ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

LUC PAQUET

Problèmes mixtes pour le système de Maxwell

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 4, nº 2 (1982), p. 103-141

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1982_5_4_2_103_0>

Annales Faculté des Sciences Toulouse
Vol IV, 1982, P 103 à 141

PROBLEMES MIXTES POUR LE SYSTEME DE MAXWELL

Luc Paquet (1)

(1) Université d'Etat de Mons, 15 avenue Maistriau, Faculté des Sciences, Département de Mathématiques, 7000 Mons - Belgique.

Résumé : On introduit le système de Maxwell classique sur une variété riemanienne orientée C^∞ compacte à bord et l'on étudie les conditions au bord «définissant» des générateurs de semi-groupe à contraction. A cette fin nous développons les théorèmes de trace adéquat sur les formes différentielles. Dans le cas particulier de la boule ouverte de $\mathbb{R}^n$, utilisant la méthode de séparation des variables développée dans [P1], on précise le résultat.

Summary : One defines the classical Maxwell's system on a C^∞ compact Riemanian manifold with boundary and one characterizes those boundary conditions defining generators of contraction semi-groups. For that purpose we state and prove the adequat trace theorems for differential forms. In the particular case of the open ball of $\mathbb{R}^n$, using the method of separation of variables worked out in [P1], one precises the result.

0. - INTRODUCTION

On introduit le système de Maxwell classique sur une variété riemanienne orientée C^∞ compacte à bord et l'on étudie les conditions au bord «définissant» des générateurs de semi-groupe à contraction. A cette fin, nous développons les théorèmes de trace adéquat sur les formes différentielles (vaguement parlant). Enfin le cas de la boule ouverte (de centre 0 et rayon 1) de $\mathbb{R}^n$ est traité plus à fond, utilisant la méthode de séparation des variables pour des formes différentielles, introduite dans [P1] . Ces résultats ont été annoncés dans [P2].

Je voudrais, pour terminer cette introduction, remercier Monsieur R. Temam de ses remarques critiques constructives.

1. - THEOREMES DE TRACES

Rappelons tout d'abord un résultat de [D–L] (p. 337) : Soit Ω un ouvert borné régulier de IR^3, n le champ normal unitaire sortant le long de $\partial\Omega$. L'application de $(C^1(\overline{\Omega}))^3 \to (C^1(\partial\Omega))^3$: $u \mapsto n \wedge u$, se prolonge par continuité en une application linéaire (1) continue de $H(\mathrm{Rot};\Omega) = \{u \in (L^2(\Omega))^3 \,;\, \mathrm{rot}\, u \in (L^2(\Omega))^3\} \to (H^{-1/2}(\partial\Omega))^3$.

L'inconvénient majeur de ce résultat est que l'application trace (1) n'est pas surjective. Identifiant un champ de vecteurs au-dessus de Ω à la 1-forme différentielle qui lui est canoniquement associée, nous sommes ramenés à l'étude de traces de formes différentielles.

Traitons tout d'abord le cas du semi-espace, plus précisément IR^n_- désignera dans toute la suite $\{x \in IR^n \,;\, x_1 < 0\}$. Nous identifierons sa frontière à IR^{n-1}.

1.1. LEMME. *Soit* $u \in C^\infty_{oo}(\overset{p}{\Lambda}\, T^*\overline{IR^n_-})$[1], $(u_{j_1\dots j_p})$ *ses coefficients dans la carte identité. Considérons* $tu = \sum_{1<j_1<\dots<j_p\leqslant n} u_{j_1\dots j_p}(0,.)dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p}$, i.e. *l'image réciproque de* u *par l'injection canonique* $IR^{n-1} \hookrightarrow IR^n$: $x \mapsto (0,x)$. *Alors il existe* $C > 0$ *tel que pour tout* $1 < j_1 < \dots < j_p \leqslant n$:

$$\| u_{j_1\dots j_p}(0,.) \|_{H^{-1/2}(IR^{n-1})} \leqslant C\big(\| u \|_{L^2(\overset{p}{\Lambda} T^*IR^n_-)} + \| du \|^{(2)}_{L^2(\overset{p+1}{\Lambda} T^*IR^n_-)}\big). \tag{2}$$

Preuve.

- $$\int_{IR^{n-1}} \frac{|\widehat{u_{j_1\dots j_p}(0,.)}(\xi)|^2}{(1+|\xi|^2)^{1/2}}\, d\xi = \int_{]-\infty,o[\times IR^{n-1}} |\widehat{u_{j_1\dots j_p}(0,.)}(\xi)|^2\, e^{x_1(1+|\xi|^2)^{1/2}}\, dx_1 \otimes d\xi$$

$$\leqslant 2 \int_{]-\infty,o[\times IR^{n-1}} |\widehat{u_{j_1\dots j_p}(x_1,.)}(\xi)|^2\, e^{x_1(1+|\xi|^2)^{1/2}}\, dx_1 \otimes d\xi$$

$$+\, 2 \int_{]-\infty,o[\times IR^{n-1}} |\widehat{u_{j_1\dots j_p}(x_1,.)}(\xi) - \widehat{u_{j_1\dots j_p}(0,.)}(\xi)|^2\, e^{x_1(1+|\xi|^2)^{1/2}}\, dx_1 \otimes d\xi$$

$$\leqslant 2\, \| u_{j_1\dots j_p} \|_2^2 + 2 \int_{]-\infty,o[\times IR^{n-1}} |x_1| \int_{x_1}^{o} \left| \widehat{\frac{\partial u_{j_1\dots j_p}}{\partial x_1}(t,.)}(\xi)\right|^2 dt\; e^{x_1(1+|\xi|^2)^{1/2}}\, dx_1 \otimes d\xi \tag{3}$$

---

[1] Soit M une variété de classe C^∞ (éventuellement avec bord). $C^\infty_{oo}(\overset{p}{\Lambda}\, T^*M)$ désigne l'espace des formes différentielles de degré p, C^∞ à support compact. Sauf mention expresse du contraire, p désigne un nombre entier compris entre o et dim M.

[2] d désigne l'opérateur dérivée extérieure : voir [Sch] p. 344 et (dans ce texte) alinéa suivant 1.8.

• D'autre part quel que soit $2 \leqslant k \leqslant n$ et $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n$:

$$\int_{]-\infty,0[\times \mathbb{R}^{n-1}} |x_1| \int_{x_1}^{0} \left| \widehat{\frac{\partial u_{i_1 \ldots i_p}}{\partial x_k}(t,.)}(\xi) \right|^2 dt \; e^{x_1(1+|\xi|^2)^{1/2}} dx_1 \otimes d\xi$$

$$\leqslant \int_{]-\infty,0[\times \mathbb{R}^{n-1}} |x_1| \int_{x_1}^{0} |\xi_k \widehat{u_{i_1 \ldots i_p}}(t,\xi)|^2 \, dt \, e^{x_1(1+|\xi|^2)^{1/2}} dx_1 \otimes d\xi$$

$$\leqslant \int_{]-\infty,0[\times \mathbb{R}^{n-1}} \frac{\xi_k^2}{1+|\xi|^2} |\widehat{u_{i_1 \ldots i_p}}(t,\xi)|^2 \, dt \otimes d\xi \leqslant \| u_{i_1 \ldots i_p} \|_2^2 . \tag{4}$$

• Par (3) et (4),

$$\| u_{j_1 \ldots j_p}(0,.) \|^2_{H^{-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} \leqslant C \|u\|_2^2 + 4 \int_{]-\infty,0[\times \mathbb{R}^{n-1}} |x_1| \int_{x_1}^{0} \left| \widehat{\epsilon^{k i_1 \ldots i_p}_{1 j_1 \ldots j_p} \frac{\partial u_{i_1 \ldots i_p}}{\partial x_k}}(t,\xi) \right|^2 dt$$

$$e^{x_1(1+|\xi|^2)^{1/2}} dx_1 \otimes d\xi \leqslant C \|u\|_2^2 + 4 \|du\|_2^2.$$

Q.E.D.

Bien entendu dans 1.1 «$\wedge$» désigne la transformée de Fourier par rapport aux variables $x_2, \ldots, x_n$. Posons

$$\|tu\|_{H^{-1/2}(\stackrel{p}{\Lambda} T^* \mathbb{R}^{n-1})} = \left(\sum_{1 < j_1 < \ldots < j_p \leqslant n} \| u_{j_1 \ldots j_p}(0,.) \|^2_{H^{-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} \right)^{1/2} . \tag{5}$$

De 1.1 et (5) suit :

1.2. COROLLAIRE. *Il existe* $C > 0$ *tel que pour tout* $u \in C^\infty_{oo}(\stackrel{p}{\Lambda} T^* \overline{\mathbb{R}^n_-})$:

$$\|tu\|^{(3)}_{H^{-1/2}(\stackrel{p}{\Lambda} T^* \mathbb{R}^{n-1})} \leqslant C(\|u\|_{L^2(\stackrel{p}{\Lambda} T^* \mathbb{R}^n_-)} + \|du\|_{L^2(\stackrel{p+1}{\Lambda} T^* \mathbb{R}^n_-)} . \tag{6}$$

Dans la suite de cette section, «$\wedge$» dénotera toujours la transformée de Fourier partielle (par rapport aux variables $x_2, \ldots, x_n$) ; pour ce qui est de sa définition nous renvoyons à [Hö], p. 24.

1.3. LEMME. *Il existe* $C > 0$ *tel que pour tout* $u \in C^\infty_{oo}(\stackrel{p}{\Lambda} T^* \overline{\mathbb{R}^n_-})$:

$$\|dtu\|_{H^{-1/2}(\stackrel{p+1}{\Lambda} T^* \mathbb{R}^{n-1})} \leqslant C(\|u\|_{L^2(\stackrel{p}{\Lambda} T^* \mathbb{R}^n_-)} + \|du\|_{L^2(\stackrel{p+1}{\Lambda} T^* \mathbb{R}^n_-)} .$$

---

(3) **Pour la définition de tu se reporter à l'énoncé du lemme 1.1.**

Preuve. • Soit $2 \leqslant j_1 < \ldots < j_{p+1} \leqslant n$.

$$\left\| \epsilon^{ki_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_{p+1}} \frac{\partial u_{i_1\ldots i_p}(0,.)}{\partial x_k} \right\|^2_{H^{-1/2}(IR^{n-1})}$$

$$= \int_{IR^{n-1}} \left| \epsilon^{ki_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_{p+1}} \xi_k \widehat{u_{i_1\ldots i_p}(0,.)}(\xi) \right|^2 \frac{d\xi}{(1+|\xi|^2)^{1/2}}$$

$$= \int_{]-\infty,o[\times IR^{n-1}} \left| \epsilon^{ki_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_{p+1}} \xi_k \widehat{u_{i_1\ldots i_p}(0,.)}(\xi) \right|^2 e^{x_1(1+|\xi|^2)^{1/2}} dx_1 \otimes d\xi$$

$$\leqslant 2 \int_{]-\infty,o[\times IR^{n-1}} \left| \epsilon^{ki_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_{p+1}} \xi_k \widehat{u_{i_1\ldots i_p}(x_1,.)}(\xi) \right|^2 e^{x_1(1+|\xi|^2)^{1/2}} dx_1 \otimes d\xi$$

$$+ 2 \int_{]-\infty,o[\times IR^{n-1}} \left| \epsilon^{ki_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_{p+1}} \xi_k \int_{x_1}^{o} \frac{\partial}{\partial t} \widehat{u_{i_1\ldots i_p}(t,.)}(\xi) dt \right|^2 e^{x_1(1+|\xi|^2)^{1/2}} dx_1 \otimes d\xi$$

$$\leqslant C \, \|du\|_2^2 + 2 \int_{]-\infty,o[\times IR^{n-1}} \left| \epsilon^{ki_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_{p+1}} \xi_k \int_{x_1}^{o} \widehat{\frac{\partial u_{i_1\ldots i_p}}{\partial x_1}}(t,\xi) dt \right|^2 e^{x_1(1+|\xi|^2)^{1/2}} dx_1 \otimes d\xi. \tag{8}$$

• Montrons que

$$\epsilon^{ki_1\ldots i_p}_{j_1 j_2\ldots j_{p+1}} \xi_k \widehat{\frac{\partial u_{i_1\ldots i_p}}{\partial x_1}} = \epsilon^{ki_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_{p+1}} \xi_k \widehat{(du)_{1i_1\ldots i_p}}. \tag{9}$$

En effet :

$$\epsilon^{ki_1\ldots i_p}_{j_1 j_2\ldots j_{p+1}} \xi_k \widehat{(du)_{1i_1\ldots i_p}} = \epsilon^{ki_1\ldots i_p}_{j_1 j_2\ldots j_{p+1}} \epsilon^{sl_1\ldots l_p}_{1i_1\ldots i_p} \xi_k \widehat{\frac{\partial u_{l_1\ldots l_p}}{\partial x_s}}$$

$$= \epsilon^{ki_1\ldots i_p}_{j_1 j_2\ldots j_{p+1}} \xi_k \widehat{\frac{\partial u_{i_1\ldots i_p}}{\partial x_1}} + i\, \xi_k \xi_s\, \epsilon^{ki_1\ldots i_p}_{j_1 j_2\ldots j_{p+1}} \epsilon^{sl_1\ldots l_p}_{1i_1\ldots i_p} \widehat{u_{l_1\ldots l_p}}. \tag{10}$$

Eu égard à (10), il suffit de montrer que :

$$\text{quel que soit } (k,s) \in \{2,\ldots,n\}^2,\ \epsilon^{ki_1\ldots i_p}_{j_1 j_2\ldots j_{p+1}} \epsilon^{sl_1\ldots l_p}_{1i_1\ldots i_p} = -\epsilon^{si_1\ldots i_p}_{j_1 j_2\ldots j_{p+1}} \epsilon^{kl_1\ldots l_p}_{1i_1\ldots i_p}. \tag{11}$$

Observons que dans (11), $2 \leqslant j_1 < \ldots < j_{p+1} \leqslant n$, $2 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n$, $2 \leqslant k,s \leqslant n$; par contre $1 \leqslant l_1 < \ldots < l_p \leqslant n$. (k,s) étant fixé, chaque membre de (11) représente au plus un terme. Le membre de gauche (resp. de droite) de (11) est égal à moins la signature de la permutation appliquant $(k,s,l_2,\ldots,l_p)$ (resp. $(s,k,l_2,\ldots,l_p)$) dans l'ordre strictement croissant. D'où la différence de signe dans (11).

• De (8) et (9) suit :

$$\| (dtu)_{j_1 \dots j_{p+1}} \|^2_{H^{-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} \leqslant C \, \| du \|_2^2$$

$$+ 2 \int_{]-\infty,o[\times \mathbb{R}^{n-1}} \left| \epsilon^{k i_1 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_{p+1}} \xi_k \int_{x_1}^{o} \widehat{(du)_{1 i_1 \dots i_p}}(t,\xi) dt \right|^2 e^{x_1 (1+|\xi|^2)^{1/2}} dx_1 \otimes d\xi$$

$$\leqslant C \, \| du \|_2^2 + C \int_{]-\infty,o[\times \mathbb{R}^{n-1}} \frac{|\xi|^2}{1+|\xi|^2} \sum_{1 \leqslant k_1 < \dots < k_{p+1} \leqslant n} |\widehat{(du)_{k_1 \dots k_{p+1}}}|^2 \, dt \otimes d\xi$$

$$\leqslant C \, \| du \|_2^2 . \qquad \text{Q.E.D.}$$

Considérons $H_p(d;\mathbb{R}^n_-) = \left\{ u \in L^2(\overset{p}{\Lambda} T^* \mathbb{R}^n_-) \; ; \; du \in L^2(\overset{p+1}{\Lambda} T^* \mathbb{R}^n_-) \right\}$ et $H_p^{-1/2}(d;\mathbb{R}^{n-1}) = \left\{ \varphi \in H^{-1/2}(\overset{p}{\Lambda} T^* \mathbb{R}^{n-1}) \; ; \; d\varphi \in H^{-1/2}(\overset{p+1}{\Lambda} T^* \mathbb{R}^{n-1}) \right\}$, ces espaces étant munis de la topologie définie par la norme du graphe. 1.2 et 1.3 montrent que l'application de $C^\infty_{oo}(\overset{p}{\Lambda} T^* \overline{\mathbb{R}^n_-}) \to H^{-1/2}(\overset{p}{\Lambda} T^* \mathbb{R}^{n-1})$: $u \to tu$ est continue, $C^\infty_{oo}(\overset{p}{\Lambda} T^* \overline{\mathbb{R}^n_-})$ étant muni de la topologie induite par $H_p(d;\mathbb{R}^n_-)$. Nous allons montrer dans ce qui suit qu'elle se prolonge par continuité de manière unique en une application de $H_p(d;\mathbb{R}^n_-)$ sur $H_p^{-1/2}(d;\mathbb{R}^{n-1})$.

1.4. LEMME. *Soit* $\varphi \in H_p^{-1/2}(d;\mathbb{R}^{n-1})$. *Quel que soit* $2 \leqslant i_1 < \dots < i_p \leqslant n$ *et* $2 \leqslant j_2 < \dots < j_p \leqslant n$ *posons :*

$$\widehat{u_{i_1 \dots i_p}}(x_1,\xi_2,\dots,\xi_n) = \widehat{\varphi_{i_1 \dots i_p}}(\xi_2,\dots,\xi_n) \exp\left[x_1 \sqrt{1+\xi_2^2+\dots+\xi_n^2}\,\right] \tag{12}$$

et (4)

$$\widehat{u_{1 j_2 \dots j_p}}(x_1,\xi_2,\dots,\xi_n) = \frac{\widehat{(\delta\varphi)_{j_2 \dots j_p}}(\xi_2,\dots,\xi_n)}{\sqrt{1+\xi_2^2+\dots+\xi_n^2}} \exp\left[x_1 \sqrt{1+\xi_2^2+\dots+\xi_n^2}\,\right]. \tag{13}$$

Alors

$$u = \sum_{1 \leqslant k_1 < \dots < k_p \leqslant n} u_{k_1 \dots k_p} \, dx^{k_1} \wedge \dots \wedge dx^{k_p} \in H_p(d;\mathbb{R}^n_-)$$

et l'application $\varphi \to u$ est continue de $H_p^{-1/2}(d;\mathbb{R}^{n-1})$ sur $H_p(d;\mathbb{R}^n_-)$.

Preuve. • Par (12),

$$\| u_{i_1 \dots i_p} \|_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \| \varphi_{i_1 \dots i_p} \|_{H^{-1/2}}. \tag{14}$$

• Par (13),

$$\| u_{1 j_2 \dots j_p} \|_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \| (\delta\varphi)_{j_2 \dots j_p} \|_{H^{-3/2}} \leqslant \text{cste} \, \| \varphi \|_{H^{-1/2}}. \tag{15}$$

• Soit $2 \leqslant k_1 < k_2 < \dots < k_{p+1} \leqslant n$.

(4) δ désigne l'opérateur codifférentielle : [R] p. 125 et alinéa de ce texte suivant 1.8.

$$(du)_{k_1\dots k_{p+1}} = \sum_{\nu=1}^{p+1} (-1)^{\nu-1} \frac{\partial u_{k_1\dots\hat{k}_\nu\dots k_{p+1}}}{\partial x_{k_\nu}},$$

d'où par (12) :

$$\| (du)_{k_1\dots k_{p+1}} \|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Big| \sum_{\nu=1}^{p+1} (-1)^{\nu-1} \xi_{k_\nu} \widehat{\varphi_{k_1\dots\hat{k}_\nu\dots k_{p+1}}}(\xi) \Big|^2 \frac{d\xi}{2(1+|\xi|^2)^{1/2}}$$

$$= \frac{1}{2} \| (d\varphi)_{k_1\dots k_{p+1}} \|^2_{H^{-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})};$$

ξ désigne la variable duale de $(x_2,\dots,x_n)$ («$\wedge$» désigne la transformée de Fourier sur les variables $x_2,\dots,x_n$). D'où

$$\| (du)_{k_1\dots k_{p+1}} \|_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \| (d\varphi)_{k_1\dots k_{p+1}} \|_{H^{-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})}. \tag{16}$$

• Soit $2 \leqslant j_2 < \dots < j_{p+1} \leqslant n$.

$$(du)_{1j_2\dots j_{p+1}} = \frac{\partial u_{j_2\dots j_{p+1}}}{\partial x_1} + \sum_{\nu=2}^{p+1} (-1)^{\nu-1} \frac{\partial u_{1j_2\dots\hat{j}_\nu\dots j_{p+1}}}{\partial x_{j_\nu}}.$$

D'où par (12) et (13) :

$$\widehat{(du)_{1j_2\dots j_{p+1}}} = \frac{\exp[x_1\sqrt{1+\xi_2^2+\dots+\xi_n^2}]}{\sqrt{1+\xi_2^2+\dots+\xi_n^2}} [(1+\xi_2^2+\dots+\xi_n^2)\widehat{\varphi_{j_2\dots j_{p+1}}}$$

$$+ \sum_{\nu=2}^{p+1} (-1)^{\nu-1} i x_{j_\nu} \widehat{(\delta\varphi)_{j_2\dots\hat{j}_\nu\dots j_{p+1}}}]$$

$$= \frac{\exp\, x_1\sqrt{1+\xi_2^2+\dots+\xi_n^2}}{\sqrt{1+\xi_2^2+\dots+\xi_n^2}} [\varphi_{j_2\dots j_{p+1}} + (\Delta\varphi)_{j_2\dots j_{p+1}} - (d\delta\varphi)_{j_2\dots j_{p+1}}]^\wedge$$

$$= \frac{\exp\, x_1\sqrt{1+\xi_2^2+\dots+\xi_n^2}}{\sqrt{1+\xi_2^2+\dots+\xi_n^2}} [((I+\delta d)\varphi)_{j_2\dots j_{p+1}}]^\wedge.$$

D'où :

$$\| (du)_{1j_2\dots j_{p+1}} \|_2 \leqslant C \|((I+\delta d)\varphi)_{j_2\dots j_{p+1}}\|_{H^{-3/2}}$$

$$\leqslant C (\|\varphi\|_{H^{-3/2}} + \|d\varphi\|_{H^{-1/2}}) \leqslant C (\|\varphi\|_{H^{-1/2}} + \|d\varphi\|_{H^{-1/2}}). \tag{17}$$

De (14)-(17) suit l'assertion. Q.E.D.

1.5. COROLLAIRE. *Considérons* u *définie par (12) et (13). Alors* $\delta u = 0$.

Preuve. • Soit $2 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots < k_{p-1} \leqslant n$. Par [R] (3), p. 129 :

$$\widehat{(\delta u)_{k_1\ldots k_{p-1}}} = -\left(\frac{\partial u_{1k_1\ldots k_{p-1}}}{\partial x_1} + \sum_{s=2}^{n} \frac{\partial u_{sk_1\ldots k_{p-1}}}{\partial x_s}\right)^{\wedge}$$
$$= -\left(\frac{\widehat{\partial u_{1k_1\ldots k_{p-1}}}}{\partial x_1} + i\sum_{s=2}^{n} \xi_s \widehat{u_{sk_1\ldots k_{p-1}}}\right).$$

D'où par (12) et (13) :

$$\widehat{(\delta u)_{k_1\ldots k_{p-1}}}(x_1,\xi_2,\ldots,\xi_n) = -\widehat{(\delta\varphi)_{k_1\ldots k_{p-1}}}(\xi_2,\ldots,\xi_n)\exp[x_1\sqrt{1+\xi_2^2+\ldots+\xi_n^2}]$$
$$-i\sum_{s=2}^{n} \xi_s \widehat{\varphi_{sk_1\ldots k_{p-1}}}(\xi_2,\ldots,\xi_n)\exp[x_1\sqrt{1+\xi_2^2+\ldots+\xi_n^2}] = 0 \qquad (18)$$

• Soit $2 \leqslant k_2 < \ldots < k_{p-1} \leqslant n$.

$$\widehat{(\delta u)_{1k_2\ldots k_{p-1}}}(x_1,\xi_2,\ldots,\xi_n) = -\sum_{s=2}^{n} i\,\xi_s \widehat{u_{s1k_2\ldots k_{p-1}}}(x_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$$

$$= \sum_{s=2}^{n} i\,\xi_s \frac{\widehat{(\delta\varphi)sk_2\ldots k_{p-1}}(\xi_2,\ldots,\xi_n)}{\sqrt{1+\xi_2^2+\ldots+\xi_n^2}}\exp[x_1\sqrt{1+\xi_2^2+\ldots+\xi_n^2}] = 0 \text{ car } \delta^2 = 0. \qquad (19)$$

De (18) et (19) suit l'assertion.

Q.E.D.

1.6. LEMME. $C^\infty_{oo}(\overset{p}{\wedge} T^*\,\overline{IR^n_-})$ *est dense dans* $H_p(d;IR^n_-)$.

Preuve. • Soit $u \in H_p(d;IR^n_-)$. Pour $t > 0$, soit $\tau_t u \in H_p(d;]-\infty,t[\times IR^{n-1})$ défini par : $(\tau_t u)(x_1,x_2,\ldots,x_n) = u(x_1-t,x_2,\ldots,x_n)$. De $d\tau_t u = \tau_t du$, suit aisément $(\tau_t u)\big|_{IR^n_-} \to u\big|_{IR^n_-}$ dans $H_p(d;IR^n_-)$ lorsque $t \to 0^+$.

• Soit $\theta_t \in C^\infty(IR;[0,1])$ tel que $0 \leqslant \theta_t \leqslant 1$, $\theta_t\big|_{]-\infty,t/2[} = 1$ et supp $\theta_t \subset\,]-\infty,t[$. Désignons par $(\tau_t u)^\sim$ le prolongement de $\tau_t u$ par 0, dans le complémentaire de $]-\infty,t[\times IR^{n-1}$ et considérons $\theta_t(\tau_t u)^\sim$, θ_t étant regardée comme fonction des n variables $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. Il est clair que $\theta_t(\tau_t u)^\sim \in H_p(d;IR^n)$ et que $[\theta_t(\tau_t u)^\sim]\big|_{IR^n_-} = (\tau_t u)\big|_{IR^n_-}$. En particulier

$$[\theta_t(\tau_t u)^\sim]\big|_{IR^n_-} \to u \text{ dans } H_p(d;IR^n_-). \qquad (20)$$

• Soit (φ_ϵ) une suite régularisante et posons $u_{\epsilon,t} = [\theta_t(\tau_t u)^\sim] * \varphi_\epsilon$. Soit $\delta > 0$. Choisissons tout d'abord $t > 0$, tel que

$$\| (\tau_t u)\big|_{\mathrm{IR}^n_-} - u \|_{H_p(d;\mathrm{IR}^n_-)} \leqslant \delta/3. \tag{21}$$

Choisissons ensuite $\epsilon > 0$ tel que

$$\| u_{\epsilon,t}\big|_{\mathrm{IR}^n_-} - [\theta_t(\tau_t u)^\sim]\big|_{\mathrm{IR}^n_-} \| \leqslant \delta/3. \tag{22}$$

• Considérons $\psi \in \mathcal{D}(\mathrm{IR}^n)$, $0 \leqslant \psi \leqslant 1$ tel que $\psi\big|_{B(0,1)} = 1$. Posons $\psi_k = \psi(./k)$ quel que soit $k \in \mathrm{IN}^*$ et $u_{\epsilon,t,k} = (\psi_k\, u_{\epsilon,t})\big|_{\mathrm{IR}_n^-}$. De $du_{\epsilon,t,k} = \psi_k\, du_{\epsilon,t} + d\psi_k \wedge u_{\epsilon,t}$ suit $u_{\epsilon,t,k} \to u_{\epsilon,t}\big|_{\mathrm{IR}_n^-}$ dans $H_p(d;\mathrm{IR}_n^-)$. Choisissons k tel que

$$\| u_{\epsilon,t,k} - u_{\epsilon,t}\big|_{\mathrm{IR}_n^-} \| \leqslant \delta/3. \tag{23}$$

De (20) à (23) suit $\| u_{\epsilon,t,k} - u \| \leqslant \delta$. D'où suit l'assertion.

Q.E.D.

Dans le cas supp u borné, $u \in H_p(d;\mathrm{IR}^n_-)$, pour tout W voisinage de la fermeture du supp u dans $\overline{\mathrm{IR}^n_-}$, il existe une suite $u_n \in C^\infty_{oo}(\overset{p}{\Lambda}\, T^*\, \overline{\mathrm{IR}^n_-})$, tels que supp $u_n \subset W$ et $u_n \to u$ dans $H_p(d;\mathrm{IR}^n_-)$. En effet, par 1.6, il existe $w_n \in C^\infty_{oo}(\overset{p}{\Lambda}\, T^*\, \overline{\mathrm{IR}^n_-})$ telle que $w_n \to u$ dans $H_p(d;\mathrm{IR}^n_-)$. Considérons $\theta \in C^\infty_{oo}(\mathrm{IR}^n)$, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, θ égal 1 sur un voisinage de $\overline{\text{supp } u}$ et supp $\theta \subset W$. Alors $u_n = \theta\, w_n \to u$ dans $H_p(d;\mathrm{IR}^n_-)$ et supp $u_n \subset W$.

Par 1.2, 1.3 et 1.6, il existe un et un seul prolongement continu de $C^\infty_{oo}(\overset{p}{\Lambda}\, T^*\, \overline{\mathrm{IR}^n_-}) \to C^\infty_{oo}(\overset{p}{\Lambda}\, T^*\, \mathrm{IR}^{n-1})$: $u \to tu$, en une application de $H_p(d;\mathrm{IR}^n_-)$ dans $H_p^{-1/2}(d;\mathrm{IR}^{n-1})$; sa valeur en $u \in H_p(d;\mathrm{IR}^n_-)$ sera encore notée tu.

1.7. PROPOSITION. *L'application* $u \mapsto tu$ *de* $H_p(d;\mathrm{IR}^n_-)$ *dans* $H_p^{-1/2}(d;\mathrm{IR}^{n-1})$ *est surjective.*

Preuve. • Désignons par $j : \mathrm{IR}^{n-1} \hookrightarrow \overline{\mathrm{IR}^n_-}$. Tout d'abord montrons que pour tout $u \in C^\infty(\overset{p}{\Lambda} T^*\, \overline{\mathrm{IR}^n_-}) \cap H_p(d;\mathrm{IR}^n_-)$, $tu = j^*u$.

Soit $\psi \in C^\infty_{oo}(\mathrm{IR}^n)$, $0 \leqslant \psi \leqslant 1$, $\psi\big|_{B(0,1)} = 1$. Posons $\psi_k = \psi(./k)$, quel que soit $k \in \mathrm{IN}^*$ et $u_k = \psi_k u$. De $du_k = \psi_k du + d\psi_k \wedge u$ suit $u_k \to u$ dans $H_p(d;\mathrm{IR}^n_-)$ lorsque $k \to \infty$. D'où $j^*u_k \to tu$ dans $H_p^{-1/2}(d;\mathrm{IR}^{n-1})$. (24)

Mais $j^*u_k \to j^*u$ uniformément sur les compacts de IR^{n-1}, donc dans l'espace $\mathcal{D}'_p(\mathrm{IR}^{n-1})$ des p-courants pairs sur IR^{n-1}. (25)

De (24) et (25) suit $tu = j^*u$.

• Désignons par $J : H_p^{-1/2}(d;\mathrm{IR}^{n-1}) \to H_p(d;\overline{\mathrm{IR}^n_-})$ l'opérateur défini par (12) et (13). Soit $\varphi \in S(\overset{p}{\Lambda} T^* \mathrm{IR}^{n-1})$. Par (12), (13) et le théorème de Plancherel,

$$J\varphi \in \bigcap_{m=o}^{\infty} H^m(\overset{p}{\Lambda} T^* \mathrm{IR}^n_-) \subset C^\infty(\overset{p}{\Lambda} T^* \overline{\mathrm{IR}^n_-}) \cap H_p(d;\mathrm{IR}^n_-). \tag{26}$$

Du point précédent suit dès lors $tJ\varphi = j^*J\varphi$. De (12) et $\varphi \in S(\overset{p}{\Lambda} T^* \mathrm{IR}^{n-1})$ suit pour tout $2 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n$:

$$(J\varphi)_{i_1 \ldots i_p}(x_1,x_2,\ldots,x_n) = (2\pi)^{\frac{1-n}{2}} \int_{\mathrm{IR}^{n-1}} e^{i<\xi,x'>} \widehat{\varphi_{i_1 \ldots i_p}}(\xi_2,\ldots,\xi_n) \exp\,[x_1 \sqrt{1+|\xi|^2}]d\xi, \tag{27}$$

p.p. dans IR^n_- ; x' dénote $(x_2,\ldots,x_n)$.

Par le théorème de Lebesgue, le membre de droite de (27) est une fonction continue sur $\overline{\mathrm{IR}^n_-}$. D'où par (26), l'égalité dans (27) a lieu partout sur $\overline{\mathrm{IR}^n_-}$. En particulier

$$(J\varphi)_{i_1 \ldots i_p}(0,.) = \varphi_{i_1 \ldots i_p}.$$

D'où $j^* J\varphi = \varphi$ et donc

$$(t_o J)\Big|_{S(\overset{p}{\Lambda} T^* \mathrm{IR}^{n-1})} = I\Big|_{S(\overset{p}{\Lambda} T^* \mathrm{IR}^{n-1})}.$$

Par densité suit $t_o J = I$. D'où l'assertion.

Q.E.D.

Nous nous résumons dans le théorème qui suit :

1.8. THEOREME. *L'application* $u \to tu$ de $C^\infty_{oo}(\overset{p}{\Lambda} T^* \overline{\mathrm{IR}^n_-})$ *dans* $C^\infty_{oo}(\overset{p}{\Lambda} T^* \mathrm{IR}^{n-1})$ $(0 \leqslant p \leqslant n)$ *se prolonge continuement de manière unique en une application (continue) de* $H_p(d;\mathrm{IR}^n_-)$ *sur* $H_p^{-1/2}(d;\mathrm{IR}^{n-1})$. *De plus* $C^\infty_{oo}(\overset{p}{\Lambda} T^* \mathrm{IR}^n_-)$ *est dense dans* ker t.

Preuve. • La première partie suit de 1.2, 1.3, 1.6, 1.4 et 1.7.

• Venons-en à la preuve de la seconde partie. Soit $u \in H_p(d;\mathrm{IR}^n_-)$ tel que $tu = 0$. Considérons $\tilde{u}$ le prolongement de u à IR^n par 0 dans le complémentaire de IR^n_-. Alors $\tilde{u} \in H_p(d;\mathrm{IR}^n)$ et $d\tilde{u} = (du)^\sim$. En effet quel que soit $\varphi \in \overset{n-(p+1)}{\underline{D}}(\mathrm{IR}^n)$ [Sch] (p. 321-353) :

$$< d\tilde{u},\varphi > = (-1)^{p+1} \int \tilde{u} \wedge d\varphi = (-1)^{p+1} \int_{\mathrm{IR}^n_-} u \wedge d\varphi = \int_{\mathrm{IR}^n_-} du \wedge \varphi, \text{ car } tu = 0$$

(on applique la formule de Stokes à $u_n \wedge \varphi$, $u_n \in C^\infty_{oo}(\overset{p}{\Lambda} T^* \overline{\mathrm{IR}^n_-})$, $u_n \to u$ dans $H_p(d;\mathrm{IR}^n_-)$).

Posons $(\tau_t \tilde{u})(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \tilde{u}(x_1+t,x_2,\ldots,x_n)$.

De $d\tau_t\tilde{u} = \tau_t d\tilde{u}$ suit $\tau_t\tilde{u} \to \tilde{u}$ dans $H_p(d;\mathbb{R}^n)$ lorsque $t \to 0^+$. Soit $\delta > 0$ et choisissons $t > 0$ suffisamment petit pour que

$$\| \tau_t\tilde{u} - \tilde{u} \| \leqslant \delta/3. \tag{28}$$

Soit (φ_ϵ) une suite régularisante. Alors $\varphi_\epsilon * \tau_t\tilde{u} \to \tau_t\tilde{u}$ dans $H_p(d;\mathbb{R}^n)$ et pour $0 < \epsilon < t$, $\operatorname{supp}(\varphi_\epsilon * \tau_t\tilde{u}) \subset \mathbb{R}^n_-$. Choisissons $\epsilon > 0$ suffisamment petit et inférieur à t, tel que

$$\| \varphi_\epsilon * \tau_t\tilde{u} - \tau_t\tilde{u} \| \leqslant \delta/3. \tag{29}$$

Soit $\psi \in D(\mathbb{R}^n)$, $0 \leqslant \psi \leqslant 1$, $\psi\big|_{B(0,1)} = 1$. Posons $\psi_k = \psi(./k)$, $k \in \mathbb{N}^*$. Pour k suffisamment grand,

$$\| \psi_k(\varphi_\epsilon * \tau_t\tilde{u}) - \varphi_\epsilon * \tau_t\tilde{u} \| \leqslant \delta/3. \tag{30}$$

De (28)-(30) suit $\| (\psi_k \cdot (\varphi_\epsilon * \tau_t\tilde{u}))\big|_{\overline{\mathbb{R}^n_-}} - u \| \leqslant \delta$ et l'on a

$$(\psi_k \cdot (\varphi_\epsilon * \tau_t\tilde{u}))\big|_{\mathbb{R}^n_-} \in C^\infty_{oo}(\overset{p}{\Lambda} T^* \,\mathbb{R}^n_-).$$

D'où l'assertion.

Q.E.D.

Nous allons maintenant étendre 1.8 aux variétés C^∞ compactes à bord. Soit $\overline{\Omega}$ une variété C^∞ compacte à bord. Pour pouvoir introduire les espaces «fonctionnels» convenables sur Ω et $\partial\Omega$ nous aurons besoin de la théorie des courants [Sch], p. 312-353. Rappelons brièvement quelques définitions et notations. Soit E un espace vectoriel réel et Orient (E) = $0_1, 0_2$ l'ensemble des deux orientations de E. Un p-covecteur tordu (encore dit impair) sur E, α, est une application de Orient (E) dans $\overset{p}{\Lambda} E^*$, telle que $\alpha(0_1) = -\alpha(0_2)$. Soit M une variété (ici Ω ou $\partial\Omega$) de dimension n. Un p-covecteur tordu au point x est un p-covecteur tordu sur T_xM. On définit alors le fibré des p-covecteurs tordus et une section de ce fibré est appelée une forme tordue (ou impaire). $\overset{p}{\underline{D}}(M)$ dénote l'espace des p-formes tordues C^∞ à support compact ; on le munit de la topologie de Schwartz (analogue au cas scalaire). Son dual $\overset{n-p}{D'}(M)$ est appelé l'espace des (n−p)-courants pairs.

Appelons p-forme tordue distribution (appelée dans [Tr 1] p. 96 densité distribution si p=n) toute forme linéaire continue sur $C^\infty_{oo}(\overset{n-p}{\Lambda} T^* M)$. L'espace vectoriel des p-formes tordues distribution sera noté $\overset{p}{\tilde{D}}{}'(M)$. Soit $u \in \overset{p}{\underline{D}}(M)$. A u est associé la p-forme tordue distribution :

$$C^\infty_{oo}(\overset{n-p}{\Lambda} T^* M) \ni \theta \to \langle \theta, u \rangle = \int_M \theta \wedge u.$$

Ceci permet d'identifier $\overset{p}{\underline{\mathcal{D}}}(M)$ au sous-espace de $\overset{p}{\widetilde{\mathcal{D}}}{}'(M)$ des p-formes tordues distribution C^∞ à support compact. Etant donné un opérateur différentiel $P : C^\infty_{oo}(\overset{p}{\Lambda} T^* M) \to C^\infty_{oo}(\overset{q}{\Lambda} T^* M)$ il est alors facile de prolonger P à $\overset{p}{\mathcal{D}}{}'(M)$. Il suffit de considérer ${}^t({}^tP|_{\overset{n-q}{\underline{\mathcal{D}}}(M)})$ que nous noterons encore P) qui applique continuement $\overset{p}{\mathcal{D}}{}'(M) \to \overset{q}{\mathcal{D}}{}'(M)$; ce prolongement continu est unique. Dans le cas P=d on retrouve la définition donnée dans [Sch], p. 344. Pour plus de détails, voir [Di], p. 211-218 et dans le cas p=0 [Tr 1], p.92-122.

Les espaces de Hilbert $IL^2(\overset{p}{\Lambda} T^* \bar{\Omega})$, $IL^2(\overset{p+1}{\Lambda} T^* \bar{\Omega})$, $H_p(d;\bar{\Omega})$, (resp. $H^{-1/2}(\overset{p}{\Lambda} T^* \partial\Omega)$, $H^{-1/2}(\overset{p+1}{\Lambda} T^* \partial\Omega)$, $H_p^{-1/2}(d;\partial\Omega)$) se définissent par passage aux coordonnées locales de $\bar{\Omega}$ (resp. $\partial\Omega$) ; plus précisément à tout atlas fini sur $\bar{\Omega}$ (resp. $\partial\Omega$) et à toute partition de l'unité subordonnée est associée une structure hilbertienne sur chacun de ces espaces (comme dans le cas scalaire [Tr 2], p. 232) ; de plus la structure d'E.V.T. sous-jacente de chacun de ces espaces est intrinsèque. On vérifie aisément que $H_p(d;\bar{\Omega}) = \{ u \in IL^2(\overset{p}{\Lambda} T^* \bar{\Omega}) \; ; \; du \in IL^2(\overset{p+1}{\Lambda} T^* \bar{\Omega}) \}$ (resp. $H_p^{-1/2}(d;\partial\Omega) = \{ u \in H^{-1/2}(\overset{p}{\Lambda} T^* \partial\Omega) \; ; du \in H^{-1/2}(\overset{p+1}{\Lambda} T^* \partial\Omega)\}$) et que la norme du graphe est une norme équivalente.

1.9. THEOREME. *L'application de* $C^\infty(\overset{p}{\Lambda} T^* \bar{\Omega}) \to C^\infty(\overset{p}{\Lambda} T^* \partial\Omega) : u \to j^*u$ $(j : \partial\Omega \hookrightarrow \bar{\Omega})$ se prolonge *continuement de manière unique en une application linéaire continue de* $H_p(d;\bar{\Omega})$ *sur* $H_p^{-1/2}(d;\partial\Omega)$; *sa valeur en* $u \in H_p(d;\bar{\Omega})$ *sera notée* tu. *De plus* $C^\infty_{oo}(\overset{p}{\Lambda} T^* \Omega)$ *est dense dans* ker t (*que nous noterons* $H_0^p(d;\bar{\Omega})$).

Preuve. • Montrons que l'application $u \to j^*u$ de $C^\infty(\overset{p}{\Lambda} T^* \bar{\Omega}) \to C^\infty(\overset{p}{\Lambda} T^* \partial\Omega)$ est continue, $C^\infty(\overset{p}{\Lambda} T^* \bar{\Omega})$ (resp. $C^\infty(\overset{p}{\Lambda} T^* \partial\Omega)$) étant muni de la topologie induite par $H_p(d;\bar{\Omega})$ (resp. $H_p^{-1/2}(d;\partial\Omega)$).

Soit $\{ (U_i,\chi_i) \; ; \; i = 1,\dots,m \}$ un atlas fini de $\bar{\Omega}$ et $(\theta_i)_{i=1}^m$ une partition de l'unité subordonnée à cet atlas. Par linéarité

$$tu = \sum_{i=1}^{m} t\,\theta_i\, u.$$

D'autre part

$$[(\chi_i|_{U_i \cap \partial\Omega})^{-1}]^* \, t(\theta_i u) = t[\chi_i^{-1}]^* \, (\theta_i u) \tag{31}$$

(t( ) voulant dire «composante tangentielle de»). Par 1.8, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $i = 1,\dots,m$, tout $u \in C^\infty(\overset{p}{\Lambda} T^* \Omega)$:

$$\| t(\chi_i^{-1})^*(\theta_i u) \|_{H_p^{-1/2}(d;IR^{n-1})} \leq C \, \| (\chi_i^{-1})^*(\theta_i u) \|_{H_p(d;IR^n_-)}.$$

D'où par (31) :

$$\sum_{i=1}^{m} \|[(\chi_i|_{U_i \cap \partial\Omega})^{-1}]^* \, t(\theta_i u)\|_{H_p^{-1/2}(d;\mathbb{R}^{n-1})}$$

$$\leqslant C \sum_{i=1}^{m} \| (\chi_i^{-1})^* (\theta_i u) \|_{H_p(d;\mathbb{R}^n_-)}. \tag{32}$$

L'application $u \mapsto (\sum_{i=1}^{m} \| (\chi_i^{-1})^*(\theta_i u) \|^2_{H_p(d;\mathbb{R}^n_-)})^{1/2}$ est l'une des normes équivalentes de $H_p(d;\bar{\Omega})$; de même l'application $\varphi \mapsto (\sum_{i=1}^{m} \| [(\chi_i|_{U_i \cap \partial\Omega})^{-1}]^*(\theta_i \varphi)\|^2_{H_p^{-1/2}(d;\mathbb{R}^{n-1})})^{1/2}$ est l'une des normes équivalentes de $H_p^{-1/2}(d;\partial\Omega)$. D'où l'assertion par (32).

• Montrons que $C^\infty(\overset{p}{\Lambda} T^* \bar{\Omega})$ est dense dans $H_p(d;\bar{\Omega})$. Soit $u \in H_p(d;\bar{\Omega})$, $\{(U_i,\chi_i) \; ; i=1,\ldots,m\}$ un atlas fini de $\bar{\Omega}$. Par partition de l'unité et linéarité on peut supposer que $\overline{\text{supp } u} \subset U_1$ (modulo renumérotation des cartes de l'atlas considéré), (« — » désigne ici la fermeture dans $\bar{\Omega}$). Soit $(\theta_i)_{i=1}^m$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement des $(U_i)_{i=1}^m$ telle que pour tout $i=2,\ldots,m$: $\text{supp } \theta_i \cap \overline{\text{supp } u} = \phi$. Soit $\delta > 0$.

Par 1.6 et la remarque qui le suit, il existe $w \in C^\infty_{oo}(\overset{p}{\Lambda} T^* \overline{\mathbb{R}^n_-})$ tel que $\| w - (\chi_1^{-1})^*(\theta_1 u) \|_{H_p(d;\mathbb{R}^n_-)} \leqslant \delta$ et $\text{supp } w \cap \text{supp } (\theta_i \circ \chi_1^{-1}) = \phi$ pour $i=2,\ldots,m$. D'où

$$\| (\chi_1)^* w - u \|_{H_p(d;\bar{\Omega})} = (\sum_{i=1}^{m} \| (\chi_i^{-1})^* [\theta_i((\chi_1)^* w - u)]\|^2)^{1/2}$$

$$= \| (\chi_1^{-1})^* [\theta_1((\chi_1)^* w - u)] \|$$

$$= \| \theta_1 \circ \chi_1^{-1} \, w - (\chi_1^{-1})^* u \|$$

$$= \| w - (\chi_1^{-1})^* (\theta_1 u) \| \leqslant \delta.$$

D'où l'assertion.

• Montrons que l'application $u \mapsto tu$ de $H_p(d;\bar{\Omega})$ dans $H_p^{-1/2}(d;\partial\Omega)$ est surjective. Considérons $\{(U_i,\chi_i) \; ; i=1,\ldots,m\}$ un atlas fini de $\bar{\Omega}$ et $(\theta_i)_{i=1}^m$ une partition de l'unité subordonnée. Considérons $\varphi \in H_p^{-1/2}(d;\partial\Omega)$. Par 1.8, pour tout $i \in \{ 1,\ldots,m \}$ il existe $w_i \in H_p(d;\mathbb{R}^n_-)$ tel que $tw_i = t[(\chi_i|_{U_i})^{-1}]^*(\theta_i u)$. On peut supposer $\overline{\text{supp } w_i}$ compact $\subset \chi_i(U_i)$. Considérons $u = \sum_{i=1}^{m} [\chi_i|_{U_i}]^* w_i$. $u \in H_p(d;\bar{\Omega})$ et

$$tu = \sum_{i=1}^{m} t[\chi_i|_{U_i}]^* w_i$$

$$= \sum_{i=1}^{m} (\chi_i|_{\partial\Omega \cap U_i})^* tw_i$$

$$= \sum_{i=1}^{m} (\chi_i|_{\partial\Omega \cap U_i})^* t[(\chi_i|_{U_i})^{-1}]^* (\theta_i u)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} t(\theta_i u) = tu.$$

• Reste à montrer que $C^\infty_{oo}(\overset{p}{\Lambda} T^* \Omega)$ est dense dans ker t.

Soit $u \in H_p(d;\bar\Omega)$ tel que $tu = 0$. Considérons encore un atlas fini $\{(U_i,\chi_i)\ ;\ i=1,\dots,m\}$ de $\bar\Omega$. Par partition de l'unité et linéarité on peut supposer que $\overline{\text{supp}\, u} \subset U_1$. On procède alors comme dans le second point à cela près qu'on considère ici $w \in C^\infty_{oo}(\overset{p}{\Lambda} T^*\, \mathbb{R}^n_-)$.

Q.E.D.

A titre d'application de 1.9, on peut déjà donner une généralisation de la formule de Stokes :

1.10. COROLLAIRE. *Supposons* $\bar\Omega$ *orientée. Alors pour tout* $u \in H_{n-1}(d;\bar\Omega)$

$$\int_\Omega du = \langle tu,1 \rangle \tag{33}$$

Preuve. • Supposons tout d'abord $u \in C^\infty(\overset{n-1}{\Lambda} T^*\, \bar\Omega)$. Alors par la classique formule de Stokes : $\int_\Omega du = \int_{\partial\Omega} tu$. Mais $\int_{\partial\Omega} tu = \langle tu,1 \rangle$.

• (33) suit dès lors de la densité de $C^\infty(\overset{n-1}{\Lambda} T^*\, \bar\Omega)$ dans $H_{n-1}(d;\bar\Omega)$ et de la continuité de l'application de $H_{n-1}(d;\bar\Omega) \to H^{-1/2}_{n-1}(d;\partial\Omega) : u \mapsto tu$.

Q.E.D.

Nous supposerons désormais, sauf mention expresse du contraire, $\bar\Omega$ variété riemanienne orientée C^∞ compacte à bord.

Suivant l'usage n désignera le champ normal unitaire sortant le long du bord (ceci entraîne quelques confusions d'ordre typographique, mais dont le sens exact est clairement indiqué par le contexte).

Posons $nu = (-1)^{n(p+1)} * t * u$ quel que soit $u \in C^\infty(\overset{p}{\Lambda} T^*\, \Omega)$ (34)

($n(.)$ voulant dire «composante normale de») (dans le 2d membre de (34) n désigne la dimension de $\bar{\Omega}$).

Pour clarifier ce dernier concept, rappelons la notion de carte adaptée au champ normal unitaire sortant [D–S] . Désignons par Γ le bord de $\bar{\Omega}$; soit (W,ψ) une carte de Γ valable en $y_o \in \Gamma$. Restreignant W au besoin, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $y \in W$, la géodésique $t \to v_y(t)$ vérifiant $v_y(0) = y$ et $v'_y(0) = -n(y)$ soit définie dans l'intervalle $[0,\alpha[$ et l'application de $[0,\alpha[\times W \to \bar{\Omega} : (t,y) \to v_y(t)$ soit un difféomorphisme sur un ouvert U de $\bar{\Omega}$ tel que $U \cap \Gamma = W$. On définit alors la carte (U,χ) valable en y_o en posant pour tout $z \in U$,

$$\chi_1(z) = -t, \chi_2(z) = \psi_1(y),\dots,\chi_n(z) = \psi_{n-1}(y),$$

(t,y) vérifiant $v_y(t) = z$. Dans cette carte, pour tout $y \in W$, on a

$$\frac{\partial}{\partial\chi_1}(y) = n(y) \text{ et } (\frac{\partial}{\partial\chi_1}(y), \frac{\partial}{\partial\chi_j}(y)) = 0, j = 2,\dots,n.$$

1.11. PROPOSITION. [D–S] *Soit* (U,χ) *une carte adaptée au champ normal unitaire sortant le long de* Γ. *Posons* $W = U \cap \partial\Omega$ et $\psi = \chi_{|W}$. *Soit* $u \in C^\infty(\overset{p}{\Lambda} T^* \bar{\Omega})$ *et* $(u_{i_1 \dots i_p})_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_p \leqslant n}$ *ses composantes lues dans la carte* (U,χ).

Alors nu *a pour expression locale dans la carte* (W,ψ) :

$$\sum_{2 \leqslant i_2 < \dots < i_p \leqslant n} u_{1 i_2 \dots i_p}(0,.)dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}. \tag{35}$$

Remarquons quelques divergences (mineures) avec [D–S] . Dans [D–S] nu est défini comme une forme différentielle le long du bord (en particulier du même degré p que celui de u) ; ici nu est défini comme une (p–1)-forme sur le bord et est donc plus à rapprocher de $\bar{n}u$ défini dans [Du] . De plus dans [D–S] une variété à bord est «modelée» (localement) sur le semi-espace $\{x_n \geqslant 0\}$; ici suivant [B–G] sur le semi-espace $\{x_1 \geqslant 0\}$. Ceci présente l'avantage (par exemple) que dans le cas $\bar{\Omega}$ orientée la restriction d'une carte positive de $\bar{\Omega}$ au bord $\partial\Omega$ est une carte positive de $\partial\Omega$ ce qui est faux si l'on avait choisi le semi-espace $\{x_n \geqslant 0\}$ ([Sp] , p. 8-28).

Par dualité avec 1.9. On a alors :

1.12. THEOREME. *L'application* $u \to nu$ *de* $C^\infty(\overset{p}{\Lambda} T^* \bar{\Omega})$ $(0 \leqslant p \leqslant n)$ *dans* $C^\infty(\overset{p-1}{\Lambda} T^* \Gamma)$ *se prolonge par continuité de manière unique en une application linéaire continue de* $H_p(\delta;\Omega)$ *sur* $H_{p-1}^{-1/2}(\delta;\Gamma)$; *sa valeur en* $u \in H_p(\delta;\Omega)$ *sera notée* nu. *De plus* $C_{oo}^\infty(\overset{p}{\Lambda} T^*\Omega)$ *est dense dans* ker n (*que nous noterons* $H_p^o(\delta;\Omega)$).

$H_p(\delta;\Omega)$ désigne $\{u \in \mathbb{L}^2(\overset{p}{\Lambda} T^*\Omega)\ ;\ \delta u \in \mathbb{L}^2(\overset{p-1}{\Lambda} T^*\Omega)\}$ et $H_p^{-1/2}(\delta;\Gamma)$ désigne $\{u \in H^{-1/2}(\overset{p}{\Lambda} T^*\Gamma)\ ;\ \delta u \in H^{-1/2}(\overset{p-1}{\Lambda} T^*\Gamma)\}$; ces espaces sont munis de la structure hilbertienne associée à la norme du graphe.

Q.E.D.

Preuve. • Par (34), quel que soit $u \in C^\infty(\overset{p}{\Lambda} T^*\Omega)$: $nu = (-1)^{n(p+1)} * t * u$. $*$ défini un topisomorphisme de $H_p(\delta;\Omega)$ sur $H_{n-p}(d;\Omega)$.(5) t est continu de $H_{n-p}(d;\Omega)$ sur $H_{n-p}^{-1/2}(d;\Gamma)$ par 1.9 et $*$ défini un topisomorphisme de $H_{n-p}^{-1/2}(d;\Gamma)$ sur $H_{p-1}^{-1/2}(\delta;\Gamma)$.

• La densité de $C_{oo}^\infty(\overset{p}{\Lambda} T^*\Omega)$ dans ker n suit de celle de $C_{oo}^\infty(\overset{n-p}{\Lambda} T^*\Omega)$ dans ker t.

Q.E.D.

Dans le cas particulier où Ω est un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^n$, et identifiant un champ de vecteur à la 1-forme qui lui est associé, on retrouve un résultat de [T] (p. 9-13). Celui-ci s'étend tel quel au niveau riemanien :

1.13. THEOREME. *Soit* $\bar{\Omega}$ *une variété riemanienne orientée* C^∞ *compacte à bord. Désignons par* $H(\text{div};\Omega) = \{X \in \Gamma(T\Omega)\ ;\ \int_\Omega (X,X) * 1 < \infty$ *et* (6) $\text{div}\, X = \nabla_i X^i \in L^2(\Omega)\}$ *(muni de la norme* $X \to \int_\Omega (X,X) * 1 + \int_\Omega |\text{div}\, X|^2 * 1$. *Alors l'application de* $C^\infty(T\bar{\Omega}) \to C^\infty(\Gamma) : X \mapsto (n,X)$ *(«composante normale du champ* X *sur le bord») se prolonge continuement de manière unique en une application de* $H(\text{div};\Omega)$ *sur* $H^{-1/2}(\Gamma)$.

Preuve. • Soit X un champ de vecteurs sur Ω. Soit $X = X^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ son expression locale dans une carte de Ω. La 1-forme associée φ a pour expression locale dans cette carte $\varphi = X^j g_{ij}\, dx^i$. L'expression locale de $*\varphi$ est :

$$*\varphi = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} X^j \sqrt{g}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \ldots \wedge dx^n. \tag{36}$$

D'où

$$\varphi \wedge *\varphi = g_{ij} X^i X^j \sqrt{g}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

D'où

$$\int_\Omega \varphi \wedge *\varphi = \int_\Omega (X,X) * 1. \tag{37}$$

De plus par (36)

$$\delta\varphi = -\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^j} (\sqrt{g}\, X^j) = -\text{div}\, X. \tag{38}$$

(5) Dans ce texte, topisomorphisme veut dire isomorphisme d'E.V.T.

(6) * désigne l'opérateur «adjointe de» ([R] p. 121) et alinéa suivant 1.8.

De (37) et (38) suit que l'application $X \mapsto \varphi$ est un topisomorphisme de $H(\mathrm{div};\Omega)$ sur $H_1(\delta;\Omega)$. (39)

• Supposons la carte adaptée au champ normal unitaire sortant, et $X \in C^\infty(T\bar{\Omega})$. Alors $(n,X) = X^1$. De $\varphi = X^j g_{ij} dx^i$ et 1.11 suit $n\varphi = X^j g_{1j}$. De $g_{1j} = \delta_{1j}$ suit alors $n\varphi = X^1$. D'où $(n,X) = n\varphi$. (40)
De (39), (40) et 1.12 suit l'assertion.

Q.E.D.

Le résultat de [D–L] rappelé au début de ce paragraphe se précise et s'étend au cadre riemannien de la manière suivante : considérons les espaces

$$H(\mathrm{rot};\Omega) = \left\{ X \in \Gamma(T\Omega) \; ; \int_\Omega (X,X) * 1 < \infty \text{ et } \int_\Omega \mathrm{rot}\, X \wedge * \,\mathrm{rot}\, X < \infty \right\}$$

(rot X désigne la dérivée extérieure de la 1-forme associée à X, [DEL] p. 100 et est appelé en «calcul tensoriel» le «tenseur rotationnel de X») (en fait il s'agit d'un champ de tenseurs) ainsi que $H^{-1/2}(\mathrm{rot};\Gamma) = \left\{ X \in H^{-1/2}(T\Gamma) \; ; \; \mathrm{rot}\, X \in H^{-1/2}(\overset{2}{\Lambda} T^*\Gamma) \right\}$; ces espaces étant munis de la norme du graphe. On a alors :

1.14. THEOREME. *Soit* $\bar{\Omega}$ *une variété riemanienne orientée* C^∞ *compacte à bord. Alors l'application* $X \mapsto X|_{\partial\Omega} - (n,X)n$ *de* $C^\infty(T\bar{\Omega})$ *dans* $C^\infty(T\Gamma)$ *se prolonge continuement de manière unique en une application de* $H(\mathrm{rot};\Omega)$ *sur* $H^{-1/2}(\mathrm{rot};\Gamma)$.

Dans une carte adaptée au champ normal unitaire sortant l'expression locale de $t\varphi$ (φ 1-forme associée à X) est : $t\varphi = \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=2}^{n} X^j g_{ij} dx^i$ tandis que $X - (n,X)n = \sum_{i=2}^{n} X^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$.
Donc la 1-forme associée à $X - (n,X)n$ sur Γ est $t\varphi$. 1.14 suit dès lors de 1.8.

2. - QUELQUES PROBLEMES AUX LIMITES

Nous étudions quelques problèmes aux limites dont nous aurons besoin dans la détermination des générateurs de semi-groupe à contraction associés au système de Maxwell.

2.1. PROPOSITION. • *Pour tout* $\varphi \in \underset{p}{H^{-1/2}}(d;\Gamma)$ *il existe une et une seule solution de* $u + \delta du = 0$ *et* $tu = \varphi$, *dans l'espace* $H_p(d;\Omega)$.
• *Pour tout* $\psi \in H_{p-1}^{-1/2}(\delta;\Gamma)$ *il existe une et une seule solution dans* $H_p(\delta;\Omega)$ *de* $u + d\delta u = 0$ *et* $nu = \psi$.

Preuve. • Considérons $E = \left\{ w \in H_p(d;\Omega) \; ; \; tw = \varphi \right\}$. Par 1.8, E est non vide et fermé. De plus, E est convexe. Soit u la projection de 0 sur E. Il suffit de vérifier que $u + \delta du = 0$. Quel que soit $\psi \in C_{oo}^\infty(\overset{p}{\Lambda} T^*\Omega)$:

$$\| u + \psi \|^2 = \| u \|^2 + \| \psi \|^2 + 2 \operatorname{Re}(u,\psi) \geqslant \| u \|^2.$$

D'où

$$\| \psi \|^2 + 2 \operatorname{Re}(u,\psi) \geqslant 0. \tag{41}$$

Substituant $\bar{\lambda}w$ à ψ, $\lambda \in \mathbb{C}$, (41) devient :

$$|\lambda|^2 \; \| w \|^2 + 2 \operatorname{Re} \lambda(u,w) \geqslant 0. \tag{42}$$

(42) implique $(u,w) = 0$ quel que soit $w \in C^\infty_{oo}(\overset{p}{\Lambda} T^* \Omega)$. (43)

D'où quel que soit $\theta \in \overset{n-p}{\underline{D}} (\Omega)$: $\int u \wedge \theta + (-1)^{p+1} \int du \wedge \delta\theta = 0$ i.e. :

$$< u,\theta > + (-1)^{p+1} < du,\delta\theta > = 0. \tag{44}$$

Mais $< \delta\omega,\theta > = (-1)^{p+1} < \omega,\delta\theta >$, quel que soit $\omega \in \overset{p+1}{D'} (\Omega)$. D'où suit de (44) : $u + \delta du = 0$.

• Reste à montrer l'unicité de la solution dans $H_p(d;\Omega)$. Soit u une solution dans $H_p(d;\Omega)$. Alors quel que soit $w \in E$, il existe $h \in H^o_p(d;\Omega)$ tel que $w = u + h$. D'où

$$\| w \|^2 = \| u \|^2 + \| h \|^2 + 2 \operatorname{Re} [(u,h)_2 + (du,dh)_2]$$

$$= \| u \|^2 + \| h \|^2 \text{ en vertu de } u + \delta du = 0$$

et de la densité de $C^\infty_{oo}(\overset{p}{\Lambda} T^* \Omega)$ dans $H^o_p(d;\Omega)$. (45)

Par conséquent u solution dans $H_p(d;\Omega)$ implique $\| u \| = \inf_{w \in E} \| w \|$. (46)

De (45) et (46) suit si u et w sont deux solutions dans $H_p(d;\Omega)$, nécessairement $h = w - u$ doit être nul et donc $u = w$.

• La seconde partie de l'énoncé suit par dualité de la première : considérons $v \in H_{n-p}(d;\Omega)$ la solution de $v + \delta dv = 0$ et $tv = * \psi$. Posons $u = (-1)^{(n+1)p} * v$. Alors $u \in H_p(\delta;\Omega)$ et est solution de $u + d\delta u = 0$ et $nu = \psi$.

Q.E.D.

Nous étudions maintenant la régularité des solutions des problèmes aux limites posés en 2.1. Nous allons montrer que si $\varphi \in C^\infty(\overset{p}{\Lambda} T^* \Gamma)$ alors la solution dans $H_p(d;\Omega)$ de $u + \delta du = 0$, $tu = \varphi$ est «C^∞ jusqu'au bord» i.e. $u \in C^\infty(\overset{p}{\Lambda} T^* \bar{\Omega})$.

2.2. LEMME. *Considérons*

$$P : C^\infty(\overset{p}{\Lambda} T^* \bar{\Omega}) \to C^\infty(\overset{p}{\Lambda} T^* \bar{\Omega}) \times C^\infty(\overset{p}{\Lambda} T^* \Gamma) \times C^\infty(\overset{p-1}{\Lambda} T^* \Gamma)$$

$$u \mapsto ((1 + \Delta)u, tu, t\delta u).$$

Alors P est un système frontière elliptique au sens de [*Hö*], *p. 273.*

Preuve. • Nous devons tout d'abord vérifier ([Hö], déf. 10.6.2, p. 269-270) que le système $\Delta u = F$ est elliptique au sens de [D–N], p. 505. Suivant les notations de [Hö], p. 268 (à la différence près qu'ici nous travaillons avec des multi-indices) posons pour $1 \leqslant j_1 < \ldots < j_p \leqslant n$, $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n$:

$$t_{j_1 \ldots j_p} = 2 \text{ et } s_{i_1 \ldots i_p} = 0.$$

De la formule de Weitzenböck, [R] p. 131, suit :

$$(\Delta u)_{i_1 \ldots i_p} = - g^{jk} \frac{\partial^2 u_{i_1 \ldots i_p}}{\partial x^j \, \partial x^k} + \text{termes d'ordre} \leqslant 1.$$

D'où

$$\begin{aligned} P^o_{i_1 \ldots i_p, j_1 \ldots j_p}(z,\xi) &= \delta^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_p} \, g^{jk}(z) \xi_j \xi_k \\ &= \delta^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_p} \, |\xi|^2. \end{aligned}$$

D'où $\text{dét}(P^o_{i_1 \ldots i_p, j_1 \ldots j_p}(z,\xi)) = |\xi|^{2\binom{n}{p}} \neq 0$ si $\xi \neq 0$.

• Calculons le nombre d'équations définies par les conditions frontières $tu = f \in C^\infty(\overset{p}{\Lambda}\, T^*\, \Gamma)$ et $t\delta u = g \in C^\infty(\overset{p-1}{\Lambda}\, T^*\, \Gamma)$.

Celui-ci est égal à $\binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1} = \binom{n}{p} = \mu$ avec

$$2\mu = \sum_{1 \leqslant j_1 < \ldots < j_p \leqslant n} t_{j_1 \ldots j_p} - \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n} s_{i_1 \ldots i_p}.$$

D'où la condition i) de la définition 10.6.2, p. 269-270 de [Hö].

• Suivant les notations de [Hö] (condition ii) déf. 10.6.2, p. 269-270) posons :

$$r_{i_1 \ldots i_p} = 2 \text{ si } 2 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n$$

et

$$r_{k_1 \ldots k_{p-1}} = 1 \text{ si } 2 \leqslant k_1 < \ldots < k_{p-1} \leqslant n.$$

On a quel que soit $y_o \in \partial\Omega$, dans une carte adaptée au champ normal unitaire sortant, valable en y_o :

$$p_{i_1 \ldots i_p, j_1 \ldots j_p}(y_o, D) = \delta^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_p} \, I \, ;$$

$$p_{k_1\ldots k_{p-1},j_1\ldots j_p}(y_o,D) = -g^{sj}(y_o)\epsilon^{j_1\ldots j_p}_{sk_1\ldots k_{p-1}}\ \partial/\partial x^j + \text{termes d'ordre } 0.$$

D'où

$$\deg p_{i_1\ldots i_p,j_1\ldots j_p}(y_o,D) = 0 \leqslant t_{j_1\ldots j_p} - r_{i_1\ldots i_p} = 2-2=0$$

et

$$\deg p_{k_1,\ldots,k_{p-1},j_1\ldots j_p}(y_o,D) \leqslant t_{j_1\ldots j_p} - r_{k_1\ldots k_{p-1}} = 2-1=1.$$

De plus :

$$p^o_{i_1\ldots i_p,j_1\ldots j_p}(y_o,D) = \delta^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_p}\ \mathrm{I}$$

et

$$p^o_{k_1\ldots k_{p-1},j_1\ldots j_p}(y_o,D) = -g^{sj}(y_o)\ \epsilon^{j_1\ldots j_p}_{sk_1\ldots k_{p-1}}\ \partial/\partial x^j.$$

La condition ii) de [Hö] (déf. 10.6.2, p. 270) est que le système :

$$\left\{\begin{array}{lll} g^{jk}(y_o)\dfrac{\partial^2 u_{i_1\ldots i_p}}{\partial x^j\,\partial x^k} = 0 \text{ dans } \overline{\mathrm{IR}^n_-} & (1\leqslant i_1<\ldots<i_p\leqslant n) & \\ u_{i_1\ldots i_p}(0,.) = 0 \text{ dans } \mathrm{IR}^{n-1} & (2\leqslant i_1<\ldots<i_p\leqslant n) & \\ g^{sj}(y_o)\,\epsilon^{j_1\ldots j_p}_{sk_1\ldots k_{p-1}}\dfrac{\partial u_{j_1\ldots j_p}}{\partial x^j}(0,.) = 0 \text{ dans } \mathrm{IR}^{n-1} & (2\leqslant k_1<\ldots<k_{p-1}\leqslant n) & \end{array}\right. \tag{47}$$

ne possède pas de solution «exponentielle» non triviale bornée avec $\xi \neq 0$ i.e. une solution de la forme

$$u_{i_1\ldots i_p}(z) = e^{i<y,\xi>}w_{i_1\ldots i_p}(x_1)\ (z=(x_1,y), y=(x_2,\ldots,x_n),\ \xi=(\xi_2,\ldots,\xi_n)). \tag{48}$$

Vérifions cette condition. De (47) et (48) suit :

$$\ddot{w}_{i_1\ldots i_p} - g^{jk}(y_o)\,\xi_j\,\xi_k\,w_{i_1\ldots i_p} = 0 \qquad (1\leqslant i_1<\ldots<i_p\leqslant n) \tag{49}$$

$$w_{i_1\ldots i_p}(0) = 0 \qquad (2\leqslant i_1<\ldots<i_p\leqslant n) \tag{50}$$

$$\dot{w}_{1k_1\ldots k_{p-1}}(0) = 0 \qquad (2\leqslant k_1<\ldots<k_{p-1}\leqslant n) \tag{51}$$

$w_{i_1\ldots i_p}$ $(1\leqslant i_1<\ldots<i_p\leqslant n)$ devant être bornée sur IR_- il suit : $w_{i_1\ldots i_p}(x_1) = w_{i_1\ldots i_p}(0)e^{|\xi|x_1}$ où l'on a posé

$$|\xi|^2 = g^{jk}(y_o)\xi_j\,\xi_k. \tag{52}$$

De (50) et (52) suit $w_{i_1\ldots i_p} = 0$ pour $2\leqslant i_1<\ldots<i_p\leqslant n$. (53)

De (51) et (52) suit $w_{1k_1\dots k_{p-1}} = 0$ pour $2 \leqslant k_1 < \dots < k_{p-1} \leqslant n$, car $\xi \neq 0$. (54)

De (53) et (54) suit $u = 0$.

Q.E.D.

2.3. LEMME. *Soient* $\varphi_1, \varphi_4 \in C^\infty(\overset{p}{\Lambda}\, T^*\, \Gamma)$ *et* $\varphi_2, \varphi_3 \in C^\infty(\overset{p-1}{\Lambda}\, T^*\, \Gamma)$. *Alors il existe* $u \in C^\infty(\overset{p}{\Lambda} T^*\ \Omega)$ *tel que* $tu = \varphi_1$, $t\delta u = \varphi_2$, $nu = \varphi_3$ *et* $ndu = \varphi_4$. (55)

Preuve. • Par partition de l'unité et linéarité, on peut supposer, $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ à support contenu dans $U \cap \partial\Omega$, U désignant le domaine d'une carte (U,χ) de $\bar{\Omega}$ adaptée au champ normal unitaire sortant.

• Soit $\omega \in C^\infty(\overset{p}{\Lambda}\, t^*\, \bar{\Omega})$ et recherchons l'expression de $t\omega$, $t\delta\omega$, $n\omega$, $nd\omega$ lues dans la carte (U,χ). Nous supposons $\operatorname{supp}\omega \subset U$.

$$\omega = \omega_{i_1\dots i_p}\, dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p},$$

$$t\omega = \sum_{2\leqslant i_1<\dots<i_p\leqslant n} \omega_{i_1\dots i_p}(0,.)\, dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}, \tag{56}$$

$$n\omega = \sum_{2\leqslant i_2<\dots<i_p\leqslant n} \omega_{1i_2\dots i_p}(0,.)\, dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}, \tag{57}$$

$$nd\omega = \sum_{2\leqslant j_2<\dots<j_{p+1}\leqslant n} \left[\frac{\partial\omega_{j_2\dots j_{p+1}}}{\partial x^1}(0,.) + \sum_{\nu=2}^{p+1} (-1)^{\nu-1} \frac{\partial \omega_{1j_2\dots\hat{j}_\nu\dots j_{p+1}}}{\partial x^{j_\nu}}(0,.) \right] dx^{j_2} \wedge \dots \wedge dx^{j_{p+1}}, \tag{58}$$

$$t\delta\omega = \sum_{2\leqslant j_1<\dots<j_{p-1}\leqslant n} \left[-g^{sl} \frac{\partial \omega_{sj_1\dots j_{p-1}}}{\partial x^l} + g^{sl}\, \Gamma^a_{ls}\, \omega_{aj_1\dots j_{p-1}} + \sum_{\nu=1}^{p-1} g^{sl}\, \Gamma^a_{lj_\nu}\, \omega_{sj_1\dots j_{\nu-1}\, aj_{\nu+1}\dots j_{p-1}} \right](0,.)\, dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{p-1}}. \tag{59}$$

• Construisons u. Eu égard à (56), on pose :

$$u_{i_1\dots i_p}(0,.) = (\varphi_1)_{i_1\dots i_p} \text{ si } 2 \leqslant i_1 < \dots < i_p \leqslant n. \tag{60}$$

Eu égard à (57), on pose :

$$u_{1i_2\dots i_p}(0,.) = (\varphi_3)_{i_2\dots i_p} \text{ si } 2 \leqslant i_2 < \dots < i_p \leqslant n. \tag{61}$$

Eu égard à (58) et (61), on pose pour $2 \leqslant i_1 < \dots < i_p \leqslant n$:

$$\frac{\partial u_{i_1 \ldots i_p}}{\partial x^1}(0,.) = (\varphi_4)_{i_1 \ldots i_p} - \sum_{\nu=1}^{p} (-1)^\nu \frac{\partial (\varphi_3)_{i_1 \ldots \hat{i}_\nu \ldots i_p}}{\partial x^{i_\nu}}. \tag{62}$$

Eu égard à (59), (60), (61), on pose pour $2 \leqslant i_2 < \ldots < i_p \leqslant n$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_{1 i_2 \ldots i_p}}{\partial x^1}(0,.) = &- (\varphi_2)_{i_2 \ldots i_p} - g^{sl}(0,.) \frac{\partial (\varphi_1)_{s i_2 \ldots i_p}}{\partial x^l} + g^{sl}(0,.)\Gamma^a_{ls}(0,.)(\varphi_1)_{a i_2 \ldots i_p} \\
&+ g^{sl}(0,.)\Gamma^1_{ls}(0,.)(\varphi_3)_{i_2 \ldots i_p} + \sum_{\nu=2}^{p} \Gamma_{1 i_\nu}(0,.)(\varphi_3)_{i_2 \ldots i_{\nu-1} a i_{\nu+1} \ldots i_p} \\
&+ \sum_{\nu=2}^{p} g^{sl}(0,.)\Gamma^a_{l i_\nu}(0,.)(\varphi_1)_{s i_2 \ldots i_{\nu-1} a i_{\nu+1} \ldots i_p} \\
&+ \sum_{\nu=2}^{p} g^{sl}(0,.)\Gamma^1_{l i_\nu}(0,.)(-1)^{\nu-1}(\varphi_3)_{s i_2 \ldots i_{\nu-1} i_{\nu+1} \ldots i_p}.
\end{aligned} \tag{63}$$

Soit $\theta \in C^\infty_{oo}(\bar{\Omega})$, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, supp $\theta \subset U$ et θ égale 1 sur un voisinage de $\bigcup_{i=1}^{4}$ supp φ_i.
Posons :

$$u_{i_1 \ldots i_p}(x_1,.) = \theta \left\{ u_{i_1 \ldots i_p}(0,.) - \int_{x_1}^{o} \frac{\partial u_{i_1 \ldots i_p}}{\partial x^1}(t,.)dt \right\} \quad (2 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n), \tag{64}$$

$$u_{1 i_2 \ldots i_p}(x_1,.) = \theta \left\{ u_{1 i_2 \ldots i_p}(0,.) - \int_{x_1}^{o} \frac{\partial u_{1 i_2 \ldots i_p}}{\partial x^1}(t,.)dt \right\} \quad (2 \leqslant i_2 < \ldots < i_p \leqslant n). \tag{65}$$

u défini par (60) - (65) répond à la question.

Q.E.D.

2.4. COROLLAIRE. *Soit* $\varphi \in C^\infty(\overset{p}{\Lambda} T^* \bar{\Omega})$, $\lambda \in C^\infty(\overset{p}{\Lambda} T^* \Gamma)$ *et* $\nu \in C^\infty(\overset{p-1}{\Lambda} T^* \Gamma)$ *tels que pour tout* $u \in C^\infty(\overset{p}{\Lambda} T^* \bar{\Omega})$:

$$\int_\Omega (u + \Delta u) \Lambda * \varphi + \int_{\partial\Omega} tu \Lambda * \lambda + \int_{\partial\Omega} t\delta u \Lambda * \nu = 0.$$

Alors $\varphi = 0$, $\lambda = 0$ *et* $\nu = 0$.

Preuve. • On vérifie de suite que :

$$\Delta u \Lambda * \varphi - \Delta\varphi \Lambda * u = d\,[\delta u \Lambda * \varphi - \delta\varphi \Lambda * u] - d[\varphi \Lambda * du - u \Lambda * d\varphi].$$

D'où

$$\int_\Omega \Delta u \Lambda * \varphi - \Delta\varphi \Lambda * u = \int_{\partial\Omega} t(\delta u \Lambda * \varphi - \delta\varphi \Lambda * u) - \int_{\partial\Omega} t(\varphi \Lambda * du - u \Lambda * d\varphi). \tag{66}$$

• De (66) et de l'hypothèse suit $\int_\Omega (\varphi + \Delta\varphi) \wedge * u = 0$ quel que soit $u \in C^\infty_{oo}(\overset{p}{\Lambda} T^* \Omega)$. D'où

$$\varphi + \Delta\varphi = 0. \tag{67}$$

• De l'hypothèse, (66) et (67) suit :

$$\int_{\partial\Omega} tu \wedge * (\lambda + nd\varphi) + \int_{\partial\Omega} t\delta u \wedge * (\nu + n\varphi) - \int_{\partial\Omega} nu \wedge * t\delta\varphi - \int_{\partial\Omega} ndu \wedge * t\varphi = 0,$$

quel que soit $u \in C^\infty(\overset{p}{\Lambda} T^* \bar{\Omega})$. D'où par 2.3 :

$$\begin{cases} \lambda + nd\varphi = 0 & (68) \\ \nu + n\varphi = 0 & (69) \\ t\delta\varphi = 0 & (70) \\ t\varphi = 0 & (71) \end{cases}$$

De (67) et (70) suit $(I + \delta d)\delta\varphi = 0$ et $t\delta\varphi = 0$. De plus par hypothèse, $\varphi \in C^\infty(\overset{p}{\Lambda} T^* \bar{\Omega})$ donc $\delta\varphi \in C^\infty(\overset{p-1}{\Lambda} T^* \bar{\Omega}) \subset H_{p-1}(d;\Omega)$.

D'où par 2.1 $\quad \delta\varphi = 0. \quad$ (72)

De (67), (72) et (71) suit $(I + \delta d)\varphi = 0$ et $t\varphi = 0$.

D'où par 2.1 $\quad \varphi = 0. \quad$ (73)

De (73) et (68) suit $\lambda = 0$; de (73) et (69) suit $\nu = 0$.

Q.E.D.

2.5. COROLLAIRE. • *P est un topisomorphisme de* $C^\infty(\overset{p}{\Lambda} T^* \bar{\Omega})$ *sur*

$$C^\infty(\overset{p}{\Lambda} T^* \bar{\Omega}) \times C^\infty(\overset{p}{\Lambda} T^* \Gamma) \times C^\infty(\overset{p-1}{\Lambda} T^* \Gamma).$$

• *Pour tout* $\varphi \in C^\infty(\overset{p}{\Lambda} T^* \Gamma)$ *la solution* u *dans* $H_p(d;\Omega)$ *de* $u + \delta du = 0$, $tu = \varphi$ *est dans* $C^\infty(\overset{p}{\Lambda} T^* \Omega)$.

• *Pour tout* $\psi \in C^\infty(\overset{p-1}{\Lambda} T^* \Gamma)$ *la solution* u *dans* $H_p(\delta;\Omega)$ *de* $u + d\delta u = 0$, $nu = \psi$ *est dans* $C^\infty(\overset{p}{\Lambda} T^* \bar{\Omega})$.

Preuve. Par 2.2, *P* est un système frontière elliptique, d'où par [Hö] (p. 273), il existe $r \in \mathbb{N}$, $\varphi_j \in C^\infty(\overset{p}{\Lambda} T^* \bar{\Omega})$, $\lambda_j \in C^\infty(\overset{p}{\Lambda} T^* \Gamma)$, $\nu_j \in C^\infty(\overset{p-1}{\Lambda} T^* \Gamma)$, $j = 1,\ldots,r$ tels que $(F,f,g) \in \operatorname{Im} P$ ssi

$$(F,f,g) \in C^\infty(\overset{p}{\Lambda} T^* \bar{\Omega}) \times C^\infty(\overset{p}{\Lambda} T^* \Gamma) \times C^\infty(\overset{p-1}{\Lambda} T^* \Gamma)$$

et

$$\int_{\Omega} F \wedge * \varphi_j + \int_{\partial\Omega} f \wedge * \lambda_j + \int_{\partial\Omega} g \wedge * \nu_j = 0, \text{ pour tout } j = 1,\dots,r.$$

De 2.4, suit $\varphi_j = 0$, $\lambda_j = 0$, $\nu_j = 0$, $j = 1,\dots,r$. D'où P est surjectif. Montrons que P est injectif. Soit $u \in \ker P$. Alors $\delta u \in C^\infty(\overset{p-1}{\Lambda}\, T^* \,\overline{\Omega}) \subset H_{p-1}(d;\Omega)$ et $(I + \delta d)\delta u = 0$ ainsi que $t\delta u = 0$. D'où par 2.1, $\delta u = 0$. D'où suit de $u \in \ker P$, $(I + \delta d)u = 0$. On a également $tu = 0$, d'où par 2.1 $u = 0$. P est injectif, continu et surjectif. Donc par le théorème de l'application ouverte, c'est un topisomorphisme de $C^\infty(\overset{p}{\Lambda} T^* \overline{\Omega})$ sur $C^\infty(\overset{p}{\Lambda} T^* \overline{\Omega}) \times C^\infty(\overset{p}{\Lambda} T^* \Gamma) \times C^\infty(\overset{p-1}{\Lambda}\, T^* \Gamma)$.

• Par le premier point, il existe $u \in C^\infty(\overset{p}{\Lambda}\, T^* \,\overline{\Omega})$ tel que $(I + \Delta)u = 0$, $tu = \varphi$, $t\delta u = 0$. D'où suit $\delta u \in C^\infty(\overset{p-1}{\Lambda}\, T^* \,\overline{\Omega}) \subset H_{p-1}(d;\Omega)$, $(I + \delta d)\delta u = 0$ et $t\delta u = 0$. D'où par 2.1, $\delta u = 0$. D'où $(I + \Delta)u = 0$ devient $(I + \delta d)u = 0$.
L'assertion suit dès lors de 2.1 par unicité.

• Ce dernier point suit du précédent par dualité.

Q.E.D.

Pour $\varphi \in H_p^{-1/2}(d;\Gamma)$ posons $|||\, \varphi\, ||| = \inf \left\{ \|u\| \,;\, u \in H_p(d;\Omega) \text{ et } tu = \varphi \right\}$. Par 1.9 et le théorème de l'application ouverte, la topologie définie par cette norme est la même que la topologie initiale. Par 2.1, $|||\, \varphi\, ||| = \| u_\varphi \|$ où $u_\varphi \in H_p(d;\Omega)$ est la solution de $u + \delta du = 0$, $tu = \varphi$. Le produit scalaire $((.,.))$ associé à cette norme vérifie $((\varphi,\psi)) = (u_\varphi, u_\psi)$. De même pour $\psi \in H_p^{-1/2}(\delta;\Gamma)$ on pose $|||\, \psi\, ||| = \inf \;\; \|u\| \,;\, u \in H_{p+1}(\delta;\Omega) \text{ et } nu = \psi$. Ces normes et produits scalaires seront dits «naturels».

Soit $\varphi \in H_p^{-1/2}(d;\Gamma)$ et posons $Q\varphi = ndu_\varphi$ (u_φ désignant la solution dans $H_p(d;\Omega)$ de $u + \delta du = 0$ et $tu = \varphi$). Ceci a bien un sens car $du_\varphi \in IL^2(\overset{p+1}{\Lambda}\, T^* \,\Omega)$ et $\delta du_\varphi = - u_\varphi \in IL^2(\overset{p}{\Lambda} T^* \Omega)$ i.e. $du_\varphi \in H_{p+1}(\delta;\Omega)$. Q opère de $H_p^{-1/2}(d;\Gamma)$ dans $H_p^{-1/2}(\delta;\Gamma)$.

2.6. PROPOSITION. • Q *est un topisomorphisme de* $H_p^{-1/2}(d;\Gamma)$ *sur* $H_p^{-1/2}(\delta;\Gamma)$ *et une transformation unitaire de* $H_p^{-1/2}(d;\Gamma)$ *sur* $H_p^{-1/2}(\delta;\Gamma)$ *pour leur structure hilbertienne naturelle. De plus* $Q[C^\infty(\overset{p}{\Lambda} T^* \Gamma)] = C^\infty(\overset{p}{\Lambda} T^* \Gamma)$.

• *Notons* $Q(p)$ *l'opérateur* Q *agissant de* $H_p^{-1/2}(d;\Gamma)$ *sur* $H_p^{-1/2}(\delta;\Gamma)$. *Alors*

$$Q(p)^{-1} = (-1)^{np} * Q(n-1-p)^*. \tag{74}$$

Preuve. • Soit $\varphi \in H_p^{-1/2}(d;\Gamma)$ et $u_\varphi \in H_p(d;\Omega)$ la solution de $(I + \delta d)u = 0$, $tu = \varphi$. Alors $du_\varphi \in H_{p+1}(\delta;\Omega)$ et est solution de l'équation $(I + d\delta)w = 0$, $nw = Q\varphi$. D'où

$$|||\, Q\varphi\, ||| = \| du_\varphi \|_{H_{p+1}(\delta;\Omega)} = \| u_\varphi \|_{H_p(d;\Omega)} = |||\, \varphi\, |||.$$

Donc Q est une isométrie de $H_p^{-1/2}(d;\Gamma)$ dans $H_p^{-1/2}(\delta;\Gamma)$ pour leur structure hilbertienne naturelle. Montrons que Q est surjectif.
Soit $\psi \in H_p^{-1/2}(\delta;\Gamma)$ et $u_\psi \in H_{p+1}(\delta;\Omega)$ la solution de $(I + d\delta)u = 0$, $nu = \psi$. $\delta u_\psi \in H_p(d;\Omega)$ et considérant $\varphi = -t\delta u_\psi$ on vérifie de suite que $Q\varphi = \psi$. Par 2.5, il est clair que Q envoie $C^\infty(\overset{p}{\Lambda} T^* \Gamma)$ sur lui-même.

• Montrons que $(-1)^{np} * Q(n-1-p)$ est un inverse à gauche de Q(p). Soit $\varphi \in C^\infty(\overset{p}{\Lambda} T^* \Gamma)$. Soit $u \in C^\infty(\overset{p}{\Lambda} T^* \overline{\Omega})$ la solution de $u + \delta du = 0$, $tu = \varphi$. $* Q(p)\varphi = * ndu = t{*}du$. $* du \in C^\infty(\overset{n-p-1}{\Lambda} T^* \overline{\Omega})$ et vérifie $(I + \delta d) * du = 0$. D'où $Q(n-1-p) * Q(p)\varphi = nd * du$. D'où $* Q(n-1-p) * Q(p)\varphi = t * d * du$. Mais $(-1)^{np} t * d * du = -t\, \delta du = \varphi$. D'où $(-1)^{np} * Q(n-1-p) * Q(p)\varphi = \varphi$, quel que soit $\varphi \in C^\infty(\overset{p}{\Lambda} T^* \Gamma)$. D'où par densité, $[(-1)^{np} * Q(n-1-p)^*]Q(p) = I$. D'où $Q(p)^{-1} = (-1)^{np} * Q(n-1-p)^*$.

Q.E.D.

Notons $S = S(p)$ la grande restriction de Q(p) qui opère dans $IL^2(\overset{p}{\Lambda} T^* \Gamma)$. Par 2.6, $D(S) \supset C^\infty(\overset{p}{\Lambda} T^* \Gamma)$ et est donc dense dans $IL^2(\overset{p}{\Lambda} T^* \Gamma)$. Nous allons montrer que S est un opérateur self-adjoint positif dans $IL^2(\overset{p}{\Lambda} T^* \Gamma)$. Auparavant un lemme, dont le premier point peut être vu comme une généralisation de la formule de Stokes.

2.7. LEMME. • *Soit* $u \in H_p(d;\Omega)$ *et* $v \in H_{n-1-p}(d;\Omega)$. *Supposons* $tu \in IL^2(\overset{p}{\Lambda} T^* \Gamma)$, $tv \in IL^2(\overset{n-1-p}{\Lambda} T^* \Gamma)$ (resp. $tv \in C^\infty(\overset{n-1-p}{\Lambda} T^* \Gamma)$). *Alors*

$$\int_\Omega d(u \wedge v) = \int_{\partial\Omega} tu \wedge tv \quad (\text{resp. } \int_\Omega d(u \wedge v) = \langle tu, tv \rangle).$$

• *La forme bilinéaire de* $C^\infty(\overset{p}{\Lambda} T^* \Gamma) \times C^\infty(\overset{n-1-p}{\Lambda} T^* \Gamma) \to \mathbb{C} : (\alpha,\beta) \mapsto \int_\Gamma \alpha \wedge \beta$ *se prolonge continuement de manière unique à* $H_p^{-1/2}(d;\Gamma) \times H_{n-1-p}^{-1/2}(d;\Gamma)$ *(par abus de notation la valeur de cette forme bilinéaire en* $(\alpha,\beta) \in H_p^{-1/2}(d;\Gamma) \times H_{n-1-p}^{-1/2}(d;\Gamma)$ *sera encore notée* $\int_\Gamma \alpha \wedge \beta$).

Preuve. • (i) Supposons $tu \in IL^2(\overset{p}{\Lambda} T^* \Gamma)$ et $tv \in IL^2(\overset{n-1-p}{\Lambda} T^* \Gamma)$. Soit $(\varphi_n) \subset C^\infty(\overset{p}{\Lambda} T^* \Gamma)$ (resp. : $(\psi_n) \subset C^\infty(\overset{n-1-p}{\Lambda} T^* \Gamma)$) telle que $\varphi_n \to tu$ dans $IL^2(\overset{p}{\Lambda} T^* \Gamma) \cap H_p^{-1/2}(d;\Gamma)$ (i.e. $\varphi_n \to tu$ dans $IL^2(\overset{p}{\Lambda} T^* \Gamma)$ et dans $H_p^{-1/2}(d;\Gamma)$) et $\psi_n \to tv$ dans $IL^2(\overset{n-1-p}{\Lambda} T^* \Gamma) \cap H_{n-1-p}^{-1/2}(d;\Gamma)$ (de telles suites sont faciles à construire : grosso modo, par partition de l'unité on se ramène à IR^{n-1}, dans IR^{n-1} on procède par régularisation). En particulier

$$\int_{\partial\Omega} \varphi_n \wedge \psi_n \to \int_{\partial\Omega} tu \wedge tv. \tag{75}$$

Soit α_n (resp. β_n) la solution dans $H_p(d;\Omega)$ (resp. $H_{n-1-p}(d;\Omega)$) de $(I + \delta d)\alpha_n = 0$ et $t\alpha_n = \varphi_n$ (resp. $(I + \delta d)\beta_n = 0$ et $t\beta_n = \psi_n$). La suite (α_n) (resp. (β_n)) est de Cauchy dans $H_p(d;\Omega)$ (resp. $H_{n-1-p}(d;\Omega)$). Soit $\alpha = \lim \alpha_n$ dans $H_p(d;\Omega)$ et $\beta = \lim \beta_n$ dans $H_{n-1-p}(d;\Omega)$.

En particulier

$$\int_\Omega d(\alpha_n \wedge \beta_n) \to \int_\Omega d(\alpha \wedge \beta). \tag{76}$$

Par la formule de Stokes et 2.5,

$$\int_{\partial\Omega} \varphi_n \wedge \psi_n = \int_\Omega d(\alpha_n \wedge \beta_n). \tag{77}$$

D'où suit de (75), (76) et (77) :

$$\int_\Omega d(\alpha \wedge \beta) = \int_{\partial\Omega} tu \wedge tv. \tag{78}$$

Par (78) il suffit pour conclure de montrer que

$$\int_\Omega d(\alpha \wedge \beta) = \int_\Omega d(u \wedge v). \tag{79}$$

Ecrivant $\alpha \wedge \beta - u \wedge v = \alpha \wedge (\beta - v) + (\alpha - u) \wedge v$, nous sommes ramenés à montrer que $\int_\Omega d(\xi \wedge \eta) = 0$, $\xi \in H_p(d;\Omega)$, $\eta \in H_{n-1-p}(d;\Omega)$ dès que $t\xi = 0$ ou $t\eta = 0$.

Supposons par exemple $t\eta = 0$. Par 1.9, il existe $(\xi_n) \subset C^\infty(\overset{p}{\Lambda} T^* \bar{\Omega})$ (resp. $(\eta_n) \subset C^\infty_{oo}(\overset{n-1-p}{\Lambda} T^* \Omega)$) telle que $\xi_n \to \xi$ dans $H_p(d;\Omega)$ (resp. $\eta_n \to \eta$ dans $H_{n-1-p}(d;\Omega)$). Par le théorème de Stokes $\int_\Omega d(\xi_n \wedge \eta_n) = 0$. Mais $\int_\Omega d(\xi_n \wedge \eta_n) \to \int_\Omega d(\xi \wedge \eta)$, d'où $\int_\Omega d(\xi \wedge \eta) = 0$. D'où suit (79).

(ii) Supposons tv régulier i.e. $tv \in C^\infty(\overset{n-1-p}{\Lambda} T^* \Gamma)$. Par 1.9 il existe $(u_n) \subset C^\infty(\overset{p}{\Lambda} T^* \bar{\Omega})$ telle que $u_n \to u$ dans $H_p(d;\Omega)$. Par (i) suit alors : $\int_\Omega d(u_n \wedge v) = \langle tu_n, tv \rangle$. Mais $tu_n \to tu$ dans $H_p^{-1/2}(d;\Gamma)$ et $\int_\Omega d(u_n \wedge v) \to \int_\Omega d(u \wedge v)$. D'où $\int_\Omega d(u \wedge v) = \langle tu, tv \rangle$.

• Supposons $(\alpha,\beta) \in C^\infty(\overset{p}{\Lambda} T^* \Gamma) \times C^\infty(\overset{n-1-p}{\Lambda} T^* \Gamma)$. Soit $u \in C^\infty(\overset{p}{\Lambda} T^* \bar{\Omega})$ (resp. $v \in C^\infty(\overset{n-1-p}{\Lambda} T^* \bar{\Omega})$) solution de $u + \delta du = 0$, $tu = \alpha$ (resp. $v + \delta dv = 0$, $tv = \beta$). Par la formule de Stokes, on a

$$\int_\Gamma \alpha \wedge \beta = \int_\Omega d(u \wedge v). \tag{80}$$

Mais l'application de

$$H_p(d;\Omega) \times H_{n-1-p}(d;\Omega) \to \mathbb{C} : (\xi,\eta) \mapsto \int_\Omega d(\xi \wedge \eta) \tag{81}$$

est bilinéaire continue. De (80) et (81) suit l'assertion.

Q.E.D.

2.8. PROPOSITION. • S *est un opérateur self-adjoint positif dans* $\mathbb{L}^2(\overset{p}{\Lambda} T^* \Gamma)$. *De plus la fermeture de* S *considéré comme opérateur de* $H_p^{-1/2}(d;\Gamma)$ *dans* $H_p^{-1/2}(\delta;\Gamma)$ *est égale à* Q.

• $S^{1/2}$ *se prolonge continuement de manière unique en une application unitaire de* $H_p^{-1/2}(d;\Gamma)$ *muni de sa structure hilbertienne naturelle sur* $\mathbb{L}^2(\overset{p}{\Lambda} T^* \Gamma)$.

Preuve. • (i) Montrons que S est symétrique. Soient φ, $\psi \in D(S)$, u, $v \in H_p(d;\Omega)$ la solution de $u + \delta du = 0$, $tu = \varphi$ (resp. : $v + \delta dv = 0$, $tv = \psi$).

$$(u,v) = \int_\Omega du \wedge * d\bar{v} - \int_\Omega u \wedge * \delta d\bar{v}. \tag{82}$$

$$d(u \wedge * d\bar{v}) = du \wedge * d\bar{v} - u \wedge * \delta d\bar{v}. \tag{83}$$

De (82), (83) et 2.7 suit :

$$(u,v) = \int_{\partial\Omega} \varphi \wedge * \overline{S\psi} \quad \text{i.e. } (u,v) = (\varphi, S\psi)_2. \tag{84}$$

De (84) suit

$$(\varphi,S\psi)_2 = \overline{(\psi,S\varphi)_2} \quad \text{i.e. } (\varphi,S\psi) = (S\varphi,\psi).$$

(ii) Par (84), pour tout

$$\varphi \in D(S),\ (S\varphi,\varphi)_2 = \| u \|^2_{H_p(d;\Omega)} = |\!|\!| \varphi |\!|\!|^2. \tag{85}$$

En particulier, S est un opérateur positif.

(iii) S est un opérateur symétrique, positif, à domaine dense car $D(S) \supset C^\infty(\overset{p}{\Lambda} T^* \Gamma)$. Soit $\tilde{S}$ son extension de Friedrichs. $\tilde{S}$ est un opérateur self-adjoint positif [R–N] (p. 326) prolongeant S. Nous allons montrer que $S = \tilde{S}$.

$\tilde{S}$ est la restriction de $S^*[Y]$ (formule (5), p. 318 et suite) à $D(S^*) \cap (D(S))'$, $(D(S))'$ désignant le complété de l'espace préhilbertien D(S) muni de la norme : $D(S) \to \mathbb{R}_+$: $\varphi \mapsto (\| \varphi \|_2^2 + (S\varphi,\varphi)_2)^{1/2}$, identifié à un sous-espace de $\mathbb{L}^2(\overset{p}{\Lambda} T^* \Gamma)$. D'où par (85),

$$D(\tilde{S}) = \mathbb{L}^2(\overset{p}{\Lambda} T^* \Gamma) \cap H_p^{-1/2}(d;\Gamma) \cap D(S^*) = D(S^*) \cap H_p^{-1/2}(d;\Gamma). \tag{86}$$

Il suffit donc pour conclure de montrer que pour tout $\varphi \in D(\tilde{S})$, $\tilde{S}\varphi = Q\varphi$.

Soit $\psi \in C^\infty(\overset{p}{\Lambda} T^* \Gamma)$. Désignons par $u \in H_p(d;\Omega)$ (resp. : $v \in C^\infty(\overset{p}{\Lambda} T^* \bar{\Omega})$) la solution de $u + \delta du = 0$, $tu = \varphi$ (resp. $v + \delta dv = 0$, $tv = \psi$). $(\tilde{S}\varphi,\psi)_2 = (S^*\varphi,\psi)_2 = (\varphi,S\psi)_2$. D'autre part $\varphi \in D(\tilde{S})$, d'où par (86) il existe une suite $(\varphi_n) \subset C^\infty(\overset{p}{\Lambda} T^* \Gamma)$ telle que $\varphi_n \to \varphi$ dans $\mathbb{L}^2(\overset{p}{\Lambda} T^* \Gamma) \cap H_p^{-1/2}(d;\Gamma)$. D'où $< Q\varphi,{}^*\psi > = \lim < Q\varphi_n,{}^*\psi > = \lim(S\varphi_n,\psi)_2 = \lim(\varphi_n,S\psi)_2 = (\varphi,S\psi)_2$.
D'où suit $(\tilde{S}\varphi,\psi)_2 = < Q\varphi,{}^*\psi >$ quel que soit $\psi \in C^\infty(\overset{p}{\Lambda} T^* \Gamma)$, d'où $\tilde{S}\varphi = Q\varphi$.

(iv) La seconde partie du premier point est triviale étant donné que Q est borné et que $D(S) \supset C^\infty(\overset{p}{\Lambda} T^* \Gamma)$, donc est dense dans $H_p^{-1/2}(d;\Gamma)$.

- Montrons que $D(S^{1/2}) \subset H_p^{-1/2}(d;\Gamma)$ et que quel que soit $\varphi,\psi \in D(S^{1/2})$, $((\varphi,\psi)) = (S^{1/2}\varphi,S^{1/2}\psi)_2$. Par (84), pour tout $\varphi,\psi \in D(S)$, $((\varphi,\psi)) = (\varphi,S\psi)_2$, d'où

$$((\varphi,\psi)) = (S^{1/2}\varphi,S^{1/2}\psi)_2. \tag{87}$$

Mais D(S) est un coeur pour $S^{1/2}$ [K] (p. 281). D'où considérant $\varphi,\psi \in D(S^{1/2})$, il existe (φ_n), $(\psi_n) \subset D(S)$ telles que $\varphi_n \to \varphi$, $S^{1/2}\varphi_n \to S^{1/2}\varphi$, $\psi_n \to \psi$, $S^{1/2}\psi_n \to S^{1/2}\psi$, dans $\mathbb{L}^2(\overset{p}{\Lambda} T^* \Gamma)$. Par (87), $|||\varphi_n - \varphi_m||| = \| S^{1/2}(\varphi_n - \varphi_m)\|_2$, $|||\psi_n - \psi_m||| = \| S^{1/2}(\psi_n - \psi_m)\|_2$ i.e. (φ_n), (ψ_n) sont de Cauchy dans $H_p^{-1/2}(d;\Gamma)$. Mais $\varphi_n \to \varphi$ et $\psi_n \to \psi$ dans $\overset{p}{\mathcal{D}}'(\Gamma)$. D'où par unicité $\varphi_n \to \varphi$ et $\psi_n \to \psi$ dans $H_p^{-1/2}(d;\Gamma)$. Passant à la limite dans (87) (appliqué aux (φ_n,ψ_n)) il suit $((\varphi,\psi)) = (S^{1/2}\varphi,S^{1/2}\psi)_2$. D'où l'assertion. D'où suit $S^{1/2}$ est une isométrie de $D(S^{1/2})$ muni de $|||\,.\,|||$ dans

$$\mathbb{L}^2(\overset{p}{\Lambda} T^* \Gamma). \tag{88}$$

De plus $D(S^{1/2}) \supset D(S) \supset C^\infty(\overset{p}{\Lambda} T^* \Gamma)$ et est donc dense dans

$$H_p^{-1/2}(d;\Gamma). \tag{89}$$

De même $R(S^{1/2}) \supset R(S) \supset C^\infty(\overset{p}{\Lambda} T^* \Gamma)$ et est donc dense dans

$$\mathbb{L}^2(\overset{p}{\Lambda} T^* \Gamma). \tag{90}$$

De (88)-(90) suit l'assertion.

Q.E.D.

3. - SYSTEME DE MAXWELL

Nous commençons par un résultat d'Analyse Fonctionnelle. Celui-ci est une variante d'un résultat classique [R–S] (p. 140-141) concernant les extensions antisymétriques et fermées d'un opérateur antisymétrique et fermé dans un espace de Hilbert H. Comme nous nous en sommes aperçus par la suite celui-ci se trouve énoncé (sous une forme moins précise) dans [Vi] ; comme il n'en est pas donné de démonstration, nous nous permettons d'en donner une.

3.1. THEOREME. [Vi] , (p. 96). *Soit* H *un espace de Hilbert, et* A_o *un opérateur dissipatif, antisymétrique, fermé, à domaine dense dans* H. *Soit* $K^+ = \ker(1 - A_o^*)$ *et* $K^- = \ker(1 + A_o^*)$. *Alors, il y a correspondance* $1-1$ *entre les générateurs dissipatifs* A_1 *tels que* $A_o \subset A_1 \subset -A_o^*$ *et les contractions* $U : K^+ \to K^-$ (i.e. $\|U\| \leqslant 1$) (K^+ *et* K^- *sont fermés dans* H) ; *plus précisément :*

(i) pour tout $U \in \mathscr{B}(K^+; K^-)$ *tel que* $\|U\| \leqslant 1$, A_1 *défini par :*

$$D(A_1) = \{\varphi + \varphi_+ + U\varphi_+ \,;\, \varphi \in D(A_o) \text{ et } \varphi_+ \in K^+\},\ A_1(\varphi + \varphi_+ + U\varphi_+) = A_o\varphi - \varphi_+ + U\varphi_+$$

est générateur d'un semi-groupe (s.g.) à contraction et $A_o \subset A_1 \subset -A_o^*$;

(ii) réciproquement, étant donné A_1 *générateur d'un s.g. à contraction tel que* $A_o \subset A_1 \subset -A_o^*$, *pour tout* $\varphi_+ \in K^+$ *il existe un et un seul élément de* K^-, *noté* $U\varphi_+$ *tel que* $\varphi_+ + U\varphi_+ \in D(A_1)$.
De plus, l'application de $K^+ \to K^- : \varphi_+ \mapsto U\varphi_+$ *est une contraction de* K^+ *dans* K^-.

Preuve. (i) Soit U contraction de K^+ dans K^- et soit A_1 l'opérateur associé.

• A_1 est dissipatif. En effet, considérons $\varphi + \varphi_+ + U\varphi_+ \in D(A_1)$ ($\varphi \in D(A_o)$ et $\varphi_+ \in K^+$).

$$\mathrm{Re}(A_1(\varphi + \varphi_+ + U\varphi_+), \varphi + \varphi_+ + U\varphi_+) = \mathrm{Re}(A_o\varphi - \varphi_+ + U\varphi_+, \varphi + \varphi_+ + U\varphi_+)$$

$$= \mathrm{Re}[(A_o\varphi,\varphi) + \|U\varphi_+\|^2 - \|\varphi_+\|^2] \leqslant \mathrm{Re}(A_o\varphi,\varphi) \leqslant 0.$$

• $\mathrm{Im}(1 - A_1)$ est dense dans H. En effet soit $\nu \in H$, $\nu \perp \mathrm{Im}(1 - A_1)$. En particulier, $\nu \perp \mathrm{Im}(1 - A_o)$, i.e. $\nu \in K^+$. De plus, quel que soit $\varphi_+ \in K^+$:

$$(1 - A_1)(\varphi_+ + U\varphi_+) = \varphi_+ + U\varphi_+ - (-\varphi_+ + U\varphi_+) = 2\varphi_+.$$

D'où suit $\nu \perp K^+$ et par $\nu \in K^+$, $\nu \perp \nu$ i.e. $\nu = 0$.

• $D(A_1)$ est dense dans H. En effet $D(A_1) \supset D(A_o)$ et ce dernier est dense dans H.

• A_1 est fermé. En effet, considérons $(\varphi_n) \subset D(A_o)$ et $(\varphi_n^+) \subset K^+$, telles que $\varphi_n + \varphi_n^+ + U\varphi_n^+ \to f \in H$ et $A_o\varphi_n - \varphi_n^+ + U\varphi_n^+ \to g \in H$. En particulier

$$f \in D(A_o^*) \text{ et } A_o^* f = -g.$$

Mais [R–S] (p. 138), $D(A_o)$, K^+, K^- forment une décomposition orthogonale de l'espace de Hilbert $D(A_o^*)$ (muni de la norme du graphe). Soit $f = \varphi + \varphi^+ + \varphi^-$ la décomposition de f, $\varphi \in D(A_o)$, $\varphi^+ \in K^+$, $\varphi^- \in K^-$. On a $\varphi_n \to \varphi$, $\varphi_n^+ \to \varphi^+$ et $U\varphi_n^+ \to \varphi^-$ dans $D(A_o^*)$, donc a fortiori dans H. D'où par continuité de U, $\varphi^- = U\varphi^+$.

D'où $f \in D(A_1)$.

D'où A_1 est fermé.

• Des points précédents, suit par le théorème de Lumer-Phillips, A_1 générateur d'un s.g. à contraction.

(ii) Réciproquement, soit A_1 générateur d'un s.g. à contraction tel que $A_o \subset A_1 \subset -A_o^*$.

A_1 étant un générateur donc en particulier un opérateur fermé et $A_1 \subset -A_o^*$, il suit $D(A_1)$ sous-espace fermé de $D(A_o^*)$ (ce dernier étant muni de la norme du graphe). Désignons par S_1 le sous-espace fermé complémentaire orthogonal de $D(A_o)$ dans $D(A_1)$.

De $D(A_1) \supset D(A_o)$ et $D(A_o^*) = D(A_o) \oplus K^+ \oplus K^-$ [R–S] (p. 138) (pour la norme du graphe de A_o^*) il suit $S_1 \subset K^+ \oplus K^-$.

• Etant donné $\varphi_+ \in K^+$, il existe au plus un élément $\varphi_- \in K^-$ tel que $\varphi_+ + \varphi_- \in S_1$ (nous n'affirmons rien quant à l'existence d'un tel élément). En effet, soit φ_- $\psi_- \in K^-$ tels que $\varphi_+ + \varphi_- \in S_1$ et $\varphi_+ + \psi_- \in S_1$. D'où suit $\varphi_- - \psi_- \in S_1 \subset D(A_1)$.

De plus $(1 - A_1)(\varphi_- - \psi_-) = 0$, d'où par dissipativité de A_1, $\varphi_- = \psi_-$. Remarquons que φ_- est aussi l'unique élément (éventuel) tel que $\varphi_+ + \varphi_- \in D(A_1)$. En effet $\varphi_+ + \varphi_- \in K^+ \oplus K^-$ et est donc orthogonal pour le produit scalaire associé à la norme du graphe de A_o^* à $D(A_o)$. D'où $\varphi_+ + \varphi_- \in S_1$. Désignons par U l'opérateur de K^+ dans K^- ainsi défini.

• D(U) est dense dans K^+. En effet, soit $\nu \in K^+$ tel que $\nu \perp D(U)$. Remarquons que $(1 - A_1)S_1 = D(U)$. En effet, considérons $\varphi \in S_1$; φ s'écrit sous la forme $\varphi = \varphi_+ + U\varphi_+$, $\varphi_+ \in K^+$. D'où $(1 - A_1)\varphi = (1 + A_o^*)\varphi_+ + (1 + A_o^*)\varphi_- = 2\varphi_+$.

D'autre part, $\nu \in K^+$ signifie $\nu \perp \mathrm{Im}(1 - A_o)$. D'où par linéarité,

$$\nu \perp (1 - A_1)\,[D(A_o) \oplus S_1] = \mathrm{Im}(1 - A_1).$$

De A_1 générateur dissipatif suit alors $\nu = 0$.

• Montrons que U est une contraction. Soit $\varphi_+ \in D(U)$. Posons $\varphi = \varphi_+ + U\varphi_+$. $A_1\varphi = -A_o^*\varphi_+ - A_o^*\,U\varphi_+ = U\varphi_+ - \varphi_+$. D'où

$$\mathrm{Re}(A_1\varphi,\varphi) = \mathrm{Re}(U\varphi_+ - \varphi_+\,,\,\varphi_+ + U\varphi_+) = \|U\varphi_+\|^2 - \|\varphi_+\|^2.$$

De la dissipativité de A_1 suit $\|U\varphi_+\| \leqslant \|\varphi_+\|$.

• Montrons que $D(U) = \mathcal{K}^+$. Soit $\varphi^+ \in \mathcal{K}^+$. Par $D(U)$ dense dans $\mathcal{K}^+$, il existe $(\varphi_n^+) \subset D(U)$ telle que $\varphi_n^+ \to \varphi^+$. De U contraction et $\mathcal{K}^-$ fermé dans H, il existe $\varphi_- \in \mathcal{K}^-$ tel que $U\varphi_n^+ \to \varphi^-$. D'où $\varphi_n^+ + U\varphi_n^+ \to \varphi^+ + \varphi^-$. De plus $A_o^*(\varphi_n^+ + U\varphi_n^+) = \varphi_n^+ - U\varphi_n^+ \to \varphi^+ - \varphi^+ = A_o^*(\varphi^+ + \varphi^-)$.

S_1 étant un sous-espace fermé de $D(A_o^*)$, $\varphi^+ + \varphi^- \in S_1$. D'où $\varphi^+ \in D(U)$.

Q.E.D.

Dans un ouvert de $\mathbb{R}^3$ le système de Maxwell s'écrit :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E}{\partial t} = \text{rot } H \\[2ex] \dfrac{\partial H}{\partial t} = -\text{ rot } E. \end{cases} \tag{91}$$

Identifiant le «champ électrique E» à la 1-forme $u = E_1 dx^1 + E_2 dx^2 + E_3 dx^3$ et le «champ magnétique H» à la 2-forme $v = H_1 dx^2 \wedge dx^3 + H_2 dx^3 \wedge dx^1 + H_3 dx^1 \wedge dx^2$, le système (91) devient :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \delta v \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial t} = -\, du. \end{cases} \tag{92}$$

Eu égard à (92), nous appellerons opérateur de Maxwell M sur Ω, $\overline{\Omega}$ variété riemannienne orientée C^∞ compacte à bord, l'opérateur :

$$M : \overset{p}{\mathcal{D}'}(\Omega) \times \overset{p+1}{\mathcal{D}'}(\Omega) \to \overset{p}{\mathcal{D}'}(\Omega) \times \overset{p+1}{\mathcal{D}'}(\Omega) : (u,v) \mapsto (\delta v, -du).$$

3.2. LEMME. *Soit* A_o *la fermeture de* $M \Big|_{C_{oo}^\infty(\overset{p}{\Lambda} T^*\Omega) \times C_{oo}^\infty(\overset{p+1}{\Lambda} T^*\Omega)}$ *dans* $\mathbb{L}^2(\overset{p}{\Lambda} T^*\Omega) \times \mathbb{L}^2(\overset{p+1}{\Lambda} T^*\Omega)$. *Alors* $A_o \subset M$ *et* $D(A_o) = H_p^o(d;\Omega) \times H_{p+1}^o(\delta;\Omega)$. *De plus* $-A_o^* \subset M$ *et* $D(A_o^*) = H_p(d;\Omega) \times H_{p+1}(\delta;\Omega)$.

Preuve. • La première partie suit de la densité de $C_{oo}^\infty(\overset{p}{\Lambda} T^*\Omega)$ dans $H_p^o(d;\Omega)$ (théorème 1.9) et de la densité de $C_{oo}^\infty(\overset{p+1}{\Lambda} T^*\Omega)$ dans $H_{p+1}^o(\delta;\Omega)$ (théorème 1.12).

• En vue du premier point

$$A_o^* = \left(M \Big|_{C_{oo}^\infty(\overset{p}{\Lambda} T^*\Omega) \times C_{oo}^\infty(\overset{p+1}{\Lambda} T^*\Omega)}\right)^*. \tag{93}$$

Soit $(\varphi,\psi) \in \mathbb{L}^2(\overset{p}{\Lambda} T^*\Omega) \times \mathbb{L}^2(\overset{p+1}{\Lambda} T^*\Omega)$. De la définition de l'adjoint et (93), $(\varphi,\psi) \in D(A_o^*)$ ssi il existe $(f,g) \in \mathbb{L}^2(\overset{p}{\Lambda} T^*\Omega) \times \mathbb{L}^2(\overset{p+1}{\Lambda} T^*\Omega)$ tel que pour tout

$$(u,v) \in C^{\infty}_{oo}(\overset{p}{\Lambda} T^*\Omega) \times C^{\infty}_{oo}(\overset{p+1}{\Lambda} T^*\Omega) : ((f,g),(u,v)) = (\varphi,\delta v) - (\psi,du). \tag{94}$$

(94) est équivalent à :

$$(f,u) = -(\psi,du) \text{ pour tout } u \in C^{\infty}_{oo}(\overset{p}{\Lambda} T^*\Omega) \tag{95}$$

et

$$(g,v) = (\varphi,\delta v) \text{ pour tout } v \in C^{\infty}_{oo}(\overset{p+1}{\Lambda} T^*\Omega). \tag{96}$$

(95) est équivalent à :

$$< f,\xi > = (-1)^p < \psi,\delta\xi > \text{ pour tout } \xi \in \overset{n-p}{\underline{D}}(\Omega) \text{ i.e. } f = -\delta\psi. \tag{97}$$

(96) équivaut à :

$$< g,\eta > = (-1)^{p+1} < \varphi,d\eta > \text{ pour tout } \eta \in \overset{n-p-1}{\underline{D}}(\Omega) \text{ i.e. } g = d\varphi. \tag{98}$$

De (97) et (98) suit l'assertion.

Q.E.D.

De 3.2 suit immédiatement A_o opérateur antisymétrique fermé à domaine dense. 3.1 lui est donc applicable. De plus, on voit immédiatement que dans le cas présent, par 3.2 :

$$K^+ = \{ (u,du) \,;\, u \in H_p(d;\Omega) \text{ et } (I + \delta d)u = 0 \} \tag{99}$$

et

$$K^- = \{ (u,-v) \,;\, (u,v) \in K^+ \}. \tag{100}$$

Raffinant 3.1 dans le cas particulier présent, grâce aux résultats des sections 1 et 2, on obtient :

3.3. THEOREME. *Soit* A_1 *tel que* $A_o \subset A_1 \subset -A_o^*$. Alors A_1 *est générateur d'un s.g. à contraction ssi il existe* $U \in \mathscr{B}(H_p^{-1/2}(d;\Gamma))$ *avec* $|||U||| \leqslant 1$ *tel que*

$$D(A_1) = \{ (u,v) \in H_p(d;\Omega) \times H_{p+1}(\delta;\Omega) \,;\, (1-U)tu - (1+U)Q^{-1} nv = 0 \}$$

($|||U|||$ *désigne la norme de* U *comme opérateur borné sur* $H_p^{-1/2}(d;\Gamma)$ *muni de sa structure hilbertienne naturelle).*

Preuve. • Par 3.1, A_1 est générateur d'un s.g. à contraction ssi il existe $T : K^+ \to K^-$ contraction telle que $D(A_1) = \{ \varphi + \varphi_+ + T\varphi_+ \,;\, \varphi \in D(A_o) \text{ et } \varphi_+ \in K^+ \}$.

• Par (99), (100) et 2.1 (voir aussi l'alinéa suivant 2.5) il y a «bijection» (pas n'importe laquelle !, on va préciser tout de suite) entre les contractions T : $\mathcal{K}^+ \to \mathcal{K}^-$ et les contractions U de $H_p^{-1/2}(d;\Gamma)$ muni de sa structure hilbertienne naturelle ; plus précisément :

a) Soit T : $\mathcal{K}^+ \to \mathcal{K}^-$: $(u^+,du^+) \mapsto (u^-,-du^-)$ une contraction ; alors $U : H_p^{-1/2}(d;\Gamma) \to H_p^{-1/2}(d;\Gamma) : tu^+ \mapsto tu^-$ est une contraction de $H_p^{-1/2}(d;\Gamma)$ muni de sa structure hilbertienne naturelle ;

b) réciproquement, soit U une contraction de $H_p^{-1/2}(d;\Gamma)$. Pour $\varphi \in H_p^{-1/2}(d;\Gamma)$, notons u^+ (resp. u^-) la solution dans $H_p(d;\Omega)$ de $(I + \delta d)u^+ = 0$, $tu^+ = \varphi$ (resp. $(I + \delta d)u^- = 0$, $tu^- = U\varphi$) ; alors $T : \mathcal{K}^+ \to \mathcal{K}^- : (u^+,du^+) \mapsto (u^-,-du^-)$ est une contraction.

• Soit $(u',v') \in D(A_0)$ et $(u^+,v^+) \in \mathcal{K}^+$. Considérons $(u,v) = (u',v') + (u^+,v^+) + (u^-,v^-)$ où l'on a posé $(u^-,v^-) = T(u^+,v^+)$. $tu = (I + U)tu^+$ et $nv = Q(I - U)tu^+$. D'où

$$(1-U)tu - (1+U)Q^{-1}nv = 0. \tag{101}$$

• Réciproquement, soit $(u,v) \in H_p(d;\Omega) \times H_{p+1}(\delta;\Omega)$, satisfaisant à la relation (101). Soit u^+ (resp. u^-) la solution dans $H_p(d;\Omega)$ de $u + \delta du = 0$ telle que $tu^+ = \frac{1}{2}(tu + Q^{-1}\,nv)$

$$\text{(resp. } tu^- = \frac{1}{2}(tu - Q^{-1}\,nv)). \tag{102}$$

De (101) et (102) suit immédiatement

$$Utu^+ = tu^-. \tag{103}$$

D'où posant $v^+ = du^+$ et $v^- = -du^-$, il suit de (103) :

$$(u^-,v^-) = T(u^+,v^+). \tag{104}$$

Posons $(u',v') = (u,v) - (u^+,v^+) - (u^-,v^-)$. De (102) suit

$$tu' = 0 \text{ et } nv' = 0. \tag{105}$$

De (105), (104) et le premier point, suit $(u,v) \in D(A_1)$.

Q.E.D.

Posons $J = (S^{1/2})^-$; par 2.8, J est une transformation unitaire de $H_p^{-1/2}(d;\Gamma)$ sur $\mathrm{IL}^2(\overset{p}{\Lambda}\, T^*\Gamma)$ ($H_p^{-1/2}(d;\Gamma)$ étant muni de sa structure hilbertienne naturelle). En particulier U est une contraction de $H_p^{-1/2}(d;\Gamma)$ (pour sa structure hilbertienne naturelle) ssi $J_0 U_0 J^{-1}$ est une contraction de $\mathrm{IL}^2(\overset{p}{\Lambda}\, T^*\Gamma)$. D'où la variante suivante de 3.3 :

3.4. COROLLAIRE. *Soit* A_1 *tel que* $A_o \subset A_1 \subset A_o^*$. *Alors* A_1 *est générateur d'un s.g. à contraction ssi il existe* U *contraction de* $\mathbb{L}^2(\overset{p}{\Lambda} T^*\Gamma)$ *telle que :*

$$D(A_1) = \left\{ (u,v) \in H_p(d;\Omega) \times H_{p+1}(\delta;\Omega)\ ;\ (1-J^{-1}UJ)tu - (1+J^{-1}UJ)Q^{-1}\, nv = 0 \right\}.$$

Remarquons pour terminer cette section que de 3.1 et de [R–S] p. 140-141 suit :

3.5. COROLLAIRE. *Il existe* A_1 *générateur d'un s.g. à contraction, avec* $A_o \subset A_1 \subset -A_o^*$ *et* A_1 *non antisymétrique (resp. antisymétrique mais non self-adjoint).*

4. - CAS PARTICULIER DU SEMI-ESPACE, ET DE LA BOULE

Nous déterminons dans ces deux cas particuliers, l'expression explicite de l'opérateur Q. En fait (voir l'alinéa précédent 2.6) nous n'avons défini Q que pour $\overline{\Omega}$ variété riemanienne orientée C^∞ compacte à bord, mais comme 2.1 s'étend sans difficulté à $\Omega = \overline{\mathbb{R}^n_-}$, la définition de Q aussi.

4.1. PROPOSITION. *Dans le cas du semi-espace* $\overline{\Omega} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n\ ;\ x_1 \leqslant 0 \right\}$, Q *est l'opérateur* $(I+\Delta)^{-1/2}(I+\delta d) : H_p^{-1/2}(d;\mathbb{R}^{n-1}) \to H_p^{-1/2}(\delta;\mathbb{R}^{n-1})$.

Preuve. Soit $\varphi \in H_p^{-1/2}(d;\mathbb{R}^{n-1})$ et $u \in H_p(d;\mathbb{R}^n_-)$ la solution de $u + \delta du = 0$, $tu = \varphi$. Par 1.4, 1.5 et le quatrième point de la preuve de 1.4, suit pour tout $2 \leqslant j_2 < \ldots < j_{p+1} \leqslant n$:

$$\widehat{(du)_{1j_2\ldots j_{p+1}}} = \frac{\exp\left[x_1\sqrt{1+\xi_2^2+\ldots+\xi_n^2}\right]}{\sqrt{1+\xi_2^2+\ldots+\xi_n^2}}\ \left[((I+\delta d)\varphi)_{j_2\ldots j_{p+1}}\right]^{\wedge}$$

(«$\,\hat{}\,$» désigne la transformée de Fourier partielle «relative aux variables $x_2,\ldots,x_{n-1}$»). D'où $ndu = (I+\Delta)^{-1/2}(I+\delta d)\varphi$.

Q.E.D.

Remarquons que dans le cas général (i.e. $\overline{\Omega}$ variété riemannienne orientée C^∞ compacte à bord ou $\overline{\Omega} = \overline{\mathbb{R}^n_-}$), $(I+\Delta)^{-1/2}(I+\delta d)$ est toujours un topisomorphisme de $H_p^{-1/2}(d;\Gamma)$ sur $H_p^{-1/2}(\delta;\Gamma)$, le topisomorphisme réciproque étant $(I+\Delta)^{-1/2}(I+d\delta)$.

Venons en au cas de la boule. Par 2.8, Q est complètement déterminé par S i.e. sa plus grande restriction qui opère dans $\mathbb{L}^2(\overset{p}{\Lambda} T^*\Gamma)$ (ici $\Gamma = S_n$). Nous allons montrer que les formes propres de S sont exactement celles de l'opérateur de de Rham-Hodge dans $\mathbb{L}^2(\overset{p}{\Lambda} T^* S_n)$. Ceci nous permettra d'écrire en particulier une décomposition spectrale de l'opérateur S. A cette fin, nous utilisons la méthode de séparation des variables sur les formes différentielles introduites dans [P1].

4.2. PROPOSITION. *Soit* $0 \leqslant p \leqslant n-1$ *et* $\varphi \in Co(p;n;k)$, $k \in \mathbb{N}^*$ i.e. *une p-forme propre coexacte de* S_n *de valeur propre* $(k+p)(k+n-p-1)$. *Alors* φ *est une p-forme propre de S de valeur propre*

$$p + k - 1 + \frac{F(\frac{n+2k}{2} + 1 \mid n+2k+1 \mid 2)}{F(\frac{n+2k}{2} \mid n+2k \mid 2)}$$ (*F désigne la fonction hypergéométrique confluente).*

De plus, la solution $u \in C^\infty(\overset{p}{\Lambda} T^* \bar{B}_{n+1})$ *de* $u + \delta du = 0$, $tu = \varphi$ *est donnée par* $u = \frac{h}{h(1)} \Lambda_P \varphi$, *où*

$$P : \mathbb{R}^*_+ \times S_n \to \mathbb{R}^{n+1} : (x,y) \mapsto xy \quad [P1]$$

et

$$h : x \mapsto (2x)^{k+p} e^{-x} F(\frac{n+2k}{2} \mid n+2k \mid 2x). \tag{106}$$

Preuve. • Cherchons $u \in C^\infty(\overset{p}{\Lambda} T^* \bar{B}_{n+1})$ solution de $u + \delta du = 0$, $tu = \varphi$, sous la forme

$$u = \frac{h}{h(1)} \Lambda_P \varphi, \tag{107}$$

h étant une fonction de $C^\infty(\mathbb{R}^*_+;\mathbb{R})$ à déterminer. Notons bien qu'à priori u est seulement définie (et C^∞) dans $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$; il nous faudra ensuite investiguer le comportement de u au voisinage de l'origine.

• Par [P1] (1.5 (i)) et (107) $\delta u = 0$ dans $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. (108)

• Eu égard à (108) l'équation $(I + \delta d)u = 0$ dans $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ est équivalente à $(I + \Delta)u = 0$ dans $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. (109)

• Par [P1] (1.5 (i)) et $\varphi \in Co(p;n;k)$, (109) est équivalent (si $\varphi \neq 0$) à :

$$h'' + \frac{n-2p}{x} h' - [1 + \frac{(k+p)(k+n-p-1)}{x^2}] h = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^*_+. \tag{110}$$

• Un calcul de routine montre que h défini par (106) satisfait à (110).

• Pour montrer que u est une solution de (107), il suffit alors de montrer que $u = \frac{h}{h(1)} \Lambda_P \varphi$ se prolonge en une forme C^∞ sur $\mathbb{R}^{n+1}$.

Ceci suivra de (109) si l'on montre que les composantes de u dans les coordonnées canoniques de $\mathbb{R}^{n+1}$ sont bornées au voisinage de l'origine ce qui est équivalent à $|u|$ borné au voisinage de l'origine. (111)

• Par [P1], $* u = (-1)^p x^{n-2p} h/_{h(1)} dx \Lambda_P * \varphi$.

D'où

$$u \wedge * u = x^{n-2p}(h/_{h(1)})^2 \, dx \wedge_p (\varphi \wedge * \varphi).$$

D'où

$$* (u \wedge * u) = x^{-2p}\left(\frac{h}{h(1)}\right)^2 \wedge_p |\varphi|^2, \text{ i.e. } |u| = x^{-p} \, h/_{h(1)} \wedge_p |\varphi|,$$

d'où (111) par (106).

• De l'expression de l'opérateur n en fonction de t et de [P1] (1.1) suit

$$ndu = \frac{h'(1)}{h(1)} \varphi. \tag{112}$$

De (112) et (106) suit l'assertion.

Q.E.D.

Par dualité de 4.2 suit :

4.3. PROPOSITION. *Soit* $1 \leqslant p \leqslant n$ *et* $\psi \in Ex(p;n;k)$, $k \in \mathbb{N}^*$, i.e. *une* p-*forme propre exacte de* S_n *de valeur propre* $(k+p-1)(k+n-p)$. *Alors* ψ *est une* p-*forme propre de* S *de valeur propre*

$$\lambda_k = \left[n - p + k - 1 + \frac{F(\frac{n+2k}{2} + 1 \mid n+2k+1 \mid 2)}{F(\frac{n+2k}{2} \mid n+2k \mid 2)} \right]^{-1}.$$

De plus, la solution $u \in C^\infty(\overset{p}{\Lambda} T^* \overline{B}_{n+1})$ *de* $u + \delta du = 0$, $tu = \psi$ *est donnée par* $u = -\lambda_k \, \delta(\frac{h}{h(1)} dx \wedge_p \psi)$.

Preuve. • Considérons $\varphi = * \psi \in Co(n-p;n;k)$. Par 4.2, φ est une (n−p)-forme propre de S(n−p) (i.e. S relatif aux formes de degré n−p) de valeur propre $n - p + k - 1 + \dfrac{F(\frac{n+2k}{2} + 1 \mid n+2k+1 \mid 2)}{F(\frac{n+2k}{2} \mid n+2k \mid 2)}$.

Par 2.6

$$S(p)^{-1} = (-1)^{(n+1)p} * S(n-p)*.$$

D'où suit

$$S(p)^{-1}\psi = \left[n - p + k - 1 + \frac{F(\frac{n+2k}{2} + 1 \mid n+2k+1 \mid 2)}{F(\frac{n+2k}{2} \mid n+2k \mid 2)} \right] \psi.$$

D'où la première partie de l'énoncé.

• Soit $v \in C^\infty(\overset{n-p}{\Lambda} T^*\overline{B}_{n+1})$ la solution de $v + \delta dv = 0$, $tv = \varphi$.

Par 4.2,

$$ndv = \left[n - p + k - 1 + \frac{F(\frac{n+2k}{2} + 1 \mid n+2k+1 \mid 2)}{F(\frac{n+2k}{2} \mid n+2k \mid 2)} \right] \varphi .$$

D'où

$$t * dv = (-1)^{p(n+1)} \left[n - p + k - 1 + \frac{F(\frac{n+2k}{2} + 1 \mid n+2k+1 \mid 2)}{F(\frac{n+2k}{2} \mid n+2k \mid 2)} \right] \psi .$$

De plus, il est clair que $(I + \delta d) * dv = 0$.

Posons

$$u = (-1)^{p(n+1)} \left[n - p + k - 1 + \frac{F(\frac{n+2k}{2} + 1 \mid n+2k+1 \mid 2)}{F(\frac{n+2k}{2} \mid n+2k \mid 2)} \right]^{-1} * dv. \tag{113}$$

$$\begin{aligned}(-1)^{p(n+1)} * dv &= (-1)^{p(n+1)} * d \left[\frac{h_{n-p}}{h_{n-p}(1)} \Lambda_p \varphi \right] \\ &= -\delta \left[x^{2p-n} \frac{h_{n-p}}{h_{n-p}(1)} dx \Lambda_p \psi \right] \\ &= -\delta \left[\frac{h_p}{h_p(1)} dx \Lambda_p \psi \right] = -\delta \left[\frac{h}{h(1)} dx \Lambda_p \psi \right] .\end{aligned} \tag{114}$$

(h dépend du paramètre entier p ; lorsqu'il est nécessaire d'expliciter cette dépendance, nous avons noté h_p au lieu de h). De (113) et (114) suit l'assertion.

Q.E.D.

4.4. COROLLAIRE. *Quel que soit* $0 \leqslant p \leqslant n$, *les formes propres de* S *sont exactement celles de l'opérateur de de Rham-Hodge dans* $\mathbb{L}^2(\overset{p}{\Lambda} T^* S_n)$.

Preuve. • Ceci suit de 4.2, 4.3 et des remarques suivantes :

• Soit φ une p-forme propre de S_n de valeur propre $\lambda > 0$, i.e. $\Delta\varphi = \lambda\varphi$. Alors $\varphi = d\delta \frac{\varphi}{\lambda} + \delta d \frac{\varphi}{\lambda}$, avec $\Delta d\delta \frac{\varphi}{\lambda} = \lambda d\delta \frac{\varphi}{\lambda}$ et $\Delta\delta d \frac{\varphi}{\lambda} = \lambda\delta d \frac{\varphi}{\lambda}$, i.e. φ est somme d'une p-forme propre exacte de valeur propre λ et d'une p-forme propre coexacte de valeur propre λ.

• Soit φ une p-forme propre de S_n de valeur propre 0. Alors nécessairement p = 0 ou p = n. Si p = 0, φ = cste. Un calcul de routine montre que φ est une 0 forme propre de S de valeur propre

$$-1 + \frac{F(\frac{n}{2} + 1 \mid n+1 \mid 2)}{F(\frac{n}{2} \mid n \mid 2)} . \tag{115}$$

Si p = n, $\varphi = *$ cste. Par 2.6 (74) et (115) suit φ n-forme propre de S de valeur propre

$$\left[-1+\frac{F(\frac{n}{2}+1\mid n+1\mid 2)}{F(\frac{n}{2}\mid n\mid 2)}\right]^{-1}.$$

Donc toute forme propre du de Rham-Hodge est forme propre de S. (116)

S étant autoadjoint, par une variante du lemme A.II.1 p. 143 de [B-G-M] il suit de (116) que l'on a ainsi obtenu toutes les formes propres de S.

Q.E.D.

REFERENCES

[B-G-M] M. BERGER, P. GAUDUCHON, E. MAZET. *«Le spectre d'une variété Riemanienne»*. Lectures Notes in Math. 194, Springer-Verlag, 1971.

[B-G] M. BERGER, B. GOSTIAUX. *«Géométrie Différentielle»*. Armand Colin, Paris, 1972.

[DEL] A. DELACHET. *«Le Calcul Tensoriel»*. Presses Universitaires de France, Paris, 1974.

[Di] J. DIEUDONNE. *«Eléments d'Analyse»*. Tome 7, Gauthier-Villars, Paris, 1978.

[D-L] G. DUVAUT, J.L. LIONS. *«Les Inéquations en mécanique et en physique»*. Dunod, Paris, 1972.

[D-N] A. DOUGLIS, L. NIRENBERG. *«Interior Estimates for Elliptic Systems of Partial Differential equations»*. Communications on Pure and Appl. Math., vol. VIII, 503-538 1955.

[D-S] G.F.D. DUFF, D.C. SPENCER. *«Harmonic Tensors on Riemannian Manifolds with boundary»*. Annals of Mathematics, vol. 56, no 1, 1952.

[Du] G.F.D. DUFF. *«Hyperbolic Mixed Problems for Harmonic Tensors»*. Can. J. Math., vol. 8, 1956, 161-179.

[Hö] L. HORMANDER. *«Linear Partial Differential Operators»*. Springer-Verlag, Band. 116 1969, third revisited Printing.

[K] T. KATO. *«Perturbation Theory for Linear Operators»*. Springer-Verlag, vol. 132, 1966.

[P1] L. PAQUET. *«Méthode de séparation des variables et calcul du spectre d'opérateurs sur les formes différentielles»*. Bull. Sc. Math., 2ème série, t. 105, 1981, no 1, 85-112.

«Méthode de séparation des variables et calcul du spectre d'opérateurs sur les formes différentielles». C.R. Acad. Sc. Paris, t. 289, Série A, 1979, 107-110.

[P2] L. PAQUET. *«Mixed problems for the Maxwell system»*. C.R. Acad. Sc. Paris, t. 289, série A, 1979, 191-194.

[R] G. de RHAM. *«Variétés différentiables»*. Hermann, Paris, 1973, 3ème édition revue et augmentée.

[R-S] M. REED, B. SIMON. *«Fourier Analysis, Self-Adjointness»*. Academic Press, 1975.

[R-N] F. RIESZ, B. Sz. NAGY. *«Leçons d'Analyse Fonctionnelle»*. Gauthier-Villars, 1972, sixième édition.

[Sch] L. SCHWARTZ. *«Théorie des distributions»*. Hermann, Paris, 1966, nouvelle édition, entièrement corrigée, refondue et augmentée.

[Sp] M. SPIVAK. *«Differential Geometry»*. Volume I, Publish or Perish, Inc., 1970.

[T] R. TEMAM. *«Navier-Stokes Equations»*. North-Holland, 1977.

[Tr 1] F. TREVES. *«Linear Partial Differential Equations with Constant Coefficients»*. Gordon and Breach, 1966.

[Tr 2] F. TREVES. *«Basic Linear Partial Differential Equations»*. Academic Press, 1975.

[Vi] N. Ya VILENKIN et al. *«Functional Analysis»*. Wolters-Noordhoff, The Netherlands, 1972.

[Y] K. YOSIDA. *«Functional Analysis»* Third Edition, Band 123, Springer-Verlag, 1971.

(Manuscrit reçu le 23 mai 1981)