

PHILIPPE REVOY

Une classe d'équations cubiques

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5^e série, tome 7, n° 3-4 (1985), p. 179-184

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1985_5_7_3-4_179_0

© Université Paul Sabatier, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

UNE CLASSE D'EQUATIONS CUBIQUES

Philippe Revoy ⁽¹⁾

(1) Institut de Mathématiques, Université de Montpellier II - 34060 Montpellier Cédex.

Résumé : Dans cette note, je montre par descente que certaines courbes elliptiques d'équation $X^3 + Y^3 + cZ^3 = dXYZ$ n'ont pas de points rationnels non triviaux. Un certain nombre d'équations sont connues quand d n'est pas divisible par 3 ; ici la même technique est appliquée au cas où d est multiple de 3.

Summary : In this note, I show by a descent argument that some elliptic curves $X^3 + Y^3 + cZ^3 = dXYZ$ have no non trivial rational points. Some cases were known with d prime to 3 ; here, the same technique is applied when 3 divides d .

Le but de cette note est de montrer que certaines équations :

(1) $X^3 + Y^3 + cZ^3 - dXYZ = 0$, c, d , entiers, n'ont qu'un nombre fini de solutions - en général celles-ci vérifient $XYZ = 0$. Ces courbes furent d'abord étudiées par A. Hurwitz ([3]) qui montra que l'équation $aX^3 + bY^3 + cZ^3 - dXYZ = 0$ a en général une infinité de solutions si elle en possède une. Ces résultats furent complétés par L.J. Mordell ([5], [6]).

Seuls des cas particuliers avec $a = b$ ont été complètement résolus, à savoir ceux où $a = b = 1$ et $(c,d) = (5,5), (1,1), (1,2)$ ([1], [8], [9], [4]). L.J. Mordell indique ([6] p. 131) la méthode générale pour étudier (1), en particulier dans le cas $d \neq 0$ (3), et cela donne les cas cités plus haut.

Dans la première partie, nous montrons comment cette méthode dans le cas $d \equiv 0(3)$ permet de résoudre complètement certaines de ces équations, les deux exemples les plus clairs étant $(c ; d) = (2,9)$ et $(4,6)$. Dans la seconde partie, on indique comment un problème diophantien se ramène à une équation de type (1). L'auteur remercie J.W.S. Cassels pour l'attention qu'il a bien voulu porter à un manuscrit antérieur de l'auteur sur ce sujet.

I. - Considérons l'équation :

$$(2) \quad x^3 + y^3 + cz^3 = 3d_1xyz$$

Elle représente une courbe elliptique (C) dont le point $O(1, -1, 0)$ est un point d'inflexion. Dans les deux cas particuliers suivants $(c, d_1) = (2,3)$ et $(c, d_1) = (4,2)$, on peut montrer que (C) n'a que deux points rationnels ; ces résultats sont des cas particuliers du résultat plus général suivant :

THEOREME 1. Soit δ un entier impair, p un nombre premier impair congru à 2 modulo 3 et a et b deux entiers positifs non divisibles par 3 tels que : $27\delta^3 = 2^a \pm p^b$. Alors les équations (2)

$$x^3 + y^3 + 2^a z^3 = 9\delta xyz$$

$$x^3 + y^3 + (27\delta^3 - 2^a)z^3 = 9\delta xyz$$

n'ont que des solutions triviales dans $A = \mathbb{Z}[\rho]$.

On travaille dans $A = \mathbb{Z}[\rho]$ où $\rho^2 + \rho + 1 = 0$: c'est un anneau principal - euclidien pour la norme - anneau des entiers de $\mathbb{Q}((-3)^{1/2})$. Dans A , 3 est le seul nombre premier ramifié ; un nombre premier p congru à 1 modulo 3 se décompose dans A . Si $p \equiv 2(3)$, p reste premier dans A . On considère un point de (C) à coordonnées dans A^3 et on effectue la transformation

$$\begin{array}{ll} x_1 = \rho^2 x + \rho y + d_1 z & 3x = \rho x_1 + \rho^2 y_1 + z_1 \\ y_1 = \rho x + \rho^2 y + d_1 z & \text{d'inverse} \quad 3y = \rho^2 x_1 + \rho y_1 + z_1 \\ z_1 = x + y + d_1 z & 3d_1 z = x_1 + y_1 + z_1 \end{array}$$

d'où le système : $x_1 y_1 z_1 = (d_1^3 - c)z^3$, $x_1 + y_1 + z_1 = 3d_1 z$.

Pour en tirer une équation (2), on doit supposer que $d_1^3 - c$ n'a qu'un seul facteur premier dans A . On suppose donc que $|d_1^3 - c| = \pi^a$ où $\pi \in \mathbb{N}$ est congru à 2 modulo 3. On

suppose que $a \not\equiv 0(3)$ (c ne serait pas primaire) et on déduit de cela que $x_1 = \rho_1 x_2^3, y_1 = \rho_2 \pi y_2, z_1 = \rho_3 \pi^u z_2^3$ ou bien $x_1 = \rho_1 \pi^a x_2^3, y_1 = \rho_2 y_2^3, z_1 = \rho_3 z_2^3$ avec $\rho_1 \rho_2 \rho_3 = 1, \rho_i$ racine cubique de l'unité. Une congruence modulo 2 ou modulo $(-3)^{3/2}$ suivant que $d_1^3 - c$ est pair ou non montre que les ρ_i sont égaux. On est alors obligé de supposer que $d_1 \equiv 0(3), d_1 = 3\delta$. Dans les deux cas on obtient une équation de type (2) :

$$x_2^3 + y_2^3 + (d_1^3 - c)z_2^3 = 3d_1 x_2 y_2 z_2$$

Si $(c, d_1) = (4, 2)$, la descente s'arrête car $2^3 - 4 = 4 = C$. Dans le cas général, on effectue à nouveau la transformation précédente ; on obtient alors

$$x_3 y_3 z_3 = c z_2^3$$

$$x_3 + y_3 + z_3 = 3d_1 z_2$$

car $d_1^3 - (d_1^3 - c) = c$. Un raisonnement du même type redonne alors l'équation (2) :

$$x_4^3 + y_4^3 + c z_4^3 = 3d_1 x_4 y_4 z_4$$

On doit avoir $c = \pi'^b$ et comme l'un des deux entiers $d_1^3 - c$ ou c est pair, on suppose que c'est c de sorte que $\pi' = 2$. Il est clair que le point (x_4, y_4, z_4) a une hauteur $|x_4 y_4 z_4|$ inférieure ou égale à $|xyz|$. La méthode de descente consiste à montrer tout d'abord que $|x_4 y_4 z_4| = |xyz|$ entraîne que (x, y, z) est un point connu de (C) , soit un des point d'inflexion, soit l'un des points $(1, 1, 1)$ si $3d_1 = c + 2$ soit le point $(1, 1, 2)$ si $3d_1 = 4c + 1$ ([1] Ch. 10), puis que si $|x_4 y_4 z_4| \leq 2$, on a aussi $|xyz| \leq 2$, ce qui achève de montrer que (2) n'a alors que des solutions triviales.

Donnons un aperçu des valeurs possibles pour δ et a : si $\delta = 1, a = 1, 2, 4, 5, 7$ donnent des équations auxquelles ce résultat s'applique ; si $\delta = -1, a = 1, 5, 13$, si $\delta = 3, a = 8, 11, \dots$ donnent encore de telles équations. Dans beaucoup de cas $b = 1$ et il y a probablement une infinité de possibilités pour δ et a .

II. - Nous considérons le problème diophantien suivant :

Soient 4 nombres rationnels r_1, r_2, r_3 et r_4 ; existe-t-il s_1, s_2, s_3 et s_4 dans \mathbb{Q} tels que $\sum_i r_i^h = \sum_i s_i^h, h = 1, 2, 3$. Par translation des r_i , on peut supposer que $\sum_i r_i = 0$ et on est ramené au système diophantien :

$$\begin{aligned} \sum X_i &= 0 \\ \sum X_i^2 &= b \\ \sum X_i^3 &= c \end{aligned}$$

qui définit une sextique dont un point rationnel est donné par le 4-uple initial (r_1, r_2, r_3, r_4) . On pose alors $X_1 + X_2 = u$, $X_3 + X_4 = v$, $X_1 - X_2 = X$, $X_3 - X_4 = Y$, $X_1 X_2 = \alpha$, $X_3 X_4 = \beta$ d'où le système

$$u + v = 0$$

$$u^2 + v^2 = b + 2(\alpha + \beta)$$

$$u^3 + v^3 = c + 3(u\alpha + v\beta).$$

Tenant compte de $u + v = 0$, on obtient

$$2(\alpha + \beta) = 2u^2 - b$$

$$3u(\alpha - \beta) = -c$$

On a donc

$$4\alpha = 2u^2 - b - \frac{2c}{3u}$$

$$4\beta = 2u^2 - b + \frac{2c}{3u}$$

$$X^2 + 4\alpha = u^2$$

$$Y^2 + 4\beta = u^2$$

On en déduit X^2 et Y^2 en fonction de u et on pose $2x = X + Y$ et $2y = X - Y$, ce qui donne

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + u^2 = b \\ xyu = \frac{c}{3} \end{cases}$$

On obtient l'équation diophantienne

$$c_1^2 = x^2 y^2 (b - x^2 - y^2)$$

où $c = 3c_1$. Inversement si x et y vérifie cette équation, on en déduit u , X et Y puis les X_i , $1 \leq i \leq 4$.

On pose maintenant $x = \frac{X}{Z}$, $y = \frac{Y}{Z}$, d'où l'équation homogène $c_1^2 Z^6 = X^2 Y^2 (bZ^2 - X^2 - Y^2)$, revêtement à quatre feuillets de la courbe elliptique

$$c_1^2 Z^3 = XY(bZ - X - Y).$$

Changeant les noms des variables, on a à résoudre le système

$$\begin{cases} XYZ = c_1^2 T^3 \\ X + Y + Z = bT \end{cases}$$

Si c_1 est sans facteurs carrés, on peut supposer X, Y, Z premiers dans leur ensemble ; le cas le plus simple étant celui où c_1 est premier. On a alors

$$X = u^3, Y = v^3, Z = c_1^2 w^3 \quad T = uvw$$

ou bien

$$X = c_1 u^3, Y = c_1 v^3, Z = w^3 \quad T = uvw$$

mais cela mène à la même équation :

$$u^3 + v^3 + c_1^2 w^3 - buvw = 0.$$

Dans le cas particulier $r_1 = 3, r_2 = 1, r_3 = r_4 = -2$, on obtient $b = 18, c_1 = 4$, soit l'équation

$$u^3 + v^3 + 16w^3 - 18uvw = 0$$

qui se ramène à (2) en remplaçant w par $\frac{w}{2}$.

Dans le cas particulier $r_1 = 0, r_2 = 2, r_3 = r_4 = 1$, on obtient $b = 6, c_1 = 2$ d'où l'équation du théorème 3. Dans le cas général la sextique obtenue est de genre > 1 et la conjecture de Mordell, démontrée par Faltings, montre que le problème n'a qu'un nombre fini de solutions.

REFERENCES

- [1] J.W.S. CASSELS. «*On a diophantine equation*». Acta Arith. 6 (1960) p. 47-51.
- [2] J.W.S. CASSELS. «*Diophantine equations with special reference to elliptic curves*». Journal of London Math. Soc. 41 (1966) p. 193-291.
- [3] A. HURWITZ. «*Ueber ternare diophantische Gleichungen dritten Grades*». Vierteljahrschrift Naturf. Ges. Zurich 62 (1917) p. 207-229 Math. Werke (Birkhäuser Cie, Basel) 2 (1933) p. 446-468.
- [4] G. LIGOZAT. «*Courbes modulaires de genre 1*». Mémoire SMF 43 (1975) p. 55 et suiv.
- [5] L.J. MORDELL. «*The diophantine equations $x^3 + y^3 + z^3 + kxyz = 0$* ». «Colloque sur la théorie des Nombres» Bruxelles (1955) p. 67-76.
- [6] L.J. MORDELL. «*Diophantine Equations*». Academic Press. London and New York (1969).
- [7] A. RUBEL. In Am. Math. Monthly Vol. 90, 2 (1983) p. 121.
- [8] G. SANSONE and J.W.S. CASSELS. «*Sur le problème de M. Werner Mnich*». Acta Arith. 7 (1962) p. 187-190.
- [9] M. WARD. «*The vanishing of the homogeneous product sum of the roots of a cubic*». Duke Math. J. 26 (1959) p. 553-562.

(Manuscrit reçu le 20 décembre 1984)