\}$$

Comme $M \leqslant \frac{q}{\epsilon^3}$ pour tout cube Q de F, on a bien l'inégalité (6). L'estimation de $k = k(\epsilon)$ s'obtient comme précédemment. ($k(\epsilon)$ étant le nombre de cubes du réseau) on a :

$$k \approx \frac{1}{\epsilon^{2q}} \int_{\substack{|x_i| \leqslant \epsilon^{-3} \quad i=1,2,\dots,q \\ |y_i| \leqslant \epsilon^{-3} \quad i=1,2,\dots,q \\ V(x,y) \leqslant \epsilon^{-1}}} d\xi$$

ce qui donne

(7) $$k \approx \frac{1}{\epsilon^{4(q+1)}}$$

On achève la démonstration comme dans 3.1.4.

Montrons (7). Le résultat peut s'obtenir en majorant et minorant l'intégrale

$$I_q(\epsilon) = \int_G dx\,dy$$

où

$$G = (x,y) \in \mathbb{R}^{2q}\,;\, V(x,y) \leqslant \epsilon^{-1}\,,\ |x_i| \leqslant \epsilon^{-3}\,,\ \ |y_i| \leqslant \epsilon^{-3}\,,\ i=1,2,\dots,q.$$

1) Majoration. Pour $q = 2$, écrivons

$$I_2(\epsilon) = \int_{G,\,|x_2|\leqslant|x_1|} dx\,dy + \int_{G,\,|x_1|\leqslant|x_2|} dx\,dy$$

Or

$$\int_{G,\,|x_2|\leqslant|x_1|} dx\,dy \leqslant \int_{|x_i|\leqslant\epsilon^{-3},\,|y_1|\leqslant\epsilon^{-3},\,|x_2|\leqslant|x_1|} \frac{2}{\epsilon^2\,|x_1|}\, dx_1\,dx_2\,dy_1$$

$$\leqslant \int_{|x_1|\leqslant\epsilon^{-3},\,|y_1|\leqslant\epsilon^{-3}} \frac{2}{\epsilon^2}\, dx_1\,dy_1 \leqslant C\,\frac{1}{\epsilon^8}$$

Pour $q > 2$, on a de même

$$I_q(\epsilon) = \int_{G,\,|x_q|\leqslant|x_1|} dx\,dy + \int_{G,\,|x_1|\leqslant|x_q|} dx\,dy$$

Or

$$\int_{G,\ |x_1|\leqslant |x_q|} dx\,dy \leqslant \int_{\substack{|x_i|\leqslant \epsilon^{-3},\ |y_i|\leqslant \epsilon^{-3},\ |x_1|\leqslant |x_q|,\ i=1,2,\dots,q \\ 1\ \sum_{1\leqslant i<j\leqslant q-1} |x_i y_j - x_j y_i|\leqslant \epsilon^{-2},\ |x_1 y_q - x_q y_1|\leqslant \epsilon^{-2}}} dx\,dy.$$

En intégrant par rapport à y_q, puis x_q, on obtient

$$\int_{G,\ |x_1|\leqslant |x_q|} dx\,dy \leqslant \frac{C}{\epsilon^2}\int_{\substack{|x_i|\leqslant \epsilon^{-3},\ |y_i|\leqslant \epsilon^{-3}\quad i=1,2,\dots,q-1 \\ \sum_{1\leqslant i<j\leqslant q-1} |x_i y_j - x_j y_i|\leqslant \epsilon^{-2}}} dx\,dy$$

$$\leqslant \frac{C}{\epsilon^2}\, I_{q-1}(\epsilon)$$

D'où $I_q(\epsilon)\leqslant \frac{C}{\epsilon^2}\, I_{q-1}(\epsilon)$. Comme $I_2\leqslant \frac{C}{\epsilon^8}$, on a $I_q(\epsilon)\leqslant \frac{C}{\epsilon^{2q+4}}$

2) Minoration. Posons

$$I'_q(\epsilon)=\int_{\substack{\epsilon\leqslant x_1\leqslant \epsilon^{-3}\quad 0\leqslant x_i\leqslant \epsilon^{-3},i=2,\dots,q \\ |y_i|\leqslant \epsilon^{-3}\quad i=1,\dots,q \\ V(x,y)\leqslant \epsilon^{-1}}} dx\,dy \leqslant I_q(\epsilon).$$

On a

$$I'_q(\epsilon)\geqslant \int_{\substack{\epsilon\leqslant x_1\leqslant \epsilon^{-3},\ 0\leqslant x_i\leqslant \epsilon^{-3},\ i=2,\dots,q \\ |y_i|\leqslant \epsilon^{-3},\ i=1,\dots,q,\quad \sum_{1\leqslant i<j\leqslant q-1} |x_i y_j - x_j y_i|\leqslant \frac{1}{2\epsilon^2} \\ 0\leqslant x_i y_q - x_q y_i,\ i=1,2,\dots,q-1,\quad \sum_{i=1}^{q-1}(x_i y_q - x_q y_i)\leqslant \frac{1}{q\epsilon^2} \\ 0<q\,x_q\leqslant x_1+x_2+\dots+x_{q-1}}} dx\,dy$$

On intègre en y_q puis x_q, on obtient :

$$I'_q(\epsilon)\geqslant \frac{1}{q\,\epsilon^2}\, I'_{q-1}(\epsilon)$$

Pour q = 2, on a

$$I'_2(\epsilon)\geqslant \int_{\substack{\epsilon\leqslant x_1\leqslant \epsilon^{-3},\ 0\leqslant x_2\leqslant \epsilon^{-3},\ |y_i|\leqslant \epsilon^{-3},\ i=1,2 \\ 0\leqslant x_1 x_2 - x_2 y_1\leqslant \frac{1}{2\epsilon^2},\ 0<2\,x_2<x_1}} dx\,dy$$

D'où $I'_2(\epsilon) \geqslant \frac{1}{\epsilon^8}$.

On en déduit $I_q(\epsilon) \geqslant \frac{B}{\epsilon^{2q+4}}$.

Finalement, on a $I_q(\epsilon) \approx \frac{1}{\epsilon^{2q+4}}$. D'où (7).

REFERENCES

[1] V. BENCI et D. FORTUNATO. *«Discretness conditions of the spectrum of Schrödinger operators»*. J. of Math. Analysis and appl. 64 (1978) p. 695-700.

[2] R. DESPLANCHES. Thèse de 3ème cycle. Nantes juin 1977.

[3] J.S. de WET, F. MANDL. *«On the asymptotic distribution of eigenvalues»*. Proc. Roy. Soc. London A. 200 (1950) p. 572-580.

[4] J.M. GLAZMAN. *«Direct methods of qualitative spectral analysis of singular differential operators»*. Israel program for scientific translations. Jerusalem (1965).

[5] C. GOULAOUIC. *«Valeurs propres de problèmes aux limites irréguliers»*. Cours CIME (1974).

[6] T. KATO. *«Schrödinger operators with singular potential»*. Israël J. Math. 13 (1973) p. 135-148.

[7] G.G. LORENTZ. *«Approximation of fonctions»*. Holt Rinehart and Winston. (1966).

[8] PHAM THE LAI. *«Comportement asymptotique des valeurs propres d'une classe d'opérateurs de type «Schrödinger»»*. J. of Math. Kyoto Univ. 18 (2) (1978) p. 353-375.

[9] D. ROBERT. *«Comportement asymptotique des valeurs propres d'opérateurs du type Schrödinger à potentiel dégénéré»*. J. Math. Pures et appl. 61. (1982) p. 275-300.

[10] G.V. ROSENBLJUM. *«Asymptotics of the eigenvalue of the Schrödinger operator»*. Math. USSR Sbornik 22 (3) (1974) p. 349-371.

[11] B. SIMON. *«Some quantum operators with discret spectrum but classically continuous spectrum»*. (Soumis à Ann. Phys).

[12] B. SIMON. *«Non classical Eigenvalue Asymptotics»*. J. of Fonc Anal. V. 53-1. 83 p. 84-98.

[13] E.C. TITCHMARSCH. *«Eigenfunctions expansions»*. Vol. I et II. Clarendon. Press Oxford.

(Manuscrit reçu le 14 mai 1985)