ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

PATRICE TAUVEL

Sur la bicontinuité de l'application de Dixmier pour les algèbres de Lie résolubles

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 4, nº 3-4 (1982), p. 291-308

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1982_5_4_3-4_291_0>

Annales Faculté des Sciences Toulouse
Vol IV, 1982, P. 291 à 308

SUR LA BICONTINUITE DE L'APPLICATION DE DIXMIER POUR LES ALGEBRES DE LIE RESOLUBLES

Patrice Tauvel (1)

(1) Laboratoire de mathématiques fondamentales, Université Pierre et Marie Curie, UER 48, Aile 45-46, 4 place Jussieu, 75230 Paris Cédex 05.

Résumé : Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie résoluble et $\mathscr{G}$ la plus petite sous-algèbre de Lie algébrique de gl($\mathfrak{g}$) contenant $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, \mathfrak{g}$. Pour $f \in \mathfrak{g}^*$, on note $\mathfrak{g}_0(f)$ le plus grand idéal de $\mathfrak{g}$ contenu dans ker f, $\mathfrak{g}[f] = \{ x \in \mathfrak{g} \,;\, f(\mathscr{G} . x) = 0 \}$ et $\mathfrak{g}_2[f] = \mathfrak{g}[f] + [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. On dit que f est de type ($\mathscr{A}$) si l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_2[f] / \mathfrak{g}_0(f)$ est nilpotente. On prouve les résultats suivants

(i) Si f est de type ($\mathscr{A}$), il existe des idéaux $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{n}$ de $\mathfrak{g}$ tels que $\mathfrak{n} / \mathfrak{k}$ soit nilpotent et $I(f) = \mathrm{Ind}(I(f \mid \mathfrak{n}) \,;\, \mathfrak{g})$ (notations de [6]).

(ii) Si f est de type ($\mathscr{A}$), on peut canoniquement lui associer une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ qui lui est subordonnée et telle que $I(f) = \mathrm{Ind}^{\sim}(I(f \mid \mathfrak{h}) \,;\, \mathfrak{g})$.

(iii) Si tout élément de $\mathfrak{g}^*$ est de type ($\mathscr{A}$), l'application de Dixmier relative à $\mathfrak{g}$ est bicontinue.

Summary : Let $\mathfrak{g}$ be a solvable Lie algebra and $\mathscr{G}$ the smallest algebraic Lie algebra in gl($\mathfrak{g}$) that contains $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, \mathfrak{g}$. For $f \in \mathfrak{g}^*$, let $\mathfrak{g}_0(f)$ be the largest ideal in $\mathfrak{g}$ such that $\mathfrak{g}_0(f) \subset \ker f$, $\mathfrak{g}[f] = \{ x \in \mathfrak{g} \,;\, f(\mathscr{G} . x) = 0 \}$ and $\mathfrak{g}_2[f] = \mathfrak{g}[f] + [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. We shall say that f is of type ($\mathscr{A}$) if $\mathfrak{g}_2[f] / \mathfrak{g}_0(f)$ is a nilpotent Lie algebra. We prove the following.

(i) If f is of type ($\mathscr{A}$) there exist ideals $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{n}$ in $\mathfrak{g}$ such that $\mathfrak{n} / \mathfrak{k}$ is nilpotent and $I(f) = \mathrm{Ind}(I(f \mid \mathfrak{n}) \,;\, \mathfrak{g})$ (see [6] for notations).

(ii) If f is of type ($\mathscr{A}$), there exists a canonical Lie sub-algebra in $\mathfrak{g}$ such that $f([\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]) = 0$ and $I(f) = \mathrm{Ind}^{\sim}(I(f \mid \mathfrak{h}) \,;\, \mathfrak{g})$.

(iii) If every $f \in \mathfrak{g}^*$ is of type ($\mathscr{A}$), the Dixmier map for $\mathfrak{g}$ is an homeomorphism.

1. - NOTATIONS

Dans toute la suite, k désigne un corps commutatif algébriquement clos de caractéristique nulle. Toutes les algèbres de Lie sont définies sur k et de dimension finie. On renvoie à [2] et [6] pour les concepts généraux utilisés.

1.1. - Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. On désigne par $\mathcal{I}(\mathfrak{g})$ l'ensemble des idéaux de $\mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{a} \in \mathcal{I}(\mathfrak{g})$, on note $\mathfrak{a}^{\infty} = \bigcap\limits_{1}^{\infty} \mathcal{C}^{i}\mathfrak{a}$ où $\mathcal{C}^{i}\mathfrak{a}$ est le $i^{\text{ème}}$ terme de la série centrale descendante de $\mathfrak{a}$. Les $\mathcal{C}^{i}\mathfrak{a}$ étant des idéaux caractéristiques de $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}^{\infty}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$; c'est le plus petit idéal $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{a}$ tel que $\mathfrak{a}/\mathfrak{b}$ soit une algèbre de Lie nilpotente. Nous noterons $\mathcal{I}(\mathfrak{g})^{\infty}$ l'ensemble des $\mathfrak{a}^{\infty}$ pour $\mathfrak{a} \in \mathcal{I}(\mathfrak{g})$.

1.2. - Soient Γ le groupe adjoint algébrique de $\mathfrak{g}$ et $\mathcal{G}$ l'algèbre de Lie de Γ. Pour $f \in \mathfrak{g}^*$, on désigne par $\mathfrak{g}(f)$ (resp. $\mathfrak{g}[f]$) l'ensemble des $x \in \mathfrak{g}$ tels que $f([\mathfrak{g}, x]) = 0$ (resp. $f(\mathcal{G}.x) = 0$). Si $\mathfrak{g}$ est ad-algébrique, on a $\mathfrak{g}(f) = \mathfrak{g}[f]$ pour tout $f \in \mathfrak{g}^*$. L'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ est engendrée par des polynômes sans terme constant en ad x, $x \in \mathfrak{g}$; il en résulte aisément que tout idéal de $\mathfrak{g}$ contenu dans $\mathfrak{g}(f)$ l'est aussi dans $\mathfrak{g}[f]$. Si $A \in \mathcal{G}$, $x, y \in \mathfrak{g}(f)$, on déduit de $A([x,y]) = [Ax,y] + [x,Ay]$ que $\mathfrak{g}[f]$ est un idéal de $\mathfrak{g}(f)$ contenant $[\mathfrak{g}(f), \mathfrak{g}(f)]$. On note $\mathfrak{g}_0(f)$ le plus grand idéal de $\mathfrak{g}$ contenu dans le noyau ker f de f ; on a $\mathfrak{g}_0(f) \subset \mathfrak{g}[f] \subset \mathfrak{g}(f)$. On désigne par $\mathfrak{g}_1(f)$ (resp. $\mathfrak{g}_1[f]$) le plus petit idéal de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{g}(f)$ (resp. $\mathfrak{g}[f]$). On pose enfin $\mathfrak{g}_2(f) = \mathfrak{g}(f) + [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ et $\mathfrak{g}_2[f] = \mathfrak{g}[f] + [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

1.3. - Soit $\mathfrak{p}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$. Si λ est une forme linéaire sur $\mathfrak{p}$ nulle sur $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]$, on désigne par $u \to u^{\lambda}$ l'automorphisme de l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{p})$ de $\mathfrak{p}$ tel que $x^{\lambda} = x + \lambda(x)$ pour $x \in \mathfrak{p}$. On note $\Theta_{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}$ l'élément de $\mathfrak{p}^*$ tel que $\Theta_{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}(x) = (1/2)\,\mathrm{Trace}\,\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{p}}\, x$, $x \in \mathfrak{p}$. Si I est un idéal bilatère de $U(\mathfrak{p})$, on note $\mathrm{Ind}_U(I ; \mathfrak{g})$ (resp. $\mathrm{Ind}_{\widetilde{U}}(I ; \mathfrak{g})$) le plus grand idéal bilatère de $U(\mathfrak{g})$ contenu dans $U(\mathfrak{g}).I$ (resp. $U(\mathfrak{g}).I^{-\Theta_{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}}$).

1.4. - Supposons $\mathfrak{g}$ résoluble. Soit Spec $U(\mathfrak{g})$ (resp. $\mathrm{Spec}^{\mathfrak{g}}\, S(\mathfrak{g})$) l'ensemble des idéaux premiers de $U(\mathfrak{g})$ (resp. l'ensemble des idéaux premiers ad $\mathfrak{g}$-stables de l'algèbre symétrique $S(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$). On note $\beta_{\mathfrak{g}}$ la bijection canonique Spec $U(\mathfrak{g}) \to \mathrm{Spec}^{\mathfrak{g}}\, S(\mathfrak{g})$. Si $f \in \mathfrak{g}^*$, on désigne par I(f) l'idéal primitif de $U(\mathfrak{g})$ canoniquement associé à f par l'application de Dixmier et par J(f) l'ensemble des éléments de $S(\mathfrak{g})$ nuls sur la Γ-orbite de f.

Les résultats principaux de ce travail ont été annoncés dans [12].

2. - QUELQUES LEMMES

Les lemmes 2.1 et 2.2 sont des généralisations triviales de [1], lemme 1 et proposition 4. On renvoie à [6], section 1.9.8, pour la définition d'un élément générique.

2.1. LEMME. *Soient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie et* $\mathfrak{a} \in \mathcal{S}(\mathfrak{g})$. *Pour* $x \in \mathfrak{a}$, *on note* $\mathfrak{a}^{o}(x)$ *le nilespace de* $\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}\ x$, $\mathfrak{a}'(x)$ *l'intersection des images des* $(\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}\ x)^n$, $n \in \mathbb{N}$, *et* $< \mathfrak{a}'(x) >$ *la sous-algèbre de* $\mathfrak{g}$ *engendrée par* $\mathfrak{a}'(x)$.
Si x *est générique dans* $\mathfrak{a}$, *on a*

$$\mathfrak{a}^{\infty} = \mathfrak{a}'(x) + [\mathfrak{a}'(x), \mathfrak{a}'(x)] = < \mathfrak{a}'(x) >$$

En particulier, si $\mathfrak{a}$ *contient un élément générique dans* $\mathfrak{g}$, *on a* $\mathfrak{a}^{\infty} = \mathfrak{g}^{\infty}$.

Démonstration. Notons, pour simplifier, $\mathfrak{a}^{o} = \mathfrak{a}^{o}(x)$, $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}'(x)$. Soit $\mathfrak{p} = \mathfrak{a}' + [\mathfrak{a}', \mathfrak{a}']$. On a ([6], 1.9.6) : $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^{o} + \mathfrak{a}'$, $[\mathfrak{a}^{o}, \mathfrak{a}^{o}] \subset \mathfrak{a}^{o}$ et $[\mathfrak{a}^{o}, \mathfrak{a}'] \subset \mathfrak{a}'$. Il vient donc

$$[\mathfrak{a}^{o}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{a}' + [\mathfrak{a}^{o}, [\mathfrak{a}', \mathfrak{a}']] \subset \mathfrak{a}' + [\mathfrak{a}', [\mathfrak{a}^{o}, \mathfrak{a}']] \subset \mathfrak{p}$$

$$[\mathfrak{a}', \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{a}' + [\mathfrak{a}', \mathfrak{a}'] \subset \mathfrak{p}$$

On a donc montré que $\mathfrak{p}$ est un idéal de $\mathfrak{a}$ et ainsi : $\mathfrak{p} = < \mathfrak{a}' >$. D'autre part, de $\mathfrak{a}' = [x, \mathfrak{a}']$, on déduit $\mathfrak{a}' \subset \mathfrak{a}^{\infty}$. On a enfin $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^{o} + \mathfrak{p}$; comme x est générique dans $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}^{o}$ est nilpotente ([6], 1.9.4 et 1.9.9). Il en résulte $\mathfrak{a}^{\infty} \subset \mathfrak{p}$ et donc $\mathfrak{a}^{\infty} = \mathfrak{p}$. Si $x \in \mathfrak{a}$ est générique dans $\mathfrak{g}$, il est générique dans $\mathfrak{a}$ ([6], 1.9.13). Comme $\mathfrak{a}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$, on a $\bigcap_{1}^{\infty} \mathrm{Im}(\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}\ x)^n = \bigcap_{1}^{\infty} \mathrm{Im}(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\ x)^n$; ce qui précède montre alors que $\mathfrak{a}^{\infty} = < \mathfrak{a}' > = \mathfrak{g}^{\infty}$.

2.2. LEMME. *Si* $\mathfrak{g}$ *est une algèbre de Lie résoluble, l'ensemble* $\mathcal{S}(\mathfrak{g})^{\infty}$ *est fini.*

Démonstration. On démontre le résultat par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{g}$ est nilpotente, c'est clair. Supposons $\mathfrak{g}$ non nilpotente ; notons $\psi_1, \ldots, \psi_r$ les poids non nuls du $\mathfrak{g}$-module $\mathfrak{g}$ pour la représentation adjointe. L'ensemble des $\mathfrak{a}^{\infty}$, pour $\mathfrak{a} \in \mathcal{S}(\mathfrak{g})$ et $\mathfrak{a}$ contenu dans l'un des $\ker \psi_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$, est fini d'après l'hypothèse de récurrence. Si $\mathfrak{a}$ n'est contenu dans aucun des $\ker \psi_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$, il existe $x \in \mathfrak{a}$ tel que $\psi_i(x) \neq 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant r$. Il est immédiat que x est générique dans $\mathfrak{g}$. On a donc $\mathfrak{a}^{\infty} = \mathfrak{g}^{\infty}$ (lemme 2.1). D'où le résultat.

2.3. - Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et $n = \dim \mathfrak{g}$. Pour $0 \leqslant d \leqslant n$, on désigne par $\mathrm{Gr}(\mathfrak{g}\,; d)$ la grassmannienne de $\mathfrak{g}$ pour la dimension d (munie de sa structure de variété algébrique usuelle) et on pose $\mathrm{Gr}(\mathfrak{g}) = \bigcup_{d=o}^{n} \mathrm{Gr}(\mathfrak{g}\,; d)$. Soit $\mathcal{S}(\mathfrak{g}\,; d)$ (resp. $\mathcal{S}(\mathfrak{g}\,; d)^{\infty}$) l'ensemble des $\mathfrak{a} \in \mathcal{S}(\mathfrak{g})$ (resp. $\mathcal{S}(\mathfrak{g})^{\infty}$) tels que $\dim \mathfrak{a} = d$, $0 \leqslant d \leqslant n$. Pour $0 \leqslant d \leqslant n$, $\mathcal{S}(\mathfrak{g}\,; d)$ est une partie fermée de $\mathrm{Gr}(\mathfrak{g}\,; d)$. Si $\mathfrak{a} \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}\,; s)$, avec $s \leqslant d$, on désigne par $\mathcal{S}(\mathfrak{g}\,; \mathfrak{a}\,; d)$ l'ensemble des $\mathfrak{p} \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}\,; d)$ tels que $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$; c'est une partie fermée de $\mathcal{S}(\mathfrak{g}\,; d)$ et l'application $\mathcal{S}(\mathfrak{g}\,; \mathfrak{a}\,; d) \to \mathcal{S}(\mathfrak{g}/\mathfrak{a}\,; d-s)$ définie par $\mathfrak{p} \to \mathfrak{p}/\mathfrak{a}$ est un isomorphisme de variétés algébriques. Il résulte alors de [6], 1.11.9, que l'ensemble $\mathcal{S}'(\mathfrak{g}\,; \mathfrak{a}\,; d)$ formé des $\mathfrak{p} \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}\,; \mathfrak{a}\,; d)$

tels que $\mathfrak{p} / \mathfrak{a}$ soit nilpotent est une partie fermée de $\mathcal{I}(\mathfrak{g} ; \mathfrak{a} ; d)$.

Soit $\mathfrak{a} \in \mathcal{I}(\mathfrak{g})$; dire que $\mathfrak{a}^{\infty} = 0$ signifie que $\mathfrak{a} \in \bigcup_{d=o}^{n} \mathcal{I}'(\mathfrak{g} ; 0 ; d)$. L'ensemble des $\mathfrak{a} \in \mathcal{I}(\mathfrak{g})$ tels que $\mathfrak{a}^{\infty} = 0$ est donc fermé dans $\mathcal{I}(\mathfrak{g})$. Soit $\mathfrak{b} \in \mathcal{I}(\mathfrak{g})^{\infty}$ de dimension minimale parmi les éléments non nuls de $\mathcal{I}(\mathfrak{g})^{\infty}$. Soit $\mathfrak{a} \in \mathcal{I}(\mathfrak{g})$; dire que $\mathfrak{a}^{\infty} = \mathfrak{b}$ signifie que $\mathfrak{a}$ appartient à $\left(\bigcup_{d=o}^{n} \mathcal{I}'(\mathfrak{g} ; \mathfrak{b} ; d)\right) \cap \complement \left(\bigcup_{d=o}^{n} \mathcal{I}'(\mathfrak{g} ; 0 ; d)\right)$. On voit ainsi que l'ensemble des $\mathfrak{a} \in \mathcal{I}(\mathfrak{g})$ tels que $\mathfrak{a}^{\infty} = \mathfrak{b}$ est une partie localement fermée de $\mathcal{I}(\mathfrak{g})$. Supposons $\mathfrak{g}$ résoluble ; en utilisant le lemme 2.2, on voit alors facilement, par récurrence sur l'entier $d \in \{0,1,\dots,n\}$, que, pour tout $\mathfrak{b} \in \mathcal{I}(\mathfrak{g} ; d)^{\infty}$, l'ensemble des $\mathfrak{a} \in \mathcal{I}(\mathfrak{g})$ tels que $\mathfrak{a}^{\infty} = \mathfrak{b}$ est une partie constructible de $\mathcal{I}(\mathfrak{g})$. On a donc obtenu le résultat suivant

PROPOSITION. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie résoluble. Pour tout $\mathfrak{b} \in \mathcal{I}(\mathfrak{g})^{\infty}$, l'ensemble des $\mathfrak{a} \in \mathcal{I}(\mathfrak{g})$ tels que $\mathfrak{a}^{\infty} = \mathfrak{b}$ est une partie constructible de $\mathcal{I}(\mathfrak{g})$.*

3. - FORMES LINEAIRES ET ALGEBRES DE LIE DE TYPE ($\mathcal{B}$)

3.1. LEMME. *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie résoluble et $f \in \mathfrak{g}^*$. Les conditions suivantes sont équivalentes*

(i) $f(\mathfrak{g}_2(f)^{\infty}) = 0$.

(ii) $\mathfrak{g}_2(f) / \mathfrak{g}_o(f)$ *est une algèbre de Lie nilpotente.*

(iii) $\mathfrak{g}_1(f) / \mathfrak{g}_o(f)$ *est une algèbre de Lie nilpotente.*

(iv) $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g} / \mathfrak{g}(f)}\, \mathfrak{g}(f)$ *est une algèbre de Lie nilpotente d'endomorphismes nilpotents de* $\mathfrak{g} / \mathfrak{g}(f)$.

(v) Il existe une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}$ subordonnée à f et contenant $\mathfrak{g}(f)$ telle que $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g} / \mathfrak{p}}\, \mathfrak{g}(f)$ soit une algèbre de Lie nilpotente d'endomorphismes nilpotents de $\mathfrak{g} / \mathfrak{p}$.

Démonstration. Si $x \in \mathfrak{g}(f)$ et $y \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_2(f)} x$ et $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_2(f)} (x + y)$ ont même polynôme caractéristique. Il existe donc $x \in \mathfrak{g}(f)$ générique pour $\mathfrak{g}_2(f)$; il l'est aussi pour $\mathfrak{g}_1(f)$ ([6], 1.9.13). D'après le lemme 2.1, on a $\mathfrak{g}_2(f)^{\infty} = \mathfrak{g}_1(f)^{\infty}$. Les conditions (i) à (iii) sont donc équivalentes puisqu'elles signifient $\mathfrak{g}_2(f)^{\infty} \subset \mathfrak{g}_o(f)$. Supposons la condition (ii) vérifiée. Si $x \in \mathfrak{g}(f)$, $y \in \mathfrak{g}$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $(\mathrm{ad}\, x)^p ([x,y]) \in \mathfrak{g}_o(f)$ ou $(\mathrm{ad}\, x)^{p+1} (y) \in \mathfrak{g}_o(f) \subset \mathfrak{g}(f)$. D'où immédiatement (iv) d'après le théorème d'Engel. L'implication (iv) $\Rightarrow$ (v) est triviale. Supposons la condition (v) vérifiée. Soient $x \in \mathfrak{g}(f)$ générique pour $\mathfrak{g}_2(f)$, $\mathfrak{a}^o$ le nilespace de $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_2(f)} x$ et

$\mathfrak{a}' = \bigcap_{1}^{\infty} \mathrm{Im}(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_2(f)} x)^n$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{a}^0$ est nilpotente et contient x ; il existe donc $j \in \mathbb{N}$ tel que $(\mathrm{ad}\, x)^j . \mathfrak{a}^0 = 0$. De $\mathfrak{g}_2(f) = \mathfrak{a}' + \mathfrak{a}^0$ et de $\mathfrak{a}' = [x, \mathfrak{a}']$, on déduit $\mathfrak{a}' = (\mathrm{ad}\, x)^j . \mathfrak{g}_2(f)$. Pour $l \geqslant j$ assez grand, on a $(\mathrm{ad}\, x)^l . \mathfrak{g}_2(f) \subset \mathfrak{p}$. Ainsi, $\mathfrak{a}' = [\mathfrak{a}', x] \subset [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]$. Le lemme 2.1 fournit alors $f(\mathfrak{g}_2(f)^{\infty}) = f(\mathfrak{a}' + [\mathfrak{a}', \mathfrak{a}']) \subset f([\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]) = 0$. D'où (i).

3.2. - Un élément $f \in \mathfrak{g}^*$ sera dit de type $(\mathscr{B})$ ($\mathscr{B}$ pour Boidol) s'il vérifie les conditions équivalentes de 3.1. Une algèbre de Lie résoluble sera dite de type $(\mathscr{B})$ si tout élément de $\mathfrak{g}^*$ est de type $(\mathscr{B})$.

3.3. - *Remarques.* Soit $\mathfrak{h}$ l'algèbre de Lie de base $\{e_i\}_{1 \leqslant i \leqslant 5}$ avec

$$[e_1,e_2] = e_5 \; ; [e_2,e_3] = e_3 \; ; [e_2,e_4] = -e_4 \; ; [e_3,e_4] = e_5$$

les autres crochets étant nuls ou s'en déduisant par antisymétrie.

Soient $= \sum_{i=2}^{5} k\, e_i$ (algèbre diamant), $f \in \mathfrak{h}^*$ et $g = f/\mathfrak{g}$.

1) Si $g(e_5) \neq 0$, on a $\mathfrak{g}_2(f)^{\infty} = \sum_{3}^{5} k\, e_i$ et g n'est donc pas de type $(\mathscr{B})$. Si $g(e_5) = 0$, il est trivial de vérifier que g est de type $(\mathscr{B})$. On voit dans cet exemple que l'ensemble des éléments de $\mathfrak{g}^*$ de type $(\mathscr{B})$ est un fermé de Zariski de $\mathfrak{g}^*$ (voir à ce sujet la proposition 3.6 et l'exemple 7.2).

2) Si $f([\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]) = 0$, f est clairement de type $(\mathscr{B})$. Si $f(e_5) = 0$ et $f([\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]) \neq 0$, on a $\mathfrak{h}_2(f) = k\, e_1 + [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$ qui est nilpotente. Enfin, si $f(e_5) \neq 0$, il vient $\mathfrak{h}_2(f) = [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ est donc de type $(\mathscr{B})$. On voit ainsi qu'une algèbre de Lie peut être de type $(\mathscr{B})$ et contenir un idéal qui ne le soit pas.

3.4. LEMME. *Soient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie et* $\mathfrak{a}$ *un sous-espace vectoriel de* .

(i) *La fonction* $d : \mathfrak{g}^* \to \mathbb{N}$ *définie par* $d(f) = \dim(\mathfrak{g}(f) \cap \mathfrak{a})$ *est semi-continue supérieurement.*

(ii) *La fonction* $d_1 : \mathfrak{g}^* \to \mathbb{N}$ *définie par* $d_1(f) = \dim(\mathfrak{g}(f) + \mathfrak{a})$ *est semi-continue inférieurement sur toute partie de* $\mathfrak{g}^*$ *où la fonction* $f \to \dim \mathfrak{g}(f)$ *est constante.*

Démonstration. Soit $\{x_1,\dots,x_n\}$ une base de $\mathfrak{g}$ telle que $\{x_1,\dots,x_p\}$, $p \leqslant n$, soit une base de $\mathfrak{a}$. On a $d(f) = \dim \mathfrak{a} - \mathrm{rang}(f([x_i,x_j]))_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant p}$. D'où aussitôt (i). L'assertion (ii) est alors immédiate.

3.5. LEMME. *Soient* $\mathfrak{a} \in \mathscr{I}(\mathfrak{g})^\infty$ *et* $\mathfrak{m}$ *l'idéal de* $\mathfrak{g}$ *tel que* $\mathfrak{m} / \mathfrak{a}$ *soit le plus grand idéal nilpotent de* $\mathfrak{g} / \mathfrak{a}$ *. Soit* $\mathfrak{p} \in \mathscr{I}(\mathfrak{g})$*. Les conditions suivantes sont équivalentes*

(i) $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}$

(ii) $\mathfrak{p}^\infty \subset \mathfrak{a}$.

Démonstration. Si $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}$, on a $\mathfrak{p}^\infty \subset \mathfrak{m}^\infty \subset \mathfrak{a}$. D'où l'implication (i) ⇒ (ii). L'algèbre de Lie $\mathfrak{p} / \mathfrak{p}^\infty$ est nilpotente. Si $\mathfrak{p}^\infty \subset \mathfrak{a}$, l'idéal $(\mathfrak{p} + \mathfrak{a}) / \mathfrak{a}$ est donc nilpotent. D'où (ii) ⇒ (i).

3.6. PROPOSITION. *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie résoluble. Pour tout* $\mathfrak{a} \in \mathscr{I}(\mathfrak{g})^\infty$ *l'ensemble des* $f \in \mathfrak{g}^*$ *tels que* $\mathfrak{g}_2(f)^\infty = \mathfrak{a}$ *est une partie constructible de* $\mathfrak{g}^*$*. L'ensemble des* $f \in \mathfrak{g}^*$ *de type* $(\mathscr{B})$ *est une partie constructible de* $\mathfrak{g}^*$*.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{m}$ un idéal de $\mathfrak{g}$ contenant $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Dire que $\mathfrak{g}_2(f) \subset \mathfrak{m}$ signifie que $\dim(\mathfrak{g}(f) + \mathfrak{m}) \leqslant \dim \mathfrak{m}$. L'ensemble des $f \in \mathfrak{g}^*$ tels que $\mathfrak{g}_2(f) \subset \mathfrak{m}$ est donc une partie constructible de $\mathfrak{g}^*$ (lemme 3.4). Pour $\mathfrak{a} \in \mathscr{I}(\mathfrak{g})^\infty$, désignons par $\mathfrak{n}(\mathfrak{a})$ l'idéal de $\mathfrak{g}$ tel que $\mathfrak{n}(\mathfrak{a}) / \mathfrak{a}$ soit le plus grand idéal nilpotent de $\mathfrak{g} / \mathfrak{a}$. Soit $f \in \mathfrak{g}^*$; dire que $\mathfrak{g}_2(f)^\infty \subset \mathfrak{a}$ signifie que $\mathfrak{g}_2(f) \subset \mathfrak{n}(\mathfrak{a})$ (lemme 3.5), l'ensemble des $f \in \mathfrak{g}^*$ tels que $\mathfrak{g}_2(f)^\infty \subset \mathfrak{a}$ est donc une partie constructible de $\mathfrak{g}^*$. Comme $\mathscr{I}(\mathfrak{g})^\infty$ est fini (lemme 2.2), l'ensemble des $f \in \mathfrak{g}^*$ tels que $\mathfrak{g}_2(f)^\infty = \mathfrak{a}$ est donc une partie constructible de $\mathfrak{g}^*$.

Soient $\mathfrak{a} \in \mathscr{I}(\mathfrak{g})^\infty$ et $\mathscr{S} = \{f \in \mathfrak{g}^* ;\ \mathfrak{g}_2(f)^\infty = \mathfrak{a}\}$. Un élément de $\mathscr{S}$ est de type $(\mathscr{B})$ si et seulement si $f(\mathfrak{a}) = 0$. On obtient donc aisément la deuxième assertion de la proposition.

3.7. PROPOSITION. *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie. S'il existe un idéal abélien* $\mathfrak{a}$ *de* $\mathfrak{g}$ *tel que* $\mathfrak{g} / \mathfrak{a}$ *soit nilpotente,* $\mathfrak{g}$ *est de type* $(\mathscr{B})$*.*

Démonstration. Soient $f \in \mathfrak{g}^*$, $x \in \mathfrak{g}(f)$ générique pour $\mathfrak{g}_2(f)$ et $\mathfrak{m} = \bigcap_{1} \mathrm{Im}(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_2(f)} x)^n$.
On a (lemme 2.1) : $\mathfrak{g}_2(f)^\infty = \mathfrak{m} + [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$. Comme $\mathfrak{g} / \mathfrak{a}$ est nilpotente, il vient $\mathfrak{g}_2(f)^\infty \subset \mathfrak{g}^\infty \subset \mathfrak{a}$ et donc $\mathfrak{g}_2(f)^\infty = \mathfrak{m}$. Enfin, de $[x, \mathfrak{m}] = \mathfrak{m}$ et $x \in \mathfrak{g}(f)$, on déduit $f(\mathfrak{m}) = 0$. D'où le résultat.

3.8. *Remarque.* Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de base $\{e_i\}_{1 \leqslant i \leqslant 4}$ avec

$$[e_1,e_2] = e_2 \ ; [e_1,e_3] = e_3 \ ; [e_1,e_4] = 2e_4 \ ; [e_2,e_3] = e_4$$

les autres crochets étant nuls ou s'en déduisant par antisymétrie.

On a $\mathfrak{g}^{\infty} = \sum_{2}^{4} k\, e_i$ qui n'est pas commutatif. Les hypothèses de la proposition 3.7 ne sont donc pas satisfaites. Soit $f \in \mathfrak{g}^*$. Si $f(e_4) \neq 0$, on a $\mathfrak{g}(f) = 0$. Si $f(e_4) = 0$ et $f([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) \neq 0$, il vient $\mathfrak{g}(f) = k\, e_4 + k(f(e_3)e_2 - f(e_2)e_3)$. On voit donc que $\mathfrak{g}$ est de type $(\mathscr{B})$.

3.9. LEMME. *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie résoluble, $\mathfrak{a}$ un idéal de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g} / \mathfrak{a}$.*

(i) *Soient $f \in \mathfrak{g}^*$ nulle sur $\mathfrak{a}$ et f' la forme linéaire sur $\mathfrak{g}'$ déduite de f par passage au quotient. Alors, f est de type $(\mathscr{B})$ si et seulement si f' est de type $(\mathscr{B})$.*

(ii) *Si $\mathfrak{g}$ est de type $(\mathscr{B})$, il en est de même de $\mathfrak{g}'$.*

Démonstration. L'assertion (i) est conséquence triviale de $\mathfrak{g}'(f') = \mathfrak{g}(f) / \mathfrak{a}$; l'assertion (ii) s'en déduit aussitôt.

3.10. LEMME. *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie résoluble,* $y \in \mathfrak{g} - \{0\}$ *et* $\lambda \in \mathfrak{g}^* - \{0\}$ *tels que* $[x,y] = \lambda(x)y$ *pour tout* $x \in \mathfrak{g}$. *Soient* $f \in \mathfrak{g}^*$ *telle que* $f(y) \neq 0$ *et* $\mathfrak{g} = f \mid \ker \lambda$. *Alors, f est de type $(\mathscr{B})$ si et seulement si g est de type $(\mathscr{B})$.*

Démonstration. Posons $\mathfrak{a} = \ker \lambda$ et soit $\mathfrak{n}$ le plus grand idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$. Un élément de x de $\mathfrak{g}(f)$ (resp. $\mathfrak{a}(g)$) générique dans $\mathfrak{g}(f) + \mathfrak{n}$ (resp. $\mathfrak{a}(g) + \mathfrak{n}$) l'est aussi dans $\mathfrak{g}_2(f)$ (resp. $\mathfrak{a}_2(g)$) ([6], 1.9.13). On a donc, d'après le lemme 2.1, $(\mathfrak{n} + \mathfrak{g}(f))^{\infty} = \mathfrak{g}_2(f)^{\infty}$ et $(\mathfrak{n} + \mathfrak{a}(g))^{\infty} = \mathfrak{a}_2(g)^{\infty}$. D'autre part, $\mathfrak{g}(f) \subset \mathfrak{a}$; il résulte alors facilement de [6], lemme 1.12.2, (ii), que $\mathfrak{a}(g) = \mathfrak{g}(f) + k\,.\,y$. On en déduit $\mathfrak{n} + \mathfrak{g}(f) = \mathfrak{n} + \mathfrak{a}(g)$ et alors $\mathfrak{g}_2(f)^{\infty} = \mathfrak{a}_2(g)^{\infty}$. D'où le résultat.

3.11. PROPOSITION. *Toute algèbre de Lie résoluble de dimension $\leqslant 3$ est de type $(\mathscr{B})$. A isomorphisme près, l'algèbre diamant est la seule algèbre de Lie résoluble de dimension $\leqslant 4$ qui ne soit pas de type $(\mathscr{B})$.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{n}$ le plus grand idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{n} = \mathfrak{g}$ ou si $\mathfrak{n}$ est commutatif, $\mathfrak{g}$ est de type $(\mathscr{B})$ (proposition 3.7). La première assertion de la proposition en résulte trivialement. Soient $\mathfrak{g}$ de dimension 4 et $f \in \mathfrak{g}^*$ qui ne soit pas de type $(\mathscr{B})$. (Un tel couple existe d'après 3.3, (1)). Ce qui précède montre que $\mathfrak{n}$ est une algèbre de Heisenberg de dimension 3. Il existe donc une base $\{e_i\}_{1 \leqslant i \leqslant 4}$ de $\mathfrak{g}$ telle que $\mathfrak{n} = \sum_{2}^{4} k\, e_i$ et $[e_2, e_3] = e_4$. Le centre $k\, e_4$ de $\mathfrak{n}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$. La première partie et le lemme 3.9 montrent que $f(e_4) \neq 0$. On déduit alors du lemme 3.8 que e_4 est central dans $\mathfrak{g}$. Il existe donc des scalaires a, a', b, b', c, c' tels que

$$[e_1,e_2] = ae_2 + be_3 + ce_4 \,;\, [e_1,e_3] = a'e_2 + b'e_3 + c'e_4$$

Quitte à changer e_1 en $e_1 - c'e_2 + ce_3$, on peut supposer $c = c' = 0$. Les vecteurs $ae_2 + be_3$ et $a'e_2 + b'e_3$ sont linéairement indépendants (car sinon $\mathfrak{g}$ vérifie les hypothèses de la proposition 3.7 et est donc de type ($\mathscr{B}$)). L'identité de Jacobi fournit aisément $a = -b'$. On a d'autre part $a \neq 0$ (car sinon $\mathfrak{g} \,/\, (k\, e_3 + k\, e_5)$ est nilpotente et $\mathfrak{g}$ est de type ($\mathscr{B}$) d'après la proposition 3.7). Il est alors facile de vérifier qu'il existe une base $\{x_i\}_{1 \leqslant i \leqslant 4}$ de $\mathfrak{g}$ avec

$$[x_1,x_2] = x_2 \,;\, [x_1,x_3] = -x_3 \,;\, [x_2,x_3] = x_4$$

D'où le résultat.

3.12. THEOREME. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie résoluble de type ($\mathscr{B}$). Alors l'application $\beta_{\mathfrak{g}}$ est bicontinue.*

Nous ne démontrerons pas ce théorème qui est un cas particulier de 4.11. Remarquons cependant que, compte-tenu de 3.7 et 3.8, il fournit une généralisation de [3], theorem 1.

4. - FORMES LINEAIRES ET ALGEBRES DE LIE DE TYPE ($\mathscr{A}$)

4.1. LEMME. *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie résoluble, $\mathfrak{a}$ un idéal de $\mathfrak{g}$ et $f \in \mathfrak{g}^*$. Les conditions suivantes sont équivalentes*

(i) $\mathfrak{g}[f] \subset \mathfrak{a}$.

(ii) $\mathfrak{g}_1[f] \subset \mathfrak{a}$.

(iii) $I(f) = \mathrm{Ind}(I(f \mid \mathfrak{a})\,;\, \mathfrak{g})$.

Démonstration. L'équivalence de (i) et de (ii) résulte du fait que $\mathfrak{a}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$. L'équivalence de (ii) et de (iii) résulte de [11], 3.2,3.7,3.8 et 3.9.

4.2. LEMME. *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie résoluble et $f \in \mathfrak{g}^*$. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) $f(\mathfrak{g}_2[f]^\infty) = 0$.

(ii) $\mathfrak{g}_2[f] \,/\, \mathfrak{g}_0(f)$ *est une algèbre de Lie nilpotente.*

(iii) $\mathfrak{g}_1[f] \,/\, \mathfrak{g}_0(f)$ *est une algèbre de Lie nilpotente.*

(iv) $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}[f]}\, \mathfrak{g}[f]$ *est une algèbre de Lie nilpotente d'endomorphismes nilpotents de* $\mathfrak{g} \,/\, \mathfrak{g}[f]$.

(v) *Il existe une sous-algèbre de Lie* $\mathfrak{p}$ *de* $\mathfrak{g}$ *subordonnée à* f *et contenant* $\mathfrak{g}[f]$ *telle que* $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{p}}\, \mathfrak{g}[f]$ *soit une algèbre de Lie nilpotente d'endomorphismes nilpotents de* $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$.

(vi) *Il existe des idéaux* $\mathfrak{m}$ *et* $\mathfrak{k}$ *de* $\mathfrak{g}$ *vérifiant*
a) $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{m}$ *et* $\mathfrak{m}/\mathfrak{k}$ *est nilpotente.*
b) $f(\mathfrak{k}) = 0$.
c) $I(f) = \mathrm{Ind}_U(I(f \mid \mathfrak{m})\,;\, \mathfrak{g})$.

Démonstration. L'équivalence des conditions (i) à (v) se démontre comme en 3.1. Il résulte du lemme 4.1 que $I(f) = \mathrm{Ind}_U(I(f \mid \mathfrak{g}_1[f])\,;\, \mathfrak{g})$. On a donc (iii) $\Rightarrow$ (vi) en prenant $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}_1[f]$, $\mathfrak{k} = \mathfrak{g}_0(f)$. Inversement, si la condition (vi) est vérifiée, on a $\mathfrak{g}_1[f] \subset \mathfrak{m}$ (lemme 4.1) et $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}_0(f)$; (iii) est alors vérifiée.

4.3. Une forme linéaire sur $\mathfrak{g}$ sera dite de type $(\mathscr{A})$ si elle vérifie les conditions équivalentes de 4.2. Une algèbre de Lie résoluble $\mathfrak{g}$ sera dite de type $(\mathscr{A})$ si tout élément de $\mathfrak{g}^*$ est de type $(\mathscr{A})$.

4.4. Une forme linéaire de type $(\mathscr{B})$ étant de type $(\mathscr{A})$ et l'algèbre diamant étant algébrique, ce qui a été dit en 3.3 et 3.11 est encore valable si on y remplace «type $(\mathscr{B})$» par «type $(\mathscr{A})$».

4.5. LEMME. *Soient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie et* $\mathfrak{a}$ *un sous-espace vectoriel de* $\mathfrak{g}$.

(i) *La fonction* $d : \mathfrak{g}^* \to \mathbb{N}$ *définie par* $d(f) = \dim(\mathfrak{g}[f] \cap \mathfrak{a})$ *est semi-continue supérieurement.*

(ii) *La fonction* $d_1 : \mathfrak{g}^* \to \mathbb{N}$ *définie par* $d_1(f) = \dim(\mathfrak{g}[f] + \mathfrak{a})$ *est semi-continue inférieurement sur toute partie de* $\mathfrak{g}^*$ *sur laquelle la fonction* $f \to \dim \mathfrak{g}[f]$ *est constante.*

Démonstration. Soit $\mathscr{G}$ la plus petite sous-algèbre de Lie algébrique de $\mathrm{gl}(\mathfrak{g})$ contenant $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, \mathfrak{g}$, $\{X_1,\ldots,X_r\}$ une base de $\mathscr{G}$ et $\{x_1,\ldots,x_s\}$ une base de $\mathfrak{a}$. On a : $\dim(\mathfrak{g}[f] \cap \mathfrak{a}) = \dim \mathfrak{a} - \mathrm{rang}(f(X_i x_j))_{1 \leqslant i \leqslant r, 1 \leqslant j \leqslant s}$. Le lemme s'en déduit facilement.

4.6. Compte tenu du lemme 4.5, on peut reprendre, mutatis mutandis, la démonstration de 3.5 et 3.6 et on obtient le résultat suivant

PROPOSITION. *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie résoluble. Pour tout* $\mathfrak{a} \in \mathscr{S}(\mathfrak{g})^\infty$, *l'ensemble des* $f \in \mathfrak{g}^*$ *tels que* $\mathfrak{g}_2[f]^\infty = \mathfrak{a}$ *est une partie constructible de* $\mathfrak{g}^*$. *L'ensemble des* $f \in \mathfrak{g}^*$ *de type* $(\mathscr{A})$ *est une partie constructible de* $\mathfrak{g}^*$.

4.7. *LEMME. Soient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie résoluble et* $(f_i)_{i \in \Lambda}$ *une famille d'éléments de* $\mathfrak{g}^*$ *de type* $(\mathscr{A})$. *Il existe des idéaux* $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_r, \mathfrak{k}_1, \ldots, \mathfrak{k}_r$ *de* $\mathfrak{g}$ *tels que*

(i) *Pour tout* $j \in \{1,\ldots,r\}$, *on a* $\mathfrak{k}_j \subset \mathfrak{m}_j$ *et* $\mathfrak{m}_j / \mathfrak{k}_j$ *est nilpotente.*

(ii) *Pour tout* $i \in \Lambda$, *il existe* $j \in \{1,\ldots,r\}$ *tel que* $f(\mathfrak{k}_j) = 0$ *et*
$I(f_i) = \mathrm{Ind}_U(I(f_i \mid \mathfrak{m}_j) ; \mathfrak{g})$.

Démonstration. Notons $\mathfrak{k}_1, \ldots, \mathfrak{k}_r$ l'ensemble des $\mathfrak{g}_2[f_i]^\infty$, $i \in \Lambda$, distincts (lemme 2.2). Pour $1 \leqslant j \leqslant r$, soit $\mathfrak{m}_j$ l'idéal de $\mathfrak{g}$ tel que $\mathfrak{m}_j / \mathfrak{k}_j$ soit le plus grand idéal nilpotent de $\mathfrak{g} / \mathfrak{k}_j$. Si $\mathfrak{g}_2[f_i]^\infty = \mathfrak{k}_j$, $\mathfrak{g}_2[f_i] / \mathfrak{k}_j$ est nilpotent donc $\mathfrak{g}_1[f_i] \subset \mathfrak{g}_2[f_i] \subset \mathfrak{m}_j$. D'après le lemme 4.1, on a $I(f_i) = \mathrm{Ind}(I(f_i \mid \mathfrak{m}_j) ; \mathfrak{g})$. Enfin $f_i(\mathfrak{k}_j) = 0$ car f_i est de type $(\mathscr{A})$.

4.8. - Il résulte de 4.2 et de 4.7 le résultat suivant.

PROPOSITION. *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie résoluble. Les conditions suivantes sont équivalentes*

(i) $\mathfrak{g}$ *est de type* $(\mathscr{A})$.

(ii) *Il existe des idéaux* $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_r, \mathfrak{k}_1, \ldots, \mathfrak{k}_r$ *de* $\mathfrak{g}$ *vérifiant*

a) Pour $1 \leqslant j \leqslant r$ *on a* $\mathfrak{k}_j \subset \mathfrak{m}_j$ *et* $\mathfrak{m}_j / \mathfrak{k}_j$ *est nilpotente.*

b) Pour tout $f \in \mathfrak{g}^*$, *il existe* $j \in \{1,\ldots,r\}$ *tel que* $f(\mathfrak{k}_j) = 0$ *et*
$I(f) = \mathrm{Ind}(I(f \mid \mathfrak{m}_j) ; \mathfrak{g})$.

4.9. LEMME. *Soient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie résoluble,* $\mathfrak{a}$ *un idéal de* $\mathfrak{g}$ *et* $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g} / \mathfrak{a}$.

1) Soient $f \in \mathfrak{g}^*$ *nulle sur* $\mathfrak{a}$ *et* f' *l'élément de* $\mathfrak{g}'^*$ *déduit de* f *par passage au quotient. On a*

(i) $\mathfrak{g}'[f'] = \mathfrak{g}[f] / \mathfrak{a}$.

(ii) f *est de type* $(\mathscr{A})$ *si et seulement si* f' *est de type* $(\mathscr{A})$.

2) Si $\mathfrak{g}$ *est de type* $(\mathscr{A})$, $\mathfrak{g}'$ *est de type* $(\mathscr{A})$.

Démonstration. Il est immédiat qu'il suffit de prouver 1), (i). Soient $\mathscr{G}$ la plus petite sous-algèbre de Lie algébrique de $gl(\mathfrak{g})$ contenant $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, \mathfrak{g}$ et $\mathscr{G}'$ l'image de $\mathscr{G}$ par l'application naturelle de $\mathscr{G}$ dans $gl(\mathfrak{g}')$. On a $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}'}\, \mathfrak{g}' \subset \mathscr{G}'$ et $\mathscr{G}'$ est algébrique ([5], propositions III,30 et 31). Il est donc immédiat, d'après les définitions que $\mathfrak{g}[f] / \mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}'[f']$.

Désignons par $d(A)$ la dimension de Gelfand-Kirillov d'une k-algèbre A. D'après [10], corollaire III,2.5 et [11], section 3.6, on a

$$d(U(\mathfrak{g}) / I(f)) = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}[f] \,;\, d(U(\mathfrak{g}') / I(f')) = \dim \mathfrak{g}' - \dim \mathfrak{g}'[f']$$

Les algèbres $U(\mathfrak{g})/I(f)$ et $U(\mathfrak{g}')/I(f')$ étant isomorphes, il vient $\dim \mathfrak{g}'[f'] = \dim \mathfrak{g}[f] - \dim \mathfrak{a}$. D'où l'assertion (i).

4.10. - Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie résoluble, on note $\mathfrak{g}^*_{\mathfrak{n}}$ l'ensemble des $f \in \mathfrak{g}^*$ tels que $\mathfrak{g}_2[f]$ soit nilpotent.

LEMME. *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie résoluble, $f \in \mathfrak{g}^*$ et $(f_i)_{i \in \Lambda}$ une famille d'éléments de $\mathfrak{g}^*_{\mathfrak{n}}$. Si $\bigcap_{i \in \Lambda} I(f_i) \subset I(f)$, on a $\bigcap_{i \in \Lambda} J(f_i) \subset J(f)$.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{n}$ le plus grand idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$. Pour $i \in \Lambda$ posons $P_i = U(\mathfrak{n}) \cap I(f_i)$, $Q_i = S(\mathfrak{n}) \cap J(f_i)$. On a $Q_i = \beta_{\mathfrak{n}}(P_i)$ et $S(\mathfrak{n}) \cap J(f) = \beta_{\mathfrak{n}}(U(\mathfrak{n}) \cap I(f))$ ([11], corollaire 2.2). D'après [11], corollaire 3.10, on a $I(f_i) = U(\mathfrak{g}) . P_i$. On en déduit $\bigcap_{i \in \Lambda} I(f_i) = U(\mathfrak{g})(\bigcap_{i \in \Lambda} P_i)$ ([7], lemme 3.3) et de même, $\bigcap_{i \in \Lambda} J(f_i) = S(\mathfrak{g})(\bigcap_{i \in \Lambda} Q_i)$. Il résulte de $\bigcap_{i \in \Lambda} I(f_i) \subset I(f)$ que $\bigcap_{i \in \Lambda} P_i \subset U(\mathfrak{n}) \cap I(f)$. L'application $\beta_{\mathfrak{n}}$ étant bicontinue ([4]), il vient $\bigcap_{i \in \Lambda} Q_i \subset \beta_{\mathfrak{n}}(U(\mathfrak{n}) \cap I(f)) = S(\mathfrak{n}) \cap J(f)$. On a alors $\bigcap_{i \in \Lambda} J(f_i) = S(\mathfrak{g})(\bigcap_{i \in \Lambda} Q_i) \subset S(\mathfrak{g})(S(\mathfrak{n}) \cap J(f)) \subset J(f)$.

4.11. THEOREME. *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie résoluble, Γ le groupe adjoint algébrique de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^*_{\mathcal{A}}$ l'ensemble des éléments de $\mathfrak{g}^*$ de type $(\mathcal{A})$ et $\mathrm{Prim}_{\mathcal{A}}\, U(\mathfrak{g})$ l'image de $\mathfrak{g}^*_{\mathcal{A}}$ par l'application de Dixmier. L'application $\mathfrak{g}^*_{\mathcal{A}} / \Gamma \to \mathrm{Prim}_{\mathcal{A}}\, U(\mathfrak{g})$ définie par $\Gamma . f \to I(f)$ est bicontinue.*

Démonstration. On sait déjà que l'application définie dans le théorème est continue. Nous allons en fait démontrer le résultat plus fort suivant : si $f \in \mathfrak{g}^*$ et si $(f_i)_{i \in \Lambda}$ est une famille d'éléments de $\mathfrak{g}^*_{\mathcal{A}}$ tels que $\bigcap_{i \in \Lambda} I(f_i) \subset I(f)$, alors $\bigcap_{i \in \Lambda} J(f_i) \subset J(f)$. On démontre le résultat par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$. Soient $\{\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_r\} = \{\mathfrak{g}_2[h]^\infty ; h \in \mathfrak{g}^*_{\mathcal{A}}\}$ (lemme 2.2) et $\Lambda_j = \{i \in \Lambda ; \mathfrak{g}_2[f_i]^\infty = \mathfrak{a}_j\}$, $1 \leqslant j \leqslant r$. L'idéal $I(f)$ étant primitif (donc premier), il existe $j \in \{1, \dots, r\}$ tel que $\bigcap_{i \in \Lambda_j} I(f_i) \subset I(f)$. On peut donc supposer $\Lambda = \Lambda_j$. On a $\mathfrak{a}_j \subset I(f_i)$ pour $i \in \Lambda$ (car f_i est de type $(\mathcal{A})$) ; d'où $\mathfrak{a}_j \subset I(f)$. Si $\mathfrak{a}_j = 0$, le résultat est une conséquence du lemme 4.10. Si $\mathfrak{a}_j \neq 0$, il suffit d'appliquer l'hypothèse de récurrence à $\mathfrak{g} / \mathfrak{a}_j$ (lemme 4.9, (ii)).

4.12. COROLLAIRE. *Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie résoluble de type $(\mathcal{A})$, l'application $\beta_{\mathfrak{g}}$ est bicontinue.*

4.13. COROLLAIRE. *Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie résoluble de type $(\mathcal{A})$, l'algèbre $U(\mathfrak{g})$ est* *caténaire.*

Démonstration. Le corollaire résulte de 4.11 et de [8], proposition 3.2.

5. - COMPARAISON DES DEUX NOTIONS PRECEDENTES

5.1. - Il est clair que toute forme linéaire de type ($\mathscr{B}$) est de type ($\mathscr{A}$) et, si $\mathfrak{g}$ est ad-algébrique, les deux notions coïncident. Dans le cas général, une forme linéaire (resp. une algèbre de Lie) de type ($\mathscr{A}$) n'est pas nécessairement de type ($\mathscr{B}$). Donnons un exemple. Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de base $\{e_1,\dots,e_6\}$ avec

$$[e_1,e_2]=e_6\ ;\ [e_1,e_3]=e_3\ ;\ [e_2,e_4]=e_4\ ;\ [e_2,e_5]=-e_5\ ;\ [e_4,e_5]=e_6$$

les autres crochets étant nuls ou s'en déduisant par antisymétrie. Soit $f\in\mathfrak{g}^*$. Si $f(e_3)=f(e_6)=0$ et $f([\mathfrak{g},\mathfrak{g}])\neq 0$, on a $\mathfrak{g}_2(f)=ke_1+[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$, $\mathfrak{g}_2(f)^\infty=ke_3\subset\mathfrak{g}_0(f)$; f est de type ($\mathscr{B}$).

Si $f(e_3)=0$ et $f(e_6)\neq 0$, on a $\mathfrak{g}(f)=ke_3+ke_6\subset[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$; f est de type ($\mathscr{B}$).

Si $f(e_6)=0$ et $f(e_3)\neq 0$, on a $\mathfrak{g}_2(f)=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ si $f(e_4)$ ou si $f(e_5)$ est non nul et $\mathfrak{g}_2(f)=ke_2+ke_4+ke_5+ke_6$ si $f(e_4)=f(e_5)=0$. Dans les deux cas, f est de type ($\mathscr{B}$).

Supposons $f(e_3)\ f(e_6)\neq 0$. Il vient $\mathfrak{g}(f)=kv+ke_6$ avec $v=f(e_3)f(e_6)e_2+f(e_3)f(e_5)e_4+f(e_3)f(e_4)e_5-f(e_6)^2e_3$. On a alors $\mathfrak{g}_2(f)^\infty=\sum_4^6 ke_i$ et f n'est pas de type ($\mathscr{B}$). Soient $s=(\mathrm{ad}\,e_1)^2$ et $n=\mathrm{ad}\,e_1-(\mathrm{ad}\,e_1)^2$. Il est immédiat de vérifier que s (resp. n) est la composante semi-simple (resp. nilpotente) de ad e_1. Les éléments s et n de gl($\mathfrak{g}$) appartiennent donc à la plus petite sous-algèbre de Lie algébrique de gl($\mathfrak{g}$) contenant $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\,\mathfrak{g}$. Soit $u=a\,.\,v+b\,.\,e_6$, $a,b\in k$ un élément de $\mathfrak{g}[f]$. On a $f(s\,.\,u)=-af(e_6)^2f(e_3)$; il vient donc $a=0$ et $\mathfrak{g}[f]=ke_6$. On a alors $\mathfrak{g}_2[f]=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ et f est de type ($\mathscr{A}$).

On a donc montré que $\mathfrak{g}$ est de type ($\mathscr{A}$) sans être de type ($\mathscr{B}$).

5.2. - Conservons les notations de 5.1 et supposons $f(e_3)\ f(e_6)\neq 0$. Soient $\mathfrak{p}=\sum_2^6 ke_i$ le centralisateur de e_3 dans $\mathfrak{g}$ et $g=f\mid\mathfrak{p}$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{p}$ étant algébrique, on a $\mathfrak{p}_2[g]^\infty=\mathfrak{p}_2(g)^\infty=ke_4+ke_5+ke_6$. La forme linéaire g n'est donc pas de type ($\mathscr{A}$). Compte tenu de 5.1, on voit que le lemme 3.10 n'est plus valable si on y remplace «type ($\mathscr{B}$)» par «type ($\mathscr{A}$)».

5.3. PROPOSITION. *Soient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie résoluble et* $\mathfrak{n}$ *le plus grand idéal nilpotent de* $\mathfrak{g}$. *Si* $\dim(\mathfrak{g}/\mathfrak{n})\leqslant 1$, *un élément de* $\mathfrak{g}^*$ *est de type* ($\mathscr{A}$) *si et seulement si il est de type* ($\mathscr{B}$).

Démonstration. Si $\mathfrak{g}(f) \subset \mathfrak{n}$, c'est clair. S'il n'en est pas ainsi, on a $\mathfrak{g}(f) + \mathfrak{n} = \mathfrak{g}$ et alors $\mathfrak{g}[f] = \mathfrak{g}(f)$ ([11], lemme 3.11). D'où le résultat.

5.4. PROPOSITION. *Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie résoluble de dimension $\leqslant 5$, un élément de $\mathfrak{g}^*$ est de type ($\mathcal{A}$) si et seulement si il est de type ($\mathcal{B}$).*

Démonstration. Si dim $\mathfrak{g} \leqslant 4$, la proposition résulte de 3.3, (1), 3.11 et 4.4. Supposons dim $\mathfrak{g} = 5$; soit $\mathfrak{n}$ le plus grand idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{n}$ est commutatif (resp. dim$(\mathfrak{g}/\mathfrak{n}) \leqslant 1$) on a le résultat d'après 3.7 (resp. 5.3). Nous supposerons donc que $\mathfrak{n}$ est une algèbre de Heisenberg de dimension 3 et de centre $\mathfrak{z}$. Soit $f \in \mathfrak{g}^*$ qui ne soit pas de type ($\mathcal{B}$). Si $\mathfrak{g}_o(f) \neq 0$, d'après les lemmes 3.9, (i) et 4.9, (ii) et ce qui précède, f n'est pas de type ($\mathcal{A}$). Supposons donc $\mathfrak{g}_o(f) = 0$ et en particulier $f(\mathfrak{z}) \neq 0$. Si $g = f \mid n$, on a $\mathfrak{n}(g) = \mathfrak{z}$. Comme $\mathfrak{g}(f) \cap \mathfrak{n} \subset \mathfrak{n}(g)$, il vient dim$(\mathfrak{g}(f) \cap \mathfrak{n}) \leqslant 1$, d'où dim $\mathfrak{g}(f) = 1$ ou 3. Si dim $\mathfrak{g}(f) = 3$, on en déduit $\mathfrak{g}(f) + \mathfrak{n} = \mathfrak{g}$. Il en résulte $\mathfrak{g}(f) = \mathfrak{g}[f]$ ([11], lemme 3.11) et f n'est pas de type ($\mathcal{A}$). Supposons dim $\mathfrak{g}(f) = 1$. Si dim$(\mathfrak{g}(f) \cap \mathfrak{n}) = 1$, on a $\mathfrak{g}(f) = \mathfrak{z}$ et donc $\mathfrak{g}(f) = \mathfrak{g}[f]$; c'est à nouveau terminé. Supposons enfin dim $\mathfrak{g}(f) = 1$ et $\mathfrak{g}(f) \cap \mathfrak{n} = 0$. Il en résulte que $\mathfrak{z}$ n'est pas central dans $\mathfrak{g}$. Soit $\mathfrak{p}$ le centralisateur de $\mathfrak{z}$ dans $\mathfrak{g}$. D'après le lemme 3.10 et la proposition 3.11, $\mathfrak{g}$ admet une base $\{e_i\}_{1 \leqslant i \leqslant 5}$ avec $\mathfrak{p} = \sum_{2}^{5} ke_i$ et

$$[e_2,e_3] = e_3\ ;\ [e_2,e_4] = -e_4\ ;\ [e_3,e_4] = e_5\ ;\ [e_1,e_5] = e_5$$

$$[e_1,e_2] = \alpha e_3 + \beta e_4 + \gamma e_5\ ;\ [e_1,e_3] = ae_3 + be_4 + ce_5\ ;$$

$$[e_1,e_4] = a'e_3 + b'e_4 + c'e_5.$$

où $\alpha, \beta, \gamma, a, a', b, b', c, c'$ sont des scalaires. L'identité de Jacobi fournit aisément $b' = 1 - a$, $b = 0$, $a' = 0$, $\beta = -c$, $\alpha = -c'$ et, quitte à changer e_2 en $e_2 - \gamma e_5$, on peut supposer $\gamma = 0$. Il est alors immédiat de vérifier que $(e_2e_5 + e_3e_4)e_5^{-1}$ est un élément central du corps enveloppant de $\mathfrak{g}$. On en déduit que l'algèbre $U(\mathfrak{g})$ n'est pas primitive et, d'après [10], corollaire III,2.5 et [11], 3.6, on a $\mathfrak{g}[h] \neq 0$ pour tout $h \in \mathfrak{g}^*$. De dim $\mathfrak{g}(f) = 1$, on déduit alors $\mathfrak{g}(f) = \mathfrak{g}[f]$ et f n'est pas de type ($\mathcal{A}$).

6. - COMPLEMENTS SUR LES FORMES LINEAIRES DE TYPE ($\mathcal{A}$)

Nous ne proposons, dans cette section, d'étudier plus en détail les formes linéaires de type ($\mathcal{A}$). Rappelons ([11]) qu'une pseudo-polarisation de $\mathfrak{g}$ en f est une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}$ subordonnée à f et telle que $I(f) = \mathrm{Ind}_{\widetilde{U}}(I(f \mid \mathfrak{p})\ ;\ \mathfrak{g})$. On note $SP(f\ ;\ \mathfrak{g})$ l'ensemble des pseudo-polarisations de $\mathfrak{g}$ en f.

6.1. LEMME. *Soient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie résoluble,* $f \in \mathfrak{g}^*$ *et* $h \in \mathfrak{g}^*$ *nulle sur* $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. *Les conditions suivantes sont équivalentes*

(i) $h(\mathfrak{g}[f]) = 0$.

(ii) $I(f) = I(f+h)$.

Si ces conditions sont vérifiées, on a $I(f) = \mathrm{Ind}_{\tilde{U}}(I(f \mid \mathfrak{p}) ; \mathfrak{g}) = \mathrm{Ind}_U(I(f \mid \mathfrak{p}) ; \mathfrak{g})$ *pour toute* $\mathfrak{p} \in SP(f ; \mathfrak{g})$.

Démonstration. Prouvons (i) ⇒ (ii). Si $\mathcal{G}$ est la plus petite sous-algèbre de Lie algébrique de $gl(\mathfrak{g})$ contenant $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, \mathfrak{g}$, on a $\mathcal{G} . \mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Il en résulte $\mathfrak{g}[f] = \mathfrak{g}[f+h]$ et $\mathfrak{g}_2[f] = \mathfrak{g}_2[f+h]$. Comme $I(f) = \mathrm{Ind}_U(I(f \mid \mathfrak{g}_2[f]) ; \mathfrak{g})$ et $I(f+h) = \mathrm{Ind}_U(I(f+h \mid \mathfrak{g}_2[f+h]) ; \mathfrak{g})$ (lemme 4.1), si $h(\mathfrak{g}[f]) = 0$ (c'est-à-dire $h(\mathfrak{g}_2[f]) = 0$), on a $I(f) = I(f+h)$.

Prouvons (ii) ⇒ (i). Soit Γ le groupe adjoint algébrique de $\mathfrak{g}$. Si $I(f) = I(f+h)$, on a $\Gamma . f = \Gamma(f+h)$ (injectivité de l'application de Dixmier). D'après [6], lemme 6.5.2, (i) et (v) on a $\Gamma . f + th = \Gamma . f$ pour tout $t \in k$, donc $\overline{\Gamma . f} + th = \overline{\Gamma . f}$ pour tout $t \in k$. On en déduit $h \in (\mathfrak{g}[f])^{\perp}$ ([11], 3.8 et 3.9). D'où (i).

Démontrons la seconde assertion du lemme. Supposons $h(\mathfrak{g}[f]) = 0$. D'après ce qui précède, on a $f + h \in \Gamma . f$. Si $\mathfrak{p} \in SP(f ; \mathfrak{g})$, $\mathfrak{p}$ est subordonnée à $f+h$ et $f + \mathfrak{p}^{\perp} \subset \overline{\Gamma . f}$ ([11], théorème 3.3). Il en résulte $f + h + \mathfrak{p}^{\perp} \subset \overline{\Gamma . f} + h = \overline{\Gamma . f} = \overline{\Gamma(f+h)}$. En utilisant à nouveau [11], théorème 3.3, on a $\mathfrak{p} \in SP(f+h ; \mathfrak{g})$. D'où le résultat.

6.2. PROPOSITION. *Soient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie résoluble,* $f \in \mathfrak{g}^*$ *et* $\mathfrak{p} \in SP(f ; \mathfrak{g})$. *Les conditions suivantes sont équivalentes*

(i) $\Theta_{\mathfrak{g}, \mathfrak{p}}(\mathfrak{g}[f]) = 0$.

(ii) $I(f) = \mathrm{Ind}_{\tilde{U}}(I(f \mid \mathfrak{p}) ; \mathfrak{g}) = \mathrm{Ind}_U(I(f \mid \mathfrak{p}) ; \mathfrak{g})$.

Démonstration. Prolongeons $\Theta_{\mathfrak{g}, \mathfrak{p}}$ en une forme linéaire h sur $\mathfrak{g}$ nulle sur $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Par définition des représentations induites tordues, on a $\mathrm{Ind}_U(I(f \mid \mathfrak{p}) ; \mathfrak{g}) = \mathrm{Ind}_{\tilde{U}}(I(f-h \mid \mathfrak{p}) ; \mathfrak{g})$. D'après le lemme 6.1, on a donc (i) ⇒ (ii). Supposons $\Theta_{\mathfrak{g}, \mathfrak{p}}(\mathfrak{g}[f]) \neq 0$. D'après ce qui précède et le lemme 6.1, pour montrer que $\mathrm{Ind}_{\tilde{U}}(I(f \mid \mathfrak{p}) ; \mathfrak{g}) \neq \mathrm{Ind}_U(I(f \mid \mathfrak{p}) ; \mathfrak{g})$, il suffit de prouver que $\mathfrak{p} \in SP(f-h ; \mathfrak{g})$. Or $\Gamma(f-h) = \Gamma . f - h$ ([6], lemme 6.5.2, (iii)) donc $\overline{\Gamma(f-h)} = \overline{\Gamma . f} - h$. On a d'autre part $f + \mathfrak{p}^{\perp} \subset \overline{\Gamma . f}$ ([11], théorème 3.3). Il vient alors $f - h + \mathfrak{p}^{\perp} \subset \overline{\Gamma . f} - h = \overline{\Gamma(f-h)}$, soit $\mathfrak{p} \in SP(f-h ; \mathfrak{g})$.

6.3. LEMME. *Soient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie résoluble,* $\mathfrak{g}'$*, un idéal de* $\mathfrak{g}$, $f \in \mathfrak{g}^*$ *et* $f' = f \mid \mathfrak{g}'$.

(i) *Si* $\mathfrak{g}(f) \subset \mathfrak{g}'$, *on a* $\mathfrak{g}(f) \subset \mathfrak{g}'(f')$.

(ii) *Si* $\mathfrak{g}[f] \subset \mathfrak{g}'$, *on a* $\mathfrak{g}[f] \subset \mathfrak{g}'[f']$.

Démonstration. L'assertion (i) est triviale. Prouvons (ii). Soient $\mathcal{G}$ la plus petite sous-algèbre de Lie algébrique de $\mathrm{gl}(\mathfrak{g})$ contenant $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\,\mathfrak{g}$ et $\mathcal{G}'$ l'image de $\mathcal{G}$ par l'application naturelle de $\mathcal{G}$ dans $\mathrm{gl}(\mathfrak{g}')$. L'algèbre de Lie $\mathcal{G}'$ est algébrique et contient $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\,\mathfrak{g}'$ ([5], propositions III,30 et 31). Il est alors immédiat que $\mathfrak{g}[f] \subset \mathfrak{g}'[f']$.

6.4. *Remarque.* Conservons les hypothèses de 6.3 et supposons $\dim(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}') = 1$. On sait alors que $\dim(\mathfrak{g}'(f')/\mathfrak{g}(f)) = 1$ ([6], lemme 1.12.2, (i)). On peut avoir $\dim(\mathfrak{g}'[f']/\mathfrak{g}[f]) > 1$: en prenant dans l'exemple de 5.1, $\mathfrak{g}' = \sum_{2}^{6} ke_i$ et $f \in \mathfrak{g}^*$ tel que $f(e_3) = f(e_6) = 1$ et $f(e_i) = 0$ pour $i \neq 3$ et $i \neq 6$, on a $\mathfrak{g}[f] = ke_6$ et $\mathfrak{g}'[f'] = ke_2 + ke_3 + ke_6$.

6.5. LEMME. *Soient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie résoluble,* $f \in \mathfrak{g}^*$ *et* $h = f \mid \mathfrak{g}_1[f]$. *Les conditions suivantes sont équivalentes*

(i) f *est de type* $(\mathcal{A})$.

(ii) h *est de type* $(\mathcal{A})$.

Démonstration. Posons $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}_1[f]$. De $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}_2[f]$, on déduit $\mathfrak{p}_2[h]^\infty \subset \mathfrak{p}^\infty \subset \mathfrak{g}_2[f]^\infty$. D'où (i) $\Rightarrow$(ii).

Soit $\mathfrak{n}$ le plus grand idéal nilpotent de $\mathfrak{p}$; puisque $[\mathfrak{g}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{n}$, on voit que $\mathfrak{g}[f] + \mathfrak{n}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$; il en résulte $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}[h] + \mathfrak{n}$ (lemme 6.3, (i)). On voit ainsi que $\mathfrak{p}[h]$ contient un élément générique dans $\mathfrak{p}$ (donc dans $\mathfrak{p}_2[h]$) et il en résulte $\mathfrak{p}^\infty = \mathfrak{p}_2[h]^\infty$ (lemme 2.1). Si h est de type $(\mathcal{A})$, on a donc $f(\mathfrak{p}^\infty) = 0$ et, puisque $\mathfrak{p}^\infty$ est un idéal caractéristique de $\mathfrak{p}$, il en résulte $\mathfrak{p}^\infty \subset \mathfrak{g}_0(f)$, c'est-à-dire, $\mathfrak{g}_1[f]/\mathfrak{g}_0(f)$ est nilpotente. Donc f est de type $(\mathcal{A})$.

6.6. - Notons $\mathfrak{g}^1[f] = \mathfrak{g}_1[f]$, $\mathfrak{g}^n[f] = (\mathfrak{g}^{n-1})_1\,[f \mid \mathfrak{g}^{n-1}[f]]$ et $\mathfrak{g}_\infty[f] = \bigcap_1^\infty \mathfrak{g}^n[f$. D'après [11], 3.8, on a $I(f) = \mathrm{Ind}_U^{\sim}(I(f \mid \mathfrak{g}_\infty[f])\,;\,\mathfrak{g})$ et, si g est nilpotente, $\mathfrak{g}_\infty[f]$ est une pseudo-polarisation de $\mathfrak{g}$ en f ([9], corollary 1).

6.7. LEMME. *Soient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie résoluble et* $f \in \mathfrak{g}^*$ *telle que* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1[f]$. *Les conditions suivantes sont équivalentes*

(i) f *est de type* $(\mathcal{B})$.

(ii) f *est de type* $(\mathcal{A})$.

(iii) $\mathfrak{g}$ *est subordonnée à* f.

Démonstration. L'équivalence de (i) et de (ii) résulte de [11], lemme 3.11. L'implication (iii) $\Rightarrow$ (i) est triviale. Prouvons (ii) $\Rightarrow$ (iii). On peut supposer $\mathfrak{g}_0(f) = 0$ (lemme 4.9). On a ainsi $f(\mathfrak{g}^\infty) = 0$, d'où $\mathfrak{g}^{\infty} \subset \mathfrak{g}_o(f) = 0$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est donc nilpotente. D'après ce qui a été en 6.6, $\mathfrak{g}_{\infty}[f] = \mathfrak{g}_1[f] = \mathfrak{g}$ est subordonnée à f.

6.8. PROPOSITION. *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie résoluble et* $f \in \mathfrak{g}^*$. *Les conditions suivantes sont équivalentes*

(i) f *est de type* $(\mathcal{A})$.

(ii) $f \mid \mathfrak{g}_{\infty}[f]$ *est de type* $(\mathcal{A})$.

(iii) $\mathfrak{g}_{\infty}[f]$ *est une pseudo-polarisation de $\mathfrak{g}$ en* f.

Démonstration. L'équivalence de (i) et de (ii) s'obtient par application itérée du lemme 6.5. La condition (iii) signifie que $\mathfrak{g}_{\infty}[f]$ est subordonnée à f ([11], 3.8). D'où l'équivalence de (ii) et de (iii) d'après le lemme 6.7.

6.9. *Remarque.* Ce qui précède montre que si f est de type $(\mathcal{A})$, on peut lui associer canoniquement une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}$ qui lui est subordonnée et qui vérifie $I(f) = \mathrm{Ind}_{\tilde{U}}(I(f \mid \mathfrak{p}); \mathfrak{g})$.

6.10. PROPOSITION. *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie résoluble et* $f \in \mathfrak{g}^*_{\mathcal{A}}$. *Pour tout* $\mathfrak{p} \in SP(f\,; \mathfrak{g})$ *on a* $\Theta_{\mathfrak{g}, \mathfrak{p}}(\mathfrak{g}[f]) = 0$ *et* $I(f) = \mathrm{Ind}_{\tilde{U}}(I(f \mid \mathfrak{p})\,; \mathfrak{g}) = \mathrm{Ind}_U(I(f \mid \mathfrak{p})\,; \mathfrak{g})$.

Démonstration. Le fait que $\Theta_{\mathfrak{g}, \mathfrak{p}}(\mathfrak{g}[f]) = 0$ résulte du lemme 4.2, (iv). L'autre partie de la proposition résulte de la proposition 6.2.

6.11. *Remarque.* Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{g}^n[f]$ est un idéal dans $\mathfrak{g}^{n-1}[f]$. On a donc $\Theta_{\mathfrak{g}^{n-1}[f],\, \mathfrak{g}^n[f]} \equiv 0$ et on en déduit $\Theta_{\mathfrak{g},\, \mathfrak{g}_{\infty}[f]} \equiv 0$. D'après la proposition 6.8, on voit que si f est de type $(\mathcal{A})$ et si $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}_{\infty}[f]$, on a non seulement $\Theta_{\mathfrak{g}, \mathfrak{p}}(\mathfrak{g}[f]) = 0$, mais aussi $\Theta_{\mathfrak{g}, \mathfrak{p}} \equiv 0$.

7. - EXEMPLES ET CONTRE-EXEMPLES

On donne ici des exemples et des contre-exemples à des problèmes qui se posent naturellement lors de l'étude qui vient d'être faite. Le détail des calculs est laissé au soin du lecteur.

7.1. - Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie ad-algébrique de base $\{e_1,\dots,e_5\}$ avec

$$[e_1,e_3] = e_3\,;\ [e_1,e_4] = e_4\,;\ [e_1,e_5] = 2e_5$$

$$[e_2,e_3] = e_3\,;\ [e_2,e_4] = -e_4\,;\ [e_3,e_4] = e_5$$

Si $f(e_5) \neq 0$, on a $\mathfrak{g}_2[f]^{\infty} = \sum_3^5 ke_i$ et f n'est pas de type $(\mathcal{A})$.

Il est facile de voir que tout idéal non nul de $\mathfrak{g}$ contient e_5 ; on en déduit que tout quotient de $\mathfrak{g}$ est distinct de l'algèbre diamant. Il n'est donc pas équivalent de dire que $\mathfrak{g}$ est de type $(\mathcal{A})$ et que tout quotient de $\mathfrak{g}$ est non isomorphe à l'algèbre diamant.

7.2. - *Soit* $\mathfrak{g}$ *l'algèbre de Lie ad-algébrique de base* $\{e_1,\dots,e_5\}$ avec

$$[e_1,e_2] = e_2 \,;\, [e_1,e_3] = -2e_3 \,;\, [e_1,e_4] = -e_4 \,;$$

$$[e_2,e_3] = e_4 \,;\, [e_2,e_4] = e_5$$

Un élément $f \in \mathfrak{g}^*$ est régulier si et seulement si $f(e_4)^2 - 2f(e_3)f(e_5) \neq 0$. S'il en est ainsi, on a $\mathfrak{g}[f] = ke_5$; tout élément régulier de $\mathfrak{g}^*$ est donc de type $(\mathcal{A})$. Si $f([\mathfrak{g},\mathfrak{g}]) = 0$, f est de type $(\mathcal{A})$. Si $f([\mathfrak{g},\mathfrak{g}]) \neq 0$ et si $f(e_4) = f(e_5) = 0$, on a $\mathfrak{g}_2[f] = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ et f est de type $(\mathcal{A})$. Si $f(e_5) \neq 0$ et si f n'est pas régulier, on trouve $\mathfrak{g}_2[f] = \mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}_2[f]^\infty = \sum_2^5 ke_i$; f n'est pas de type $(\mathcal{A})$. On voit dans cet exemple que $\mathfrak{g}^*_{\mathcal{A}}$ est partout dense dans $\mathfrak{g}^*$ mais n'est pas localement fermé dans $\mathfrak{g}^*$.

7.3. - Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie ad-algébrique de base $\{e_1,\dots,e_7\}$ avec

$$[e_1,e_2] = e_2 \,;\, [e_1,e_3] = -e_3 \,;\, [e_2,e_3] = e_6 \,;$$

$$[e_1,e_4] = e_4 \,;\, [e_1,e_5] = -e_5 \,;\, [e_4,e_5] = e_7 \,.$$

Soit $f \in \mathfrak{g}^*$ telle que $f(e_6) = f(e_7) = 1$ et $f\left(\sum_1^5 ke_i\right) = 0$. On a $\mathfrak{g}[f] = ke_1 + ke_6 + ke_7$, $\mathfrak{g}_2[f]^\infty = \sum_2^7 ke_i$; f n'est pas de type $(\mathcal{A})$.

Soient $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{g}[f] + ke_2 + ke_5$; $\mathfrak{p}_2 = \mathfrak{g}[f] + ke_3 + ke_4$; $\mathfrak{p}_3 = \mathfrak{g}[f] + ke_2 + ke_4$; $\mathfrak{p}_4 = \mathfrak{g}[f] + ke_3 + ke_5$. Les $\mathfrak{p}_i$, $1 \leqslant i \leqslant 4$ sont des polarisations de $\mathfrak{g}$ en f. Pour i = 1,2, on a $\Theta_{\mathfrak{g},\mathfrak{p}_i} \equiv 0$ et pour i = 3,4, on a $\Theta_{\mathfrak{g},\mathfrak{p}_i}(\mathfrak{g}[f]) \neq 0$. On voit donc que l'existence de $\mathfrak{p} \in SP(f\,;\,\mathfrak{g})$ tel que $\mathrm{Ind}_{\widetilde{U}}(I(f \mid \mathfrak{p})\,;\,\mathfrak{g}) = \mathrm{Ind}_U(I(f \mid \mathfrak{p})\,;\,\mathfrak{g})$ n'implique pas que f est de type $(\mathcal{A})$.

8. - PROBLEME

On suppose $\mathrm{Ind}_{\widetilde{U}}(I(f \mid \mathfrak{p})\,;\,\mathfrak{g}) = \mathrm{Ind}_U(I(f \mid \mathfrak{p})\,;\,\mathfrak{g})$ pour toute $\mathfrak{p} \in SP(f\,;\,\mathfrak{g})$. La forme linéaire f est-elle de type $(\mathcal{A})$? En d'autres termes, si $\Theta_{\mathfrak{g},\mathfrak{p}}(\mathfrak{g}[f]) = 0$ pour toute $\mathfrak{p} \in SP(f\,;\,\mathfrak{g})$, l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}[f]$ opère-t-elle de manière nilpotente dans $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}[f]$?

REFERENCES

[1] J. BOIDOL. *«*-Regularity of exponential Lie groups».* Inv. Math., 56, p. 231-238, 1980.

[2] W. BORHO, P. GABRIEL, R. RENTSCHLER. *«Primideale in Einhüllenden auflösbarer Lie Algebren».* Berlin, Springer-Verlag, 1973, (Lect. Notes in Math. no 357).

[3] K. BROWN. *«The Dixmier map for certain enveloping algebras».* Preprint, Glasgow, 1981.

[4] N. CONZE. *«Espace des idéaux primitifs de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie nilpotente».* J. of Algebra, 34, p. 444-450, 1975.

[5] C. CHEVALLEY. *«Théorie des groupes de Lie».* Paris, Hermann, 1968 (Publications de l'Institut mathématique de l'Université de Nancago).

[6] J. DIXMIER. *«Algèbres enveloppantes».* Paris, Gauthier-Villars, 1974. (Cahiers scientifiques, 37).

[7] J. DIXMIER. *«Idéaux primitifs dans les algèbres enveloppantes».* J. of Algebra, 48, no 1, p. 96-112, 1977.

[8] M.P. MALLIAVIN. *«Caténarité et théorème d'intersection en algèbre non commutative».* Sém. alg. P. Dubreil 1977/78. Springer-Verlag. Lect. Notes in math. 740, p. 408-429, 1979.

[9] R. PENNEY. *«Canonical objets in Kirillov theory on nilpotent Lie groups».* Proc. Amer. Math. Soc., 66, no 1, p. 175-178, 1977.

[10] P. TAUVEL. *«Sur les quotients premiers de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie résoluble».* Bull. Soc. Math. France, 106, p. 177-205, 1978.

[11] P. TAUVEL. *«Sur l'application de Dixmier pour les algèbres de Lie résolubles».* Sém. Alg. P. Dubreil et M.P. Malliavin, lec. Notes in math., 795, Springer-Verlag, p. 161-171, 1980.

[12] P. TAUVEL. *«Sur la bicontinuité de l'application de Dixmier pour les algèbres de Lie résolubles».* C.R. Acad. Sci., série A, 1982.

(Manuscrit reçu le 21 mai 1982)