ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

LOUISE BARTHÉLEMY
FRANCINE CATTÉ

Application de la théorie des semi-groupes non linéaires dans L^∞ à l'étude d'une classe d'inéquations quasi-variationnelles

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 4, nº 2 (1982), p. 165-190
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1982_5_4_2_165_0>

Annales Faculté des Sciences Toulouse
Vol IV, 1982, P 165 à 190

APPLICATION DE LA THEORIE DES SEMI-GROUPES NON LINEAIRES DANS L^∞ A L'ETUDE D'UNE CLASSE D'INEQUATIONS QUASI-VARIATIONNELLES

Louise Barthélemy *(1)* **et Francine Catté** *(2)*

(1)(2) Mathématiques, Faculté des Sciences et des Techniques, Route de Gray, La Bouloie, 25030 Besançon - France.

Résumé : Nous appliquons la théorie des semi-groupes non linéaires à des inéquations quasi-variationnelles paraboliques du type

$$u_t \leqslant \Delta u + f\,,\ \ u \leqslant Mu\,,\ \ (u_t - \Delta u - f)\,(u - Mu) = 0.$$

Nous définissons un «générateur» C accrétif dans L^∞ associé aux inéquations quasi-variationnelles elliptiques

$$\Delta u + f \geqslant 0\,,\ \ u \leqslant Mu\,,\ \ (\Delta u + f)(u - Mu) = 0$$

et montrons la coincidence entre la solution de

$$\frac{du}{dt} + Cu \ni f$$

au sens de la théorie des semi-groupes non linéaires, et la solution maximum de l'inéquation quasi-variationnelle parabolique.

Summary : We apply the theory of non linear semi-groups in L^∞ to parabolic quasi-variational inequalities of the type

$$u_t \leqslant \Delta u + f\,,\ \ u \leqslant Mu\,,\ (u_t - \Delta u - f)(u - Mu) = 0.$$

We define a «generator» C accretive in L^∞ associated to the elliptic variational inequalities

$$\Delta u + f \geqslant 0\,,\ \ u \leqslant Mu\,,\ (\Delta u + f)(u - Mu) = 0$$

and prove the coincidence between the solution in the sense of the theory of non linear semi-groups of

$$\frac{du}{dt} + Cu \ni f$$

and the maximum solution of the parabolic quasi-variational inequality.

0. - INTRODUCTION

Considérons l'inéquation quasi-variationnelle (I.Q.V.) d'évolution

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} \leqslant \Delta u + f \,, \left(\Delta u + f - \dfrac{\partial u}{\partial t}\right)(Mu - u) = 0 \text{ sur } Q =]0,T[\times \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} \geqslant 0 \,,\ \dfrac{\partial u}{\partial n}\,(Mu - u) = 0 \text{ sur } \Sigma =]0,T[\times \partial\Omega \\ u \leqslant Mu \text{ sur } Q \cup \Sigma \\ u(0,.) = u_o \text{ sur } \Omega \end{cases}$$

où Ω est un ouvert borné régulier de IR^N et pour toute fonction $u : \Omega \to IR$ mesurable

$$Mu(x) = 1 + \inf_{\substack{y \in \Omega \\ y_i \geqslant x_i}} \text{ess}\, u(y).$$

Ce problème a été très étudié cette dernière décade.

La première approche par A. Bensoussan et J.L. Lions [3] utilisait une *méthode de pénalisation,* considérant le problème :

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u_\epsilon}{\partial t} + \dfrac{1}{\epsilon}\,(u_\epsilon - Mu_\epsilon)^+ = \Delta u_\epsilon + f \text{ sur } Q \\ \dfrac{\partial u_\epsilon}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Sigma \,,\ u(0,.) = u_o \text{ sur } \Omega \end{cases}$$

et passant à la limite avec $\epsilon \to 0$.

La deuxième méthode utilise *un point fixe* de l'application $v \to u$ solution de l'inéquation variationnelle (I.V.) d'évolution :

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} \leqslant \Delta u + f\,, \quad \left(\Delta u + f - \dfrac{\partial u}{\partial t}\right)(Mv - u) = 0 \text{ sur } Q \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial n} \geqslant 0\,, \quad \dfrac{\partial u}{\partial n}(Mv - u) = 0 \text{ sur } \Sigma \\[2ex] u \leqslant Mv \text{ sur } Q \cup \Sigma \\[2ex] u(0,.) = u_o \text{ sur } \Omega. \end{cases}$$

Nous renvoyons à [5] pour une bibliographie des résultats d'existence, d'unicité et de régularité concernant ce problème.

Nous proposons ici une troisième méthode utilisant la théorie des semi-groupes non linéaires dans $L^\infty(\Omega)$. *Formellement* l'I.Q.V. d'évolution peut s'écrire :

$$(4)\qquad \frac{du}{dt} + Cu \ni f\,,\ u(0) = u_o$$

où l'opérateur C est défini par :

$$v \in Cu \text{ si et seulement si}$$

$$(5)\quad \begin{cases} \Delta u + v \geqslant 0\,,\ (\Delta u + v)(Mu - u) = 0 \text{ sur } \Omega \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial n} \geqslant 0,\ \dfrac{\partial u}{\partial n}(Mu - u) = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\[2ex] u \leqslant Mu \text{ sur } \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Formellement encore, cet opérateur C est accrétif dans $L^\infty(\Omega)$, c'est-à-dire vérifie (*) :

(6) $$\| u-\hat{u} \|_\infty \leqslant \| (u-\hat{u}) + \lambda(v-\hat{v}) \|_\infty \qquad \forall\, v \in Cu\,,\ \hat{v} \in C\hat{u}\,,\ \lambda > 0.$$

Utilisant le théorème de Crandall-Liggett [4] , la résolution de (4) se ramène à celle du problème discrétisé en temps :

(7) $$\begin{cases} \dfrac{u_\epsilon(t) - u_\epsilon(t-\epsilon)}{\epsilon} + Cu_\epsilon(t) \supset f(t) & \text{pour } t > 0 \\[2ex] u_\epsilon(t) = u_0 & \text{pour } t \leqslant 0. \end{cases}$$

C'est-à-dire à *l'I.Q.V. stationnaire* :

(8) $$\begin{cases} \Delta u + \dfrac{v-u}{\lambda} \geqslant 0\,, \quad \left(\Delta u + \dfrac{v-u}{\lambda}\right)(Mu - u) = 0 \text{ sur } \Omega \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial n} \geqslant 0\,, \dfrac{\partial u}{\partial n}\ (Mu - u) = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\[2ex] u \leqslant Mu \text{ sur } \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Comme nous l'avons souligné, cette démarche est pour l'instant formelle. L'objet de ce travail est de définir correctement l'opérateur C et d'étudier en quel sens la solution u(t) de (4)

(*) Cette accrétivité formelle avait été mise en évidence par H. Brézis (communication orale). Plus précisément, considérant $v \in Cu$, $\hat{v} \in C\hat{u}$ avec $u,\hat{u} \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ et $v,\hat{v} \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, on a l'inégalité (6) pour tout $\lambda > 0$. On peut en effet toujours supposer $\| u-\hat{u} \|_\infty = (u-\hat{u})(x_0) > 0$ avec x_0 maximal (pour l'ordre $x_i \leqslant y_i$) dans $\left\{ x \in \overline{\Omega}\ ;\ \| u-\hat{u} \|_\infty = (u-\hat{u})(x) \right\}$; il suffit alors pour montrer (6) de prouver : $(v-\hat{v})(x_0) \geqslant 0$. Par l'absurde, supposons $(v-\hat{v})(x_0) < 0$. Si $x_0 \in \Omega$, utilisant le principe du maximum classique $\Delta(u-\hat{u})(x_0) \leqslant 0$ et donc $(\hat{v}+\Delta\hat{u})(x_0) > (v+\Delta u)(x_0)$; on en déduit $M\hat{u}(x_0) = \hat{u}(x_0)$. On a la même égalité si $x_0 \in \partial\Omega$; en effet si $\hat{u}(x_0) < M\hat{u}(x_0)$, $\Delta(u-\hat{u})(x) > 0$ sur un voisinage de x_0 et $\dfrac{\partial u}{\partial n}(x_0) \geqslant \dfrac{\partial \hat{u}}{\partial n}(x_0)$, ce qui est contraire au principe du maximum. Considérons maintenant $y_0 \in \overline{\Omega}$, $y_0 \geqslant x_0$ tel que $M\hat{u}(x_0) = 1 + \hat{u}(y_0)$; on a $y_0 \neq x_0$ et

$$Mu(x_0) \leqslant 1 + u(y_0) \leqslant 1 + \hat{u}(y_0) + u(x_0) - \hat{u}(x_0) \leqslant Mu(x_0)$$

d'où $(u-\hat{u})(x_0) = (u-\hat{u})(y_0)$, ce qui contredit la maximalité de x_0.

donnée par la théorie des semi-groupes, est solution de l'I.Q.V. d'évolution (1). Nous verrons en particulier que pour de bonnes données u_o et f, u(t) est «solution forte maximum» (*) de (1) et coïncide avec la solution obtenue par la méthode de pénalisation.

Nous traiterons le problème dans un cadre abstrait qui met bien en évidence la généralité de la méthode utilisée. Dans la section I, nous préciserons le cadre et les résultats ; les sections II et III seront consacrées aux démonstrations des théorèmes pour les problèmes stationnaires et d'évolution respectivement.

Nous nous restreignons ici au cas positif : $u_o \geqslant 0$, $f \geqslant 0$ et la solution $u \geqslant 0$. Nous renvoyons à [1] pour une étude sans l'hypothèse de positivité.

I. - NOTATIONS ET RESULTATS

a) Notations

Nous précisons d'abord le cadre de notre étude. Nous désignerons par Ω un espace mesuré de *mesure finie.* Pour $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $L^p(\Omega)$ est l'espace de Lebesgue classique associé à Ω de norme $\| \,.\, \|_p$ et $L^p(\Omega)^+ = \{u \in L^p(\Omega) \,;\, u \geqslant o^{(**)}\}$.

Nous nous donnons une application

$$M : L^\infty(\Omega)^+ \to L^\infty(\Omega)^+$$

vérifiant les deux conditions suivantes : d'abord nous supposons que

$$\text{(M1)} \quad \left\{ \begin{array}{ll} M \text{ est une } T\textit{-contraction de } L^\infty(\Omega)^+, & \text{c'est-à-dire} \\ \| (Mu - M\hat{u})^+ \|_\infty \leqslant \| (u - \hat{u})^+ \|_\infty & \forall\, u, \hat{u} \in L^\infty(\Omega)^+ \end{array} \right. \quad (***)$$

d'où l'on déduit en particulier que M est une application croissante, c'est-à-dire

$$u \leqslant \hat{u} \;\Rightarrow\; Mu \leqslant M\hat{u} \qquad \forall\, u, \hat{u} \in L^\infty(\Omega)^+.$$

(*) Cf. l'énoncé du théorème 2 pour l'exacte signification de cette expression.

(**) Les inégalités entre éléments de $L^p(\Omega)$ seront toujours des inégalités p.p. sur Ω.

(***) Une T-contraction est évidemment une contraction : $\| Mu - M\hat{u} \|_\infty \leqslant \| u - \hat{u} \|_\infty$.

Nous supposons aussi une «semi-continuité supérieure pour la convergence p.p.» :

$$\text{(M2)}\qquad \left\{\begin{array}{l}\text{pour toute suite décroissante } \{u_n\} \text{ de } L^\infty(\Omega)^+ \text{ convergeant vers u p.p. sur } \Omega,\\ \text{la suite } \{Mu_n\} \text{ converge vers Mu p.p. sur } \Omega.\end{array}\right.$$

Nous nous donnons d'autre part un *espace de Banach réflexif* V tel que

$$V \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow V'$$

un *opérateur monotone hémicontinu*

$$\mathcal{A} : V \to V' \quad \text{avec} \quad \mathcal{A}0 = 0$$

et une *fonctionnelle convexe s.c.i.*

$$\Phi : V \to [0,\infty] \text{ avec } \Phi(0) = 0$$

vérifiant les hypothèses suivantes :

D'abord nous faisons une hypothèse de type *principe du maximum* :

$$\text{(H1)}\qquad \left\{\begin{array}{l}\text{pour tout } u \in V,\ (u-1)^+ \in V\\ \text{et pour tout } u, \hat{u} \in V \text{ et } k > 0, \qquad\qquad (*)\\ \Phi(u) + \Phi(\hat{u}) + < \mathcal{A}u - \mathcal{A}\hat{u}, (u-\hat{u}-k)^+ > \ \geqslant \Phi(u \wedge (\hat{u}+k)) + \Phi((u-k)\vee \hat{u})\end{array}\right.$$

Ensuite nous faisons une *hypothèse de coercivité* :

$$\text{(H2)}\qquad \left\{\begin{array}{l}\text{il existe } c \in \mathbb{R} \text{ tel que}\\ \displaystyle\lim_{\|u\|_V \to \infty} \frac{\Phi(u) + < \mathcal{A}u, u > + c \|u\|_2^2}{\|u\|_1} = +\infty\end{array}\right.$$

(*) Par linéarité, $(u-\hat{u}-k)^+ = k\left(\dfrac{u-\hat{u}}{u} - 1\right)^+$, $u \wedge (\hat{u}+k) = \inf(u,\hat{u}+k) = u-(u-\hat{u}-k)^+$ et $(u-k)\vee \hat{u} = \sup(u-k,\hat{u}) = \hat{u} + (u-\hat{u}-k)^+$ sont dans V. $< , >$ désigne la dualité entre V' et V.
Notons que dans le cas $\Phi \equiv 0$ et $\mathcal{A}$ linéaire la condition se réduit à : pour tout $u \in V$, $(u-1)^+ \in V$ et $< \mathcal{A}u, (u-1)^+ > \ \geqslant 0$.

Enfin nous aurons besoin d'une hypothèse de bornitude :

$$\text{(H3)} \quad \begin{cases} u \to (u-1)^+ & \text{est borné dans V sur les bornés de V} \\ \mathcal{A} & \text{est borné dans V' sur les bornés de V.} \end{cases}$$

b) Remarques et exemples

Notons d'abord qu'étant donnée une famille $(M_i)_i$ d'applications de $L^\infty(\Omega)^+$ dans $L^\infty(\Omega)^+$ vérifiant (M1) et (M2), l'enveloppe inférieure $M : u \in L^\infty(\Omega)^+ \to \inf_i M_i u \in L^\infty(\Omega)^+$ vérifie encore ces conditions.

D'autre part, étant donné $F : \Omega \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ mesurable, l'opérateur de Nemikii $M : u \in L^\infty(\Omega)^+ \to F(.\,, u)$ vérifie la condition (M1) si et seulement si

$$\text{(9)} \quad \begin{cases} F(.\,,0) \in L^\infty(\Omega)^+ \\ \text{et} \\ 0 \leqslant F(x,r) - F(x,\hat{r}) \leqslant r - \hat{r} \qquad \text{p.p. } x \in \Omega, \ \forall\, 0 \leqslant \hat{r} \leqslant r \end{cases}$$

Il vérifie alors la condition (M2).

En particulier, étant donné Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $F : \Omega \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ mesurable vérifiant (9), l'application $M : L^\infty(\Omega)^+ \to L^\infty(\Omega)^+$ définie par

$$Mu(x) = \inf_{\substack{y \in \Omega \\ y \geqslant x}} F(x,u(y))$$

vérifie (M1) et (M2). Cette application est la «contrainte de gestion des stocks» correspondant à la «fonction de coût» F (cf. [3]).

Comme exemple de données $(V, \mathcal{A}, \Phi)$, nous pouvons prendre, étant donné Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$,

$$V = H_0^1(\Omega), \quad \mathcal{A} : u \in H_0^1(\Omega) \to -\Delta u \in H^{-1}(\Omega), \quad \Phi \equiv 0.$$

Remarquons que pour développer ce même problème, nous pouvons prendre comme cadre

$$V = L^2(\Omega), \quad \mathcal{A} \equiv 0, \quad \Phi : u \in L^2(\Omega) \to \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int |\operatorname{grad} u|^2 & \text{si } u \in H_0^1(\Omega) \\ +\infty & \text{si } u \notin H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

La linéarité n'est pas requise ; nous pouvons par exemple pour $1 < p < \infty$, prendre

$$V = W_0^{1,p}(\Omega),\ \mathcal{A} : u \in W_0^{1,p}(\Omega) \to -\Sigma \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right),\quad \Phi \equiv 0 \quad .$$

ou

$$V = L^2(\Omega),\ \mathcal{A} \equiv 0,\ \Phi : u \in L^2(\Omega) \to \begin{cases} \displaystyle\int \varphi(\text{grad } u) & \text{si } u \in W_0^{1,1}(\Omega) \\ + \infty & \text{si } u \notin W_0^{1,1}(\Omega) \end{cases}$$

avec $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^+$ convexe, coercive avec $\varphi(0) = 0$.

On peut évidemment considérer d'autres conditions sur le bord que celle de Dirichlet. Avec une condition de Neumann qui correspond au problème présenté dans l'introduction, on peut prendre

$$V = H^1(\Omega),\ \Phi \equiv 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{A} : V \to V' \text{ définie par}$$

$$< \mathcal{A}\, u,v > = \int \text{grad } u \,.\, \text{grad } v \qquad \forall\, u, v \in H^1(\Omega).$$

L'utilisation d'une fonction convexe Φ permet aussi de prendre en considération des contraintes indépendantes de u. Par exemple, dans un cadre $V = H^1(\Omega)$, on peut prendre

$$\Phi(u) = \int_{\bar{\Omega}} j(x,u(x))d\mu(x)$$

où μ est une mesure de Radon positive sur $\bar{\Omega}$ telle que $H^1(\Omega)$ s'injecte continûment dans $L^1(\bar{\Omega},\mu)$ et $j : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \to [0,\infty]$ une intégrande convexe normale par rapport à μ avec $j(x,o) = 0$.

Nous renvoyons à [1] pour une étude plus complète de ces exemples.

c) **Résultats**

Enonçons d'abord le résultat pour l'I.Q.V. stationnaire.

THEOREME 1. *Sous les hypothèses (M1), (M2), (H1), (H2) précisées en a) :*

i) Pour tout $f \in L^\infty(\Omega)^+$ *et* $\lambda > 0$, *il existe une solution maximum de l'I.Q.V.*

$$I(f,\lambda) \begin{cases} u \in V \cap L^\infty(\Omega)^+ ,\ u \leqslant Mu \text{ et} \\ \Phi(v) + < \mathcal{A}\, u, v-u > \;\geqslant\; \Phi(u) + \displaystyle\int \left(\frac{f-u}{\lambda}\right)(v-u) \\ \text{pour tout } v \in V \text{ avec } v \leqslant Mu. \end{cases}$$

Nous notons $\mathcal{S}_\lambda f$ *cette solution maximum.*

ii) Pour tout $\lambda > 0$, *l'application* $\mathcal{S}_\lambda : f \in L^\infty(\Omega)^+ \to \mathcal{S}_\lambda f \in L^\infty(\Omega)^+$ *est une* T-*contraction de* $L^\infty(\Omega)^+$.

iii) La famille $(\mathcal{S}_\lambda)_{\lambda>0}$ *vérifie l'«équation résolvante»*

$$\mathcal{S}_\lambda f = \mathcal{S}_\mu\left(\frac{\mu}{\lambda} f + \frac{\lambda-\mu}{\lambda}\ \mathcal{S}_\lambda f\right) \qquad \forall f \in L^\infty(\Omega)^+,\ \lambda \geqslant \mu > 0.$$

Nous définissons alors l'opérateur C de $L^\infty(\Omega)$ par son graphe

$$C = \left\{\left(\mathcal{S}_\lambda f, \frac{f - \mathcal{S}_\lambda f}{\lambda}\right) ;\ f \in L^\infty(\Omega)^+,\ \lambda > 0\right\}.$$

Le théorème 1 nous permet d'affirmer (cf. [6]) que l'opérateur C est T-accrétif dans $L^\infty(\Omega)$, c'est-à-dire vérifie

$$\| (u-\hat{u})^+ \|_\infty \leqslant \|((u-\hat{u}) + \lambda(v-\hat{v}))^+\|_\infty \qquad \forall v \in Cu,\ \hat{v} \in C\hat{u},\ \lambda > 0 \ ^{(*)}$$

En outre, l'opérateur C vérifie la «condition d'image»

$$R(I + \lambda C) \supset L^\infty(\Omega)^+ \supset D(C) \qquad \forall \lambda > 0$$

et on a

$$(I + \lambda C)^{-1} f = \mathcal{S}_\lambda f \qquad \forall f \in L^\infty(\Omega)^+,\ \lambda > 0.$$

Utilisant le théorème de Crandall-Ligett [4] , pour tout $u_0 \in \overline{D(C)}$ (**) et $f \in L^1(0,T ; L^\infty(\Omega)^+)$, on peut définir *la solution au sens de la théorie des* semi-groupes non linéaires de l'équation d'évolution (***)

(*) De même que nous l'avons remarqué pour une T-contraction, un opérateur T-accrétif est accrétif : $\| u-\hat{u} \|_\infty \leqslant \| (u-\hat{u}) + \lambda(v-\hat{v}) \|_\infty$.

(**) Les fermetures considérées sont prises dans $L^\infty(\Omega)$.

(***) Rappelons (cf. [4] dans le cas f = 0 et [2] ou [7] dans le cas f quelconque) que la solution u de (E) est définie comme la limite des solutions de la discrétisée en temps par schéma implicite de (E). Supposant pour simplier $f \in C([0,T] ; L^\infty(\Omega)^+)$, alors

$$u = L^\infty(]0,T[\times \Omega) - \lim_{\epsilon \to 0} u^\epsilon$$

où u^ϵ est définie par

$$\begin{cases} u^\epsilon(t) = u_0 & t \leqslant 0 \\ \dfrac{u^\epsilon(t) - u^\epsilon(t-\epsilon)}{\epsilon} + Cu^\epsilon(t) \ni f(t) & t \in]0,T[\end{cases}$$

c'est-à-dire, compte tenu de la définition de C,

$$\begin{cases} u^\epsilon(t) = u_0 & t \leqslant 0 \\ u^\epsilon(t) = \mathcal{S}_\epsilon(u^\epsilon(t-\epsilon) + \epsilon f(t)) & t \in]0,T\,] \end{cases}$$

$$
(E) \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Cu \ni f, \\ \\ u(0) = u_o. \end{cases}
$$

Le théorème 1 permet donc de résoudre l'I.Q.V. d'évolution au sens de la théorie des semi- groupes non linéaires. Enonçons maintenant le

THEOREME 2. *Sous les hypothèses (M1), (M2), (H1), (H2) et (H3) précisées en a).*

Soient $u_o \in D(C)$, f *à variation bornée de* [0,T] *dans* $L^\infty(\Omega)^+$ *et* u *la solution de* E. *Alors* u *est la solution forte maximum de l'I.Q.V. d'évolution associée, c'est-à-dire que* u *est solution maximum du problème :*

$$
IE(u_o,f) \qquad \begin{cases} u \in \mathcal{C}([0,T]\,;\, L^\infty(\Omega)^+),\ u(0) = u_o\,,\ u(t) \leqslant Mu(t) \qquad \forall\, t \in [0,T] \\ \\ u \in L^\infty(]0,T[\,;V),\ \dfrac{du}{dt} \in L^\infty(]0,T[\times\Omega) \\ \\ \Phi(v(t)) + \displaystyle\int \frac{du}{dt}(t)(v(t)-u(t)) + <\mathcal{A}u(t), v(t)-u(t)> \ \geqslant \\ \\ \Phi(u(t)) + \displaystyle\int f(t)(v(t)-u(t)) \qquad \text{p.p.} \quad t \in]0,T[\\ \\ \textit{pour tout } v \in L^\infty(0,T\,;V) \textit{ avec } v(t) \leqslant Mu(t) \quad \text{p.p.} \quad t \in]0,T[\end{cases}
$$

Remarque 1. Ce théorème donne un bon résultat pour des données (u_o,f) «suffisamment régulières». En effet, non seulement il indique l'existence d'une solution forte maximum de l'I.Q.V. d'évolution, mais il énonce aussi que cette solution est la solution de la théorie des semi-groupes, c'est-à-dire la limite dans $L^\infty(]0,T[\times\Omega)$ des solutions du problème discrétisé en temps par schéma implicite.

La régularité sur f est claire ; par contre, celle sur u_o est moins facile à préciser puisque D(C) est seulement défini comme $\{\mathcal{S}_\lambda f\,;\, f \in L^\infty(\Omega)^+, \lambda > 0\}$. C'est là le point faible de ce résultat ; notons cependant que $0 \in D(C)$.

Remarque 2. Comme nous le verrons dans les sections II et III, ces théorèmes seront démontrés par passage à la limite dans les problèmes pénalisés. En particulier, nous montrerons que les solutions maximum de $I(f,\lambda)$ et $IE(u_o,f)$ sont les limites décroissantes des problèmes pénalisés correspondants.

II. - DEMONSTRATION DU THEOREME 1

Introduisons les opérateurs suivants :

1) A, restriction à $L^\infty(\Omega)$ de $\mathcal{A} + \partial\Phi$. En d'autres termes : $w \in Au$ si et seulement si

$$\begin{cases} u \in L^\infty(\Omega) \cap V,\ w \in L^\infty(\Omega) \\ \text{et} \\ \Phi(v) + \langle \mathcal{A} u, v-u \rangle \geqslant \Phi(u) + \int w(v-u) \qquad \forall\, v \in V. \end{cases}$$

Nous démontrons le

LEMME 1. *a)* A *est un opérateur* m-T-*accrétif de* $L^\infty(\Omega)$ *(c'est-à-dire que pour tout* $\lambda > 0$, $(I+\lambda A)^{-1}$ *est une* T-*contraction partout définie de* $L^\infty(\Omega)$*)*.

b) La fermeture A_2 *de* A *dans* $L^2(\Omega)$ (*) *est maximal monotone dans* $L^2(\Omega)$ *et* A *est la restriction de* A_2 *à* $L^\infty(\Omega)$.

2) Pour tout $\epsilon > 0$, l'opérateur de pénalisation B_ϵ :

$$B_\epsilon : u \in L^\infty(\Omega) \to \frac{1}{\epsilon}(u - Mu^+)^+$$

Nous démontrons le

LEMME 2. B_ϵ *est un opérateur* T-*accrétif et lipschitzien de* $L^\infty(\Omega)$.

3) Pour tout $\epsilon > 0$, l'opérateur $C_\epsilon = A + B_\epsilon$. Etant somme d'un opérateur m-T-accrétif et d'un opérateur T-accrétif lipschitzien, l'opérateur C_ϵ est m-T-accrétif dans $L^\infty(\Omega)$ (ce résultat est classique dans le cas accrétif, cf. par exemple [1] , Proposition 0.2 pour une démonstration dans le cas T-accrétif).

Pour tout $\lambda > 0$, on notera

$$\mathcal{J}_\lambda^\epsilon = (I + \lambda C_\epsilon)^{-1}$$

(*) A_2 est défini par $w \in A_2 u$ si et seulement si il existe des suites $\{u_n\}$ et $\{w_n\}$ de $L^\infty(\Omega)$ telles que $w_n \in Au_n$ pour tout n, $u_n \to u$ et $w_n \to w$ dans $L^2(\Omega)$.

Le théorème 1 découle de la proposition suivante. Etant donnée une famille $\{f_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ de fonctions de $L^\infty(\Omega)^+$, nous écrirons

$$f_\epsilon \downarrow f \qquad \text{ou} \qquad f = \downarrow \lim f_\epsilon$$

pour exprimer que pour toute suite $\epsilon_n \downarrow 0$, la suite $\{f_{\epsilon_n}\}$ est décroissante et converge vers f p.p. sur Ω. Notons qu'alors $f_\epsilon \to f$ dans $L^p(\Omega)$ pour tout $1 \leqslant p < \infty$.

PROPOSITION 1. *Soient* $\lambda > 0$ *et* $\{f_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ *une famille de fonctions de* $L^\infty(\Omega)^+$ *telle que* $f_\epsilon \downarrow f$. *On pose* $u_\epsilon = \mathcal{S}_\lambda^\epsilon f_\epsilon$. *Alors*

i) $u_\epsilon \in L^\infty(\Omega)^+$ *et* $u_\epsilon \downarrow u$.

ii) $u \in V$ *et* $u_\epsilon \rightharpoonup u$ *dans* V.

iii) u *est solution maximum de* $I(f,\lambda)$.

Admettons pour l'instant ces résultats et démontrons le théorème 1.

Preuve du théorème 1. La partie i) du théorème 1 découle trivialement de la conclusion iii) de la Proposition 1. De plus, on voit que

$$\mathcal{S}_\lambda f = \downarrow \lim \mathcal{S}_\lambda^\epsilon f_\epsilon$$

pour toute famille $\{f_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ de fonctions de $L^\infty(\Omega)^+$ telle que $f_\epsilon \downarrow f$.

Puisque C_ϵ est T-accrétif dans $L^\infty(\Omega)$, les applications $\mathcal{S}_\lambda^\epsilon$ sont des T-contractions de $L^\infty(\Omega)$; à la limite, $\mathcal{S}_\lambda$ est une T-contraction de $L^\infty(\Omega)^+$, ce qui prouve la partie ii) du théorème 1.

Puisque $\{\mathcal{S}_\lambda^\epsilon\}_{\lambda>0}$ est la famille résolvante de l'opérateur m-accrétif C_ϵ, pour tout $\lambda, \mu > 0$, on a

$$\mathcal{S}_\lambda^\epsilon f = \mathcal{S}_\mu^\epsilon \left(\frac{\mu}{\lambda} f + \frac{\lambda-\mu}{\lambda} \mathcal{S}_\lambda^\epsilon f \right).$$

Posons

$$g_\epsilon = \frac{\mu}{\lambda} f + \frac{\lambda-\mu}{\lambda} \mathcal{S}_\lambda^\epsilon f, \quad g = \frac{\mu}{\lambda} f + \frac{\lambda-\mu}{\lambda} \mathcal{S}_\lambda f$$

supposant $\lambda \geqslant \mu > 0$,

$$g_\epsilon \downarrow g$$

et donc

$$\mathcal{S}_\mu^\epsilon g_\epsilon \downarrow \mathcal{S}_\mu g$$

Comme

$$\mathcal{S}_\mu^\epsilon g_\epsilon = \mathcal{S}_\lambda^\epsilon f \downarrow \mathcal{S}_\lambda f$$

on a $\mathcal{S}_\lambda f = \mathcal{S}_\mu g$, c'est-à-dire la conclusion iii) du théorème 1. ∎

La preuve de la Proposition 1 que nous allons maintenant donner, en admettant les lemmes 1 et 2, reprend presque mot pour mot les arguments de [3]. Nous l'explicitons cependant complètement dans le cadre général dans lequel nous nous sommes placés.

Preuve de la Proposition 1. On peut toujours supposer $\lambda = 1$ en remplaçant $\mathcal{A}$ par $\lambda \mathcal{A}$, Φ par $\lambda\Phi$ et ϵ par $\frac{\epsilon}{\lambda}$.

Etape 1. Rappelons que $\mathcal{S}_1^\epsilon$, étant une T-contraction, est croissante. Puisque $\mathcal{S}_1^\epsilon 0 = 0$ et $f_\epsilon \geqslant 0$, on a déjà

$$u_\epsilon \geqslant 0$$

Pour $\epsilon, \eta > 0$, on a

$$u_\eta = \mathcal{S}_1^\epsilon (f_\eta + B_\epsilon u_\eta - B_\eta u_\eta).$$

Puisque $B_\epsilon u_\eta - B_\eta u_\eta = (\frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{\eta})(u_\eta - Mu_\eta)^+$,

$$0 < \epsilon < \eta \Rightarrow f_\eta + B_\epsilon u_\eta - B_\eta u_\eta \geqslant f_\epsilon \Rightarrow u_\eta \geqslant u_\epsilon .$$

Ceci montre déjà la partie i) de la Proposition 1.

Etape 2. Montrons maintenant le point ii) ; il suffit en fait de montrer que $\{u_\epsilon\}$ est borné dans V puisque $u_\epsilon \to u$ dans $L^2(\Omega)$. On a, par définition de u_ϵ,

$$(10) \quad \begin{cases} \Phi(v) + \langle \mathcal{A} u_\epsilon , v-u_\epsilon \rangle + \int B_\epsilon u_\epsilon(v-u_\epsilon) \geqslant \Phi(u_\epsilon) + \int (f_\epsilon - u_\epsilon)(v-u_\epsilon) \\ \text{pour tout } v \in V \end{cases}$$

et donc en particulier, pour $v = 0$:

$$(11) \quad \Phi(u_\epsilon) + \langle \mathcal{A} u_\epsilon , u_\epsilon \rangle + \| u_\epsilon \|_2^2 + \int u_\epsilon B_\epsilon u_\epsilon \leqslant \int f_\epsilon u_\epsilon$$

d'où l'on déduit puisque $u_\epsilon B_\epsilon u_\epsilon \geqslant 0$,

$$\frac{\Phi(u_\epsilon) + < \mathcal{A} u_\epsilon , u_\epsilon > + c \, \| u_\epsilon \|_2^2}{\| u_\epsilon \|_1} \leqslant \| f_\epsilon \|_\infty + (c-1) \, \| u_\epsilon \|_\infty$$

où c est la constante de l'hypothèse de coercivité (H2). D'après cette hypothèse et le fait que f_ϵ et u_ϵ sont bornés dans $L^\infty(\Omega)$ lorsque $\epsilon \to 0$, la conclusion ii) de la proposition s'en déduit.

Etape 3. Montrons que u est solution de I(f,1). D'abord d'après (11), puisque

$$\Phi(u_\epsilon) + < \mathcal{A} u_\epsilon , u_\epsilon > + \| u_\epsilon \|_2^2 \geqslant 0,$$

$$\int u_\epsilon (u_\epsilon - M u_\epsilon)^+ \leqslant \epsilon \int f_\epsilon \, u_\epsilon .$$

Utilisant l'hypothèse (M2), $M u_\epsilon \downarrow Mu$ et donc à la limite,

$$\int u(u - Mu)^+ \leqslant 0$$

d'où l'on déduit

$$u \leqslant Mu.$$

Donnons-nous maintenant $v \in V$ avec $v \leqslant Mu$. On a l'inégalité :

$$(u_\epsilon - M u_\epsilon)^+ (v - u_\epsilon) \leqslant 0 \qquad \text{p.p. sur } \Omega$$

et donc d'après (10)

$$\Phi(v) + < \mathcal{A} u_\epsilon , v - u_\epsilon > \geqslant \Phi(u_\epsilon) + \int (f - u_\epsilon)(v - u_\epsilon).$$

Passant à la limite, puisque Φ est s.c.i.,

$$\Phi(v) + \underline{\lim} < \mathcal{A} u_\epsilon , v - u_\epsilon > \geqslant \Phi(u) + \int (f - u)(v - u).$$

Par pseudo-monotonie de $\mathcal{A}$ (cf. par exemple [1]), on obtient

$$\Phi(v) + < \mathcal{A} u , v - u > \geqslant \Phi(u) + \int (f - u)(v - u).$$

Etape 4. Montrons enfin que u est solution maximum de I(f,1). Pour cela, il suffit étant donné $\bar{u}$ solution de I(f,1) de montrer que $\bar{u} \leqslant u_\epsilon$ pour tout $\epsilon > 0$.

Pour cela nous utilisons la méthode de [3] . Fixons $\epsilon > 0$ et construisons par récurrence la suite $\{ u_n \}$:

$$\begin{cases} u_o + Au_o \ni f_\epsilon \\ u_n + Au_n + \dfrac{1}{\epsilon}(u_n - Mu_{n-1})^+ \ni f_\epsilon \end{cases}$$

L'existence et l'unicité de cette suite résulte de la m-accrétivité de A (lemme 1) et, pour tout $\alpha \in L^\infty(\Omega)$, de l'opérateur $u \mapsto Au + \frac{1}{\epsilon}(u-\alpha)^+$ (il est immédiat que l'opérateur $u \mapsto \frac{1}{\epsilon}(u-\alpha)^+$ est T-accrétif lipschitzien dans $L^\infty(\Omega)$).

Utilisant la T-accrétivité de A et $A + \frac{1}{\epsilon}(. - \alpha)^+$, ainsi que la croissance de M, on montre facilement par récurrence que la suite $\{u_n\}$ est décroissante positive. On a

$$u_\epsilon = \downarrow \lim u_n \tag{12}$$

En effet, considérant $\bar{u}_\epsilon = \downarrow \lim_{n+\infty} u_n$, on a, d'après l'hypothèse (M2), $Mu_n \downarrow M\bar{u}_\epsilon$ et donc la suite $v_n = f_\epsilon - u_n - \frac{1}{\epsilon}(u_n - Mu_{n-1})^+ \in Au_n$ est bornée dans $L^\infty(\Omega)$ et converge p.p. sur Ω vers $v_\epsilon = f_\epsilon - \bar{u}_\epsilon - \frac{1}{\epsilon}(\bar{u}_\epsilon - M\bar{u}_\epsilon)^+ = f_\epsilon - \bar{u}_\epsilon - B_\epsilon \bar{u}_\epsilon$.

D'après le lemme 1.b), $v_\epsilon \in A\bar{u}_\epsilon$ et donc $\bar{u}_\epsilon = (I + C_\epsilon)^{-1} f_\epsilon = u_\epsilon$.

Ceci démontre (12). Pour achever, il suffit donc de prouver par récurrence que $\bar{u} \leqslant u_n$ pour tout $n \geqslant 0$. Etant donné $k > 0$, $v = \bar{u} \wedge (u_n + k) \in V$ et par définition d'une solution de $I(f,1)$, puisque $v \leqslant \bar{u} \leqslant Mu$ et $v - \bar{u} = -(\bar{u} - u_n - k)^+$

$$\Phi(\bar{u} \wedge (u_n + k)) + \int (f - \bar{u})(\bar{u} - u_n - k)^+ \geqslant \Phi(\bar{u}) + \langle \mathcal{A}\bar{u}, (\bar{u} - u_n - k)^+ \rangle \tag{13}$$

Maintenant par définition de u_n, puisque $v = (\bar{u} - k) \vee u_n \in V$ et $v - u_n = (\bar{u} - u_n - k)^+$,

$$\Phi((\bar{u} - k)\vee u_n) + \langle \mathcal{A}u_n, (\bar{u} - u_n - k)^+ \rangle \geqslant \Phi(u_n) + \int (f_\epsilon - u_n - b_n)(\bar{u} - u_n - k)^+ \tag{14}$$

avec

$$b_o = 0, \quad b_n = \frac{1}{\epsilon}(u_n - Mu_{n-1})^+.$$

Additionnant (13) et (14) et utilisant l'hypothèse (H1), ainsi que $f_\epsilon \geqslant f$, on obtient

$$\int (\bar{u} - u_n)(\bar{u} - u_n - k)^+ \leqslant \int b_n (\bar{u} - u_n - k)^+ \tag{15}$$

inégalité qui est vraie pour tout $n \geqslant 0$ et $k > 0$.

Appliquant pour $n = 0$, on obtient $\bar{u} \leqslant u_o$. Supposant par récurrence $\bar{u} \leqslant u_{n-1}$, on aura d'après la croissance de M, $\bar{u} \leqslant M\bar{u} \leqslant Mu_{n-1}$ et donc $(u_n - Mu_{n-1})^+ (\bar{u} - u_n - k)^+ = 0$; appliquant (15), on obtient $\bar{u} \leqslant u_n$. ■

Démontrons enfin les lemmes 1 et 2.

Preuve du lemme 1. Montrons d'abord la T-accrétivité de A dans $L^\infty(\Omega)$. Plus généralement, donnons-nous $\omega \in \mathcal{A}\, u + \partial\Phi(u)$ et $\hat{\omega} \in \mathcal{A}\, \hat{u} + \partial\Phi(\hat{u})$. Pour tout $k > 0$, on a par définition de $\partial\Phi$

$$\Phi(u \wedge (\hat{u} + k)) + < \omega - \mathcal{A}\, u, (u - \hat{u} - k)^+ > \;\geqslant\; \Phi(u)$$

$$\Phi((u - k) \vee \hat{u}) + < \mathcal{A}\, \hat{u} - \hat{\omega}, (u - \hat{u} - k)^+ > \;\geqslant\; \Phi(\hat{u})).$$

Ajoutons ces inégalités et utilisons (H1) pour déduire

$$< \omega - \hat{\omega}, (u - \hat{u} - k)^+ > \;\geqslant\; 0.$$

Etant donné $\lambda > 0$, supposons $(u - \hat{u}) + \lambda(\omega - \hat{\omega}) \in L^\infty(\Omega)$.

Notant qu'alors $\omega - \hat{\omega} \in L^2(\Omega)$ et

$$((u - \hat{u}) + \lambda(\omega - \hat{\omega}) - k)^{+2} \;\geqslant\; (u - \hat{u} - k)^{+2} + 2\lambda(\omega - \hat{\omega})(u - \hat{u} - k)^+,$$

on obtient :

$$\int (u - \hat{u} - k)^{+2} \;\leqslant\; \int ((u - \hat{u}) + \lambda(\omega - \hat{\omega}) - k)^{+2} \tag{16}$$

inégalité vraie pour tout $k \geqslant 0$.

Appliquant (16) avec $k = \| ((u - \hat{u}) + \lambda(\omega - \hat{\omega}))^+ \|_\infty$, on en déduit

$$u - \hat{u} \;\leqslant\; \| ((u - \hat{u}) + \lambda(\omega - \hat{\omega}))^+ \|_\infty.$$

Ceci montre la T-accrétivité de A dans $L^\infty(\Omega)$; cela montre aussi qu'étant donné $\omega \in \mathcal{A}\, u + \partial\Phi(u)$, s'il existe $\lambda > 0$ tel que $u + \lambda\omega \in L^\infty(\Omega)$, alors u et donc aussi ω sont dans $L^\infty(\Omega)$, c'est-à-dire $\omega \in Au$.

Pour montrer la m-accrétivité de A, il est suffisant de montrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $R(I + \lambda A) = L^\infty(\Omega)$. Choisissons $\lambda > 0$ tel que $\lambda c \leqslant 1$, où c est la constante de l'hypothèse de coercivité (H2). Remplaçant $\mathcal{A}$, Φ, c par $\lambda\, \mathcal{A}$, $\lambda\, \Phi$, λc respectivement, on peut toujours supposer $\lambda = 1$ et $c \leqslant 1$. Fixons $f \in L^\infty(\Omega)$; nous avons à résoudre $u + Au \ni f$, ce qui grâce à la remarque ci-dessus, est équivalent à résoudre

(17) $$u + \mathscr{A} u + \partial\Phi(u) \ni f.$$

D'après (H2), il existe une constante R telle que pour $u \in V$,

$$\Phi(u) + \langle \mathscr{A} u , u \rangle + c \, \| u \|_2^2 \leqslant \| u \|_1 \, \| f \|_\infty \Rightarrow \| u \|_V < R.$$

Notons $B = \left\{ u \in V \; ; \; \| u \|_V \leqslant R \right\}$. D'après les théorèmes d'existence d'inéquations variationnelles (cf. par exemple [6]), il existe $u \in B$ tel que

(18) $$\Phi(\omega) + \langle u + \mathscr{A} u , \omega - u \rangle \geqslant \Phi(u) + \int_\Omega f(\omega - u) \qquad \forall \, \omega \in B.$$

En particulier, on aura

$$\Phi(u) + \langle \mathscr{A} u , u \rangle + c \, \| u \|_2^2 \leqslant \Phi(u) + \langle u + \mathscr{A} u , u \rangle \leqslant \| u \|_1 \, \| f \|_\infty$$

et donc $\| u \|_V < R$.

Etant donné $v \in V$, pour tout $t \in \,]0,1]$ suffisamment petit, $\omega = u + t(v - u) \in B$. Appliquant (18) et la convexité de Φ,

$$t\Phi(v) + (1 - t)\Phi(u) + t \langle u + \mathscr{A} u , v - u \rangle \geqslant \Phi(u) + t \int f(v - u),$$

ce qui donne après simplification ($\Phi(u) < \infty$) et division par $t > 0$,

$$\Phi(v) + \langle u + \mathscr{A} u , v - u \rangle \geqslant \Phi(u) + \int f(v - u)$$

c'est-à-dire, $v \in V$ étant quelconque, u est solution de (17).

Démontrons enfin la partie b) du lemme 1. D'abord $\mathscr{A} + \partial\Phi$ étant monotone de V dans V', sa restriction à $L^2(\Omega)$ et donc a fortiori A est monotone dans $L^2(\Omega)$. Puisque $R(I + \lambda A) = L^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$, la fermeture A_2 de A dans $L^2(\Omega)$ est maximal monotone. Etant donné maintenant $\omega \in A_2 \, u$ avec $u, \omega \in L^\infty(\Omega)$, considérons $\bar{u} \in L^\infty(\Omega)$ solution de

$$\bar{u} + A\bar{u} \ni u + \omega.$$

On a, puisque $A \subset A_2$, $\bar{u} = (I + A_2)^{-1}(u + \omega) = u$ et donc $\omega \in Au$. ■

Preuve du lemme 2. On a immédiatement

$$\| B_\epsilon u - B_\epsilon \hat{u} \|_\infty \leqslant \frac{2}{\epsilon} \| u - \hat{u} \|_\infty.$$

Montrons la T-accrétivité de B_ϵ dans $L^\infty(\Omega)$. Soient $u, \hat{u} \in L^\infty(\Omega)$, $\lambda > 0$ et posons

$$k_o = \| (u - \hat{u})^+ \|_\infty, \; k_1 = \| ((u - \hat{u}) + \lambda(B_\epsilon u - B_\epsilon \hat{u}))^+ \|_\infty.$$

On a à montrer $k_o \leqslant k_1$.

On a, par définition, en posant $\bar{u} = u - \hat{u}$,

$$B_\epsilon u \leqslant B_\epsilon \hat{u} + \frac{1}{\lambda} (k_1 - \bar{u}). \tag{19}$$

Maintenant

$$Mu^+ - M\hat{u}^+ \leqslant \| (u^+ - \hat{u}^+)^+ \|_\infty \leqslant \| (u - \hat{u})^+ \|_\infty = k_o$$

donc

$$\hat{u} - M\hat{u}^+ \leqslant u - Mu^+ + k_o - \bar{u}$$

et puisque $k_o - \bar{u} \geqslant 0$,

$$\frac{1}{\epsilon}(u - M\hat{u}^+)^+ \leqslant \frac{1}{\epsilon} (u - Mu^+)^+ + \frac{1}{\epsilon} (k_o - \bar{u})$$

c'est-à-dire

$$B_\epsilon \hat{u} \leqslant B_\epsilon u + \frac{1}{\epsilon} (k_o - \bar{u}).$$

Regroupant avec (19), on a donc

$$\frac{1}{\epsilon}(\bar{u} - k_o) + \frac{1}{\lambda}(\bar{u} - k_1) \leqslant 0.$$

On peut toujours supposer $k_o = \text{sup ess } \bar{u}$ (sinon $k_o = 0$ et $k_o \leqslant k_1$ est trivial) et donc

$$\frac{1}{\lambda}(k_o - k_1) \leqslant 0.$$

■

III. - DEMONSTRATION DU THEOREME 2

Nous nous donnons $u_o \in D(C)$ et f à variation bornée de $[0,T]$ dans $L^\infty(\Omega)^+$ et nous notons u la solution (au sens de la théorie des semi-groupes non linéaires) de

$$\text{(E)} \qquad \frac{du}{dt} + Cu \ni f\,,\ u(0) = u_o\,.$$

Puisque $u_o \in D(C)$, par définition de C,

$$u_o = \mathcal{S}_\lambda f_o \quad \text{avec } \lambda > 0 \text{ et } f_o \in L^\infty(\Omega)^+.$$

Notons pour tout $\epsilon > 0$

$$u_o^\epsilon = \mathcal{S}_\lambda^\epsilon f_o$$

et considérons la solution u_ϵ de

$$(E_\epsilon) \qquad \frac{du_\epsilon}{dt} + C_\epsilon u_\epsilon \ni f\,,\ u_\epsilon(0) = u_o^\epsilon\,.$$

Cette solution est prise au sens de la théorie des semi-groupes non linéaires elle est bien définie puisque l'opérateur C_ϵ est m-T-accrétif dans $L^\infty(\Omega)$ et $u_o^\epsilon \in D(C_\epsilon)$. En fait, nous allons démontrer la

PROPOSITION 2. *La solution* u_ϵ *de* (E_ϵ) *est l'unique «solution forte de l'I.Q.V. d'évolution pénalisée», c'est-à-dire du problème*

$$(IE_\epsilon) \qquad \left\{ \begin{array}{l} u_\epsilon \in \mathcal{C}\,([0,T]\,;L^\infty(\Omega)^+),\ u_\epsilon(0) = u_o^\epsilon \\[2mm] u_\epsilon \in L^\infty(0,T\,;V)\,,\ \dfrac{du_\epsilon}{dt} \in L^\infty(]0,T[\times\Omega) \\[2mm] \Phi(v) + \displaystyle\int \frac{du_\epsilon}{dt}(t)\,(v - u_\epsilon(t)) + \langle \mathcal{A}\, u_\epsilon(t), v - u_\epsilon(t)\rangle \\[2mm] + \dfrac{1}{\epsilon}\displaystyle\int (u_\epsilon(t) - Mu_\epsilon(t))^+\,(v - u_\epsilon(t)) \geqslant \Phi(u_\epsilon(t)) + \int f(t)(v - u_\epsilon(t)) \\[2mm] \qquad\qquad\qquad \text{p.p. } t \in]0,T[\,,\quad \forall\, v \in V \end{array} \right.$$

De plus :

$$\left\| \frac{du_\epsilon}{dt} \right\|_{L^\infty(]0,T[\times\Omega)}$$

$$\|u_\epsilon\|_{L^\infty(0,T;V)}$$

$$\|u_\epsilon(u_\epsilon - Mu_\epsilon)^+\|_{L^\infty(]0,T[\times\Omega)}$$

sont bornés indépendamment de $\epsilon > 0$.

Pour démontrer le théorème 2, nous allons utiliser la même méthode que pour le théorème 1 dans la section II, grâce aux deux propositions suivantes :

PROPOSITION 3. *Avec les notations ci-dessus,*

$$u(t) = \downarrow \lim u_\epsilon(t) \qquad \textit{pour tout } t \in [0,T].$$

PROPOSITION 4. *Etant donné* $\epsilon > 0$ *fixé, il existe une suite* $\{u^n\}$ *satisfaisant*

$$(20)\quad \left\{\begin{array}{l} u^n \in \mathcal{C}([0,T]; L^\infty(\Omega)^+),\ u^n(0) = u_0^\epsilon \\ u^n \in L^\infty(0,T;V),\ \dfrac{du^n}{dt} \in L^\infty(]0,T[\times\Omega) \\ \Phi(v) + \displaystyle\int \frac{du^0}{dt}(t)\,(v - u^0(t)) + < \mathcal{A}\,u^0(t), v - u^0(t) > \geqslant \\ \qquad\qquad \Phi(u^0(t)) + \displaystyle\int f(t)(v - u^0(t)) \\ \Phi(v) + \displaystyle\int \frac{du^n}{dt}(t)\,(v - u^n(t)) + < \mathcal{A}\,u^n(t), v - u^n(t) > + \\ \dfrac{1}{\epsilon}\displaystyle\int (u^n(t) - Mu^{n-1}(t))^+\,(v - u^n(t)) \geqslant \Phi(u^n(t)) + \displaystyle\int f(t)\,(v - u^n(t) \\ \text{p.p.}\quad t \in]0,T[\ ;\quad \forall\, v \in V. \end{array}\right.$$

De plus

$$u_\epsilon(t) = \downarrow \lim u^n(t) \qquad \textit{pour tout } t \in [0,T].$$

Admettons pour l'instant ces propositions et donnons la

Preuve du théorème 2. Utilisant les propositions 2 et 3 et l'hypothèse (H3), on voit sans difficulté par passage à la limite que :

$$u \in L^\infty(0,T;V),\ \frac{du}{dt} \in L^\infty(]0,T[\times\Omega)\quad u(t) \leqslant Mu(t)$$

et qu'étant donné $\omega \in L^\infty(0, T ; V)$ avec $\omega(t) \leqslant Mu(t)$,

$$(21) \quad \int_0^T \Phi(\omega) + \int_0^T \int_\Omega \frac{du}{dt}(\omega - u) + \int_0^T < \mathscr{A} u, \omega - u > \geqslant \int_0^T \Phi(u) + \int_0^T \int_\Omega f(\omega - u).$$

Considérons maintenant $v \in L^\infty(0, T ; V)$ avec $v(t) \leqslant Mu(t)$. Etant donné $\zeta :]0,T[\to [0,1]$ mesurable, appliquons (21) avec $\omega(t) = \zeta(t)v(t) + (1 - \zeta(t))u(t)$. Utilisant la convexité de Φ et simplifiant, on obtient :

$$\int_0^T \zeta \left\{ \Phi(v) + \int_\Omega \frac{du}{dt}(v - u) + < \mathscr{A} u, v - u > \right\} \geqslant \int_0^T \left\{ \zeta \quad \Phi(u) + \int_\Omega f(v - u) \right\}.$$

La fonction ζ étant quelconque, ceci montre que u est solution de $IE(f,u_0)$. Pour montrer qu'elle est solution maximum, il suffit d'après les propositions 3 et 4, pour $\epsilon > 0$ fixé et $\bar{u}$ solution quelconque de $IE(f,u_0)$, de prouver que

$$(22) \qquad \bar{u}(t) \leqslant u^n(t) \qquad \text{pour tout n.}$$

Raisonnant comme dans le cas stationnaire et utilisant l'hypothèse (H3), on voit que pour tout $k > 0$,

$$(23) \quad \int_\Omega \left(\frac{d\bar{u}}{dt}(t) - \frac{du^n}{dt}(t) \right) (\bar{u}(t) - u^n(t) - k)^+ \leqslant \int_\Omega b_n(t)(\bar{u}(t) - \bar{u}^n(t) - k)^+$$

où

$$b_o(t) = 0 \, , \; b_n(t) = \frac{1}{\epsilon} (u^n(t) - Mu^{n-1}(t))^+$$

Notons qu'à la limite, (23) est encore vraie pour $k = 0$, que l'on peut aussi écrire puisque $(\bar{u}(0) - u^n(0))^+ = 0$,

$$\frac{1}{2} \int_\Omega (\bar{u}(t) - u^n(t))^{+2} \leqslant \int_0^t \int_\Omega b_n(\tau)(\bar{u}(\tau) - u^n(\tau))^+ \, d\tau.$$

On en déduit alors aisément (22) par récurrence sur n. ■

Preuve de la Proposition 2 (*). D'abord, puisque $u_0^\epsilon \in D(C_\epsilon)$ et f est à variation bornée, la solution u_ϵ de (E_ϵ) est lipschitzienne de $[0,T]$ dans $L^\infty(\Omega)$, de rapport majoré par

$$\inf \left\{ \| v \|_\infty ; v \in C_\epsilon u_0^\epsilon \right\} + \text{variation totale de f.}$$

(*) Nous utilisons dans les preuves des Propositions 2, 3 et 4 des arguments de la théorie des semi-groupes non linéaires, renvoyant à [4] (cas f = 0), [2] ou [7] pour la justification de ces arguments.

Mais $u_o^\epsilon = \mathcal{G}_\lambda^\epsilon f_o$, donc $v = \frac{1}{\lambda}(f_o - \mathcal{G}_\lambda^\epsilon f_o) \in C_\epsilon u_o^\epsilon$ et $\|v\|_\infty \leqslant \frac{2}{\lambda}\|f_o\|_\infty$. On en déduit que :

$$(24) \qquad \frac{du_\epsilon}{dt} \in L^\infty(]0,T[\times\Omega)$$

et

$$\left\|\frac{du_\epsilon}{dt}\right\|_{L^\infty(]0,T[\times\Omega)} \leqslant \frac{2}{\lambda}\|f_o\|_\infty + \text{Var } f.$$

Ensuite $C_\epsilon = A + B_\epsilon$ et B_ϵ étant un opérateur lipschitzien de $L^\infty(\Omega)$, on en déduit que u_ϵ est solution (toujours au sens de la théorie des semi-groupes dans $L^\infty(\Omega)$) de

$$\frac{du_\epsilon}{dt} + Au_\epsilon \ni g_\epsilon \ , \ u_\epsilon(0) = u_o^\epsilon$$

avec

$$g_\epsilon = f - B_\epsilon u_\epsilon .$$

Utilisant la fermeture A_2 de A dans $L^2(\Omega)$ (cf. lemme 1.b), puisque $L^\infty(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, u_ϵ est solution au sens de la théorie des semi-groupes non linéaires dans $L^2(\Omega)$ de

$$(25) \qquad \frac{du_\epsilon}{dt} + A_2 u_\epsilon \ni g_\epsilon .$$

Mais $\frac{du_\epsilon}{dt} \in L^\infty(]0,T[\times\Omega) \hookrightarrow L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ et A_2 est maximal monotone dans $L^2(\Omega)$, donc u_ϵ est solution forte de (25), c'est-à-dire

$$\frac{du_\epsilon}{dt}(t) + A_2 u_\epsilon(t) \ni g_\epsilon(t) \qquad \text{p.p.} \quad t \in]0,T[.$$

Enfin $u_\epsilon(t) \in L^\infty(\Omega)$ et $g_\epsilon(t) - \frac{du_\epsilon}{dt}(t) \in L^\infty(\Omega)$, donc :

$$\frac{du_\epsilon}{dt}(t) + Au_\epsilon(t) \ni g_\epsilon(t).$$

Ceci prouve que u_ϵ est solution de (IE_ϵ) en explicitant A et g_ϵ. Il faut aussi remarquer, utilisant la T-accrétivité de C_ϵ, que $u_\epsilon \geqslant 0$ puisque $u_o^\epsilon \geqslant 0$ et $f \geqslant 0$. Les estimations se déduisent aisément de (24) et de l'hypothèse de coercivité (H2).

Démontrons enfin l'unicité. Considérons u et $\bar{u}$ deux solutions de (IE_ϵ). Ajoutons les inéquations correspondant à u (resp. $\bar{u}$) avec $v = u(t) \wedge (\bar{u}(t) + k)$ (resp. $v = (u(t) - k) \vee \bar{u}(t)$) ; utilisant l'hypothèse (H1), nous obtenons :

$$(26) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int\left(\frac{du}{dt}(t) - \frac{d\bar{u}}{dt}(t)\right)(u(t) - \bar{u}(t) - k)^+ \leqslant \int b(t)\,(u(t) - \bar{u}(t) - k)^+ \\ \text{p.p. } t \in]0,T[\ , \ \forall k > 0 \end{array} \right.$$

avec $b(t) = \frac{1}{\epsilon}\left\{(\bar{u}(t) - M\bar{u}(t))^+ - (u(t) - Mu(t))^+\right\}$.

Posons $\omega = u - \bar{u}$. On a alors pour tout $2 < p < \infty$,

$$\omega^{+p-1} = (p-1)(p-2)\int_0^\infty k^{p-3}(\omega - k)^+\, dk$$

et donc, d'après (26), utilisant le théorème de Fubini

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{p}\int \omega(t)^{+p} = \int \frac{d\omega}{dt}(t)\omega(t)^{+p-1} \leqslant \int b(t)\omega(t)^{+p-1}.$$

On en déduit,

$$\| \omega(t)^+ \|_p^{p-1} \frac{d}{dt} \| \omega(t)^+ \|_p = \frac{d}{dt}\frac{1}{p}\int \omega(t)^{+p} \leqslant \| b(t) \|_p \| \omega(t)^+ \|_p^{p-1}$$

et donc, puisque $\omega(0) = 0$,

$$\| \omega(t)^+ \|_p \leqslant \int_0^t \| b(\tau) \|_p \, d\tau.$$

Cette inégalité est encore vraie à la limite pour $p = \infty$; d'autre part, en intervertissant les rôles de u et $\bar{u}$, on obtient la même inégalité pour $\omega(t)^-$; enfin utilisant $\| b(t) \|_\infty \leqslant \frac{2}{\epsilon} \| \omega(t) \|_\infty$ on obtient

$$\| \omega(t) \|_\infty \leqslant \frac{2}{\epsilon}\int_0^t \| \omega(\tau) \|_\infty \, d\tau$$

et donc $\omega = 0$. ■

Preuve de la Proposition 4. Etant donné $\omega \in \widetilde{W}^{1,\infty}(0, T ; L^\infty(\Omega)^+) = \omega \in \mathcal{C}([0,T] ; L^\infty(\Omega)^+)$; $\frac{d\omega}{dt} \in L^\infty(]0,T[\times \Omega)$, l'application

$$B^\omega : (t,u) \in [0,T] \times L^\infty(\Omega) \to \frac{1}{\epsilon}(u - M\omega(t))^+ \in L^\infty(\Omega)$$

est lipschitzienne (par rapport à t et u). On en déduit l'existence (et l'unicité) d'une solution (au sens de la théorie des semi-groupes non linéaires dans $L^\infty(\Omega)$) de

$$\frac{du}{dt} + Au + B^\omega u \ni f , \quad u(0) = u_0^\epsilon \tag{27}$$

et que de plus cette solution est dans $\widetilde{W}^{1,\infty}(0, T ; L^\infty(\Omega)^+)$. Utilisant la même argumentation que dans la preuve ci-dessus de la Proposition 2, on montre que cette solution u satisfait :

$$\begin{cases} u \in \mathcal{C}([0,T]\,;L^\infty(\Omega)^+)\,,\ u(0)=u_o^\epsilon \\[2mm] u \in L^\infty(0,T\,;V)\,,\ \dfrac{du}{dt} \in L^\infty(]0,T[\times\Omega) \\[2mm] \Phi(v)+\displaystyle\int \frac{du}{dt}\,(t)\,(v-u(t)) + <\mathcal{A}\,u(t), v-u(t)> + \\[2mm] \dfrac{1}{\epsilon}\displaystyle\int (u(t)-M\omega(t))^+\,(v-u(t)) \geqslant \Phi(u(t)) + \int f(t)(v-u(t)) \\[2mm] \text{p.p.}\quad t\in\,]0,T[\,,\quad \forall\, v\in V. \end{cases}$$

Maintenant pour $t \in [0,T]$ fixé, l'application $u \to B^\omega(t,u)$ est T-accrétive dans $L^\infty(\Omega)$ et donc aussi l'opérateur $u \to Au + B^\omega(t,u)$. Considérant $\bar{u}$ la solution de (21) associée à une autre fonction $\bar{\omega}$, $\bar{u}$ étant aussi solution de

$$\frac{d\bar{u}}{dt} + A\bar{u} + B^\omega \bar{u} \ni \bar{f} = f + B^\omega \bar{u} - B^{\bar{\omega}} \bar{u}$$

on aura

$$\begin{aligned} \| \bar{u}(t) - u(t) \|_\infty &\leqslant \int_0^t \| B^\omega u(\tau) - B^{\bar{\omega}} u(\tau) \|_\infty \, d\tau \\ &\leqslant \frac{1}{\epsilon} \int_0^t \| \bar{\omega}(\tau) - \omega(\tau) \|_\infty \, d\tau. \end{aligned}$$

Notons S l'application $\omega \to u$ de $\widetilde{W}^{1,\infty}(0,T\,;L^\infty(\Omega)^+)$ dans lui-même, on obtient par récurrence sur n,

(28) $$\| S^n \bar{\omega}(t) - S^n \omega(t) \|_\infty \leqslant \frac{t^n}{\epsilon^n\, n!} \;\| \bar{\omega} - \omega \|_{L^\infty(]0,T[\times\Omega)}\,.$$

Partant de u^o, solution de

$$\frac{du^o}{dt} + Au^o \ni f\,,\quad u^o(0) = u_o^\epsilon$$

la suite $u^n = S^n u^o$ vérifie (20) et d'après (28), converge dans $\mathcal{C}([0,T]\,;L^\infty(\Omega))$. Notons $\bar{u} = \lim u^n$,

$$B^{u_{n-1}} u_n \to B_\epsilon \bar{u} \quad \text{dans} \quad \mathcal{C}([0,T]\,;L^\infty(\Omega))\,;$$

donc $\bar{u}$ est solution (au sens de la théorie des semi-groupes) de

$$\frac{d\bar{u}}{dt} + A\bar{u} \ni g\,,\quad \bar{u}(0) = u_o^\epsilon$$

avec $\bar{g} = f - B_\epsilon\, \bar{u}$. On en déduit que $\bar{u} = u_\epsilon$. ■

Preuve de la Proposition 3. Par T-accrétivité, pour $\epsilon < \eta$, $u_\epsilon(t) \leqslant u_\eta(t)$ pour tout $t \in [0,T]$. Puisque $u_\epsilon(t) \geqslant 0$ pour tout $t \in [0,T]$, il suffit de montrer que $u_\epsilon(t) \to u(t)$ dans $L^2(\Omega)$.

Supposons d'abord f constante en $t \in [0,T]$. Alors,

$$u = L^\infty - \lim_{\delta \to 0} u^\delta$$

où u^δ est définie par

$$u^\delta(t) = u_o \qquad t \leqslant 0$$

$$u^\delta(t) = \mathscr{S}_\delta(u^\delta(t-\delta) + \delta f) \qquad t \in]0,T].$$

De même pour tout $\epsilon > 0$,

$$u_\epsilon = L^\infty - \lim_{\delta \to 0} u_\epsilon^\delta$$

où u_ϵ^δ est définie par :

$$u_\epsilon^\delta(t) = u_o^\epsilon \qquad t \leqslant 0$$

$$u_\epsilon^\delta(t) = \mathscr{S}_\delta^\epsilon(u_\epsilon^\delta(t-\delta) + \delta f) \qquad t \in]0,T].$$

Par définition de $\mathscr{S}_\delta$, pour tout $\delta > 0$,

$$u^\delta = \downarrow \lim_{\epsilon \downarrow 0} u_\epsilon^\delta.$$

D'autre part, d'après le théorème de Crandall-Liggett, on a l'estimation,

$$\begin{aligned} \| u_\epsilon - u_\epsilon^\delta \|_{L^\infty} &\leqslant 2T\sqrt{\delta} \inf \left\{ \| v \|_\infty ; v \in C_\epsilon u_o^\epsilon - f \right\} \\ &\leqslant 2T\sqrt{\delta} \left(\frac{2 \| f_o \|_\infty}{\lambda} + \| f \|_\infty \right) \end{aligned}$$

qui est indépendante de ϵ.

La proposition est donc démontrée dans ce cas. En réitérant sur chaque intervalle, elle l'est aussi pour une fonction f en escalier sur $[0,T]$. Utilisant enfin le fait que les application $f \to u^\epsilon$ sont des contractions de $L^1(0, T ; L^\infty(\Omega))$ dans $\mathcal{C}([0,T] ; L^\infty(\Omega))$, par densité, la proposition est encore vraie pour tout $f \in L^1(0, T ; L^\infty(\Omega)^+)$ et donc a fortiori pour f à variation bornée de $[0,T]$ dans $L^\infty(\Omega)^+$. ∎

Remarque. Comme on le voit aisément dans les preuves, les Propositions 2, 3 et 4 sont des cas particuliers de résultats abstraits que nous n'expliciterons pas ici.

REFERENCES

[1] L. BARTHELEMY. Thèse 3e cycle. (1980).

[2] Ph. BENILAN. Thèse Orsay. (1972).

[3] A. BENSOUSSAN, J.L. LIONS. *«Nouvelle formulation de problèmes de contrôle impulsionnel et applications».* CRAS Paris, t. 276, série A, (1973), p. 1189-1192.

[4] M.G. CRANDALL, T.M. LIGGETT. *«Generation of semi groups of non linear transformations in general Banach spaces».* Amer. Jour. Math. 93, (1977), p. 265-298.

[5] M.G. GARRONI, G.M. TROIANIELLO. *«Some regularity results and a priori estimates for solutions of variational and quasi-variational inequalities».* A survey. In Proc. of the International meeting on Recent Methods in Non Linear Analysis. Pittagora Editrice. Bologne (1979), p. 493-518.

[6] J.L. LIONS. *«Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires».* Dunod, Gauthier-Villars.

[7] M. PIERRE. Thèse 3e cycle. Paris VI, (1976).

(Manuscrit reçu le 1er décembre 1981